정답과 해설

I 실수와 그 연산

1 제곱근과 실수

STEP 1 개념 + 대표 문제 확인하기 P. 8~10

1 8	**2** $-\frac{7}{3}$	**3** $-a+2b$	**4** 6	**5** $\frac{2}{3}$	**6** 21개
7 ㄴ, ㅁ, ㅂ		**8** ㄴ, ㅁ	**9** ③	**10** 43개	
11 ②, ⑤		**12** $\mathrm{P}(1-\sqrt{5})$, $\mathrm{Q}(1+\sqrt{5})$			
13 ㄷ, ㄹ		**14** ⑤		**15** $b<a<c$	
16 $2-\sqrt{2}$		**17** 14			

1 $(-5)^2=25$의 양의 제곱근은 5이므로 $a=5$
$\sqrt{81}=9$의 음의 제곱근은 -3이므로 $b=-3$
제곱근 36은 $\sqrt{36}=6$이므로 $c=6$
$\therefore a+b+c=5+(-3)+6=8$

2 (주어진 식)$=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}-\sqrt{1.2^2}\div\left(-\sqrt{\frac{6}{25}}\right)^2+\sqrt{(2^3)^2}\times(\sqrt{0.5^2})^2$
$=\frac{2}{3}-1.2\div\frac{6}{25}+2^3\times0.5^2$
$=\frac{2}{3}-1.2\times\frac{25}{6}+8\times0.25$
$=\frac{2}{3}-5+2=-\frac{7}{3}$

3 $ab<0$이므로 a, b의 부호는 서로 다르고, $a<b$이므로 $a<0$, $b>0$이다.
이때 $2a<0$, $-3b<0$이고 $a-b<0$이므로
$\sqrt{4a^2}+\sqrt{(-3b)^2}-\sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{(2a)^2}+\sqrt{(-3b)^2}-\sqrt{(a-b)^2}$
$=-2a+\{-(-3b)\}-\{-(a-b)\}$
$=-2a+3b+a-b$
$=-a+2b$

4 $\sqrt{\frac{600}{n}}=\sqrt{\frac{2^3\times3\times5^2}{n}}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 값은
2×3, $2^3\times3$, $2\times3\times5^2$, $2^3\times3\times5^2$이다. … ㉠
$\sqrt{24n}=\sqrt{2^3\times3\times n}$이 자연수가 되려면
$n=2\times3\times k^2$(k는 자연수)의 꼴이어야 한다. … ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 구하는 가장 작은 자연수 n의 값은
$2\times3=6$

5 $\frac{7}{3}=2.333\cdots<3(=\sqrt{9})<\sqrt{10}$이므로
$\frac{7}{3}-\sqrt{10}<0$, $\sqrt{10}-3>0$
$\therefore$ (주어진 식)$=-\left(\frac{7}{3}-\sqrt{10}\right)-(\sqrt{10}-3)$
$=-\frac{7}{3}+\sqrt{10}-\sqrt{10}+3=\frac{2}{3}$

6 $5<\sqrt{\frac{a}{2}}<6$에서 각 변을 제곱하면
$5^2<\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2<6^2$, $25<\frac{a}{2}<36$ $\quad\therefore 50<a<72$
따라서 주어진 식을 만족하는 자연수 a의 개수는
$72-50-1=21$(개)

참고 부등식을 만족하는 정수 x의 개수 구하기
m, $n(m>n)$이 정수일 때,
(1) $n<x<m$인 정수 x의 개수 ⇨ $(m-n-1)$개
(2) $n\le x\le m$인 정수 x의 개수 ⇨ $(m-n+1)$개
(3) $n<x\le m$(또는 $n\le x<m$)인 정수 x의 개수
⇨ $(m-n)$개

7 ㄱ. $0.\dot{3}\dot{4}=\frac{34}{99}$이므로 유리수
ㄴ. $\sqrt{0.4}=\sqrt{\frac{2}{5}}$이므로 무리수
ㄷ. $3-\sqrt{9}=3-3=0$이므로 유리수
ㄹ. $\sqrt{1.\dot{7}}=\sqrt{\frac{17-1}{9}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}$이므로 유리수
ㅁ. $\pi-1=3.141592\cdots-1=2.141592\cdots$는 순환하지 않는 무한소수이므로 무리수
ㅂ. $0.1121231234\cdots$는 순환하지 않는 무한소수이므로 무리수
따라서 순환하지 않는 무한소수, 즉 무리수는 ㄴ, ㅁ, ㅂ이다.

8 ㄱ. 무한소수 중에서 순환소수는 유리수이다.
ㄴ. 모든 유한소수는 분수 $\frac{a}{b}$(a, b는 정수, $b\neq0$)의 꼴로 나타낼 수 있으므로 유리수이다.
ㄷ. 0은 정수이므로 유리수이다.
ㄹ. (반례) 양의 유리수 4에 대하여 $\sqrt{4}=2$는 유리수이다.
ㅁ. 유리수가 아닌 수는 무리수이므로 유리수이면서 동시에 무리수인 수는 없다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㅁ이다.

9 $a=-\sqrt{3}$일 때,
① $a^2=(-\sqrt{3})^2=3$
② $(-a)^2=\{-(-\sqrt{3})\}^2=(\sqrt{3})^2=3$
③ $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$
④ $-\sqrt{3a^2}=-\sqrt{3\times(-\sqrt{3})^2}=-\sqrt{3^2}=-3$
⑤ $1-a^2=1-(-\sqrt{3})^2=1-3=-2$
따라서 유리수가 아닌 것은 ③이다.

10 $\sqrt{x}$가 무리수가 되려면 x는 제곱인 수가 아니어야 한다.
따라서 50 이하의 자연수 중 제곱인 수는 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49의 7개이므로 x의 개수는 $50-7=43$(개)이다.

11 ① (반례) $a=1$, $b=\sqrt{2}$이면
$1+(\sqrt{2})^2=1+2=3$이므로 유리수이다.
② $a-b=$(유리수)$-$(무리수)$=$(무리수)에서 $\frac{(\text{무리수})}{(0\text{이 아닌 유리수})}$
이므로 무리수이다.

③ (반례) $a=1,\ b=\sqrt{2}$이면

$1-(\sqrt{2})^2=1-2=-1$이므로 유리수이다.

④ (반례) $a=0,\ b=\sqrt{2}$이면

$0\times\sqrt{2}=0$이므로 유리수이다.

⑤ $\dfrac{(0\text{이 아닌 유리수})}{(\text{무리수})}$이므로 무리수이다.

따라서 항상 무리수인 것은 ②, ⑤이다.

개념 더하기 다시 보기

다음 식의 결과는 항상 무리수이다.
① (유리수) ± (무리수)
② (0이 아닌 유리수) × (무리수)
③ (0이 아닌 유리수) ÷ (무리수)
④ (무리수) ÷ (0이 아닌 유리수)

12 $\square\mathrm{ABCD}=3^2-4\times\left(\dfrac{1}{2}\times2\times1\right)=5$이므로

(정사각형 ABCD의 한 변의 길이)$=\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{5}$이므로 점 P에 대응하는 수는 $1-\sqrt{5}$

$\therefore\ \mathrm{P}(1-\sqrt{5})$

$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5}$이므로 점 Q에 대응하는 수는 $1+\sqrt{5}$

$\therefore\ \mathrm{Q}(1+\sqrt{5})$

13 ㄱ. 2에 가장 가까운 무리수는 알 수 없다.

ㄴ. 3과 5 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.

14 ① $(2-\sqrt{6})-(-1)=3-\sqrt{6}=\sqrt{9}-\sqrt{6}>0$

$\therefore\ 2-\sqrt{6}>-1$

② $(4-\sqrt{17})-(4-\sqrt{15})=-\sqrt{17}+\sqrt{15}<0$

$\therefore\ 4-\sqrt{17}<4-\sqrt{15}$

③ $(\sqrt{7}-2)-(\sqrt{11}-2)=\sqrt{7}-\sqrt{11}<0$

$\therefore\ \sqrt{7}-2<\sqrt{11}-2$

④ $(\sqrt{10}-\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})=\sqrt{10}-3=\sqrt{10}-\sqrt{9}>0$

$\therefore\ \sqrt{10}-\sqrt{5}>3-\sqrt{5}$

⑤ $(\sqrt{10}-3)-(\sqrt{10}-\sqrt{13})=-3+\sqrt{13}=-\sqrt{9}+\sqrt{13}>0$

$\therefore\ \sqrt{10}-3>\sqrt{10}-\sqrt{13}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

다른 풀이

④ $\sqrt{10}>3$이므로 양변에서 $\sqrt{5}$를 빼면

$\sqrt{10}-\sqrt{5}>3-\sqrt{5}$

⑤ $3<\sqrt{13}$에서 $-3>-\sqrt{13}$이므로 양변에 $\sqrt{10}$을 더하면

$\sqrt{10}-3>\sqrt{10}-\sqrt{13}$

15 $a-c=(8-\sqrt{6})-(8-\sqrt{5})=-\sqrt{6}+\sqrt{5}<0$

$\therefore\ a<c$ … ㉠

$a-b=(8-\sqrt{6})-(2+\sqrt{7})=6-\sqrt{6}-\sqrt{7}$

이때 $2<\sqrt{6}<3,\ 2<\sqrt{7}<3$, 즉 $4<\sqrt{6}+\sqrt{7}<6$이므로

$a-b=6-(\sqrt{6}+\sqrt{7})>0$

$\therefore\ a>b$ … ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $b<a<c$이다.

16 $4<\sqrt{21}<5$이므로 $-5<-\sqrt{21}<-4,\ 2<7-\sqrt{21}<3$

따라서 $7-\sqrt{21}$의 정수 부분은 $a=2$이고

$1<\sqrt{2}<2$이므로 $-2<-\sqrt{2}<-1,\ 3<5-\sqrt{2}<4$

따라서 $5-\sqrt{2}$의 소수 부분은 $(5-\sqrt{2})-3=2-\sqrt{2}$이다.

17 $3<\sqrt{15}<4$이므로

$-4<-\sqrt{15}<-3,\ -2<2-\sqrt{15}<-1$ … ㉠

$2<\sqrt{7}<3$이므로 $5<\sqrt{7}+3<6$ … ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 두 수 사이에 있는 정수는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$이므로 구하는 합은 14이다.

STEP 2 내신 5% 따라잡기 P. 11~15

1 ③ **2** $a=2$ 또는 $a=-\dfrac{4}{3}$ **3** 29 **4** 2배
5 $2x-y$ **6** ③ **7** 0 **8** 7
9 $a=96,\ b=120$ **10** 19 **11** 7 **12** 168
13 $a^2,\ a,\ \sqrt{a},\ \sqrt{\dfrac{1}{a}},\ \dfrac{1}{a}$ **14** 625 **15** 14, 15, 16
16 $\dfrac{7}{15},\ \dfrac{8}{15}$ **17** 5 **18** 20 **19** 4 **20** 367개
21 $\dfrac{7}{9}$ **22** $6+\sqrt{5}$ **23** $3+24\pi$ **24** 13 **25** ④
26 9 **27** $\sqrt{3}-1$ **28** $\sqrt{10}-3$ **29** $\mathrm{C}(\sqrt{5},\ 0)$
30 27 **31** 지은

1 ㄱ. $x^2=a$일 때, x를 a의 제곱근이라고 한다.

ㄴ. 3의 두 제곱근은 $\sqrt{3}$과 $-\sqrt{3}$이고, 그 절댓값은 $\sqrt{3}$으로 같다.

ㄷ. $\sqrt{0.0625}=\sqrt{0.25^2}=0.25$의 양의 제곱근은

$\sqrt{0.25}=\sqrt{0.5^2}=0.5$이다.

ㄹ. -8은 64의 제곱근 중 음의 제곱근이다.

ㅁ. (제곱근 $(-1.\dot{7})^2$)$=\sqrt{(-1.\dot{7})^2}=1.\dot{7}=\dfrac{16}{9}$이므로

$\dfrac{16}{9}$의 제곱근은 $\pm\sqrt{\dfrac{16}{9}}=\pm\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}\right)^2}=\pm\dfrac{4}{3}$이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ의 3개이다.

2 $\sqrt{(3a-1)^2}=5$에서

(ⅰ) $3a-1\ge0$, 즉 $a\ge\dfrac{1}{3}$일 때,

$3a-1=5,\ 3a=6\qquad\therefore\ a=2$

(ⅱ) $3a-1<0$, 즉 $a<\dfrac{1}{3}$일 때,

$-(3a-1)=5,\ -3a=4\qquad\therefore\ a=-\dfrac{4}{3}$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 $a=2$ 또는 $a=-\dfrac{4}{3}$이다.

3 $1.0\dot{5}\times\dfrac{a}{b}=(2.\dot{1})^2$에서 $\dfrac{95}{90}\times\dfrac{a}{b}=\left(\dfrac{19}{9}\right)^2$

$\therefore\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{19^2}{9^2}\times\dfrac{18}{19}=\dfrac{38}{9}$

따라서 $a=38,\ b=9$이므로

$a-b=38-9=29$

4 원 O′의 반지름의 길이를 x라 하면
(원 O의 넓이)$=\pi r^2$, (원 O′의 넓이)$=\pi x^2$이므로
$\pi x^2=4\pi r^2$, $x^2=4r^2$ $\quad\therefore x=2r\,(\because r>0,\ x>0)$
따라서 원 O′의 반지름의 길이는 원 O의 반지름의 길이의 2배이다.

5 $xy<0$이므로 x, y의 부호는 서로 다르고
$x+y<0$, $|x|>|y|$이므로 $x<0$, $y>0$
$$\begin{aligned}\therefore \text{(주어진 식)}&=\sqrt{(3x)^2}-\sqrt{(2y)^2}+\sqrt{(-y)^2}-|5x|\\&=-3x-2y+\{-(-y)\}-(-5x)\\&=-3x-2y+y+5x\\&=2x-y\end{aligned}$$

6 (가) $b<c<a$에서 $c-b>0$, $b-a<0$
(나) $c(b-a)<0$에서 $b-a<0$이므로 $c>0$
이때 (가)에서 $c<a$이므로 $a>0$
(다) $ac+b=0$에서 $b=-ac<0$ ($\because a>0,\ c>0$)
$$\begin{aligned}\therefore \text{(주어진 식)}&=\sqrt{(c-b)^2}-\sqrt{(2b)^2}-\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{(b-a)^2}\\&=c-b-(-2b)-\{-(-a)\}+\{-(b-a)\}\\&=c-b+2b-a-b+a=c\end{aligned}$$

7 $-1<x<0$에서 $\frac{1}{x}<-1$이므로 $\frac{1}{x}<-1<x<0$
따라서 $x+\frac{1}{x}<0$, $x-\frac{1}{x}>0$이므로
$$\begin{aligned}\text{(주어진 식)}&=\sqrt{(2x)^2}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\\&=-2x-\left\{-\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}+\left(x-\frac{1}{x}\right)\\&=-2x+x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}=0\end{aligned}$$

8 $1\times2\times3\times\cdots\times8\times9\times10$
$=1\times2\times3\times2^2\times5\times(2\times3)\times7\times2^3\times3^2\times(2\times5)$
$=2^8\times3^4\times5^2\times7=(2^4\times3^2\times5)^2\times7$
따라서 $\sqrt{\frac{(2^4\times3^2\times5)^2\times7}{n}}$이 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 n의 값은 7이다.

9 $a:b=4:5$이므로 $a=4n$, $b=5n$ (n은 자연수)이라 하면
$10\le a<100$이므로 $10\le 4n<100$
$\therefore 2.5\le n<25$ $\quad\cdots$ ㉠
$100\le b<1000$이므로 $100\le 5n<1000$
$\therefore 20\le n<200$ $\quad\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $20\le n<25$
따라서 $\sqrt{2b-a}=\sqrt{10n-4n}=\sqrt{6n}=\sqrt{2\times3\times n}$이 자연수가 되려면 $n=2\times3\times k^2$ (k는 자연수)의 꼴이어야 하고,
$20\le n<25$이므로 $n=2\times3\times2^2=24$
$\therefore a=4n=4\times24=96$, $b=5n=5\times24=120$

10 $\sqrt{200+a}-\sqrt{150-b}$의 값이 최소의 정수가 되려면 $\sqrt{200+a}$는 가장 작은 정수이고, $\sqrt{150-b}$는 가장 큰 정수이어야 한다.
이때 a는 자연수이므로 $\sqrt{200+a}$가 가장 작은 정수가 되려면 $200+a$의 값이 200보다 큰 제곱인 수 중에서 가장 작은 수이어야 한다.
즉, $200+a=225$ $\quad\therefore a=25$
또 b는 자연수이므로 $\sqrt{150-b}$가 가장 큰 정수가 되려면 $150-b$의 값이 150보다 작은 제곱인 수 중에서 가장 큰 수이어야 한다.
즉, $150-b=144$ $\quad\therefore b=6$
$\therefore a-b=25-6=19$

11 p는 소수이므로 $\sqrt{pa}$가 양의 정수가 되려면
$a=p\times k^2$ (k는 자연수) 꼴이어야 한다.
(i) $p=2$일 때, $0<2k^2<200$에서 $0<k^2<100$
$\therefore k^2=1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots,\ 9^2$
(ii) $p=3$일 때, $0<3k^2<200$에서 $0<k^2<\frac{200}{3}\,(=66.6\cdots)$
$\therefore k^2=1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots,\ 8^2$
(iii) $p=5$일 때, $0<5k^2<200$에서 $0<k^2<40$
$\therefore k^2=1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots,\ 6^2$
(iv) $p=7$일 때, $0<7k^2<200$에서 $0<k^2<\frac{200}{7}\,(=28.5\cdots)$
$\therefore k^2=1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2$
따라서 $p=7$일 때, a의 값은 7×1^2, 7×2^2, 7×3^2, 7×4^2, 7×5^2으로 5개이다.

12 연속하는 세 짝수 a, b, c를
$a=2m-2$, $b=2m$, $c=2m+2$ (m은 1보다 큰 자연수)라 하면
$a+b+c=(2m-2)+2m+(2m+2)=6m<400$ $\quad\cdots$ ㉠
$\sqrt{a+b+c}=\sqrt{6m}$이 자연수가 되어야 하므로
$m=6k^2$ (k는 자연수)의 꼴이어야 한다.
이때 ㉠에서 $6m=6\times6k^2=36k^2<400$
$\therefore k^2<\frac{100}{9}=11.1\cdots$
즉, k^2이 될 수 있는 수는 1, 4, 9이고, $m=6k^2$이므로 m의 값은
$6\times1=6$, $6\times4=24$, $6\times9=54$ $\quad\therefore m=6,\ 24,\ 54$
이때 $b=2m$이므로 $b=12,\ 48,\ 108$
따라서 b의 값의 합은 $12+48+108=168$이다.

13 $0<a<1$이므로 $a=\frac{1}{9}$이라 하면
$\sqrt{a}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{a}=9$, $\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{9}=3$, $a^2=\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{81}$이므로
$a^2<a<\sqrt{a}<\sqrt{\frac{1}{a}}<\frac{1}{a}$
따라서 작은 것부터 차례로 나열하면
a^2, a, $\sqrt{a}$, $\sqrt{\frac{1}{a}}$, $\frac{1}{a}$

14 $\sqrt{25^2}<\sqrt{629}<\sqrt{26^2}$이므로 $25<x<26$
$\therefore$ (주어진 식)
$$\begin{aligned}&=(x-1)+(x-2)+(x-3)+\cdots+(x-25)\\&\qquad-(x-26)-(x-27)-(x-28)-\cdots-(x-50)\\&=-1-2-3-\cdots-25+26+27+28+\cdots+50\end{aligned}$$

$=(-1+26)+(-2+27)+\cdots+(-25+50)$
$=\underbrace{25+25+\cdots+25}_{25\text{개}}=25\times25=625$

15 x가 자연수이므로 주어진 식에서
$\sqrt{(x-1)^2}<\sqrt{230}<\sqrt{(x+2)^2}$, $x-1<\sqrt{230}<x+2$
이때 $\sqrt{15^2}<\sqrt{230}<\sqrt{16^2}$이므로 $15<\sqrt{230}<16$
즉, $x-1\le15$에서 $x\le16$이고 $x+2\ge16$에서 $x\ge14$
따라서 $14\le x\le16$이므로 주어진 식을 만족하는 자연수 x의 값은 14, 15, 16이다.

16 $\frac{\sqrt{5}}{5}$와 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 사이에 있는 수 중 분모가 15인 기약분수를
$\frac{x}{15}$ (x는 자연수)라 하면
$\frac{\sqrt{5}}{5}<\frac{x}{15}<\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2<\left(\frac{x}{15}\right)^2<\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$
$\frac{1}{5}<\frac{x^2}{225}<\frac{1}{3}$, $45<x^2<75$
따라서 이 식을 만족하는 자연수 x는 7, 8이므로 구하는 기약분수는 $\frac{7}{15}$, $\frac{8}{15}$이다.

17 $\sqrt{a}-3<m$에서 $\sqrt{a}<m+3$이고 $m<\sqrt{a}-2$에서 $m+2<\sqrt{a}$
$\therefore\ m+2<\sqrt{a}<m+3$
이때 각 변을 제곱하면 $(m+2)^2<a<(m+3)^2$
이 식을 만족하는 자연수 a가 14개이므로
$(m+3)^2-(m+2)^2-1=14$
$(m^2+6m+9)-(m^2+4m+4)=15$
$2m=10$ $\therefore\ m=5$

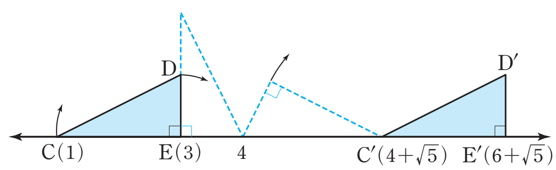
18 $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{25}=5$, $\cdots$이고
$f(x)$는 $\sqrt{x}$ 이하의 자연수의 개수이므로
$f(1)=f(2)=f(3)=1$,
$f(4)=f(5)=\cdots=f(8)=2$,
$f(9)=f(10)=\cdots=f(15)=3$,
$f(16)=f(17)=\cdots=f(24)=4$
이때 $f(1)+f(2)+\cdots+f(15)=1\times3+2\times5+3\times7=34$이고
$x=16, 17, \cdots, 24$일 때, $f(x)=4$이므로
$f(1)+f(2)+\cdots+f(15)+f(16)+\cdots+f(20)$
$=34+4\times5=54$
→ $54-34=20$이므로 $f(x)=4$인 $f(x)$가 5개 더 필요하다.
따라서 주어진 식이 성립하도록 하는 자연수 n의 값은 20이다.

19 $5.\dot{a}=\frac{(50+a)-5}{9}=\frac{45+a}{9}$
이때 $1\le a\le9$이므로 $46\le45+a\le54$이고, $\sqrt{5.\dot{a}}=\sqrt{\frac{45+a}{9}}$가 유리수가 되려면 $45+a$가 제곱인 수이어야 하므로
$45+a=49$ $\therefore\ a=4$

20 (i) $\sqrt{3n}$이 유리수인 경우는 $n=3k^2$(k는 자연수)일 때이므로
$3k^2\le400$, 즉 $k^2\le\frac{400}{3}=133.3\cdots$
이때 k가 될 수 있는 수는 1, 2, 3, $\cdots$, 11이므로
$n=3\times1^2$, 3×2^2, 3×3^2, $\cdots$, 3×11^2의 11개이다.
(ii) $\sqrt{5n}$이 유리수인 경우는 $n=5p^2$(p는 자연수)일 때이므로
$5p^2\le400$, 즉 $p^2\le80$
이때 p가 될 수 있는 수는 1, 2, 3, $\cdots$, 8이므로
$n=5\times1^2$, 5×2^2, 5×3^2, $\cdots$, 5×8^2의 8개이다.
(iii) $\sqrt{18n}=\sqrt{2\times3^2\times n}$이 유리수인 경우는 $n=2q^2$(q는 자연수) 일 때이므로
$2q^2\le400$, 즉 $q^2\le200$
이때 q가 될 수 있는 수는 1, 2, 3, $\cdots$, 14이므로
$n=2\times1^2$, 2×2^2, 2×3^2, $\cdots$, 2×14^2의 14개이다.
따라서 (i)~(iii)에서 400 이하의 자연수 n에 대하여
$\sqrt{3n}$, $\sqrt{5n}$, $\sqrt{18n}$이 모두 무리수가 되도록 하는 자연수 n의 개수는
$400-(11+8+14)=367$(개)

21 모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)
(i) $\sqrt{a}$가 무리수이고, $\sqrt{b}$가 유리수인 경우
$a=2, 3, 5, 6$이고 $b=1, 4$이므로 $4\times2=8$(가지)
(ii) $\sqrt{a}$가 유리수이고, $\sqrt{b}$가 무리수인 경우
$a=1, 4$이고 $b=2, 3, 5, 6$이므로 $2\times4=8$(가지)
(iii) $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$가 모두 무리수인 경우
$a=2, 3, 5, 6$이고 $b=2, 3, 5, 6$이므로 $4\times4=16$(가지)
그런데 $a=b$이면 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$으로 유리수이므로 $a=b$인 4가지 경우를 제외하면 $16-4=12$(가지)
따라서 (i)~(iii)에서 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$가 무리수인 경우의 수는
$8+8+12=28$(가지)이므로 구하는 확률은 $\frac{28}{36}=\frac{7}{9}$이다.

22 $\square\mathrm{ABCD}=3^2-4\times\left(\frac{1}{2}\times2\times1\right)=5$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{5}$
이때 점 C와 점 E는 다음 그림과 같이 이동한다.

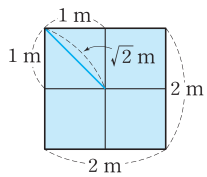


따라서 점 C′에 대응하는 수는 $4+\sqrt{5}$이고, $\overline{\mathrm{C'E'}}=\overline{\mathrm{CE}}=2$이므로 점 E′에 대응하는 수는 $6+\sqrt{5}$이다.

23 원의 반지름의 길이를 r라 하면
$\pi r^2=16\pi$, $r^2=16$ $\therefore\ r=4\ (\because\ r>0)$
$\therefore$ (원의 둘레의 길이)$=2\pi\times4=8\pi$
따라서 점 A에 대응하는 수가 3이므로 원을 세 바퀴 굴렸을 때, 점 P에 대응하는 수는 $3+3\times8\pi=3+24\pi$이다.

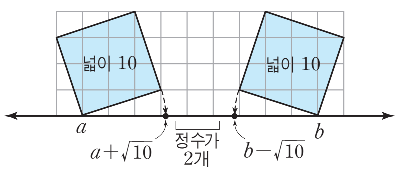
24 자연수 a에 대하여 $n<\sqrt{a}<n+2$라 하자.
각 변을 제곱하면 $n^2<a<(n+2)^2$이므로
이를 만족하는 자연수 a의 개수는
$(n+2)^2-n^2-1=n^2+4n+4-n^2-1=4n+3$
따라서 $4n+3=55$이므로 $n=13$이다.

25 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 $2\,\text{m}$인 정사각형 모양의 화단을 한 변의 길이가 $1\,\text{m}$인 정사각형 4개로 4등분하자.



이때 등분된 정사각형의 개수보다 심으려고 하는 꽃의 개수가 1개 더 많으므로 정사각형의 꼭짓점에 4개의 꽃을 심고 한가운데에 1개의 꽃을 심거나 어느 정사각형에는 적어도 2개 이상의 꽃을 심어야 한다.
따라서 한 변의 길이가 $1\,\text{m}$인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}\,\text{m}$이므로 이 화단에 심은 5개의 꽃 중 두 꽃 사이의 거리가 $\sqrt{2}\,\text{m}$ 이하인 것이 반드시 있다.

26 두 정수 a, b에 대하여 $a+\sqrt{10}$과 $b-\sqrt{10}$을 넓이가 10인 정사각형을 이용하여 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

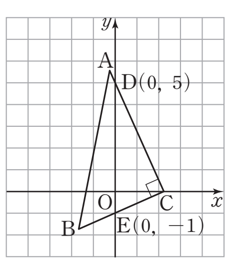


위의 그림에서 a와 $a+\sqrt{10}$ 사이에 있는 정수는 3개,
$a+\sqrt{10}$과 $b-\sqrt{10}$ 사이에 있는 정수는 2개,
$b-\sqrt{10}$과 b 사이에 있는 정수는 3개이므로
두 정수 a, b 사이에 있는 정수는 모두 $3+2+3=8$(개)이다.
따라서 $b=a+9$이므로 $b-a=9$이다.

27 $\dfrac{x+y}{x-2y}=2$에서 $x+y=2(x-2y)$
$x+y=2x-4y$ $\quad\therefore x=5y$
$x=5y$를 주어진 식 $\sqrt{\dfrac{5x+2y}{2x-y}}$에 대입하면
$$\sqrt{\frac{5x+2y}{2x-y}}=\sqrt{\frac{5\times5y+2y}{2\times5y-y}}=\sqrt{\frac{27y}{9y}}=\sqrt{3}$$
따라서 $1<\sqrt{3}<2$이므로 $\sqrt{\dfrac{5x+2y}{2x-y}}$의 소수 부분은 $\sqrt{3}-1$이다.

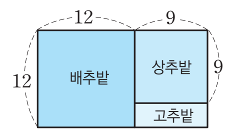
28 $4<\sqrt{17}<5$이므로 $1<\sqrt{17}-3<2$
$\therefore [\sqrt{17}-3]=1$
$3<\sqrt{10}<4$이므로 $4<\sqrt{10}+1<5$
$\sqrt{10}+1$의 정수 부분이 4이므로
$\langle\sqrt{10}+1\rangle=(\sqrt{10}+1)-4=\sqrt{10}-3$
$\therefore$ (주어진 식)$=\langle1+\sqrt{10}-3\rangle=\langle\sqrt{10}-2\rangle$
따라서 $1<\sqrt{10}-2<2$이므로
$\langle\sqrt{10}-2\rangle=(\sqrt{10}-2)-1=\sqrt{10}-3$

29 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$가 y축과 만나는 점을 D, $\overline{BC}$가 y축과 만나는 점을 E라고 하면 $\overline{OD}=5$, $\overline{OE}=1$이다.

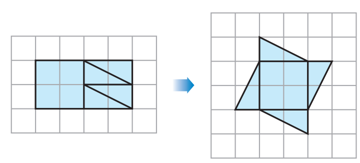


이때 △DEC와 △DCO에서
$\angle DCE=\angle DOC=90^\circ$, $\angle ODC$는 공통이므로
△DEC∽△DCO (AA 닮음)
$\therefore \angle DEC=\angle DCO$
또 △DOC와 △COE에서
$\angle DOC=\angle COE=90^\circ$, $\angle OCD=\angle OEC$이므로
△DOC∽△COE (AA 닮음)
즉, $\overline{OC}:\overline{OE}=\overline{DO}:\overline{CO}$이므로
$\overline{CO}^2=\overline{DO}\times\overline{EO}=5$ $\qquad\therefore \overline{CO}=\sqrt{5}$ ($\because \overline{CO}>0$)
따라서 점 C의 좌표는 $C(\sqrt{5},\ 0)$이다.

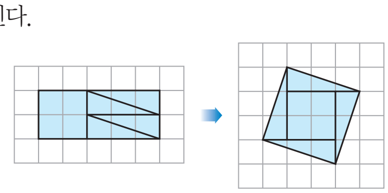
30 배추밭의 한 변의 길이는 $\sqrt{24n}$이고 $\sqrt{24n}=\sqrt{2^3\times3\times n}$이 자연수이므로 $n=2\times3\times k^2=6k^2$ (k는 자연수)
$\therefore n=6,\ 24,\ 54,\ 96,\ \cdots$ $\qquad\cdots$ ㉠
또 상추밭의 한 변의 길이는 $\sqrt{87-n}$이고 $\sqrt{87-n}$이 자연수이므로 $87-n$은 제곱인 수이다.
이때 $0<87-n<87$이므로
$87-n=1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81$
$\therefore n=86,\ 83,\ 78,\ 71,\ 62,\ 51,\ 38,\ 23,\ 6$ $\qquad\cdots$ ㉡
즉, ㉠, ㉡에서 $n=6$
따라서
(배추밭의 한 변의 길이)$=\sqrt{2^3\times3\times6}=\sqrt{2^4\times3^2}=12$,
(상추밭의 한 변의 길이)$=\sqrt{87-n}=\sqrt{87-6}$
$=\sqrt{81}=9$
이므로 오른쪽 그림에서
(고추밭의 넓이)$=9\times(12-9)$
$=27$



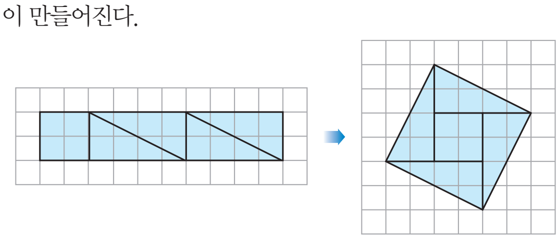
31 지은이의 방법으로 가로와 세로의 길이가 각각 4와 2인 직사각형을 넓이가 4인 정사각형 1개와 넓이가 1이고 합동인 직각삼각형 4개로 나누면 다음 그림과 같이 정사각형이 만들어지지 않는다.



세호의 방법으로 가로와 세로의 길이가 각각 5와 2인 직사각형을 넓이가 4인 정사각형 1개와 넓이가 1.5이고 합동인 직각삼각형 4개로 나누면 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{10}$인 정사각형이 만들어진다.



준식이의 방법으로 가로와 세로의 길이가 각각 10과 2인 직사각형을 넓이가 4인 정사각형 1개와 넓이가 4이고 합동인 직각삼각형 4개로 나누면 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{20}$인 정사각형이 만들어진다.



따라서 정사각형이 만들어지지 않는 학생은 지은이다.

STEP 3 내신 1% 뛰어넘기 P. 16~17

01 -1, 7	02 ⑤	03 $x=7$ 또는 $x=12103$		
04 ③	05 76	06 19개	07 $\sqrt{82}-18$	08 6

01 길잡이 a, b, c의 부호에 따라 식의 값을 구해 본다.

세 실수 a, b, c의 부호를 각각 따져 보면

(i) a, b, c가 모두 음수일 때,

(주어진 식)$=(-1)+(-1)+(-1)+1+1+1+(-1)$
$=-1$

(ii) a, b, c 중 2개가 음수, 1개가 양수일 때,

c만 양수라 하면

(주어진 식)$=(-1)+(-1)+1+1+(-1)+(-1)+1$
$=-1$

(iii) a, b, c 중 1개가 음수, 2개가 양수일 때,

a만 음수라 하면

(주어진 식)$=(-1)+1+1+(-1)+1+(-1)+(-1)$
$=-1$

(iv) a, b, c 모두 양수일 때,

(주어진 식)$=1+1+1+1+1+1+1=7$

따라서 주어진 식의 값이 될 수 있는 수는 -1, 7이다.

02 길잡이 근호 안의 수의 규칙을 찾는다.

$\sqrt{\underbrace{1+3}_{2\text{개}}}=\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$

$\sqrt{\underbrace{1+3+5}_{3\text{개}}}=\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$

$\sqrt{\underbrace{1+3+5+7}_{4\text{개}}}=\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$

$\sqrt{\underbrace{1+3+5+7+9}_{5\text{개}}}=\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$

⋮

$\sqrt{\underbrace{1+3+5+7+9+\cdots+51+53}_{27\text{개}}}=\sqrt{729}=\sqrt{27^2}=27$

03 길잡이 근호를 사용하여 나타낸 두 식을 각각 한 문자로 놓고, 주어진 조건을 이용하여 x의 값을 구한다.

x는 3보다 큰 자연수이므로

$\sqrt{x+218}>0$, $\sqrt{x-3}>0$

$\sqrt{x+218}+\sqrt{x-3}$의 값이 자연수가 되려면 $\sqrt{x+218}$, $\sqrt{x-3}$이 모두 자연수이어야 한다.

$\sqrt{x+218}=A$, $\sqrt{x-3}=B$라 하면

$x+218=A^2$, $x-3=B^2$이므로

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)=221$

이때 $221=221\times1=17\times13$이므로

$A+B=221$, $A-B=1$ 또는 $A+B=17$, $A-B=13$

즉, (A, B)는 $(111, 110)$ 또는 $(15, 2)$

따라서 $\sqrt{x+218}=111$ 또는 $\sqrt{x+218}=15$에서

$x=12103$ 또는 $x=7$

04 길잡이 $\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases} A\ (A\ge0) \\ -A\ (A<0)\end{cases}$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$1<a<b$에서 $a-1>0$, $b-1>0$, $a-b<0$이므로

$\dfrac{b}{b-1}-\dfrac{a}{a-1}=\dfrac{b(a-1)-a(b-1)}{(b-1)(a-1)}$

$=\dfrac{a-b}{(b-1)(a-1)}<0$

또 $\dfrac{1}{1-a}=-\dfrac{1}{a-1}<0$, $\dfrac{1}{b-1}>0$이므로

(주어진 식)$=-\left(\dfrac{b}{b-1}-\dfrac{a}{a-1}\right)-\left(-\dfrac{1}{1-a}\right)+\dfrac{1}{b-1}$

$=\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{b}{b-1}+\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{b-1}$

$=\left(\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{1}{a-1}\right)-\left(\dfrac{b}{b-1}-\dfrac{1}{b-1}\right)$

$=\dfrac{a-1}{a-1}-\dfrac{b-1}{b-1}$

$=1-1=0$

05 길잡이 $\sqrt{\dfrac{y}{x}}$를 주어진 조건에 따라 부등식으로 나타내고, $x-y$의 부호를 알아본다.

$\sqrt{\dfrac{y}{x}}$를 소수로 나타내었을 때, 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 값이 5이므로

$4.5\le\sqrt{\dfrac{y}{x}}<5.5$, $\dfrac{9}{2}\le\sqrt{\dfrac{y}{x}}<\dfrac{11}{2}$

각 변을 제곱하면

$\left(\dfrac{9}{2}\right)^2\le\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)^2<\left(\dfrac{11}{2}\right)^2$

$\therefore \dfrac{81}{4}\le\dfrac{y}{x}<\dfrac{121}{4}$ $\cdots$ ㉠

이때 $\dfrac{y}{x}>1$이므로 $y>x$에서 $x-y<0$

$\sqrt{(x-y)^2}=70$에서

$-(x-y)=70$, $-x+y=70$

$\therefore y=x+70$

$y=x+70$을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{81}{4}\le\dfrac{x+70}{x}<\dfrac{121}{4}$, $\dfrac{81}{4}\le1+\dfrac{70}{x}<\dfrac{121}{4}$

$\dfrac{4}{117}<\dfrac{x}{70}\le\dfrac{4}{77}$, $\dfrac{280}{117}<x\le\dfrac{280}{77}$

$\therefore 2.39\cdots<x\le3.63\cdots$

따라서 x는 자연수이므로 $x=3$, $y=73$

$\therefore x+y=76$

06 길잡이 주어진 부등식의 양변을 제곱한 다음 곱셈 공식을 이용하여 식을 간단히 한다.

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}>\dfrac{1}{9}$에서 $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}+\dfrac{1}{9}$

양변을 제곱하면 $(\sqrt{n+1})^2>\left(\sqrt{n}+\dfrac{1}{9}\right)^2$

$n+1>n+\dfrac{2}{9}\times\sqrt{n}+\dfrac{1}{81}$ $(\because n+1>0)$

$\dfrac{2}{9}\times\sqrt{n}<\dfrac{80}{81}$, $\sqrt{n}<\dfrac{40}{9}$

양변을 제곱하면 $n<\frac{1600}{81}=19.7\cdots$

따라서 주어진 식을 만족하는 자연수 n은 1, 2, 3, $\cdots$, 19의 19개이다.

07 길잡이 $\sqrt{7a}+\sqrt{b}=11$을 만족하는 a, b의 값을 먼저 찾는다.

$\sqrt{7a}+\sqrt{b}=11$에서 $\sqrt{7a}$와 $\sqrt{b}$는 모두 자연수이어야 하므로 $7a$와 b는 모두 제곱인 수이고, $7a$는 $11^2=121$보다 작은 제곱인 수이어야 하므로 $a=7$

$\sqrt{7\times7}+\sqrt{b}=11$에서 $\sqrt{b}=11-7=4$ $\therefore b=16$

따라서 $a=7$, $b=16$이므로

$\sqrt{2a^2-b}=\sqrt{2\times7^2-16}=\sqrt{82}$

이때 $\sqrt{81}<\sqrt{82}<\sqrt{100}$, $9<\sqrt{82}<10$이므로

$x=9$, $y=\sqrt{82}-9$

$\therefore y-x=(\sqrt{82}-9)-9=\sqrt{82}-18$

08 길잡이 n이 자연수일 때, $\sqrt{n^2}<\sqrt{n^2+1}<\sqrt{(n+1)^2}$임을 이용한다.

$2015^2<2015^2+1<(2015+1)^2$에서

$2015<\sqrt{2015^2+1}<2016$

즉, $\sqrt{2015^2+1}$의 정수 부분은 2015이므로

$A_{2015}=\sqrt{2015^2+1}-2015$

$\therefore (A_{2015}+2015)^2=(\sqrt{2015^2+1}-2015+2015)^2$

$=(\sqrt{2015^2+1})^2=2015^2+1$

따라서 2015^2의 일의 자리의 숫자는 5이므로

2015^2+1의 일의 자리의 숫자는 6이다.

2 근호를 포함한 식의 계산

STEP 1 개념 + 대표 문제 확인하기 P. 18~21

1 3	**2** ④	**3** ②	**4** ④	**5** 2	**6** $\frac{5\sqrt{30}}{3}$
7 200.5, 0.02049		**8** ③	**9** ④	**10** ④	**11** 2.6122
12 $\frac{5}{6}$	**13** $\frac{7\sqrt{6}}{12}+2\sqrt{5}$		**14** $\frac{5\sqrt{21}}{3}-3\sqrt{7}$		**15** $-10+\sqrt{5}$
16 ③	**17** $-\frac{1}{2}$, $-\frac{9}{2}$		**18** $12+\sqrt{6}$		**19** ④
20 ②	**21** 30	**22** 10	**23** $3\sqrt{5}+4$		

1 $\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2a}=12\sqrt{5}$에서

$2\sqrt{2\times3\times2a}\times\sqrt{5}=12\sqrt{5}$, $\sqrt{12a}=6$

$12a=36$ $\therefore a=3$

2 ① $-a>0$이므로

$\sqrt{(-a)^2b}=\sqrt{(-a)^2}\times\sqrt{b}=(-a)\times\sqrt{b}=-a\sqrt{b}$

② $\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b^2}=(-a)\times b=-ab$

③ $-\sqrt{a^4b^2}=-\sqrt{a^4}\times\sqrt{b^2}=-\sqrt{(a^2)^2}\times\sqrt{b^2}=-a^2\times b=-a^2b$

④ $\sqrt{\frac{b}{a^2}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}=\frac{\sqrt{b}}{-a}=-\frac{\sqrt{b}}{a}$

⑤ $-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=-\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}=-\frac{-a}{b}=\frac{a}{b}$

따라서 옳은 것은 ④이다.

3 $\sqrt{0.008}=\sqrt{\frac{80}{10000}}=\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{100^2}}=\frac{\sqrt{4^2\times5}}{100}=\frac{4\sqrt{5}}{100}=\frac{1}{25}\sqrt{5}$

$\therefore k=\frac{1}{25}$

4 $\sqrt{108}=\sqrt{2^2\times3^3}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{3^3}=(\sqrt{2})^2\times(\sqrt{3})^3=a^2b^3$

5 $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{12}}=4\sqrt{\frac{2}{12}}=4\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}}{6}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$이므로 $a=\frac{2}{3}$

$\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{18}}=4\sqrt{\frac{6}{18}}=4\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$이므로 $b=\frac{4}{3}$

$\therefore a+b=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$

6 (직사각형의 넓이)$=5\sqrt{2}\times3\sqrt{5}=15\sqrt{10}$

(삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times x=3\sqrt{3}x$

이때 두 도형의 넓이가 같으므로

$3\sqrt{3}x=15\sqrt{10}$, $x=\frac{15\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}=5\sqrt{\frac{10}{3}}=\frac{5\sqrt{30}}{3}$

7 $\sqrt{40200}=\sqrt{4.02\times10000}$

$=100\sqrt{4.02}$

$=100\times2.005=200.5$

$\sqrt{0.00042}=\sqrt{\frac{4.2}{10000}}$

$=\frac{\sqrt{4.2}}{100}$

$=\frac{2.049}{100}=0.02049$

8 ① $\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{2.236}{5}=0.4472$

② $\sqrt{0.05}=\sqrt{\frac{5}{100}}=\frac{\sqrt{5}}{10}=\frac{2.236}{10}=0.2236$

③ $\sqrt{0.5}=\sqrt{\frac{50}{100}}=\frac{\sqrt{50}}{10}$

④ $\sqrt{125}=\sqrt{5^2\times5}=5\sqrt{5}=5\times2.236=11.18$

⑤ $\sqrt{500}=\sqrt{10^2\times5}=10\sqrt{5}=10\times2.236=22.36$

따라서 그 값을 구할 수 없는 것은 ③이다.

9 ① $\sqrt{7000}=\sqrt{70\times100}=10\sqrt{70}=10\times8.367=83.67$

② $\sqrt{700}=\sqrt{7\times100}=10\sqrt{7}=10\times2.646=26.46$

③ $\sqrt{28}=2\sqrt{7}=2\times2.646=5.292$

④ $\sqrt{0.007}=\sqrt{\frac{70}{10000}}=\frac{\sqrt{70}}{100}=\frac{8.367}{100}=0.08367$

⑤ $\sqrt{0.0028}=\sqrt{\frac{28}{10000}}=\frac{2\sqrt{7}}{100}=\frac{\sqrt{7}}{50}=\frac{2.646}{50}=0.05292$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

10 $\sqrt{7.77}=2.787$이므로 양변에 100을 곱하면
$100\sqrt{7.77}=278.7$, $\sqrt{100^2\times7.77}=278.7$
따라서 $\sqrt{a}=\sqrt{100^2\times7.77}$이므로 $a=77700$이다.

11 $\frac{\sqrt{18}}{6}+\sqrt{3.63}=\frac{3\sqrt{2}}{6}+\sqrt{\frac{121\times3}{100}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{11\sqrt{3}}{10}$
$=\frac{5\sqrt{2}+11\sqrt{3}}{10}=\frac{5\times1.414+11\times1.732}{10}$
$=\frac{26.122}{10}=2.6122$

12 $\frac{\sqrt{80}}{3}-a\sqrt{5}+\frac{\sqrt{45}}{2}=\frac{4\sqrt{5}}{3}-a\sqrt{5}+\frac{3\sqrt{5}}{2}$
$=\left(\frac{4}{3}-a+\frac{3}{2}\right)\sqrt{5}$
이므로 $\frac{4}{3}-a+\frac{3}{2}=2$, $17-6a=12$ $\quad\therefore a=\frac{5}{6}$

13 $A=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{5}{\sqrt{10}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{6}}{3}-\sqrt{5}$
$B=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\sqrt{15}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+3\sqrt{5}=\frac{\sqrt{6}}{4}+3\sqrt{5}$
$\therefore A+B=\frac{\sqrt{6}}{3}-\sqrt{5}+\frac{\sqrt{6}}{4}+3\sqrt{5}=\frac{7\sqrt{6}}{12}+2\sqrt{5}$

14 (주어진 식)$=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}+\sqrt{7}-4\sqrt{7}+\frac{6\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$
$=\frac{2\sqrt{21}}{3}-3\sqrt{7}+\sqrt{21}$
$=\frac{5\sqrt{21}}{3}-3\sqrt{7}$

15 (정사각형 PQRS의 넓이)$=3^2-4\times\left(\frac{1}{2}\times2\times1\right)=5$
이므로 $\overline{AR}=\overline{QR}=\sqrt{5}$, $\overline{BR}=\overline{SR}=\sqrt{5}$
$\therefore a=-2-\sqrt{5}$, $b=-2+\sqrt{5}$
$\therefore 2a+3b=2(-2-\sqrt{5})+3(-2+\sqrt{5})$
$=-4-2\sqrt{5}-6+3\sqrt{5}$
$=-10+\sqrt{5}$

16 ① $(2+\sqrt{11})-6=\sqrt{11}-4=\sqrt{11}-\sqrt{16}<0$
$\therefore 2+\sqrt{11}<6$
② $(\sqrt{24}+1)-\sqrt{54}=2\sqrt{6}+1-3\sqrt{6}=1-\sqrt{6}<0$
$\therefore \sqrt{24}+1<\sqrt{54}$
③ $(2+\sqrt{5})-(\sqrt{45}-1)=2+\sqrt{5}-3\sqrt{5}+1$
$=3-2\sqrt{5}=\sqrt{9}-\sqrt{20}<0$
$\therefore 2+\sqrt{5}<\sqrt{45}-1$
④ $(5-\sqrt{63})-(3-2\sqrt{7})=5-3\sqrt{7}-3+2\sqrt{7}$
$=2-\sqrt{7}=\sqrt{4}-\sqrt{7}<0$
$\therefore 5-\sqrt{63}<3-2\sqrt{7}$
⑤ $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
$=\sqrt{\frac{4}{3}}-\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{8}{6}}-\sqrt{\frac{9}{6}}<0$
$\therefore \frac{2}{\sqrt{3}}-1<\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1$
따라서 옳은 것은 ③이다.

17 (주어진 식)$=\sqrt{6}+a-4+2a\sqrt{6}$
$=(a-4)+(2a+1)\sqrt{6}$ $\quad\cdots$ ㉠
이 수가 유리수가 되어야 하므로
$2a+1=0$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$
$a=-\frac{1}{2}$을 ㉠의 식에 대입하면
$\left(-\frac{1}{2}-4\right)+(-1+1)\sqrt{6}=-\frac{9}{2}$

개념 더하기 다시 보기
a, b가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때,
$a+b\sqrt{m}$이 유리수이면 ⇨ $b=0$

18 (주어진 식)$=(4+4\sqrt{6}+6)-(\sqrt{2}+2\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$
$=4+4\sqrt{6}+6-(4+3\sqrt{6}-6)$
$=10+4\sqrt{6}-3\sqrt{6}+2$
$=12+\sqrt{6}$

19 $x+y=2\sqrt{15}$, $xy=6$이므로
$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy$
$=(2\sqrt{15})^2-6$
$=60-6=54$

20 $x=\sqrt{3}+1$에서 $x-1=\sqrt{3}$
양변을 제곱하면 $(x-1)^2=(\sqrt{3})^2$
$x^2-2x+1=3$, $x^2-2x=2$
$\therefore x^2-2x+5=2+5=7$

21 $(4\sqrt{3}+2\sqrt{6}-3\sqrt{2})(4\sqrt{3}-2\sqrt{6}+3\sqrt{2})$
$=\{4\sqrt{3}+(2\sqrt{6}-3\sqrt{2})\}\{4\sqrt{3}-(2\sqrt{6}-3\sqrt{2})\}$
이때 $2\sqrt{6}-3\sqrt{2}=A$로 놓으면
$(4\sqrt{3}+A)(4\sqrt{3}-A)=(4\sqrt{3})^2-A^2$
$=(4\sqrt{3})^2-(2\sqrt{6}-3\sqrt{2})^2$
$=48-(24-24\sqrt{3}+18)$
$=6+24\sqrt{3}$
$\therefore a=6$, $b=24$ $\quad\therefore a+b=30$

22 $x+y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$
$=\frac{3+2\sqrt{6}+2+3-2\sqrt{6}+2}{3-2}=10$

23 $\frac{4}{3-\sqrt{5}}=\frac{4(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\frac{4(3+\sqrt{5})}{9-5}=3+\sqrt{5}$
$2<\sqrt{5}<3$에서 $5<3+\sqrt{5}<6$
따라서 $a=5$, $b=(3+\sqrt{5})-5=\sqrt{5}-2$이므로

$$\sqrt{a}+\frac{2}{b}=\sqrt{5}+\frac{2}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+\frac{2(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}$$
$$=\sqrt{5}+\frac{2(\sqrt{5}+2)}{5-4}=\sqrt{5}+2\sqrt{5}+4=3\sqrt{5}+4$$

STEP 2 내신 5% 따라잡기 P. 22~27

1 6 **2** ③ **3** 4 **4** $2ab+4a+2b-3$ **5** $\frac{\sqrt{2}}{8}$
6 7.875 **7** ①, ⑤ **8** 4 **9** $-8\sqrt{2}$ **10** $\frac{503}{40}$
11 $a=-\frac{17}{9}$, $b=\frac{23}{20}$ **12** $\frac{42+21\sqrt{3}}{4}$
13 $38+6\sqrt{70}$ **14** -4 **15** ② **16** 110
17 ②, ⑤ **18** 1 **19** 4 **20** 0
21 $(21-7\sqrt{6})$cm **22** $1<x\le 2+\sqrt{3}$ **23** $135-54\sqrt{6}$
24 $x=-20$, $y=-7$ **25** 1 **26** 2
27 $-20-10\sqrt{3}$ **28** $\frac{32-23\sqrt{2}}{17}$ **29** ②
30 $29-3\sqrt{11}$ **31** $18+\sqrt{6}$ **32** ① **33** 4
34 ⑤ **35** 30 **36** $4\sqrt{2}$ **37** $70\sqrt{2}$

1 $\sqrt{252}=\sqrt{6^2\times 7}=6\sqrt{7}$이므로 $a=6$
$\sqrt{2700}=\sqrt{30^2\times 3}=30\sqrt{3}$이므로 $b=30$
$\sqrt{ab}=\sqrt{6\times 30}=\sqrt{180}=\sqrt{6^2\times 5}=6\sqrt{5}$ $\quad\therefore c=6$

2 $\sqrt{0.081}=\sqrt{\frac{81}{1000}}=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{1000}}=\frac{\sqrt{3^4}}{\sqrt{2^3\times 5^3}}=\frac{\sqrt{3^4}}{\sqrt{2^3}\sqrt{5^3}}$
$=\frac{(\sqrt{3})^4}{(\sqrt{2})^3(\sqrt{5})^3}=\frac{b^4}{a^3c^3}$

3 $\frac{\sqrt{6^8+4^9}}{\sqrt{18^4+4^7}}=\sqrt{\frac{6^8+4^9}{18^4+4^7}}=\sqrt{\frac{(2\times 3)^8+(2^2)^9}{(2\times 3^2)^4+(2^2)^7}}=\sqrt{\frac{2^8\times 3^8+2^{18}}{2^4\times 3^8+2^{14}}}$
$=\sqrt{\frac{2^8(3^8+2^{10})}{2^4(3^8+2^{10})}}=\sqrt{2^4}=4$

4 $1<\sqrt{3}<2$에서 $\sqrt{3}$의 정수 부분은 1이므로
$a=\sqrt{3}-1$ $\quad\therefore \sqrt{3}=a+1$
$2<\sqrt{5}<3$에서 $\sqrt{5}$의 정수 부분은 2이므로
$b=\sqrt{5}-2$ $\quad\therefore \sqrt{5}=b+2$
$7<2\sqrt{15}(=\sqrt{60})<8$에서 $2\sqrt{15}$의 정수 부분은 7이므로
$(2\sqrt{15}$의 소수 부분$)=2\sqrt{15}-7=2\sqrt{3}\sqrt{5}-7$
$=2(a+1)(b+2)-7$
$=2ab+4a+2b-3$

5 각 변의 중점을 연결한 선분을 자르는 선으로 하여 만든 정사각형의 넓이는 이전 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$배가 된다.
따라서 5단계에서 만들어지는 정사각형의 넓이는
$1\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$이므로
(5단계에서 만들어지는 정사각형의 한 변의 길이)
$=\sqrt{\frac{1}{32}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$

6 $\sqrt{62.01}=\sqrt{9\times 6.89}=3\sqrt{6.89}=3\times 2.625=7.875$

7 ① $\sqrt{225}=\sqrt{2.25\times 100}=\sqrt{1.5^2\times 10^2}=\sqrt{15^2}=15$
⑤ $\sqrt{0.0225}=\sqrt{\frac{2.25}{100}}=\sqrt{\frac{1.5^2}{10^2}}=\sqrt{0.15^2}=0.15$

8 주어진 표에서 $234^2=54756$이므로
$(2.34\times 100)^2=54756$,
$2.34^2\times 100^2=54756$,
$2.34^2=\frac{54756}{100^2}$ $\quad\therefore 2.34^2=5.4756$
따라서 오른쪽과 같은 표를 얻을 수 있다.

$\frac{a}{100}$	$\frac{a^2}{10000}$
2.34	5.4756
2.35	5.5225
2.36	5.5696
2.37	5.6169
2.38	5.6644

이때 $5.4756<5.5<5.5225$이므로
$2.34<\sqrt{5.5}<2.35$
따라서 $\sqrt{5.5}$를 소수로 나타내었을 때, 소수점 아래 둘째 자리의 숫자는 4이다.

9 $a<0$, $b<0$일 때, $a=-\sqrt{a^2}$, $b=-\sqrt{b^2}$이므로
(주어진 식)$=-\sqrt{a^2}\sqrt{\frac{3b}{a}}-\sqrt{b^2}\sqrt{\frac{a}{3b}}$
$=-\sqrt{a^2\times\frac{3b}{a}}-\sqrt{b^2\times\frac{a}{3b}}$
$=-\sqrt{3ab}-\sqrt{\frac{ab}{3}}=-\sqrt{3\times 24}-\sqrt{\frac{24}{3}}$
$=-\sqrt{72}-\sqrt{8}=-6\sqrt{2}-2\sqrt{2}=-8\sqrt{2}$

10 (주어진 식)$=\left(2\sqrt{5}-\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{15}}\right)^2+\left(\frac{18}{2\sqrt{6}}-3\sqrt{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2$
$=\left(2\sqrt{5}-\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}-3\sqrt{6}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2$
$=\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(-\frac{5\sqrt{6}}{4}\right)^2$
$=\frac{16}{5}+\frac{75}{8}=\frac{503}{40}$

11 (주어진 식)$=\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}+\frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)\times\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\left(4\sqrt{5}-\frac{5}{2}\right)$
$=\frac{2}{9\sqrt{2}}+\frac{9}{\sqrt{10}}-\frac{4}{\sqrt{2}}+\frac{5}{2\sqrt{10}}$
$=\frac{\sqrt{2}}{9}+\frac{9\sqrt{10}}{10}-2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{10}}{4}$
$=-\frac{17}{9}\sqrt{2}+\frac{23}{20}\sqrt{10}$
$\therefore a=-\frac{17}{9}$, $b=\frac{23}{20}$

12 정육각형과 각 변을 중점을 연결하여 그린 정육각형은 서로 닮음이고, 두 정육각형의 넓이의 비가 $4:3$으로 일정하므로 닮음비는 $\sqrt{4}:\sqrt{3}=2:\sqrt{3}$
즉, 두 정육각형의 한 변의 길이의 비는 $2:\sqrt{3}\left(=1:\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 정육각형의 각 변의 중점을 연결하여 그린 정육각형의 둘레의 길이는 이전 정육각형의 둘레의 길이의 $\frac{\sqrt{3}}{2}$배이다.

$\therefore$ (색칠한 부분의 둘레의 길이의 합)

$=$(4개의 정육각형의 둘레의 길이의 합)

$=6+\left(6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=6+3\sqrt{3}+\dfrac{9}{2}+\dfrac{9\sqrt{3}}{4}=\dfrac{42+21\sqrt{3}}{4}$

13 직육면체의 높이를 h라 하면 직육면체의 부피가 $14\sqrt{5}+5\sqrt{14}$이므로

$\sqrt{14}\times\sqrt{5}\times h=14\sqrt{5}+5\sqrt{14}$

$\therefore\ h=\dfrac{14\sqrt{5}+5\sqrt{14}}{\sqrt{14}\times\sqrt{5}}=\sqrt{14}+\sqrt{5}$

$\therefore$ (직육면체의 겉넓이)

$=2\times\{\sqrt{14}\times\sqrt{5}+\sqrt{14}\times(\sqrt{14}+\sqrt{5})+\sqrt{5}\times(\sqrt{14}+\sqrt{5})\}$

$=2\times(\sqrt{70}+14+\sqrt{70}+\sqrt{70}+5)$

$=2\times(19+3\sqrt{70})=38+6\sqrt{70}$

14 $\sqrt{3}\odot\{\sqrt{6}\diamond(-\sqrt{2})\}=\sqrt{3}\odot\{\sqrt{6}\times(-\sqrt{2})-1\}$

$=\sqrt{3}\odot(-2\sqrt{3}-1)$

$=(\sqrt{3}-1)(-2\sqrt{3}-1-1)$

$=(\sqrt{3}-1)(-2\sqrt{3}-2)$

$=-2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$

$=-2(3-1)=-4$

15 $(7-5\sqrt{2})^{11}(7+5\sqrt{2})^{11}=\{(7-5\sqrt{2})(7+5\sqrt{2})\}^{11}$

$=(49-50)^{11}=(-1)^{11}=-1$

$\therefore\ (7+5\sqrt{2})^{11}=-\dfrac{1}{(7-5\sqrt{2})^{11}}=-\dfrac{1}{A}$

다른 풀이 $(7-5\sqrt{2})(7+5\sqrt{2})=49-50=-1$이므로

$7+5\sqrt{2}=-\dfrac{1}{7-5\sqrt{2}}$

$\therefore\ (7+5\sqrt{2})^{11}=\left(-\dfrac{1}{7-5\sqrt{2}}\right)^{11}=-\dfrac{1}{(7-5\sqrt{2})^{11}}=-\dfrac{1}{A}$

16 $ab=(2\sqrt{7}+3\sqrt{3})(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})$

$=(3\sqrt{3}+2\sqrt{7})(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})$

$=(3\sqrt{3})^2-(2\sqrt{7})^2$

$=27-28=-1$

이므로

(주어진 식)$=a^{10}b^{10}\times b^2+a^{10}b^{10}\times a^2$

$=(ab)^{10}\times b^2+(ab)^{10}\times a^2$

$=(-1)^{10}\times b^2+(-1)^{10}\times a^2=b^2+a^2$

$=(a+b)^2-2ab$

$=\{(2\sqrt{7}+3\sqrt{3})+(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})\}^2-2\times(-1)$

$=(6\sqrt{3})^2+2=110$

17 ① $(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2-1=(7-2\sqrt{35}+5)-1$

$=11-2\sqrt{35}$

$=\sqrt{121}-\sqrt{140}<0$

$\therefore\ (\sqrt{7}-\sqrt{5})^2<1$

② $\sqrt{3}+\sqrt{5}>0,\ 4>0$이므로

$(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-4^2=(3+2\sqrt{15}+5)-16=2\sqrt{15}-8$

$=\sqrt{60}-\sqrt{64}<0$

$\therefore\ \sqrt{3}+\sqrt{5}<4$

참고 $a>0,\ b>0$일 때,

(i) $a^2-b^2>0$이면 $a>b$

(ii) $a^2-b^2=0$이면 $a=b$

(iii) $a^2-b^2<0$이면 $a<b$

③ $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\sqrt{3}-1$이므로

$(\sqrt{3}-1)-1=\sqrt{3}-2=\sqrt{3}-\sqrt{4}<0$

$\therefore\ \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}<1$

④ $(1+\sqrt{17})-(\sqrt{68}-3)=1+\sqrt{17}-2\sqrt{17}+3$

$=4-\sqrt{17}$

$=\sqrt{16}-\sqrt{17}<0$

$\therefore\ 1+\sqrt{17}<\sqrt{68}-3$

⑤ $(-2-5\sqrt{6})-(-2-6\sqrt{5})=-5\sqrt{6}+6\sqrt{5}$

$=-\sqrt{150}+\sqrt{180}>0$

$\therefore\ -2-5\sqrt{6}>-2-6\sqrt{5}$

따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

18 (주어진 식)$=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\boxed{\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}}}}}$ $=-1$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}=1$

19 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}{\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}}$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

이므로 $a=2,\ b=1,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=2+1+1=4$

20 (주어진 식)$=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{8}+1}\right)^2\times\dfrac{5-2\sqrt{6}}{(5\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}$

$=\sqrt{\dfrac{10+4\sqrt{6}}{9+4\sqrt{2}}\times\dfrac{5-2\sqrt{6}}{9-4\sqrt{2}}}$

$=\sqrt{\dfrac{2(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}{(9+4\sqrt{2})(9-4\sqrt{2})}}$

$=\sqrt{\dfrac{2(25-24)}{81-32}}=\sqrt{\dfrac{2}{49}}=\dfrac{\sqrt{2}}{7}$

이때 $1<\sqrt{2}<2$에서 $0<\dfrac{1}{7}<\dfrac{\sqrt{2}}{7}<\dfrac{2}{7}<\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{\sqrt{2}}{7}$에 가장 가까운 정수 a는 $a=0$이다.

21 두 정삼각형은 서로 닮음이고, 넓이의 비가 $2:3$이므로 두 정삼각형의 한 변의 길이의 비는 $\sqrt{2}:\sqrt{3}$이다.
이때 큰 정삼각형의 한 변의 길이와 작은 정삼각형의 한 변의 길이의 합은 $21\times\frac{1}{3}=7\,(\text{cm})$이므로
(큰 정삼각형의 한 변의 길이)
$=7\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=7\times\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$
$=7\times(3-\sqrt{6})=21-7\sqrt{6}\,(\text{cm})$

22 $\sqrt{3}x+2\ge 2x+1$에서 $(\sqrt{3}-2)x\ge -1$
$\sqrt{3}-2=\sqrt{3}-\sqrt{4}<0$이므로 양변을 $\sqrt{3}-2$로 나누면
$x\le\frac{-1}{\sqrt{3}-2}=-\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}=2+\sqrt{3}$ $\cdots$ ㉠
$2(x-1)>\sqrt{3}(x-1)$에서 $2x-2>\sqrt{3}x-\sqrt{3}$
$(2-\sqrt{3})x>2-\sqrt{3}$
$2-\sqrt{3}=\sqrt{4}-\sqrt{3}>0$이므로 양변을 $2-\sqrt{3}$으로 나누면
$x>1$ $\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 주어진 연립부등식의 해는 $1<x\le 2+\sqrt{3}$이다.

23 $\frac{3a-b}{a+b}=2$에서 $3a-b=2a+2b$
$\therefore\ a=3b$
$a=3b$를 $\frac{3}{\sqrt{a}+\sqrt{2b}}=1$에 대입하면
$\frac{3}{\sqrt{3b}+\sqrt{2b}}=1,\ 3=\sqrt{3b}+\sqrt{2b},\ 3=(\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{b}$
$\sqrt{b}=\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
양변을 제곱하면
$b=\frac{9}{5+2\sqrt{6}}=\frac{9(5-2\sqrt{6})}{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}$
$=9(5-2\sqrt{6})=45-18\sqrt{6}$
$\therefore\ a=3b=3\times(45-18\sqrt{6})=135-54\sqrt{6}$

24 주어진 식에서 좌변을 정리하면
(좌변)$=\frac{x(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}+y-2y\sqrt{3}$
$=\frac{x\sqrt{3}-x}{2}+y-2y\sqrt{3}$
$=\left(-\frac{x}{2}+y\right)+\left(\frac{x}{2}-2y\right)\sqrt{3}$
즉, $\left(-\frac{x}{2}+y\right)+\left(\frac{x}{2}-2y\right)\sqrt{3}=3+4\sqrt{3}$이므로
$-\frac{x}{2}+y=3$ $\cdots$ ㉠, $\frac{x}{2}-2y=4$ $\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$x=-20,\ y=-7$

개념 더하기 다시 보기
$a,\ b,\ c,\ d$가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때,
① $a+b\sqrt{m}$이 유리수이면 ⇨ $b=0$
② $a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m}$이면 ⇨ $a=c,\ b=d$

25 $1<\sqrt{3}<2$이므로 $a=\sqrt{3}-1$
$\frac{2}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{3}+1$에서
$2<\sqrt{3}+1<3$이므로 $b=2$
$ax+(a-b)y+1=0$에서
$(\sqrt{3}-1)x+(\sqrt{3}-1-2)y+1=0$
$(-x-3y+1)+(x+y)\sqrt{3}=0$
이때 $x,\ y$가 유리수이므로
$-x-3y+1=0$ $\cdots$ ㉠, $x+y=0$ $\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$
$\therefore\ y-x=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

개념 더하기 다시 보기
$a,\ b$가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때,
$a+b\sqrt{m}=0$이면 ⇨ $a=0,\ b=0$

26 $1+x>0,\ 1-x>0$이므로
$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}-\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$
$=\frac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}$
$=\frac{1+x-(1-x)}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}=\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$
$=\frac{2\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=2$

27 $\langle 1,\ 3\rangle+\langle 2,\ 6\rangle+\langle 3,\ 9\rangle+\cdots+\langle 10,\ 30\rangle$
$=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{9}}{\sqrt{3}-\sqrt{9}}+\cdots+\frac{\sqrt{10}+\sqrt{30}}{\sqrt{10}-\sqrt{30}}$
$=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}(\sqrt{1}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}(\sqrt{1}-\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{3}(\sqrt{1}+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{1}-\sqrt{3})}$
$+\cdots+\frac{\sqrt{10}(\sqrt{1}+\sqrt{3})}{\sqrt{10}(\sqrt{1}-\sqrt{3})}$
$=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}+\cdots+\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}$
$=10\times\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}=10\times\frac{(\sqrt{1}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{1}-\sqrt{3})(\sqrt{1}+\sqrt{3})}$
$=10\times\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}=10\times(-2-\sqrt{3})$
$=-20-10\sqrt{3}$

28 $a=\frac{2}{3\sqrt{2}-4}=\frac{2(3\sqrt{2}+4)}{(3\sqrt{2}-4)(3\sqrt{2}+4)}=3\sqrt{2}+4$에서
$4<3\sqrt{2}\,(=\sqrt{18})<5$이므로 $8<3\sqrt{2}+4<9$
$\therefore\ f(a)=8,\ g(a)=(3\sqrt{2}+4)-8=3\sqrt{2}-4$
$b=\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2}=3-\sqrt{8}\ (\because\ \sqrt{8}-3<0)$에서
$-3<-\sqrt{8}<-2$이므로 $0<3-\sqrt{8}<1$
$\therefore\ f(b)=0,\ g(b)=3-\sqrt{8}=3-2\sqrt{2}$

$\therefore \dfrac{g(a)-f(b)}{g(b)-f(a)}=\dfrac{(3\sqrt{2}-4)-0}{(3-2\sqrt{2})-8}=\dfrac{4-3\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(4-3\sqrt{2})(5-2\sqrt{2})}{(5+2\sqrt{2})(5-2\sqrt{2})}=\dfrac{32-23\sqrt{2}}{17}$

29 $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$

$2<\sqrt{5}<3$에서 $4<\sqrt{5}+2<5$이므로

$\sqrt{5}+2$의 정수 부분은 4이고, 소수 부분은

$x=(\sqrt{5}+2)-4=\sqrt{5}-2$이다.

즉, $x+2=\sqrt{5}$이므로 양변을 제곱하면

$(x+2)^2=(\sqrt{5})^2$, $x^2+4x+4=5$ $\quad \therefore x^2+4x=1$

$\therefore x^2+4x+3=1+3=4$

30 $3<\sqrt{11}<4$이므로

$6<3+\sqrt{11}<7$ $\quad \therefore [x]=6$

$2x=6+2\sqrt{11}=6+\sqrt{44}$이고 $6<\sqrt{44}<7$이므로

$12<6+\sqrt{44}<13$ $\quad \therefore [2x]=12$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{3+\sqrt{11}}{(3+\sqrt{11})-6}+\dfrac{(3+\sqrt{11})-12}{3+\sqrt{11}}$

$=\dfrac{\sqrt{11}+3}{\sqrt{11}-3}+\dfrac{\sqrt{11}-9}{\sqrt{11}+3}$

$=\dfrac{(\sqrt{11}+3)^2+(\sqrt{11}-9)(\sqrt{11}-3)}{(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)}$

$=\dfrac{(20+6\sqrt{11})+(38-12\sqrt{11})}{2}$

$=\dfrac{58-6\sqrt{11}}{2}=29-3\sqrt{11}$

31 $x^2-\sqrt{6}x+1=0$에서 $x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-\sqrt{6}+\dfrac{1}{x}=0$ $\quad \therefore x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{6}$

이때 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=(\sqrt{6})^2-2=4$,

$x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2=4^2-2=14$

$\therefore$ (주어진 식)$=\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right)+\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=14+4+\sqrt{6}=18+\sqrt{6}$

32 $(a+3b)(c-3d)=ac-3ad+3bc-9bd$에서

(좌변)$=\dfrac{2}{3-2\sqrt{2}}\times\dfrac{2}{3+2\sqrt{2}}=\dfrac{4}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=4$

이고, $ac=bd=1$이므로

$4=1-3(ad-bc)-9$, $3(ad-bc)=-12$

$\therefore ad-bc=-4$

33 $ab=(-4-\sqrt{17})(4-\sqrt{17})$

$=(\sqrt{17}+4)(\sqrt{17}-4)=17-16=1$

이때 $a^{3n}=A$, $b^{3n}=B$라 하면

(주어진 식)$=(A+B)^2-(A-B)^2$

$=A^2+2AB+B^2-(A^2-2AB+B^2)$

$=4AB=4a^{3n}b^{3n}=4(ab)^{3n}=4\times1=4$

34 $f(n)=\dfrac{(-1)^n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=(-1)^n(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$

$=-(\sqrt{1}+\sqrt{2})+(\sqrt{2}+\sqrt{3})-(\sqrt{3}+\sqrt{4})$

$+\cdots-(\sqrt{99}+\sqrt{100})+(\sqrt{100}+\sqrt{101})$

$=-\sqrt{1}-\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{4}}$

$+\cdots-\cancel{\sqrt{99}}-\cancel{\sqrt{100}}+\cancel{\sqrt{100}}+\sqrt{101}$

$=\sqrt{101}-1$

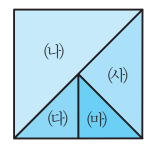
35 솔이의 자의 눈금 7에서부터 63까지의 거리와 민이의 자의 눈금 0에서부터 A까지의 거리가 같으므로 민이의 자의 눈금 0에서부터 A까지의 거리를 x라 하면

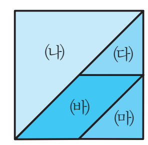
$\sqrt{63}-\sqrt{7}=x$, $3\sqrt{7}-\sqrt{7}=x$ $\quad \therefore x=2\sqrt{7}$

이때 $A=x^2+2$이므로 이 식에 $x=2\sqrt{7}$을 대입하면

$A=(2\sqrt{7})^2+2=28+2=30$

36 오른쪽 그림과 같이 (나), (다), (마), (사) (또는 (나), (다), (마), (바)) 4개의 조각을 이용하면 정사각형을 만들 수 있다. 따라서 이 정사각형의 넓이는





(4개의 조각을 이용하여 만든 정사각형의 넓이)

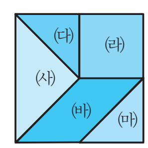
$=\left(\dfrac{1}{2}\times4\times2\right)+2\times\left(\dfrac{1}{2}\times2\times1\right)+\left(\dfrac{1}{2}\times2\times2\right)$

$=4+2+2=8$

이므로 이 정사각형의 한 변의 길이는

$a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

또 오른쪽 그림과 같이 (다), (라), (마), (바), (사) 5개의 조각을 이용하면 정사각형을 만들 수 있다. 따라서 이 정사각형의 넓이는



(5개의 조각을 이용하여 만든 정사각형의 넓이)

$=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times2\times1\right)+\left\{2\times2-4\times\left(\dfrac{1}{2}\times1\times1\right)\right\}$

$+(2\times1)+\left(\dfrac{1}{2}\times2\times2\right)$

$=2+2+2+2=8$

이므로 이 정사각형의 한 변의 길이는

$b=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\therefore a+b=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

37 정사각형 A_1의 넓이는 $2^2-4\times\left(\dfrac{1}{2}\times1\times1\right)=2$이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$이고, 둘레의 길이는 $4\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

정사각형 A_2의 넓이는 $4^2-4\times\left(\dfrac{1}{2}\times2\times2\right)=8$이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$이고, 둘레의 길이는 $4\times2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

정사각형 A_3의 넓이는 $6^2-4\times\left(\dfrac{1}{2}\times3\times3\right)=18$이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$이고, 둘레의 길이는 $4\times3\sqrt{2}=12\sqrt{2}$

$\vdots$

즉, 정사각형 A_n의 넓이는 $(2n)^2-4\times\left(\dfrac{1}{2}\times n\times n\right)=2n^2$이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{2n^2}=n\sqrt{2}$이고, 둘레의 길이는 $4\times n\sqrt{2}=4n\sqrt{2}$이다.

이때 두 정사각형 A_n과 A_{n+1}이 겹쳐지는 부분의 둘레의 길이는 $2n\sqrt{2}$이다.
따라서 구하는 도형의 둘레의 길이는
(정사각형 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_7의 둘레의 길이의 합)
$-$(정사각형 A_1과 A_2, A_2와 A_3, $\cdots$, A_6와 A_7이 겹치는 부분의 둘레의 길이의 합)
$=(4\sqrt{2}+8\sqrt{2}+12\sqrt{2}+16\sqrt{2}+20\sqrt{2}+24\sqrt{2}+28\sqrt{2})$
$\quad-(2\sqrt{2}+4\sqrt{2}+6\sqrt{2}+8\sqrt{2}+10\sqrt{2}+12\sqrt{2})$
$=112\sqrt{2}-42\sqrt{2}=70\sqrt{2}$

STEP 3 내신 1% 뛰어넘기 P. 28~29

01 $(6,\ 54)$, $(24,\ 24)$, $(54,\ 6)$ **02** -1
03 2 **04** 1 **05** $\frac{137}{30}$ **06** $\sqrt{10}+2\sqrt{6}-\sqrt{15}-4$
07 2 **08** $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

01 길잡이 근호 안의 수 96을 소인수분해한다.
$\sqrt{96}=\sqrt{4^2\times 6}=4\sqrt{6}$이므로
$\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\sqrt{6}$에서 $\sqrt{x}=4\sqrt{6}-\sqrt{y}$ $\cdots$ ㉠
양변을 제곱하면
$x=96-8\sqrt{6y}+y$, $8\sqrt{6y}=96-x+y$
이 식의 우변이 정수이므로 $6y$는 제곱인 수이어야 한다.
$y=6k^2$ (k는 자연수)이라 하면 ㉠에서
$\sqrt{x}=4\sqrt{6}-\sqrt{y}=4\sqrt{6}-\sqrt{6k^2}$
$\quad=4\sqrt{6}-k\sqrt{6}=(4-k)\sqrt{6}$
이때 $\sqrt{x}>0$이므로 k의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3이다.
(i) $k=1$일 때, $\sqrt{x}=3\sqrt{6}=\sqrt{54}$ $\quad\therefore x=54$
$\quad y=6\times 1^2=6$
(ii) $k=2$일 때, $\sqrt{x}=2\sqrt{6}=\sqrt{24}$ $\quad\therefore x=24$
$\quad y=6\times 2^2=24$
(iii) $k=3$일 때, $\sqrt{x}=\sqrt{6}$ $\quad\therefore x=6$
$\quad y=6\times 3^2=54$
따라서 (i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(6,\ 54)$, $(24,\ 24)$, $(54,\ 6)$이다.

02 길잡이 $\frac{1}{\sqrt{a}+1}+\frac{1}{\sqrt{b}+1}=1$에서 분모를 통분하여 $\sqrt{ab}$의 값을 구한다.
$\frac{1}{\sqrt{a}+1}+\frac{1}{\sqrt{b}+1}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{b}+1)}=1$에서
$\sqrt{a}+\sqrt{b}+2=\sqrt{ab}+\sqrt{a}+\sqrt{b}+1$ $\quad\therefore \sqrt{ab}=1$
$$\therefore \frac{1}{\sqrt{a}-1}+\frac{1}{\sqrt{b}-1}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)}$$
$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-2}{\sqrt{ab}-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1}$$
$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-2}{1-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1}$$
$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-2}{-(\sqrt{a}+\sqrt{b}-2)}=-1$$

03 길잡이 $2^{3x}\times 2^{3y}=2^{3x+3y}=2^{3(x+y)}$임을 이용한다.
$2^{3x}\times 2^{3y}=(12-4\sqrt{5})(12+4\sqrt{5})$
$\quad=12^2-(4\sqrt{5})^2$
$\quad=144-80$
$\quad=64=2^6$
이고, $2^{3x}\times 2^{3y}=2^{3x+3y}=2^{3(x+y)}$이므로
$3(x+y)=6$ $\quad\therefore x+y=2$

04 길잡이 $0<a<1$이면 $0<a^n<1$임을 이용한다. (단, n은 자연수)
$4<\sqrt{17}<5$이므로 $0<\sqrt{17}-4<1$
따라서 $0<(\sqrt{17}-4)^{2015}<1$이므로
$(\sqrt{17}-4)^{2015}$의 정수 부분은 0이고, 소수 부분은
$A=(\sqrt{17}-4)^{2015}-0=(\sqrt{17}-4)^{2015}$
$\therefore (\sqrt{17}+4)^{2015}A=(\sqrt{17}+4)^{2015}(\sqrt{17}-4)^{2015}$
$\quad=\{(\sqrt{17}+4)(\sqrt{17}-4)\}^{2015}$
$\quad=\{(\sqrt{17})^2-4^2\}^{2015}$
$\quad=1^{2015}=1$

05 길잡이 주어진 식의 모든 분수에서 분자가 분모보다 1만큼 크므로
$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}=\frac{(\sqrt{n}-1)+1}{\sqrt{n}-1}=1+\frac{1}{\sqrt{n}-1}$,
$\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+1}=\frac{(\sqrt{n}+1)+1}{\sqrt{n}+1}=1+\frac{1}{\sqrt{n}+1}$임을 이용하여 주어진 식을 변형한다.
(주어진 식)
$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{\sqrt{6}-1}\right)-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)-\cdots-\left(1+\frac{1}{\sqrt{6}+1}\right)$$
$$=5-5+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{6}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\cdots-\frac{1}{\sqrt{6}+1}$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{6}-1}-\frac{1}{\sqrt{6}+1}\right)$$
$$=\frac{(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}+\frac{(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}+\cdots+\frac{(\sqrt{6}+1)-(\sqrt{6}-1)}{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)}$$
$$=\frac{2}{2-1}+\frac{2}{3-1}+\frac{2}{4-1}+\frac{2}{5-1}+\frac{2}{6-1}$$
$$=2+1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$$
$$=\frac{137}{30}$$
다른 풀이
$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}-\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+1}=\frac{n+\sqrt{n}-(n+\sqrt{n}-2)}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)}=\frac{2}{n-1}$
이므로
(주어진 식)$=\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}=\frac{137}{30}$

06 길잡이 곱했을 때 근호 안의 수가 같아지도록 분모를 2개의 항씩 ($\sqrt{10}$과 $\sqrt{24}$, $\sqrt{15}$와 $\sqrt{16}$) 묶은 후 분모를 유리화한다.

(주어진 식)

$$=\frac{3\times\{(\sqrt{10}+\sqrt{24})-(\sqrt{15}+\sqrt{16})\}}{\{(\sqrt{10}+\sqrt{24})+(\sqrt{15}+\sqrt{16})\}\times\{(\sqrt{10}+\sqrt{24})-(\sqrt{15}+\sqrt{16})\}}$$

$$=\frac{3\{(\sqrt{10}+\sqrt{24})-(\sqrt{15}+\sqrt{16})\}}{(\sqrt{10}+\sqrt{24})^2-(\sqrt{15}+\sqrt{16})^2}$$

$$=\frac{3(\sqrt{10}+\sqrt{24}-\sqrt{15}-\sqrt{16})}{(34+2\sqrt{240})-(31+2\sqrt{240})}$$

$$=\sqrt{10}+\sqrt{24}-\sqrt{15}-\sqrt{16}$$

$$=\sqrt{10}+2\sqrt{6}-\sqrt{15}-4$$

07 길잡이 x_1, x_2, x_3, $\cdots$의 값을 차례로 구하여 규칙을 찾는다.

$\frac{1}{x_1}=\frac{1}{\sqrt{6}-2}=\frac{\sqrt{6}+2}{2}$이고,

$2<\sqrt{6}<3$이므로 $2<\frac{\sqrt{6}+2}{2}<\frac{5}{2}$

즉, $\frac{1}{x_1}$의 정수 부분이 2이므로

$x_2=\frac{1}{x_1}-2=\frac{\sqrt{6}+2}{2}-2=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$

마찬가지로 $\frac{1}{x_2}=\frac{2}{\sqrt{6}-2}=\sqrt{6}+2$이고,

$2<\sqrt{6}<3$이므로 $4<\sqrt{6}+2<5$

즉, $\frac{1}{x_2}$의 정수 부분이 4이므로

$x_3=\frac{1}{x_2}-4=(\sqrt{6}+2)-4=\sqrt{6}-2$

이와 같이 x_4, x_5, x_6, $\cdots$의 값을 차례로 구하면

$x_1=x_3=x_5=\cdots=\sqrt{6}-2$,

$x_2=x_4=x_6=\cdots=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$이므로

$x_{2014}=x_2=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$, $x_{2015}=x_1=\sqrt{6}-2$

$\therefore\ \frac{x_{2015}}{x_{2014}}=\frac{\sqrt{6}-2}{\frac{\sqrt{6}-2}{2}}=2$

08 길잡이 A^2, B^2의 값을 각각 구해 본다.

$A=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}}$의 양변을 제곱하면

$A^2=2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}$

즉, $A^2=2A$

$A\neq0$이므로 양변을 A로 나누면 $A=2$

$B=\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}$의 양변을 제곱하면

$$B^2=\frac{(\sqrt{5}+2)-2\sqrt{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}+(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}-1}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}-1}=2$$

$B>0$이므로 $B=\sqrt{2}$

$$\therefore\ \frac{1}{A-B}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

서술형 완성하기

P. 30~31

1 a^2+bc **2** $\frac{1}{6}$ **3** $\frac{\sqrt{15}}{6}$ cm **4** 8

5 $-6\sqrt{2}$ **6** (1) 3 (2) $4-2\sqrt{3}$ (3) $x=-16$, $y=10$

7 풀이 참조

1 $a<0$, $c<0$이므로 $-ac<0$

$\therefore\ \sqrt{(-ac)^2}=-(-ac)=ac$ … (i)

$a<c$에서 $c-a>0$이고, $b<0$이므로

$b(c-a)<0$

$\therefore\ \sqrt{b^2(c-a)^2}=\sqrt{\{b(c-a)\}^2}=-b(c-a)$ … (ii)

$b<c$에서 $c-b>0$이고, $-a>0$이므로

$c-b-a=(c-b)+(-a)>0$

$\therefore\ \sqrt{(c-b-a)^2}=c-b-a$ … (iii)

$\therefore$ (주어진 식)

$=ac-\{-b(c-a)\}-a(c-b-a)$

$=ac+bc-ab-ac+ab+a^2$

$=a^2+bc$ … (iv)

채점 기준	배점
(i) $\sqrt{(-ac)^2}=ac$임을 알기	30 %
(ii) $\sqrt{b^2(c-a)^2}=-b(c-a)$임을 알기	30 %
(iii) $\sqrt{(c-b-a)^2}=c-b-a$임을 알기	30 %
(iv) 주어진 식을 간단히 하기	10 %

2 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$(가지) … (i)

$\sqrt{72-2ab}$가 정수가 되려면 $72-2ab$가 0 또는 72보다 작은 제곱인 수이어야 한다.

즉, $72-2ab=0$, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64이므로

$ab=36$, $\frac{71}{2}$, 34, $\frac{63}{2}$, 28, $\frac{47}{2}$, 18, $\frac{23}{2}$, 4

이때 a, b는 $1\leq a\leq6$, $1\leq b\leq6$인 자연수이므로

$ab=36$, 18, 4 … (ii)

따라서 이를 만족하는 (a, b)의 순서쌍은

(6, 6), (3, 6), (6, 3), (1, 4), (2, 2), (4, 1)의 6가지이므로 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$이다. … (iii)

채점 기준	배점
(i) 모든 경우의 수 구하기	30 %
(ii) $\sqrt{72-2ab}$가 정수가 되는 조건을 찾아 ab의 값 구하기	40 %
(iii) 확률 구하기	30 %

3 정사각형 A, B, C, D의 넓이를 각각 S_A, S_B, S_C, S_D라 하면

$S_A=4S_B$, $S_B=3S_C$, $S_C=2S_D$

이때 $S_A=10\,\text{cm}^2$이므로

$S_B=\frac{1}{4}S_A=\frac{1}{4}\times10=\frac{5}{2}\ (\text{cm}^2)$ … (i)

$S_C=\frac{1}{3}S_B=\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{5}{6}\ (\text{cm}^2)$ … (ii)

$S_D=\frac{1}{2}S_C=\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{12}\ (\text{cm}^2)$ … (iii)

따라서 정사각형 D의 한 변의 길이는

$\sqrt{\dfrac{5}{12}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}\ (\mathrm{cm})$ $\cdots$ (iv)

채점 기준	배점
(i) 정사각형 B의 넓이 구하기	20 %
(ii) 정사각형 C의 넓이 구하기	20 %
(iii) 정사각형 D의 넓이 구하기	20 %
(iv) 정사각형 D의 한 변의 길이 구하기	40 %

4 $(5-a\sqrt{2})+(b+3\sqrt{2})=(5+b)+(3-a)\sqrt{2}$

에서 이 식의 값이 유리수가 되어야 하므로

$3-a=0 \qquad \therefore\ a=3$ $\cdots$ (i)

$(5-a\sqrt{2})(b+3\sqrt{2})=(5-3\sqrt{2})(b+3\sqrt{2})$

$=(5b-18)+(15-3b)\sqrt{2}$

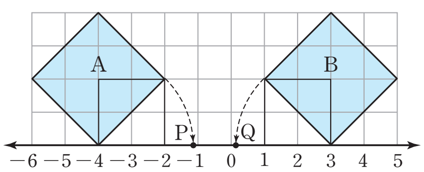
에서 이 식의 값이 유리수가 되어야 하므로

$15-3b=0 \qquad \therefore\ b=5$ $\cdots$ (ii)

$\therefore\ a+b=8$ $\cdots$ (iii)

채점 기준	배점
(i) 두 수의 합이 유리수가 되도록 하는 a의 값 구하기	40 %
(ii) 두 수의 곱이 유리수가 되도록 하는 b의 값 구하기	40 %
(iii) $a+b$의 값 구하기	20 %

5 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형의 대각선을 한 변으로 하는 두 정사각형을 각각 A, B라 하면



(한 변의 길이가 2인 정사각형의 대각선의 길이)

=(정사각형 A의 한 변의 길이)이고,

(정사각형 A의 넓이)$=4^2-4\times\left(\dfrac{1}{2}\times2\times2\right)=8$

따라서 정사각형 A, B의 한 변의 길이, 즉 한 변의 길이가 2인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$이므로 $\cdots$ (i)

$a=-4+2\sqrt{2},\ b=3-2\sqrt{2}$ $\cdots$ (ii)

$\therefore\ \sqrt{2}a+\dfrac{a}{b}=a\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{b}\right)$

$=(-4+2\sqrt{2})\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}\right)$

$=(-4+2\sqrt{2})(\sqrt{2}+3+2\sqrt{2})$

$=(-4+2\sqrt{2})(3+3\sqrt{2})$

$=-12-12\sqrt{2}+6\sqrt{2}+12$

$=-6\sqrt{2}$ $\cdots$ (iii)

채점 기준	배점
(i) 한 변의 길이가 2인 정사각형의 대각선의 길이 구하기	20 %
(ii) a, b의 값 구하기	각 20 %
(iii) $\sqrt{2}a+\dfrac{a}{b}$의 값 구하기	40 %

6 (1) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{8+2\sqrt{12}}{6-2}=\dfrac{8+4\sqrt{3}}{4}=2+\sqrt{3}$

$1<\sqrt{3}<2$에서 $3<2+\sqrt{3}<4$이므로

$A=3$ $\cdots$ (i)

(2) $(\sqrt{3}-1)^2=4-2\sqrt{3}=4-\sqrt{12}$

$3<\sqrt{12}<4$에서 $0<4-\sqrt{12}<1$이므로

$4-\sqrt{12}$의 정수 부분은 0이고, 소수 부분은

$B=(4-\sqrt{12})-0=4-2\sqrt{3}$이다. $\cdots$ (ii)

(3) $B(A-B)=(4-2\sqrt{3})\{3-(4-2\sqrt{3})\}$

$=(4-2\sqrt{3})(-1+2\sqrt{3})$

$=-4+8\sqrt{3}+2\sqrt{3}-12$

$=-16+10\sqrt{3}$

$\therefore\ x=-16,\ y=10$ $\cdots$ (iii)

채점 기준	배점
(i) A의 값 구하기	30 %
(ii) B의 값 구하기	30 %
(iii) x, y의 값 구하기	각 20 %

7 |예시 답안|

조리개를 $F/2$, 셔터속도를 $\dfrac{1}{60}$초로 맞추고 사진을 찍었을 때, 렌즈를 통해 들어오는 빛의 양을 a라 하자.

조리개를 $F/5.6$으로 맞추면 조리개의 지름의 길이는 조리개를 $F/2$로 맞추었을 때의 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$배가 되므로 조리개의 넓이는

$\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2$배가 된다. $\cdots$ (i)

또 셔터속도를 $\dfrac{1}{15}$초로 맞추면 셔터속도는 $\dfrac{1}{60}$초로 맞추었을 때의 4배가 된다. $\cdots$ (ii)

따라서 사진기의 조리개를 $F/5.6$, 셔터속도를 $\dfrac{1}{15}$초로 맞추고 사진을 찍었을 때, 렌즈를 통해 들어오는 빛의 양은

$a\times\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\times4=\dfrac{1}{2}a$이므로 조리개를 $F/2$, 셔터속도를 $\dfrac{1}{60}$초로 맞추어 찍은 사진이 더 밝다. $\cdots$ (iii)

채점 기준	배점
(i) 조리개의 크기 비교하기	30 %
(ii) 셔터속도 비교하기	30 %
(iii) 두 사진 중 더 밝은 사진 말하기	40 %

단원 마무리하기

P. 32~34

1 ② **2** ③ **3** 9개 **4** 13, 14
5 3, 과정은 풀이 참조 **6** ③ **7** ④ **8** ②
9 ③ **10** ④ **11** $8-\sqrt{13}-\sqrt{5}$, 과정은 풀이 참조
12 ③ **13** ④ **14** ② **15** ⑤ **16** $2\sqrt{5}-1$
17 ④ **18** $(48+96\sqrt{2})\ \mathrm{cm}^3$ **19** 102, 과정은 풀이 참조
20 $\dfrac{8}{13}$

1 ㄱ. $\sqrt{1.69}=\sqrt{(1.3)^2}=1.3$이고 제곱근 1.3은 $\sqrt{1.3}$이다.

ㄴ. $\sqrt{(-5)^2}=5$이고 5의 음의 제곱근은 $-\sqrt{5}$이다.

ㄷ. $(-\sqrt{11})^2=11$이고 11의 제곱근은 $\pm\sqrt{11}$이다.

ㄹ. $1.\dot{7}=\frac{16}{9}$이고 제곱하여 $\frac{16}{9}$이 되는 수는 $\pm\frac{4}{3}$이다.

ㅁ. $\sqrt{0.567}=\sqrt{\frac{81\times7}{1000}}=\frac{9}{10}\sqrt{\frac{7}{10}}=0.9\sqrt{\frac{7}{10}}$

ㅂ. $0.2=\sqrt{(0.2)^2}=\sqrt{0.04}<\sqrt{0.2}$이므로 $-0.2>-\sqrt{0.2}$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅂ이다.

2 $a-b>0$에서 $a>b$이고, $ab<0$이므로

$a>0$, $b<0$, $b-2a<0$

$\therefore (-\sqrt{a})^2-\sqrt{(b-2a)^2}+\sqrt{b^2}=a-\{-(b-2a)\}-b$

$=a+b-2a-b=-a$

3 $\sqrt{3n}$이 2의 배수가 되어야 하므로 $\sqrt{3n}=2k$(k는 자연수)라 하고 양변을 제곱하면

$3n=4k^2 \quad \therefore n=\frac{4k^2}{3}$

이때 n이 자연수이므로 k는 3의 배수이어야 한다.

$k=3m$(m은 자연수)이라 하면

$n=\frac{4k^2}{3}=\frac{4\times(3m)^2}{3}=12m^2$

n은 1000 이하의 자연수이므로

$1\le n\le1000$에서 $1\le12m^2\le1000$

$\frac{1}{12}\le m^2\le\frac{1000}{12}=83.3\cdots \quad \therefore m=1, 2, 3, \cdots, 9$

따라서 $n=12\times1^2$, 12×2^2, 12×3^2, $\cdots$, 12×9^2의 9개이다.

4 $\sqrt{15}<\frac{x}{2}<3\sqrt{6}$에서 $2\sqrt{15}<x<6\sqrt{6}$, $\sqrt{60}<x<\sqrt{216}$

이때 x는 자연수이므로

$x=8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$ $\cdots$ ㉠

또 $5\le\sqrt{2x-1}<7$에서 $25\le2x-1<49$, $26\le2x<50$

$13\le x<25$

$\therefore x=13, 14, 15, \cdots, 24$ $\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $x=13$, 14이다.

5 $\sqrt{169}<\sqrt{173}<\sqrt{196}$, 즉 $13<\sqrt{173}<14$이므로

$\sqrt{173}$ 이하의 홀수는 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13의 7개이다.

$\therefore f(173)=7$ $\cdots$ (i)

$\sqrt{64}<\sqrt{73}<\sqrt{81}$, 즉 $8<\sqrt{73}<9$이므로

$\sqrt{73}$ 이하의 홀수는 1, 3, 5, 7의 4개이다.

$\therefore f(73)=4$ $\cdots$ (ii)

$\therefore f(173)-f(73)=7-4=3$ $\cdots$ (iii)

채점 기준	배점
(i) $f(173)$ 구하기	40 %
(ii) $f(73)$ 구하기	40 %
(iii) $f(173)-f(73)$의 값 구하기	20 %

6 유리수 : $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{18.\dot{7}}=\sqrt{\frac{169}{9}}=\frac{13}{3}$, $-\frac{1}{7}$, $\sqrt{\frac{9}{121}}=\frac{3}{11}$

무리수 : π, $\sqrt{6.4}$, $0.12233344445\cdots$, $-\sqrt{\frac{2}{5}}$

따라서 무리수는 4개이다.

7 ① (반례) 유리수 $a=\frac{1}{4}$이면 $\sqrt{\left|\frac{1}{4}\right|}=\frac{1}{2}$은 유리수이다.

② (반례) 무리수 $a=1+\sqrt{2}$이면 $a^2=(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$는 무리수이다.

③ (반례) 유리수 $a=0$, 무리수 $b=\sqrt{2}$이면 $ab=0\times\sqrt{2}=0$은 유리수이다.

④ 임의의 무리수 a에 대하여 $ab=1$을 만족하는 b가 유리수라고 가정하면 b는 0이 아닌 유리수이므로

$b=\frac{p}{q}$ (p, q는 정수, $p\neq0$, $q\neq0$)와 같이 나타낼 수 있다.

이때 $a=\frac{1}{b}=\frac{q}{p}$가 되어 a도 유리수가 된다. 즉, 무리수라는 가정에 모순이므로 b는 무리수이다.

⑤ (반례) 두 실수 $a=1+\sqrt{2}$, $b=1-\sqrt{2}$에 대하여 $a+b=2$, $ab=-1$로 유리수이지만 a, b는 무리수이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

8 $1-2\sqrt{6}=\sqrt{1}-\sqrt{24}<0$이므로

$\sqrt{(1-2\sqrt{6})^2}=2\sqrt{6}-1$

$4<2\sqrt{6}(=\sqrt{24})<5$에서 $3<2\sqrt{6}-1<4$이므로

$[(1-2\sqrt{6})^2]=3$ $\cdots$ ㉠

또 $4-\sqrt{18}=\sqrt{16}-\sqrt{18}<0$이므로

$\sqrt{(4-\sqrt{18})^2}=\sqrt{18}-4$

$4<\sqrt{18}<5$에서 $0<\sqrt{18}-4<1$

즉, $\sqrt{18}-4$의 정수 부분이 0이므로

$\langle(4-\sqrt{18})^2\rangle=\sqrt{18}-4$ $\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서

(주어진 식)$=3-2(\sqrt{18}-4)=3-6\sqrt{2}+8=11-6\sqrt{2}$

9 $\sqrt{7230}-\sqrt{0.000723}=\sqrt{72.3\times100}-\sqrt{\frac{7.23}{10000}}$

$=10\sqrt{72.3}-\frac{\sqrt{7.23}}{100}=10b-\frac{a}{100}$

10 $\sqrt{540}=\sqrt{100\times5.4}=10\sqrt{5.4}=10\sqrt{4\times1.35}$

$=20\sqrt{1.35}=20\times1.162=23.24$

11 $\square\mathrm{ABCD}=3\times3-4\times\left(\frac{1}{2}\times1\times2\right)=5$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{5}$ $\cdots$ (i)

이때 점 P에 대응하는 수는 $-6+\sqrt{5}$이다. $\cdots$ (ii)

$\square\mathrm{EFGH}=5\times5-4\times\left(\frac{1}{2}\times2\times3\right)=13$이므로

$\overline{\mathrm{EH}}=\overline{\mathrm{EQ}}=\sqrt{13}$ $\cdots$ (iii)

이때 점 Q에 대응하는 수는 $2-\sqrt{13}$이다. $\cdots$ (iv)

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$(2-\sqrt{13})-(-6+\sqrt{5})=8-\sqrt{13}-\sqrt{5}$ $\cdots$ (v)

채점 기준	배점
(i) 정사각형 ABCD의 한 변의 길이 구하기	20 %
(ii) 점 P에 대응하는 수 구하기	20 %
(iii) 정사각형 EFGH의 한 변의 길이 구하기	20 %
(iv) 점 Q에 대응하는 수 구하기	20 %
(v) 두 점 P, Q 사이의 거리 구하기	20 %

12 $a>0$, $b>0$이므로 $a=\sqrt{a^2}$, $b=\sqrt{b^2}$

$$\begin{aligned}\therefore \text{(주어진 식)}&=\sqrt{b^2}\sqrt{\frac{a}{3b}}-\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{a^2}\sqrt{b}}+\sqrt{8ab}\\&=\sqrt{\frac{ab^2}{3b}}-\sqrt{\frac{3a}{a^2b}}+\sqrt{8ab}\\&=\sqrt{\frac{ab}{3}}-\sqrt{\frac{3}{ab}}+\sqrt{8ab}\\&=\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{16}\\&=\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}+4=4-\frac{\sqrt{6}}{6}\end{aligned}$$

13 ① $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-4^2=(8+2\sqrt{15})-16$
$\qquad=2\sqrt{15}-8=\sqrt{60}-\sqrt{64}<0$

$\therefore\ \sqrt{3}+\sqrt{5}<4$

② $(\sqrt{10}-3)-(\sqrt{10}-\sqrt{8})=-3+\sqrt{8}=-\sqrt{9}+\sqrt{8}<0$

$\therefore\ \sqrt{10}-3<\sqrt{10}-\sqrt{8}$

③ $2<\sqrt{5}<3$이므로 $2<5-\sqrt{5}<3$

$1<\sqrt{3}<2$이므로 $1<3-\sqrt{3}<2$

$\therefore\ 5-\sqrt{5}>3-\sqrt{3}$

④ $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}=-(1+\sqrt{2})$, $\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}=-(2+\sqrt{5})$이고,

$1+\sqrt{2}<2+\sqrt{5}$이므로 $-(1+\sqrt{2})>-(2+\sqrt{5})$

$\therefore\ \dfrac{1}{1-\sqrt{2}}>\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}$

⑤ $(\sqrt{27}+\sqrt{2})-(\sqrt{32}+\sqrt{3})=3\sqrt{3}+\sqrt{2}-4\sqrt{2}-\sqrt{3}$
$\qquad=2\sqrt{3}-3\sqrt{2}=\sqrt{12}-\sqrt{18}<0$

$\therefore\ \sqrt{27}+\sqrt{2}<\sqrt{32}+\sqrt{3}$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

14 $(3\sqrt{2}+4)(2-a\sqrt{2})=6\sqrt{2}-6a+8-4a\sqrt{2}$
$\qquad=(-6a+8)+(6-4a)\sqrt{2}$

이 수가 유리수가 되려면 $6-4a=0$이어야 하므로

$4a=6 \qquad \therefore\ a=\dfrac{3}{2}$

15 $(x+\sqrt{5})(y-\sqrt{5})=xy-x\sqrt{5}+y\sqrt{5}-5$
$\qquad=(xy-5)+(-x+y)\sqrt{5}$
$\qquad=7-4\sqrt{5}$

따라서 $xy-5=7$이므로 $xy=12$, $-x+y=-4$이므로

$x-y=4$

$\therefore\ x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=4^2+2\times12=40$

16 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{19}+\sqrt{20}}$

$$\begin{aligned}&=\frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}\\&\quad+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{(\sqrt{3}+\sqrt{4})(\sqrt{3}-\sqrt{4})}+\cdots+\frac{\sqrt{19}-\sqrt{20}}{(\sqrt{19}+\sqrt{20})(\sqrt{19}-\sqrt{20})}\\&=-(1-\sqrt{2})-(\sqrt{2}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{4})-\cdots-(\sqrt{19}-\sqrt{20})\\&=-\{(1-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{3}})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{4}})+\cdots+(\cancel{\sqrt{19}}-\sqrt{20})\}\\&=-(1-\sqrt{20})=\sqrt{20}-1=2\sqrt{5}-1\end{aligned}$$

17 $a+b=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}$

$$\begin{aligned}a-b&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}-\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\therefore$ (주어진 식)$=(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$
$\qquad=6-(5-2\sqrt{6})=1+2\sqrt{6}$

다른 풀이 $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$이므로

(주어진 식)$=4ab=4\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned}&=\{\sqrt{6}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}\times\{\sqrt{6}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}\\&=(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2\\&=6-(5-2\sqrt{6})=1+2\sqrt{6}\end{aligned}$$

18 (각뿔대의 부피)$=$(큰 사각뿔의 부피)$-$(작은 사각뿔의 부피)

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{3}\times(3+\sqrt{18})^2\times\{8(2-\sqrt{2})+16(\sqrt{2}-1)\}\\&\quad-\frac{1}{3}\times3^2\times8(2-\sqrt{2})\\&=\frac{1}{3}\times(27+18\sqrt{2})\times8\sqrt{2}-24(2-\sqrt{2})\\&=\frac{1}{3}\times9(3+2\sqrt{2})\times8\sqrt{2}-24(2-\sqrt{2})\\&=24\sqrt{2}(3+2\sqrt{2})-24(2-\sqrt{2})\\&=72\sqrt{2}+96-48+24\sqrt{2}\\&=48+96\sqrt{2}\ (\mathrm{cm}^3)\end{aligned}$$

19 $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{5}+\sqrt{6})}$

$\qquad=-11-2\sqrt{30}$ $\cdots$(i)

이므로 $x+11=-2\sqrt{30}$

양변을 제곱하면 $(x+11)^2=(-2\sqrt{30})^2$

$x^2+22x+121=120$

$\therefore\ x^2+22x=-1$ $\cdots$(ii)

$\therefore$ (주어진 식)$=100-2(x^2+22x)$

$\qquad=100-2\times(-1)=102$ $\cdots$(iii)

채점 기준	배점
(i) $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}$을 간단히 하기	30 %
(ii) x^2+22x의 값 구하기	40 %
(iii) 주어진 식의 값 구하기	30 %

20 $\dfrac{6}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{6(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}=3+\sqrt{3}$이고

$1<\sqrt{3}<2$이므로 $4<3+\sqrt{3}<5$

$\therefore\ a=4,\ b=(3+\sqrt{3})-4=\sqrt{3}-1$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{1}{4+(\sqrt{3}-1)+1}+\dfrac{1}{4-(\sqrt{3}-1)-1}$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{4+\sqrt{3}}+\frac{1}{4-\sqrt{3}}=\frac{(4-\sqrt{3})+(4+\sqrt{3})}{(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}\\&=\frac{8}{16-3}=\frac{8}{13}\end{aligned}$$

Ⅱ 인수분해와 이차방정식

1 인수분해

STEP 1 개념 + 대표 문제 확인하기 P. 36~38

1 ④ 2 13 3 $-2a-2$ 4 $(6,\ 4)$, $(8,\ 2)$
5 $(x+4)(3x-1)$ 6 $(x-2y+3z)^2$ 7 ④
8 $(a+2b+3)(a+2b-5)$ 9 $(x^2-2x-2)(x^2-2x-9)$
10 4 11 $(x-y-5)(x-y+2)$
12 $(k^2+k+4)(k^2-k+4)$ 13 ㄱ, 8100 14 1
15 225 16 $-10\sqrt{3}-5$ 17 1 18 $3x-1$

1 ④ $-2a^2-3ab+9b^2=(-2a+3b)(a+3b)$

2 $4x^2+ax+1$이 완전제곱식이 되려면
$a=\pm2\times2\times1$ $\therefore a=4$ ($\because a>0$)
x^2-6x+b가 완전제곱식이 되려면
$b=\left(\dfrac{-6}{2}\right)^2=(-3)^2=9$ $\therefore a+b=13$

3 $-4<a<2$에서 $a-2<0$, $a+4>0$이므로
$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-4a+4}-\sqrt{a^2+8a+16}&=\sqrt{(a-2)^2}-\sqrt{(a+4)^2}\\&=-(a-2)-(a+4)\\&=-2a-2\end{aligned}$$

4 $xy-x-5y+5=x(y-1)-5(y-1)=(x-5)(y-1)$
즉, $(x-5)(y-1)=3$이고 x, y는 양의 정수이므로
$x-5=1$, $y-1=3$ 또는 $x-5=3$, $y-1=1$
따라서 주어진 식을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(6,\ 4)$, $(8,\ 2)$이다.

5 승재는 x의 계수를 잘못 보았으므로
$(x+2)(3x-2)=3x^2+4x-4$에서 처음 이차식의 상수항은 -4이다.
보아는 상수항을 잘못 보았으므로
$(x+3)(3x+2)=3x^2+11x+6$에서 처음 이차식의 x의 계수는 11이다.
따라서 처음 이차식은 $3x^2+11x-4$이므로 이 식을 인수분해하면
$3x^2+11x-4=(x+4)(3x-1)$

6 $$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=x^2+(-2y)^2+(3z)^2+2\times x\times(-2y)\\&\quad+2\times(-2y)\times3z+2\times x\times3z\\&=(x-2y+3z)^2\end{aligned}$$

7 $$\begin{aligned}6x^3y^2-15x^2y^3-9xy^4&=3xy^2(2x^2-5xy-3y^2)\\&=3xy^2(x-3y)(2x+y)\end{aligned}$$
따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ④ $2x-y$이다.

8 $a+2b=A$로 놓으면
$$\begin{aligned}(a+2b)(a+2b-2)-15&=A(A-2)-15=A^2-2A-15\\&=(A+3)(A-5)\\&=(a+2b+3)(a+2b-5)\end{aligned}$$

9 $$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(x+1)(x-3)(x+2)(x-4)-6\\&=(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)-6\end{aligned}$$
이때 $x^2-2x=X$로 놓으면
$$\begin{aligned}(X-3)(X-8)-6&=X^2-11X+18\\&=(X-2)(X-9)\\&=(x^2-2x-2)(x^2-2x-9)\end{aligned}$$

10 $$\begin{aligned}25-4x^2-y^2+4xy&=25-(4x^2-4xy+y^2)\\&=5^2-(2x-y)^2\\&=(5+2x-y)(5-2x+y)\end{aligned}$$
따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=5$, $d=-2$이므로
$a+b+c+d=2+(-1)+5+(-2)=4$

11 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$$\begin{aligned}x^2+y^2-3x+3y-2xy-10&=x^2-(2y+3)x+y^2+3y-10\\&=x^2-(2y+3)x+(y+5)(y-2)\\&=(x-y-5)(x-y+2)\end{aligned}$$

12 $$\begin{aligned}k^4+7k^2+16&=k^4+8k^2+16-k^2=(k^2+4)^2-k^2\\&=(k^2+k+4)(k^2-k+4)\end{aligned}$$

13 $$\begin{aligned}81.5^2+17\times81.5+8.5^2&=81.5^2+2\times81.5\times8.5+8.5^2\\&=(81.5+8.5)^2\\&=90^2=8100\end{aligned}$$
따라서 주어진 수를 계산하는 데 가장 알맞은 인수분해 공식은 ㄱ이고, 그 값은 8100이다.

14 $$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\frac{96^2-16+35^2-65^2}{81^2-19^2}=\frac{96^2-4^2+35^2-65^2}{81^2-19^2}\\&=\frac{(96+4)(96-4)+(35+65)(35-65)}{(81+19)(81-19)}\\&=\frac{100\times92+100\times(-30)}{100\times62}=\frac{62}{62}=1\end{aligned}$$

15 $225=x$로 놓으면
$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\sqrt{\left(x-2+\frac{1}{x}\right)\left(x+2+\frac{1}{x}\right)}+\frac{1}{x}\\&=\sqrt{\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)+2\right\}}+\frac{1}{x}\\&=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2^2}+\frac{1}{x}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}+\frac{1}{x}\\&=\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\ \left(\because x-\frac{1}{x}>0\right)\\&=x=225\end{aligned}$$

16 $x=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$,
$y=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$이므로
$x+y=4$, $x-y=-2\sqrt{3}$
$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식})&=x^2-(y^2+2y+1)\\&=x^2-(y+1)^2\\&=(x+y+1)(x-y-1)\\&=(4+1)(-2\sqrt{3}-1)\\&=-10\sqrt{3}-5\end{aligned}$$

17 $x-2=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=X^2+10X+21=(X+3)(X+7)\\&=(x+1)(x+5)=(\sqrt{5}-3+1)(\sqrt{5}-3+5)\\&=(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)=5-4=1\end{aligned}$$

18 도형 (가)의 넓이는

$(3x+2)^2-3^2=(3x+2+3)(3x+2-3)=(3x+5)(3x-1)$

이때 도형 (가), (나)의 넓이는 서로 같고, 도형 (나)의 가로의 길이가 $3x+5$이므로 세로의 길이는 $3x-1$이다.

STEP 2 내신 5% 따라잡기

P. 39~43

1 ④	**2** $\frac{1}{6}$	**3** ①	**4** ②		
5 $(18,\ 5)$, $(-22,\ -5)$			**6** $2(a+c)(a-c)$		**7** ②
8 8, 18, 30, 44		**9** -19	**10** ②	**11** ③	**12** 2
13 16	**14** ①	**15** ④	**16** 0	**17** ②	**18** $4x$
19 -200	**20** $900\pi\ \text{cm}^3$		**21** $\frac{101}{200}$	**22** 16	**23** ⑤
24 ④	**25** 63	**26** 48	**27** -2	**28** 7	**29** ③
30 32 cm		**31** $2x+3y$		**32** 149, 151	
33 $A_{25}(337,\ -312)$					

1 ① $x^2y-2xy^2=xy(x-2y)$

② $a(3a-2b)-(2b-3a)=a(3a-2b)+(3a-2b)$
$=(a+1)(3a-2b)$

③ $ax-bx-by+ay=x(a-b)+y(a-b)$
$=(x+y)(a-b)$

④ $(3a+5b)(2x-1)-3a-5b$
$=(3a+5b)(2x-1)-(3a+5b)$
$=(3a+5b)(2x-2)$
$=2(3a+5b)(x-1)$

⑤ $ab-bc-b^2+ca=ab+ca-bc-b^2$
$=a(b+c)-b(b+c)=(a-b)(b+c)$

따라서 인수분해를 바르게 한 것은 ④이다.

2 $xy-2x-y+2=x(y-2)-(y-2)=(x-1)(y-2)$이므로 $\sqrt{(x-1)(y-2)}$가 자연수가 되려면 $(x-1)(y-2)$가 제곱인 수이어야 한다. (단, $1\le x-1\le 5$, $1\le y-2\le 4$)

(ⅰ) $x-1=1$, $y-2=1$일 때, $x=2$, $y=3$
(ⅱ) $x-1=1$, $y-2=4$일 때, $x=2$, $y=6$
(ⅲ) $x-1=2$, $y-2=2$일 때, $x=3$, $y=4$
(ⅳ) $x-1=4$, $y-2=1$일 때, $x=5$, $y=3$
(ⅴ) $x-1=3$, $y-2=3$일 때, $x=4$, $y=5$
(ⅵ) $x-1=4$, $y-2=4$일 때, $x=5$, $y=6$

따라서 A, B 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\times 6=36$(가지)이고, (ⅰ)~(ⅵ)에서 $\sqrt{xy-2x-y+2}$가 자연수가 되는 경우의 수는 6가지이므로 구하는 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

3 $a>1$에서 $0<\frac{1}{a}<1$이므로 $a+\frac{1}{a}>0$

$0<b<1$에서 $\frac{1}{b}>1$이므로 $b-\frac{1}{b}<0$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식})&=\sqrt{a^2+2+\frac{1}{a^2}}-\sqrt{b^2-2+\frac{1}{b^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2}}+\sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{\left(b-\frac{1}{b}\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{a^2}}+\sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2}\\&=a+\frac{1}{a}-\left\{-\left(b-\frac{1}{b}\right)\right\}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\\&=a+\frac{1}{a}+b-\frac{1}{b}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=a+b\end{aligned}$$

4 $\sqrt{x}=a+3$이므로 양변을 제곱하면

$x=(a+3)^2=a^2+6a+9$

이때 $-2<a<4$에서 $a+2>0$, $a-4<0$이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\sqrt{a^2+6a+9-2a-5}+\sqrt{a^2+6a+9-14a+7}\\&=\sqrt{a^2+4a+4}+\sqrt{a^2-8a+16}\\&=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(a-4)^2}\\&=(a+2)-(a-4)=6\end{aligned}$$

5 $4x^2+(m+2)xy+25y^2$이 완전제곱식이 되려면

$m+2=\pm 2\times 2\times 5$ $\quad\therefore m=18$ 또는 $m=-22$

(ⅰ) $m=18$일 때,
$4x^2+20xy+25y^2=(2x+5y)^2$이므로 $n=5$

(ⅱ) $m=-22$일 때,
$4x^2-20xy+25y^2=(2x-5y)^2$이므로 $n=-5$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍 $(m,\ n)$은

$(18,\ 5)$, $(-22,\ -5)$

6 (주어진 식)

$$\begin{aligned}&=(a^2-c^2+2abc)-(b^2-a^2+4abc)-(c^2-b^2-2abc)\\&=a^2-c^2+2abc-b^2+a^2-4abc-c^2+b^2+2abc\\&=2a^2-2c^2=2(a^2-c^2)=2(a+c)(a-c)\end{aligned}$$

7 $8n^3-2n=2n(4n^2-1)=(2n-1)\times 2n\times(2n+1)$

즉, $8n^3-2n$은 연속하는 세 자연수의 곱의 꼴로 나타낼 수 있다.

이때 $2n-1\ge 10$이면 $(2n-1)\times 2n\times(2n+1)>10^3$이므로 네 자리 이상의 자연수가 되고,

$2n+1\le 4$이면 $(2n-1)\times 2n\times(2n+1)<4^3$이므로 두 자리 이하의 자연수가 된다.

따라서 $2n-1<10$, $2n+1>4$에서 $\frac{3}{2}<n<\frac{11}{2}$이므로

$n=2,\ 3,\ 4,\ 5$

(ⅰ) $n=2$일 때, $3\times 4\times 5=60$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.
(ⅱ) $n=3$일 때, $5\times 6\times 7=210$
(ⅲ) $n=4$일 때, $7\times 8\times 9=504$
(ⅳ) $n=5$일 때, $9\times 10\times 11=990$

따라서 (ⅰ)~(ⅳ)에서 세 자리의 자연수 중 가장 작은 수는 210이다.

8 $x^2+7x-k=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$이므로

$a+b=7$, $ab=-k$

이때 $1\le k\le 50$이므로 $-50\le ab\le -1$

$a>b$라 하면 a와 b는 서로 다른 부호이므로 $a>0$, $b<0$
따라서 합이 7이고, $-50 \le ab \le -1$을 만족하는 두 정수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(8,\ -1)$, $(9,\ -2)$, $(10,\ -3)$, $(11,\ -4)$
따라서 자연수 $k(=-ab)$의 값은 8, 18, 30, 44이다.

9 $3x^2+ax+10=(x-5)(3x+m)$이라 하면
(우변)$=3x^2+(m-15)x-5m$이므로
$m-15=a$, $-5m=10$ $\quad \therefore m=-2$, $a=-17$
$bx^2+13x-15=(x-5)(bx+n)$이라 하면
(우변)$=bx^2+(n-5b)x-5n$이므로
$n-5b=13$, $-5n=-15$ $\quad \therefore n=3$, $b=-2$
$\therefore a+b=-17+(-2)=-19$

10 (주어진 식)$=x(yz-y-z+1)-(yz-y-z+1)$
$=(x-1)(yz-y-z+1)$
$=(x-1)\{y(z-1)-(z-1)\}$
$=(x-1)(y-1)(z-1)$

11 $P(x)=(\underbrace{x-3}_{A})^2-4(\underbrace{x-3}_{A})+4$
$=\{(\underbrace{x-3}_{A})-2\}^2=(x-5)^2$
$\therefore P(x)\times P(x+10)=(x-5)^2\{(x+10)-5\}^2$
$=(x-5)^2(x+5)^2$
$=\{(x-5)(x+5)\}^2$
$=(x^2-25)^2$
따라서 $P(x)\times P(x+10)$의 인수가 아닌 것은 ③이다.

12 $3x^4+2x^3-3x-2=x^3(3x+2)-(3x+2)$
$=(3x+2)(x^3-1)$
$=(3x+2)(x-1)(x^2+x+1)$
$\therefore a=2$, $b=-1$, $c=1$ $\quad \therefore a+b+c=2$

개념 더하기 다시 보기

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

13 (주어진 식)$=x(x+6)(x+2)(x+4)+k$
$=(x^2+6x)(x^2+6x+8)+k$
$x^2+6x=X$로 놓으면
$X(X+8)+k=X^2+8X+k$
따라서 이 식이 완전제곱식이 되도록 하는 k의 값은
$k=\left(\frac{8}{2}\right)^2=4^2=16$

14 x, y는 연속하는 두 자연수이므로 $y=x+1$이라 하면
$X=\sqrt{x^2+y^2+x^2y^2}=\sqrt{x^2+(x+1)^2+\{x(x+1)\}^2}$
$=\sqrt{2x^2+2x+1+(x^2+x)^2}=\sqrt{(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1}$
이때 $x^2+x=A$로 놓으면
$X=\sqrt{A^2+2A+1}=\sqrt{(A+1)^2}$
$=\sqrt{(x^2+x+1)^2}=x^2+x+1$ ($\because$ x는 자연수)
$=x(x+1)+1$
따라서 연속하는 두 자연수의 곱 $x(x+1)$은 항상 짝수이므로
$X=x(x+1)+1$은 항상 홀수이다.

15 $x+y=X$로 놓으면
$(x+y)^2-6(x+y)-55=X^2-6X-55$
$=(X+5)(X-11)$
$=(x+y+5)(x+y-11)$
이 식의 값이 소수가 되어야 하므로
$x+y+5=1$ 또는 $x+y-11=1$
이때 x, y는 자연수이므로 $x+y-11=1$
$\therefore x+y=12$
따라서 $x+y=12$이면 $x+y+5=17$은 소수이므로
$x+y=12$를 만족하는 두 자연수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(1,\ 11)$, $(2,\ 10)$, $(3,\ 9)$, $\cdots$, $(11,\ 1)$의 11개이다.

16 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=k$라 하면
(다)에서 $x^2\left(k-\frac{1}{x}\right)+y^2\left(k-\frac{1}{y}\right)+z^2\left(k-\frac{1}{z}\right)=5$이므로
$x^2k-x+y^2k-y+z^2k-z=5$, $k(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)=5$
이때 (나)에서 $x+y+z=-5$이므로
$k(x^2+y^2+z^2)+5=5$
따라서 $k(x^2+y^2+z^2)=0$에서 $k=0$($\because$ $x^2+y^2+z^2>0$)이므로
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$이다.

17 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$(1-x^2)(1-y^2)-4xy$
$=1-x^2-y^2+x^2y^2-4xy$
$=(y^2-1)x^2-4yx-(y^2-1)$
$=(y+1)(y-1)x^2-4yx-(y+1)(y-1)$
$=\{(y-1)x-(y+1)\}\{(y+1)x+(y-1)\}$
$=(xy-x-y-1)(xy+x+y-1)$
따라서 $a=-1$, $b=-1$, $c=-1$, $d=1$, $e=-1$이므로
$a+b+c+d+e=-3$

다른 풀이 $(1-x^2)(1-y^2)-4xy$
$=1-x^2-y^2+x^2y^2-4xy$
$=(1-2xy+x^2y^2)-(x^2+2xy+y^2)$
$=(xy-1)^2-(x+y)^2$
$=(xy-x-y-1)(xy+x+y-1)$
따라서 $a=-1$, $b=-1$, $c=-1$, $d=1$, $e=-1$이므로
$a+b+c+d+e=-3$

18 x^4-5x^2+4에서 $x^2=X$로 놓으면
$x^4-5x^2+4=(x^2)^2-5x^2+4=X^2-5X+4$
$=(X-1)(X-4)=(x^2-1)(x^2-4)$
$=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$
$\therefore (x+1)+(x-1)+(x+2)+(x-2)=4x$

개념 더하기 다시 보기

x^4+ax^2+b의 꼴의 인수분해
① $x^2=X$로 놓고 인수분해 공식을 이용한다.
② ①의 방법으로 인수분해되지 않으면 A^2-B^2의 꼴로 변형하여 인수분해한다.

19 (주어진 식)

$=(1^2-3^2)+(5^2-7^2)+(9^2-11^2)+(13^2-15^2)+(17^2-19^2)$

$=(1-3)(1+3)+(5-7)(5+7)+(9-11)(9+11)$

$\quad+(13-15)(13+15)+(17-19)(17+19)$

$=-2\times(1+3+5+7+9+11+13+15+17+19)$

⇨ 합이 20인 것이 5쌍

$=-2\times(20\times5)=-200$

20 (입체도형의 부피)=(큰 원기둥의 부피)−(작은 원기둥의 부피)

$=\pi\times16.5^2\times10-\pi\times13.5^2\times10$

$=10\pi(16.5^2-13.5^2)$

$=10\pi(16.5+13.5)(16.5-13.5)$

$=10\pi\times30\times3=900\pi\ (\text{cm}^3)$

21 (주어진 식)

$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{99^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times$

$\quad\cdots\times\left(1-\frac{1}{99}\right)\times\left(1+\frac{1}{99}\right)\times\left(1-\frac{1}{100}\right)\times\left(1+\frac{1}{100}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\cdots\times\frac{\cancel{98}}{\cancel{99}}\times\frac{\cancel{100}}{\cancel{99}}\times\frac{\cancel{99}}{\cancel{100}}\times\frac{101}{100}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{101}{100}=\frac{101}{200}$

22 $2^{48}-1=(2^{24}+1)(2^{24}-1)$

$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{12}-1)$

$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^6+1)(2^6-1)$

$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^6+1)(2^3+1)(2^3-1)$

이때 $2^3+1=9$, $2^3-1=7$이므로 $2^{48}-1$은 7, 9로 나누어떨어진다.

따라서 이 두 자연수의 합은 $7+9=16$이다.

23 $2014=A$, $2^{100}=B$로 놓으면

(주어진 식)$=\dfrac{A^3-1}{(A+1)A+1}+\dfrac{2^3B+B-2^3-1}{B-1}$

$=\dfrac{(A-1)(A^2+A+1)}{A^2+A+1}+\dfrac{(2^3+1)B-(2^3+1)}{B-1}$

$=A-1+\dfrac{(2^3+1)(B-1)}{B-1}$ ($\because$ $A^2+A+1\neq0$)

$=A-1+2^3+1$ ($\because$ $B-1\neq0$)

$=2014+2^3=2022$

24 $a(a-1)-b(b+1)=a^2-a-b^2-b=a^2-b^2-a-b$

$=(a+b)(a-b)-(a+b)$

$=(a+b)(a-b-1)$

이때 $a+b=-3$이므로 $-3\times(a-b-1)=-7$

$a-b-1=\frac{7}{3}\qquad\therefore\ a-b=\frac{10}{3}$

25 $2x+2y+xy=3\qquad\cdots$ ㉠

$x+y-xy=6\qquad\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $3x+3y=9$이므로

$3(x+y)=9\qquad\therefore\ x+y=3$

$x+y=3$을 ㉡에 대입하면

$3-xy=6\qquad\therefore\ xy=-3$

$x^3-x^2y-xy^2+y^3=x^2(x-y)-y^2(x-y)$

$=(x-y)(x^2-y^2)$

$=(x-y)^2(x+y)$

이때 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=3^2-4\times(-3)=21$이므로

$x^3-x^2y-xy^2+y^3=(x-y)^2(x+y)=21\times3=63$

26 $x^2y-xy^2-3x+3y=xy(x-y)-3(x-y)$

$=(xy-3)(x-y)$

$xy=12$이므로

$(xy-3)(x-y)=36$에서 $9(x-y)=36$

$\therefore\ x-y=4$

이때 $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$이므로

$(x+y)^2=4^2+4\times12$, $(x+y)^2=64$

$\therefore\ x+y=8$ ($\because$ $x+y>0$)

$\therefore\ \sqrt{6xy(x^2-y^2)}=\sqrt{6xy(x+y)(x-y)}$

$=\sqrt{6\times12\times8\times4}$

$=\sqrt{(2^4\times3)^2}=48$

27 주어진 식에서 분자를 x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$3x^2+4xy+y^2+6x+2y=3x^2+(4y+6)x+y^2+2y$

$=3x^2+(4y+6)x+y(y+2)$

$=(3x+y)(x+y+2)$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{(3x+y)(x+y+2)}{x+y+2}$

$=3x+y$ ($\because$ $x+y+2\neq0$)

$=3(\sqrt{5}-2)+(4-3\sqrt{5})$

$=3\sqrt{5}-6+4-3\sqrt{5}=-2$

28 (주어진 식)

$=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)$

$=\frac{1}{2}\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

이때 $y-z=1$, $z-x=2$이므로 두 식을 변끼리 더하면

$-x+y=3$, $x-y=-3$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{1}{2}\times\{(-3)^2+1^2+2^2\}=\frac{1}{2}\times14=7$

29 $2<\sqrt{7}<3$에서 $\sqrt{7}$의 정수 부분이 2이므로 $a=\sqrt{7}-2$

또 $3<2\sqrt{3}(=\sqrt{12})<4$에서 $1<5-2\sqrt{3}<2$이므로 $b=1$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{a^3+a^2b-b^3-ab^2}{a-b}=\dfrac{a^2(a+b)-b^2(a+b)}{a-b}$

$=\dfrac{(a^2-b^2)(a+b)}{a-b}=\dfrac{(a+b)^2(a-b)}{a-b}$

$=(a+b)^2$ ($\because$ $a-b\neq0$)

$=(\sqrt{7}-2+1)^2=8-2\sqrt{7}$

30 $\overline{AC}$를 지름으로 하는 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$2\pi r=36\pi \quad \therefore r=18$

즉, $\overline{AC}=2r=2\times18=36$ (cm)이므로 $\overline{BC}=a$ cm라 하면

(색칠한 부분의 넓이)

=($\overline{AD}$를 지름으로 하는 원의 넓이)

−($\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 넓이)

$=\pi\left(\frac{36+a}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{36-a}{2}\right)^2=\pi\left\{\left(\frac{36+a}{2}\right)^2-\left(\frac{36-a}{2}\right)^2\right\}$

$=\pi\left(\frac{36+a}{2}+\frac{36-a}{2}\right)\left(\frac{36+a}{2}-\frac{36-a}{2}\right)$

$=\pi\times36\times a$

$=144\pi$ (cm^2)

따라서 $\overline{BC}=a=4$ (cm)이므로

$\overline{AB}=\overline{AC}-\overline{BC}=36-4=32$ (cm)

31 (색종이 A의 넓이)

=(색종이 C의 넓이)

−(색종이 C에서 색종이 B와 겹치지 않은 부분의 넓이)

−(색종이 B에서 색종이 A와 겹치지 않은 부분의 넓이)

$=(3x+4y)^2-(4x^2+11xy+5y^2)-(x^2+xy+2y^2)$

$=(9x^2+24xy+16y^2)-(4x^2+11xy+5y^2)-(x^2+xy+2y^2)$

$=4x^2+12xy+9y^2$

$=(2x+3y)^2$

따라서 색종이 A의 한 변의 길이는 $2x+3y$이다.

32 22499는 두 소수의 곱으로 나타내어지므로 두 소수의 곱이 22499가 되는 수를 찾으면

$22499=22500-1=150^2-1^2=(150+1)(150-1)=151\times149$

따라서 22499는 두 소수 149와 151의 곱으로 나타낼 수 있으므로 복호 키는 149와 151이다.

33 n이 홀수일 때는 A_{n-1}의 x좌표가, n이 짝수일 때는 y좌표가 변하므로 원점에서 출발하여 1번째의 좌표는 $A_1(1^2,\ 0)$, 2번째의 좌표는 $A_2(1^2,\ 2^2)$, 3번째의 좌표는 $A_3(1^2-3^2,\ 2^2)$, 4번째의 좌표는 $A_4(1^2-3^2,\ 2^2-4^2)$, …

점 A_{25}는 점 A_{24}에서 x축의 방향으로 25^2만큼 이동하므로 점 A_{25}의 x좌표는

$1^2-3^2+5^2-7^2+\cdots+21^2-23^2+25^2$

$=(1-3)(1+3)+(5-7)(5+7)+\cdots+(21-23)(21+23)+25^2$

$=-2\times(1+3+5+7+\cdots+21+23)+25^2$

$=-2\times(24\times6)+625$

$=-288+625$

$=337$

점 A_{25}의 y좌표는

$2^2-4^2+6^2-8^2+\cdots+22^2-24^2$

$=(2-4)(2+4)+(6-8)(6+8)+\cdots+(22-24)(22+24)$

$=-2\times(2+4+6+8+\cdots+22+24)$

$=-2\times(26\times6)$

$=-312$

따라서 점 A_{25}의 좌표는 $A_{25}(337,\ -312)$이다.

STEP 3 내신 1% 뛰어넘기 P. 44~45

01 ⑤ **02** $2a$ **03** 13개 **04** 정삼각형 **05** 28
06 $(b-a)(b-c)(c-a)(a+b+c)$
07 72 **08** $k=7n+1$ **09** $9-\sqrt{3}$

01 길잡이 두 자연수 x, y에 대하여 식의 값이 자연수이므로 $9xy-6x$와 $\frac{x}{y}$가 자연수이어야 함을 이용한다.

x, y가 자연수이므로 $9xy-6x=3x(3y-2)$는 자연수이고, 주어진 식을 만족하려면 $\frac{x}{y}$도 자연수이어야 한다.

따라서 $x=ky$ (k는 자연수)라 하고 주어진 식의 좌변에 대입하면

$9ky^2-6ky+k=k(9y^2-6y+1)$

$=k(3y-1)^2$

이때 $k(3y-1)^2=242$이고 $242=2\times11^2=242\times1^2$이므로

$k=2$ 또는 $k=242$

(i) $k=2$일 때, $3y-1=11 \quad \therefore y=4,\ x=8$

(ii) $k=242$일 때, $3y-1=1$, 즉 $y=\frac{2}{3}$이므로 자연수가 아니다.

따라서 (i), (ii)에서 $x=8$, $y=4$이므로

$x+y=8+4=12$

02 길잡이 연립방정식의 해를 구하여 주어진 식에 대입한다.

$\begin{cases} 9x-ay=81 & \cdots ㉠ \\ ax-y=a^3 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡$\times a$를 하면

$(9-a^2)x=81-a^4$, $(9-a^2)x=(9+a^2)(9-a^2)$

이때 $0<a<3$이므로 $9-a^2\neq0$

$\therefore x=a^2+9 \quad \cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$a(a^2+9)-y=a^3$, $a^3+9a-y=a^3 \quad \therefore y=9a$

따라서 $\alpha=a^2+9$, $\beta=9a$이므로

$\sqrt{\alpha+\frac{2}{3}\beta}-\sqrt{\alpha-\frac{2}{3}\beta}=\sqrt{a^2+9+\frac{2}{3}\times9a}-\sqrt{a^2+9-\frac{2}{3}\times9a}$

$=\sqrt{a^2+6a+9}-\sqrt{a^2-6a+9}$

$=\sqrt{(a+3)^2}-\sqrt{(a-3)^2}$

$=(a+3)+(a-3)$ ($\because 0<a<3$)

$=2a$

03 길잡이 주어진 식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되기 위한 일차항의 계수와 상수항 사이의 관계를 알아본다.

다항식 x^2-2x+A (A는 $-200\leq A\leq-1$인 정수)가 일차항의 계수가 1이고 상수항이 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 A는 합이 -2이고, 부호가 서로 다른 두 정수의 곱이어야 한다.

따라서 부호가 서로 다른 두 정수 중 합이 -2이고, 곱이 -1, -2, -3, …, -200인 두 수를 순서쌍으로 나타내면

$(1,\ -3)$, $(2,\ -4)$, $(3,\ -5)$, …, $(13,\ -15)$이므로 구하는 다항식의 개수는 13개이다.

04 길잡이 먼저 주어진 식의 좌변을 인수분해한다.

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)$

$\quad+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+b+c\neq0$

따라서 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$에서 $a=b=c$이므로

주어진 식을 만족하는 삼각형은 정삼각형이다.

개념 더하기 다시 보기

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

05 **길잡이** 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

주어진 식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$

$=x(yz+y+z+1)+(yz+y+z+1)=(x+1)(yz+y+z+1)$

$=(x+1)\{y(z+1)+(z+1)\}=(x+1)(y+1)(z+1)$

$\therefore (x+1)(y+1)(z+1)=1001=7\times11\times13$

이때 x, y, z가 $x<y<z$인 양의 정수이므로

$x+1=7$, $y+1=11$, $z+1=13$ $\quad\therefore x=6$, $y=10$, $z=12$

$\therefore x+y+z=6+10+12=28$

06 **길잡이** 주어진 식을 전개한 후, 최고 차수가 가장 낮은 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

(주어진 식)

$=a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

$=(b-c)a^3-(b^3-c^3)a+bc(b^2-c^2)$

$=(b-c)a^3-(b-c)(b^2+bc+c^2)a+bc(b-c)(b+c)$

$=(b-c)\{\underbrace{a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)}_{㉠}\}$

이때 ㉠을 b에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$(c-a)b^2+(c^2-ac)b+a^3-ac^2$

$=(c-a)b^2+c(c-a)b-a(c^2-a^2)$

$=(c-a)\{b^2+bc-a(c+a)\}$

$=(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$

$=(c-a)\{(b-a)c+(b^2-a^2)\}$

$=(c-a)\{(b-a)c+(b-a)(b+a)\}$

$=(c-a)(b-a)(c+b+a)$

$\therefore$ (주어진 식)$=(b-c)\underbrace{(c-a)(b-a)(c+b+a)}_{㉠}$

$\qquad=(b-a)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

개념 더하기 다시 보기

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

07 **길잡이** $x^2-xy+y^2=6$의 좌변을 완전제곱식 $(x-y)^2$으로 변형한 후, 주어진 식에 대입한다.

$x^2-xy+y^2=6$에서 $x^2-2xy+y^2=6-xy$이므로

$(x-y)^2=6-xy$

$\therefore x^4+y^4+(x-y)^4$

$=x^4+y^4+(6-xy)^2=x^4+y^4+x^2y^2-12xy+36$

$=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2-12xy+36$

$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2-12xy+36$

$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)-12xy+36$

$=6(x^2+xy+y^2)-12xy+36$

$=6(x^2-xy+y^2)+36=6\times6+36=72$

개념 더하기 다시 보기

$a^4+a^2b^2+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$

$\qquad=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$

$\qquad=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

08 **길잡이** $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$임을 이용하여 주어진 식을 먼저 간단히 한다.

$(x^{7n}-y^{7n})^2-(x^{7n}+y^{7n})^2$

$=(x^{7n}-y^{7n}+x^{7n}+y^{7n})(x^{7n}-y^{7n}-x^{7n}-y^{7n})$

$=2x^{7n}\times(-2y^{7n})=-4\times(xy)^{7n}$

이때 $xy=(3\sqrt{2}-\sqrt{22})(3\sqrt{2}+\sqrt{22})=18-22=-4$이므로

$-4\times(xy)^{7n}=-4\times(-4)^{7n}$

$\qquad=4^{7n+1}$ ($\because$ n은 홀수)

$\therefore k=7n+1$

09 **길잡이** 주어진 연립방정식으로부터 $x+y$, x^2+y^2의 값을 먼저 구한다.

$x^2+\sqrt{3}y=y^2+\sqrt{3}x=2\sqrt{3}$에서

$\begin{cases} x^2=2\sqrt{3}-\sqrt{3}y & \cdots ㉠ \\ y^2=2\sqrt{3}-\sqrt{3}x & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면 $x^2-y^2=\sqrt{3}x-\sqrt{3}y$

$(x+y)(x-y)=\sqrt{3}(x-y)$ $\quad\therefore x+y=\sqrt{3}$ ($\because x\neq y$)

㉠$+$㉡을 하면

$x^2+y^2=4\sqrt{3}-\sqrt{3}(x+y)=4\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}-3$

$\therefore$ (주어진 식)$=x^2(x+y)+y^2(x+y)-xy$

$\qquad=(x^2+y^2)(x+y)-xy$

$\qquad=(4\sqrt{3}-3)\sqrt{3}-(3-2\sqrt{3})$

$\qquad=12-3\sqrt{3}-3+2\sqrt{3}=9-\sqrt{3}$

2 이차방정식

STEP 1 개념 + 대표 문제 확인하기 P. 46~49

1 ㄱ, ㄷ **2** ④ **3** 7 **4** ⑤ **5** ④ **6** 4
7 ③ **8** $x=-6$ **9** 8 **10** $a=3$, $x=1$
11 ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㅂ **12** 2 **13** 9 **14** ③
15 $a=1$, $b=\frac{5}{4}$ **16** ④ **17** 9 **18** $-\sqrt{2}$ **19** -1
20 ⑤ **21** $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$ **22** 140 **23** $x=9\pm3\sqrt{10}$
24 ④

1 ㄱ. $x^2+5x-1=0$ (이차방정식)
ㄴ. 등식이 아니므로 이차방정식이 아니다.
ㄷ. $x^2+x=3$ $\therefore x^2+x-3=0$ (이차방정식)
ㄹ. $x^2+2=x^2+3x$ $\therefore -3x+2=0$ (일차방정식)
ㅁ. $4x^2-x=4x^2-4x+1$ $\therefore 3x-1=0$ (일차방정식)
ㅂ. 분모에 미지수가 있으므로 이차방정식이 아니다.
따라서 이차방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

2 [ ] 안의 수를 주어진 이차방정식에 각각 대입하면
① $(-3)^2+(-3)-6=0$
② $(-1+2)^2-1=0$
③ $(-4)^2+3\times(-4)-4=0$
④ $\frac{1}{3}\times 3^2-3-6=-6\neq 0$
⑤ $\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})-4=\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}-4=0$
따라서 주어진 이차방정식의 해가 아닌 것은 ④이다.

3 $5x^2-4x+a=0$에 $x=-1$을 대입하면
$5\times(-1)^2-4\times(-1)+a=0,\ a=-9$
$3x^2+2x-b=0$에 $x=2$를 대입하면
$3\times 2^2+2\times 2-b=0,\ b=16$
$\therefore a+b=-9+16=7$

4 $x^2+3x+1=0$에 $x=p$를 대입하면
$p^2+3p+1=0,\ p^2+3p=-1$
$2x^2-3x-5=0$에 $x=q$를 대입하면
$2q^2-3q-5=0,\ 2q^2-3q=5$
$\therefore (p^2+3p+4)(2q^2-3q+1)=(-1+4)(5+1)=18$

5 $kx^2+ax+(k+2)b=0$에 $x=1$을 대입하면
$k+a+(k+2)b=0,\ (1+b)k+a+2b=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
$1+b=0,\ a+2b=0$ $\therefore a=2,\ b=-1$
$\therefore a+b=1$

6 $x^2-4x+1=0$에 $x=a$를 대입하면 $a^2-4a+1=0$
이때 $a\neq 0$이므로 양변을 a로 나누면
$a-4+\frac{1}{a}=0$ $\therefore a+\frac{1}{a}=4$

7 $(x+3)(x-1)=-2-2x^2$에서
$x^2+2x-3=-2-2x^2,\ 3x^2+2x-1=0$
$(x+1)(3x-1)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$
따라서 $a=\frac{1}{3},\ b=-1$이므로 $3a+b=3\times\frac{1}{3}+(-1)=0$이다.

8 $5x(x+7)=3(x-4)$에서
$5x^2+35x=3x-12,\ 5x^2+32x+12=0$
$(x+6)(5x+2)=0$ $\therefore x=-6$ 또는 $x=-\frac{2}{5}$
또 $(x-5)(2x+1)=(x-5)^2$에서
$2x^2-9x-5=x^2-10x+25,\ x^2+x-30=0$
$(x+6)(x-5)=0$ $\therefore x=-6$ 또는 $x=5$
따라서 두 이차방정식의 공통인 근은 $x=-6$이다.

9 $x^2-3x-4a=8$에 $x=a$를 대입하여 정리하면
$a^2-7a-8=0,\ (a+1)(a-8)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=8$
이때 $a>1$이므로 $a=8$

10 $x^2+ax-2(a-1)=0$에 $x=-4$를 대입하면
$(-4)^2-4a-2(a-1)=0,\ 16-4a-2a+2=0$
$-6a=-18$ $\therefore a=3$
따라서 주어진 이차방정식은 $x^2+3x-4=0$이므로
$(x+4)(x-1)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

11 ㄱ. $2x^2-2x-4=0,\ 2(x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
ㄴ. $x^2-6x+9=0,\ (x-3)^2=0$ $\therefore x=3$ (중근)
ㄷ. $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=0,\ \left(x-\frac{1}{3}\right)^2=0$ $\therefore x=\frac{1}{3}$ (중근)
ㄹ. $x^2-10x+24=0,\ (x-4)(x-6)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=6$
ㅁ. $3(x^2+4x+4)=0,\ 3(x+2)^2=0$ $\therefore x=-2$ (중근)
ㅂ. $x^2-8x-20=-36,\ x^2-8x+16=0$
$(x-4)^2=0$ $\therefore x=4$ (중근)
따라서 중근을 갖는 이차방정식은 ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㅂ이다.

12 $x^2+2ax-4a+12=0$이 중근을 가지므로
$-4a+12=\left(\frac{2a}{2}\right)^2,\ a^2+4a-12=0$
$(a+6)(a-2)=0$ $\therefore a=-6$ 또는 $a=2$
이때 $a>0$이므로 $a=2$

13 $3(x-2)^2-21=0$에서 $(x-2)^2=7$
$x-2=\pm\sqrt{7}$ $\therefore x=2\pm\sqrt{7}$
따라서 $a=2,\ b=7$이므로 $a+b=9$이다.

14 $(x-p)^2=q-3$에서 $q-3>0$이면 서로 다른 두 근을 갖고, $q-3=0$이면 중근을 갖고, $q-3<0$이면 근을 갖지 않는다.
따라서 주어진 이차방정식이 해를 가질 조건은 $q\geq 3$이다.

15 $4x^2+8x-1=0$에서 $x^2+2x-\frac{1}{4}=0$
$x^2+2x=\frac{1}{4},\ x^2+2x+1=\frac{1}{4}+1$ $\therefore (x+1)^2=\frac{5}{4}$
$\therefore a=1,\ b=\frac{5}{4}$

16 ① $5x^2=3,\ x^2=\frac{3}{5}$ $\therefore x=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}=\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$
② $(x+3)^2=2,\ x+3=\pm\sqrt{2}$ $\therefore x=-3\pm\sqrt{2}$
③ $6x^2+5x-4=0,\ (3x+4)(2x-1)=0$
$\therefore x=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

④ $x^2-2x-\frac{2}{3}=0$, $x^2-2x=\frac{2}{3}$, $x^2-2x+1=\frac{2}{3}+1$

$(x-1)^2=\frac{5}{3}$, $x-1=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

$\therefore x=1\pm\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{3\pm\sqrt{15}}{3}$

⑤ $9x^2-6x+1=0$, $(3x-1)^2=0$ $\quad\therefore x=\frac{1}{3}$ (중근)

따라서 해를 바르게 구한 것은 ④이다.

17 $3x^2-4x-1=0$, $x^2-\frac{4}{3}x=\frac{1}{3}$

$x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}=\frac{1}{3}+\frac{4}{9}$, $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$

$x-\frac{2}{3}=\pm\sqrt{\frac{7}{9}}$, $x=\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$ $\quad\therefore x=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$

따라서 $p=2$, $q=7$이므로 $p+q=9$이다.

18 $4x^2-4x-1=0$, $x^2-x-\frac{1}{4}=0$, $x^2-x+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$, $x-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\quad\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$

$a<0$이므로 $a=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

$\therefore 4a^2-2a-2=4\times\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\times\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)-2$

$=(1-\sqrt{2})^2-(1-\sqrt{2})-2=-\sqrt{2}$

19 $x^2+3x-a=0$에서

$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-a)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+4a}}{2}$

이므로 $9+4a=17$, $4a=8$

$\therefore a=2$, $b=-3$

$\therefore a+b=-1$

20 ① $x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-4)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

② $x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-3)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$

③ $x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-1\times2}}{1}=-2\pm\sqrt{2}$

④ $x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-1\times4}}{1}=-3\pm\sqrt{5}$

⑤ $x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-1\times(-3)}}{1}=4\pm\sqrt{19}$

따라서 이차방정식의 해가 옳은 것은 ⑤이다.

21 $x^2-x+3k=0$에 $x=k$를 대입하면 $k^2-k+3k=0$

$k^2+2k=0$, $k(k+2)=0$ $\quad\therefore k=-2$ ($\because k\neq0$)

따라서 이차방정식 $4x^2+2x-1=0$의 해는

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times(-1)}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

22 주어진 이차방정식의 양변에 10을 곱하면

$5x^2-3x=2x+10x^2-6$, $5x^2+5x-6=0$

$\therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times5\times(-6)}}{10}=\frac{-5\pm\sqrt{145}}{10}$

따라서 $A=-5$, $B=145$이므로

$A+B=140$

23 $3(x+2)^2-2x=(2x-3)(2x-1)$에서

$3(x^2+4x+4)-2x=4x^2-8x+3$

$3x^2+12x+12-2x=4x^2-8x+3$

따라서 $x^2-18x-9=0$이므로

$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-1\times(-9)}}{1}$

$=9\pm\sqrt{90}=9\pm3\sqrt{10}$

24 $x^2-6xy+9y^2-10x+30y+25=0$에서

$(x-3y)^2-10(x-3y)+25=0$

이때 $x-3y=A$로 놓으면

$A^2-10A+25=0$, $(A-5)^2=0$ $\quad\therefore A=5$ (중근)

$\therefore 2x-6y=2(x-3y)=2\times5=10$

STEP 2 내신 5% 따라잡기 P. 50~54

1 ③	**2** ①	**3** ②	**4** (3, 4)	**5** $x=1$ 또는 $x=6$
6 $x=-\frac{5}{8}$	**7** ④	**8** 1	**9** ①	**10** $-\frac{3}{5}$
11 $0<a<4$	**12** ⑤	**13** 5	**14** 6개	**15** ⑤
16 $-3\sqrt{3}$ **17** -1	**18** -3	**19** 1	**20** ①	**21** ②
22 $\frac{1}{8}$ **23** $\frac{8}{3}$	**24** 3개	**25** 1, 2, 3		
26 $\frac{3\sqrt{2}+3}{2}$	**27** ②	**28** $x=\frac{3\pm\sqrt{57}}{2}$	**29** 9	
30 풀이 참조	**31** 4	**32** $\frac{3}{200}$		

1 주어진 등식을 전개하여 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면

$(a^2-a-2)x^2+ax+3=0$

이 식이 x에 대한 이차방정식이 되려면

$a^2-a-2\neq0$이어야 하므로

$(a+1)(a-2)\neq0$ $\quad\therefore a\neq-1$ 그리고 $a\neq2$

2 $x=-1$을 주어진 방정식에 대입하면

$(a+c-2)\times(-1)^2+(b-5)\times(-1)-c-3=0$

$a+c-2-b+5-c-3=0$, $a-b=0$ $\quad\therefore a=b$

따라서 a, b, c를 세 변으로 하는 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이다.

3 $2x^2-6x-3=0$에 $x=\alpha$를 대입하면

$2\alpha^2-6\alpha-3=0$

이때 $\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면

$2\alpha-6-\frac{3}{\alpha}=0$, $2\alpha-\frac{3}{\alpha}=6$

$\therefore 4\alpha^2+\frac{9}{\alpha^2}=\left(2\alpha-\frac{3}{\alpha}\right)^2+2\times2\alpha\times\frac{3}{\alpha}$

$=6^2+12=48$

4 $x=a-\sqrt{b}$를 $x^2+ax-b=0$에 대입하면
$(a-\sqrt{b})^2+a(a-\sqrt{b})-b=0$, $2a^2=3a\sqrt{b}$
$\therefore 2a=3\sqrt{b}$ ($\because a>0$)
이때 $2a$는 자연수이므로 b는 제곱인 수이어야 한다.
(i) $b=1$일 때, $2a=3$ $\quad\therefore a=\dfrac{3}{2}$
그런데 a가 자연수가 아니므로 조건을 만족하지 않는다.
(ii) $b=4$일 때, $2a=3\sqrt{4}$, $2a=6$ $\quad\therefore a=3$
(iii) $b=9$일 때, $2a=3\sqrt{9}$, $2a=9$ $\quad\therefore a=\dfrac{9}{2}$
그런데 a가 자연수가 아니므로 조건을 만족하지 않는다.
따라서 (i)~(iii)에서 구하는 두 자연수 a, b의 순서쌍은 $(3, 4)$이다.

5 일차항의 계수와 상수항을 바꾸어 풀었으므로
$x^2+(k-1)x-k=0$에 $x=-7$을 대입하면
$(-7)^2-7(k-1)-k=0$
$49-7k+7-k=0$ $\quad\therefore k=7$
따라서 처음 이차방정식은 $x^2-7x+6=0$이므로
$(x-1)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=6$

6 $(a-1)x^2-a(a+4)x-10=0$에 $x=-2$를 대입하면
$4(a-1)+2a(a+4)-10=0$, $2a^2+12a-14=0$
$a^2+6a-7=0$, $(a+7)(a-1)=0$
$\therefore a=-7$ 또는 $a=1$
이때 $a-1\neq0$에서 $a\neq1$이므로 $a=-7$
따라서 주어진 이차방정식은 $8x^2+21x+10=0$이므로
$(x+2)(8x+5)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=-\dfrac{5}{8}$

7 $(a^2-4)x^2-(4-a)x-2(a-1)=0$에 $x=1$을 대입하면
$a^2-4-(4-a)-2(a-1)=0$, $a^2-a-6=0$
$(a+2)(a-3)=0$ $\quad\therefore a=-2$ 또는 $a=3$
이때 $a^2-4\neq0$에서 $a\neq-2$ 그리고 $a\neq2$이므로 $a=3$
따라서 약수가 3개인 자연수는 소수의 제곱인 수이고, 50보다 작은 소수의 제곱인 수는 4, 9, 25, 49이므로 그 합은
$4+9+25+49=87$

8 $x^2+ax+a-1=0$에서 $(x+1)(x+a-1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=-a+1$
$x^2-(a+3)x+3a=0$에서 $(x-3)(x-a)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=a$
(i) 공통인 해가 $x=-1$일 때, $a=-1$
(ii) 공통인 해가 $x=3$일 때, $-a+1=3$ $\quad\therefore a=-2$
(iii) 공통인 해가 $x=-a+1$과 $x=a$일 때,
$-a+1=a$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{2}$
따라서 (i)~(iii)에서 모든 상수 a의 값의 곱은
$-1\times(-2)\times\dfrac{1}{2}=1$

9 $x^2+2(a+2)x+a^2+4a+3=0$에서
$x^2+2(a+2)x+(a+1)(a+3)=0$
$(x+a+1)(x+a+3)=0$
$\therefore x=-a-1$ 또는 $x=-a-3$
이때 두 근 중 큰 근은 $x=-a-1$이다.
또 $x^2-2x-8=0$에서
$(x+2)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=4$
따라서 두 근 중 큰 근은 $x=4$이므로
$-a-1=4$ $\quad\therefore a=-5$

10 직선 $2ax+3y=3$이 점 $(a-1, a^2)$을 지나므로
$2a(a-1)+3a^2=3$, $5a^2-2a-3=0$
$(5a+3)(a-1)=0$ $\quad\therefore a=-\dfrac{3}{5}$ 또는 $a=1$ $\quad\cdots$ ㉠
이때 직선이 제4사분면을 지나지 않으므로 $y=-\dfrac{2}{3}ax+1$에서
(기울기)$=-\dfrac{2}{3}a>0$ $\quad\therefore a<0$ $\quad\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 $a=-\dfrac{3}{5}$이다.

11 $x^2-2ax+a^2=-x+a$에서
$x^2-(2a-1)x+a(a-1)=0$, $(x-a)\{x-(a-1)\}=0$
$\therefore x=a$ 또는 $x=a-1$
$(x-1)^2=x+5$에서
$x^2-2x+1=x+5$, $x^2-3x-4=0$
$(x+1)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=4$
즉, a, $a-1$이 -1과 4 사이에 있으므로
$-1<a<4$이고 $\quad\cdots$ ㉠
$-1<a-1<4$에서 $0<a<5$ $\quad\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 a의 값의 범위는 $0<a<4$이다.

12 (i) $6A=5B$에서 $6(x^2+2x-3)=5(x^2+4x-5)$
$x^2-8x+7=0$, $(x-1)(x-7)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=7$
(ii) $A\neq0$에서 $x^2+2x-3\neq0$, $(x+3)(x-1)\neq0$
$\therefore x\neq-3$ 그리고 $x\neq1$
따라서 (i), (ii)에서 $x=7$이다.

13 $f(a-1, a+1)=2f(a-1)-f(a+1)$
$=2\{(a-1)^2+5(a-1)\}-\{(a+1)^2+5(a+1)\}$
$=2(a^2+3a-4)-(a^2+7a+6)$
$=a^2-a-14$
즉, $a^2-a-14=6$이므로
$a^2-a-20=0$, $(a+4)(a-5)=0$
$\therefore a=5$ ($\because a>0$)

14 $\langle x\rangle^2+2\langle x\rangle-8=0$에서 $(\langle x\rangle+4)(\langle x\rangle-2)=0$
$\therefore \langle x\rangle=-4$ 또는 $\langle x\rangle=2$
이때 $\langle x\rangle$는 자연수이므로 $\langle x\rangle=2$
따라서 약수가 2개인 자연수는 소수이므로 15 이하의 자연수 중 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13의 6개이다.

15 $4[x]^2-22[x]+28=0$에서 $2[x]^2-11[x]+14=0$
$([x]-2)(2[x]-7)=0$ $\quad\therefore [x]=2$ 또는 $[x]=\dfrac{7}{2}$

이때 $[x]$는 정수이므로 $[x]=2$

따라서 $2\le x<3$이므로 주어진 식을 만족하는 x의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

참고 실수 x를 넘지 않는 최대의 정수를 $[x]$라 할 때,
$[x]=a$(a는 정수)이면 $a\le x<a+1$

16 $x^2-|x|-2=x+1$에서

(ⅰ) $x\ge0$일 때, $|x|=x$이므로

$x^2-x-2=x+1,\ x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0\qquad\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

이때 $x\ge0$이므로 $x=3$

(ⅱ) $x<0$일 때, $|x|=-x$이므로

$x^2+x-2=x+1,\ x^2=3\qquad\therefore\ x=\pm\sqrt{3}$

이때 $x<0$이므로 $x=-\sqrt{3}$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3$ 또는 $x=-\sqrt{3}$이므로 모든 근의 곱은

$3\times(-\sqrt{3})=-3\sqrt{3}$

17 $(x+3)*(x-2)=(x+3)(x-2)-(x+3)+2(x-2)+3$

$\qquad\qquad\qquad\quad=x^2+2x-10$

즉, $x^2+2x-10=-7$이므로 $x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0\qquad\therefore\ \alpha=-3,\ \beta=1\ (\because\ \alpha<\beta)$

따라서 $3\alpha+8\beta=3\times(-3)+8\times1=-1$이므로

(주어진 식)

$=(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^{2014}+(-1)^{2015}$

$=(\cancel{-1})+\cancel{1}+(\cancel{-1})+\cancel{1}+\cdots+(\cancel{-1})+\cancel{1}+(-1)=-1$

18 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$

$\qquad=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$\therefore\ m=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(23)+f(24)$

$\qquad=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})$

$\qquad\qquad+\cdots+(\cancel{\sqrt{24}}-\cancel{\sqrt{23}})+(\sqrt{25}-\cancel{\sqrt{24}})$

$\qquad=\sqrt{25}-\sqrt{1}=5-1=4$

$x=4$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$16(a^2-1)+4(5a-6)+4(3a-2)=0,\ 16a^2+32a-48=0$

$a^2+2a-3=0,\ (a+3)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=1$

이때 $a^2-1\ne0$이므로 $a\ne-1$ 그리고 $a\ne1$

$\therefore\ a=-3$

19 $4x^2-8ax+a=0$에서 $x^2-2ax+\dfrac{a}{4}=0$

이 이차방정식이 중근을 가지므로

$\left(-\dfrac{2a}{2}\right)^2=\dfrac{a}{4},\ a^2=\dfrac{a}{4}$

$4a^2-a=0,\ a(4a-1)=0\qquad\therefore\ a=\dfrac{1}{4}\ (\because\ a\ne0)$

주어진 이차방정식에 $a=\dfrac{1}{4}$을 대입하면 $4x^2-2x+\dfrac{1}{4}=0$

$16x^2-8x+1=0,\ (4x-1)^2=0\qquad\therefore\ x=\dfrac{1}{4}$ (중근)

따라서 $k=\dfrac{1}{4}$이므로 $\dfrac{a}{k}=\dfrac{1}{4}\div\dfrac{1}{4}=1$이다.

20 $x^2+ax+8b=0$이 중근을 가지므로

$\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=8b,\ a^2=32b\qquad\therefore\ a=4\sqrt{2b}\ (\because\ a>0)$

이때 a, b는 두 자리의 자연수이고 $2b$는 제곱인 수이어야 하므로

$2b=36,\ 64,\ 100,\ 144,\ 196$에서 $\sqrt{2b}=6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14$

$\sqrt{2b}$의 값이 최대일 때, $a=4\sqrt{2b}$의 값이 최대가 되므로

$\sqrt{2b}=14,\ 2b=196\qquad\therefore\ b=98$

$\therefore\ a=4\sqrt{2b}=4\times14=56$

$\therefore\ b-a=98-56=42$

21 $x^2+2ax+3b+1=0$이 중근을 가지므로

$3b+1=\left(\dfrac{2a}{2}\right)^2\qquad\therefore\ 3b+1=a^2$

따라서 이 식을 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 1)$, $(4,\ 5)$의 2가지이고, 모든 경우의 수는 36가지이므로 구하는 확률은 $\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$이다.

22 $2(x+3)^2=a$에서 $(x+3)^2=\dfrac{a}{2}$

$x+3=\pm\sqrt{\dfrac{a}{2}}\qquad\therefore\ x=-3\pm\sqrt{\dfrac{a}{2}}$

따라서 두 근의 차는 $-3+\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\left(-3-\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)=2\sqrt{\dfrac{a}{2}}$이므로

$2\sqrt{\dfrac{a}{2}}=\dfrac{1}{2},\ \sqrt{\dfrac{a}{2}}=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{16}\qquad\therefore\ a=\dfrac{1}{8}$

23 주어진 이차방정식에 $x=\dfrac{10}{3}$을 대입하면

$9\left(\dfrac{10}{3}-2\right)^2=a^2,\ 9\times\dfrac{16}{9}=a^2$

$a^2=16\qquad\therefore\ a=4\ (\because\ a>0)$

즉, $9(x-2)^2=16$이므로 $(x-2)^2=\dfrac{16}{9}$

$x-2=\pm\dfrac{4}{3}\qquad\therefore\ x=\dfrac{2}{3}$ 또는 $x=\dfrac{10}{3}$

따라서 $b=\dfrac{2}{3}$이므로 $ab=4\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$이다.

24 $(x-5)^2=\dfrac{k}{2}+25$에서 $x=5\pm\sqrt{\dfrac{k}{2}+25}$

이때 k는 두 자리의 자연수이므로

$10\le k<100\qquad\therefore\ 30\le\dfrac{k}{2}+25<75$

이때 두 근이 모두 정수가 되려면 $\dfrac{k}{2}+25$가 제곱인 수이어야 하므로

(ⅰ) $\dfrac{k}{2}+25=36$일 때, $\dfrac{k}{2}=11\qquad\therefore\ k=22$

(ⅱ) $\dfrac{k}{2}+25=49$일 때, $\dfrac{k}{2}=24\qquad\therefore\ k=48$

(ⅲ) $\dfrac{k}{2}+25=64$일 때, $\dfrac{k}{2}=39\qquad\therefore\ k=78$

따라서 (ⅰ)~(ⅲ)에서 두 자리의 자연수 k는 22, 48, 78의 3개이다.

25 $x^2-4x+2=0$에서 $x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-1\times2}}{1}=2\pm\sqrt{2}$

$\therefore\ 2-\sqrt{2}<n<2+\sqrt{2}$

따라서 $0<2-\sqrt{2}<1$, $3<2+\sqrt{2}<4$이므로 구하는 자연수 n의 값은 1, 2, 3이다.

26 $x^2-2x-7=0$에서 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-1\times(-7)}}{1}=1\pm2\sqrt{2}$

따라서 양수인 근은 $1+2\sqrt{2}$이고 $3<1+2\sqrt{2}<4$이므로

$a=3$, $b=(1+2\sqrt{2})-3=2\sqrt{2}-2$

$\therefore\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}-2}=\dfrac{3(2\sqrt{2}+2)}{(2\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}+2)}=\dfrac{3\sqrt{2}+3}{2}$

27 $2x^2-8x+k-1=0$에서

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{(-4)^2-2(k-1)}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{18-2k}}{2}$

이때 근이 모두 정수가 되려면 $18-2k=0$ 또는 $18-2k=4m^2$(m은 자연수)의 꼴이어야 하므로

(ⅰ) $18-2k=0$일 때, $2k=18$ $\quad\therefore\ k=9$

(ⅱ) $18-2k=4$일 때, $2k=14$ $\quad\therefore\ k=7$

(ⅲ) $18-2k=16$일 때, $2k=2$ $\quad\therefore\ k=1$

따라서 (ⅰ)~(ⅲ)에서 자연수 k의 값의 합은 $9+7+1=17$이다.

28 주어진 이차방정식의 양변에 10을 곱하면

$-x^2-5x(x+4)+2(x-1)^2+10=0$, $x^2+6x-3=0$

$\therefore\ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-1\times(-3)}}{1}=-3\pm\sqrt{12}$

따라서 $a=-3$, $b=12$이므로

$x^2+ax-b=0$에 대입하면 $x^2-3x-12=0$

$\therefore\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-12)}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{57}}{2}$

29 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=109^2$에서

$n(n+3)(n+1)(n+2)=109^2-1=(109-1)(109+1)$

$=108\times110$

즉, $(n^2+3n)(n^2+3n+2)=108\times110$이므로

$n^2+3n=A$로 놓으면

$A(A+2)=108\times110$, $A^2+2A-108\times110=0$

$(A+110)(A-108)=0$ $\quad\therefore\ A=-110$ 또는 $A=108$

$\therefore\ A=108$ ($\because\ A>0$)

즉, $n^2+3n=108$이므로

$n^2+3n-108=0$, $(n+12)(n-9)=0$

$\therefore\ n=-12$ 또는 $n=9$

따라서 n은 자연수이므로 $n=9$이다.

30 오른쪽 그림에서 대각선과 가로에 있는 네 수의 합이 서로 같으므로

	15	14	4
12	$x+3$	㉠	$2x^2-3x$
	$x+7$		5
13			16

$12+(x+3)+㉠+(2x^2-3x)$

$=4+㉠+(x+7)+13$에서

$2x^2-3x-9=0$, $(x-3)(2x+3)=0$

마방진은 자연수로 이루어졌으므로

$x=3$

이때 세로에 있는 네 수의 합은

$4+(2x^2-3x)+5+16$

$=4+(2\times3^2-3\times3)+5+16=34$

따라서 마방진을 완성하면 오른쪽 그림과 같다.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

31 한 변의 길이가 x cm인 정사각형과 한 변의 길이가 1 cm인 정사각형 모양의 타일이 각각 한 개씩 더 있으면 직사각형 모양의 벽면을 모두 채울 수 있다. 이때 주어진 타일의 넓이의 합은 $(5x^2+7x+7)\,\text{cm}^2$이고, 벽면의 넓이는 $132\,\text{cm}^2$이므로

$(5x^2+7x+7)+x^2+1=132$에서 $6x^2+7x-124=0$

$(x-4)(6x+31)=0$ $\quad\therefore\ x=4$ ($\because\ x>0$)

32 주어진 이차방정식에서 x^2의 계수가 1이고, x의 계수가 짝수이므로 $x=1\pm\sqrt{1+\square}$에서 해가 자연수가 되려면 $1+\square$가 제곱인 수이어야 한다.

(ⅰ) $1+\square=4$, 즉 $\square=3$일 때,

$x^2-2x-3=0$에서 $x=1\pm\sqrt{1+3}$ $\quad\therefore\ x=3$ ($\because\ x>0$)

(ⅱ) $1+\square=9$, 즉 $\square=8$일 때,

$x^2-2x-8=0$에서 $x=1\pm\sqrt{1+8}$ $\quad\therefore\ x=4$ ($\because\ x>0$)

(ⅲ) $1+\square=16$, 즉 $\square=15$일 때,

$x^2-2x-15=0$에서 $x=1\pm\sqrt{1+15}$ $\quad\therefore\ x=5$ ($\because\ x>0$)

이때 정미와 미경이가 받은 사은품의 개수의 합이 8개 이상인 경우의 두 사람이 구한 해를 순서쌍으로 나타내면 (3, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)의 6가지이므로 사은품을 받는 주사위의 눈이 나오는 경우의 수도 6가지이다.

따라서 모든 경우의 수는 $20\times20=400$(가지)이므로

구하는 확률은 $\dfrac{6}{400}=\dfrac{3}{200}$이다.

STEP 3 내신 1% 뛰어넘기 P. 55~56

01 2 **02** $8m^2+4$ **03** $x=2$ 또는 $x=4$ **04** 3

05 1 **06** ③ **07** $-\dfrac{5}{2}\le x<-\dfrac{3}{2}$ 또는 $\dfrac{11}{2}\le x<\dfrac{13}{2}$

08 $\dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}$

01 **길잡이** 주어진 이차방정식에 한 근을 대입하고, 이를 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

$x^2-4x+1=0$에 $x=a$를 대입하면 $a^2-4a+1=0$

$\therefore$ (주어진 식)

$=a^5-4a^4-2a^4+a^3+8a^3-2a^2+a^2-4a+3$

$=a^5-4a^4+a^3-2a^4+8a^3-2a^2+a^2-4a+3$

$=a^3(a^2-4a+1)-2a^2(a^2-4a+1)+(a^2-4a+1)+2$

$=a^3\times0-2a^2\times0+0+2=2$

02 **길잡이** $x^2-2mx-1=0$에 $x=\alpha$와 $x=\beta$를 대입해 본다.

$x^2-2mx-1=0$에 $x=\alpha$를 대입하면 $\alpha^2-2m\alpha-1=0$

이때 $\alpha\ne0$이므로 양변을 α로 나누면 $\alpha-\dfrac{1}{\alpha}=2m$

$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2=\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)^2+4=4m^2+4$이므로

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=2\sqrt{m^2+1}$ ($\because\ \alpha>0$)

$\therefore\ \alpha^2+\alpha+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)+\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=\left\{\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2+2\right\}+\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=4m^2+2+2\sqrt{m^2+1}$

$x^2-2mx-1=0$에 $x=\beta$를 대입하면 $\beta^2-2m\beta-1=0$

이때 $\beta\neq0$이므로 양변을 β로 나누면 $\beta-\frac{1}{\beta}=2m$

$\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2=\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)^2+4=4m^2+4$이므로

$\beta+\frac{1}{\beta}=-2\sqrt{m^2+1}$ ($\because\ \beta<0$)

$\therefore\ \beta^2+\beta+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}=\left(\beta^2+\frac{1}{\beta^2}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)$

$=\left\{\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)^2+2\right\}+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)$

$=4m^2+2-2\sqrt{m^2+1}$

$\therefore$ (주어진 식)$=(4m^2+2+2\sqrt{m^2+1})+(4m^2+2-2\sqrt{m^2+1})$

$=8m^2+4$

03 **길잡이** $P(x)=ax^2+bx+c$로 놓은 후, 주어진 조건을 이용하여 a, b, c의 값을 구한다.

$P(x)=ax^2+bx+c$(a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면

$P(0)=2$이므로 $c=2$

$P(x+2)-P(x)=4x$이므로

$a(x+2)^2+b(x+2)+2-(ax^2+bx+2)=4x$

$\therefore\ 4ax+4a+2b=4x$

즉, $4a=4$, $4a+2b=0$이므로 $a=1$, $b=-2$

$\therefore\ P(x)=x^2-2x+2$

따라서 $P(x-1)=2x-3$에서

$(x-1)^2-2(x-1)+2=2x-3$이므로 $x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0 \qquad \therefore\ x=2$ 또는 $x=4$

04 **길잡이** 주어진 식에서 반복되는 부분을 다시 x로 놓는다.

$x=2+\cfrac{3}{\boxed{2+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\cdots}}}}$ $=x$ 에서 $x=2+\frac{3}{x}$이므로

$x^2=2x+3$, $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0 \qquad \therefore\ x=3$ ($\because\ x>0$)

05 **길잡이** 두 이차방정식에 $x=p$를 각각 대입하여 조건을 만족하는 p의 값을 구한다.

두 이차방정식에 $x=p$를 대입하면

$2p^2-ap+b=0 \quad \cdots$ ㉠, $2p^2-bp+a=0 \quad \cdots$ ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$(a-b)p+(a-b)=0$, $(a-b)(p+1)=0$

이때 $a=b$이면 두 이차방정식이 같으므로 조건을 만족하지 않는다.

따라서 $p=-1$이므로 ㉠에 대입하면 $2+a+b=0$

즉, $2x^2-ax+b=0$에 $b=-(a+2)$를 대입하면

$2x^2-ax-(a+2)=0$, $(x+1)\{2x-(a+2)\}=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=\frac{a+2}{2}$

$2x^2-bx+a=0$에 $a=-(b+2)$를 대입하면

$2x^2-bx-(b+2)=0$, $(x+1)\{2x-(b+2)\}=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=\frac{b+2}{2}$

따라서 나머지 두 근의 합은

$\frac{a+2}{2}+\frac{b+2}{2}=\frac{a+b+4}{2}=\frac{-2+4}{2}=1$

06 **길잡이** a, c가 소수임을 이용하여 $x^2-2cx+a=0$의 좌변을 인수분해한다.

a, c가 소수이므로 $x^2-2cx+a=0$에서

$(x-a)(x-1)=0 \qquad \therefore\ x=a$ 또는 $x=1$

공통인 근을 $x=a$라 하고, $x^2-ax+2b=0$에 $x=a$를 대입하면

$a^2-a^2+2b=0 \qquad \therefore\ b=0$

이때 b는 소수가 아니므로 공통인 근은 $x=1$이다.

$x^2-ax+2b=0$에 $x=1$을 대입하면 $a=2b+1 \quad \cdots$ ㉠

$x^2-2cx+a=0$에 $x=1$을 대입하면 $a=2c-1 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $2b+1=2c-1 \qquad \therefore\ c=b+1$

따라서 b와 c는 소수이면서 연속하는 두 자연수이므로

$b=2$, $c=3$이고 $a=2\times2+1=5$ ($\because$ ㉠)이다.

07 **길잡이** $\left[x+\frac{1}{2}\right]=n$($n$은 정수)으로 놓고, $\left[x-\frac{1}{2}\right]$을 n에 관한 식으로 나타낸다.

$\left[x+\frac{1}{2}\right]=n$($n$은 정수)이라 하면

$\left[x-\frac{1}{2}\right]=\left[x+\frac{1}{2}-1\right]=\left[x+\frac{1}{2}\right]-1=n-1$

따라서 주어진 방정식은 $n^2-4(n-1)-16=0$이므로

$n^2-4n-12=0$, $(n+2)(n-6)=0 \qquad \therefore\ n=-2$ 또는 $n=6$

(i) $\left[x+\frac{1}{2}\right]=-2$일 때, $-2\le x+\frac{1}{2}<-1$

$\therefore\ -\frac{5}{2}\le x<-\frac{3}{2}$

(ii) $\left[x+\frac{1}{2}\right]=6$일 때, $6\le x+\frac{1}{2}<7 \qquad \therefore\ \frac{11}{2}\le x<\frac{13}{2}$

따라서 (i), (ii)에서 구하는 x의 값의 범위는

$-\frac{5}{2}\le x<-\frac{3}{2}$ 또는 $\frac{11}{2}\le x<\frac{13}{2}$

참고 실수 x를 넘지 않는 최대의 정수를 $[x]$라 할 때,

① a가 정수이면 $[x+a]=[x]+a$, $[x-a]=[x]-a$

② $[x]=b$(b는 정수)이면 $b\le x<b+1$

08 **길잡이** y는 x의 소수 부분이므로 $0\le y<1$임을 이용하여 x의 정수 부분을 구한다.

$x^2+y^2=35$에서 $x^2=35-y^2$

y는 x의 소수 부분이므로 $0\le y<1$, $0\le y^2<1$,

$34<35-y^2\le35$, $34<x^2\le35 \qquad \therefore\ \sqrt{34}<x\le\sqrt{35}$ ($\because\ x>0$)

따라서 x의 정수 부분은 5이므로 소수 부분은 $y=x-5$

$x^2+y^2=35$에 $y=x-5$를 대입하면

$x^2+(x-5)^2=35$, $x^2-5x-5=0$

$\therefore\ x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times(-5)}}{2}=\frac{5\pm3\sqrt{5}}{2}$

이때 $x>0$이므로 $x=\frac{5+3\sqrt{5}}{2}$이다.

3 이차방정식의 활용

STEP 1 개념 + 대표 문제 확인하기 P. 57~59

1 2	**2** 10	**3** ④	**4** -1, $-\frac{2}{3}$	
5 (1) 6 (2) $-2\sqrt{2}$		**6** 11	**7** $a=3$, $b=-6$	
8 $x=-6\pm\sqrt{35}$		**9** ①	**10** ⑤	**11** 7
12 $x^2+4x+1=0$		**13** ④	**14** 21	**15** 4	**16** 15명
17 4초	**18** 7 cm			

1 주어진 이차방정식이 중근을 가지려면
$(-2m)^2-4\times1\times(2m+3)=0$이어야 하므로
$4m^2-8m-12=0$, $m^2-2m-3=0$
$(m+1)(m-3)=0$ $\therefore m=-1$ 또는 $m=3$
따라서 모든 상수 m의 값의 합은 $(-1)+3=2$이다.

2 $2x^2+8x+k-3=0$이 서로 다른 두 근을 가지므로
$8^2-4\times2\times(k-3)>0$, $8k<88$ $\therefore k<11$ $\cdots$ ㉠
또 $x^2-4x+k-5=0$이 근을 갖지 않으므로
$(-4)^2-4\times1\times(k-5)<0$, $4k>36$ $\therefore k>9$ $\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 $9<k<11$이고 k는 자연수이므로 $k=10$이다.

3 주어진 이차방정식의 양변에 2를 곱하면
$6x-(x^2-1)=5(x-1)$, $x^2-x-6=0$
따라서 근과 계수의 관계에 의해 $a=1$, $b=-6$이므로
$a-b=1-(-6)=7$

4 이차방정식 $2x^2-4x+k-1=0$이 중근을 가지므로
$(-4)^2-4\times2\times(k-1)=0$
$8k=24$ $\therefore k=3$
따라서 이차방정식 $3x^2+3x-2=0$에서 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합은 -1이고, 두 근의 곱은 $-\frac{2}{3}$이다.

5 주어진 이차방정식의 양변에 10을 곱하면
$2(x-1)^2+8x-1=0$, $2x^2+4x+1=0$
근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=-\frac{4}{2}=-2$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$
(1) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$
$=\frac{(-2)^2-2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=6$
(2) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-2)^2-4\times\frac{1}{2}=2$에서
$\alpha>\beta$, 즉 $\alpha-\beta>0$이므로 $\alpha-\beta=\sqrt{2}$
$\therefore \alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=-2\times\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$

6 $2x^2+12x+k-1=0$의 한 근을 α라 하면
다른 한 근은 $\alpha+4$이므로 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+(\alpha+4)=-\frac{12}{2}=-6$, $2\alpha+4=-6$ $\therefore \alpha=-5$
즉, 주어진 이차방정식의 두 근이 -5, -1이므로
$(-5)\times(-1)=\frac{k-1}{2}$, $10=k-1$ $\therefore k=11$

7 x^2의 계수가 a이고, 두 근이 -3, 5인 이차방정식은
$a(x+3)(x-5)=0$, $a(x^2-2x-15)=0$
즉, $ax^2-2ax-15a=0$이므로
$-2a=b$, $-15a=-45$ $\therefore a=3$, $b=-6$

8 x^2의 계수가 1이고, 두 근이 -4, 3인 이차방정식은
$(x+4)(x-3)=0$ $\therefore x^2+x-12=0$
$\therefore p=1$, $q=-12$
따라서 이차방정식 $x^2+12x+1=0$의 근은
$x=-6\pm\sqrt{6^2-1\times1}=-6\pm\sqrt{35}$

9 x^2의 계수가 3이고, $x=2$를 중근으로 갖는 이차방정식은
$3(x-2)^2=0$ $\therefore 3x^2-12x+12=0$ $\cdots$ ㉠
이차방정식 $3(x-1)(x-a)=b$에서
$3x^2-3(a+1)x+3a-b=0$ $\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 $-3(a+1)=-12$, $3a-b=12$이므로
$a=3$, $b=-3$ $\therefore a+b=3+(-3)=0$

10 $2x^2-3x-2=0$에서 $\alpha+\beta=\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=-1$이므로
$(\alpha-3)+(\beta-3)=\alpha+\beta-6=\frac{3}{2}-6=-\frac{9}{2}$,
$(\alpha-3)(\beta-3)=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9=-1-\frac{9}{2}+9=\frac{7}{2}$
따라서 x^2의 계수가 2이고, $\alpha-3$, $\beta-3$을 두 근으로 하는 이차방정식은
$2\left(x^2+\frac{9}{2}x+\frac{7}{2}\right)=0$ $\therefore 2x^2+9x+7=0$
다른 풀이 이차방정식 $2x^2-3x-2=0$에서
$(2x+1)(x-2)=0$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$
이때 $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=2$라 하면 $\alpha-3=-\frac{7}{2}$, $\beta-3=-1$
따라서 x^2의 계수가 2이고 $-\frac{7}{2}$, -1을 두 근으로 하는 이차방정식은 $2\left(x+\frac{7}{2}\right)(x+1)=0$ $\therefore 2x^2+9x+7=0$

11 $x^2-10x+k=0$에서 x의 계수와 상수항이 모두 유리수이고 한 근이 $5-3\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $5+3\sqrt{2}$이다. 이때 두 근의 곱이 k이므로
$k=(5-3\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})=25-18=7$
다른 풀이 $x=5-3\sqrt{2}$가 이차방정식 $x^2-10x+k=0$의 근이므로
$(5-3\sqrt{2})^2-10(5-3\sqrt{2})+k=0$
$43-30\sqrt{2}-50+30\sqrt{2}+k=0$ $\therefore k=7$

12 (가)에서 x^2의 계수가 1이므로 구하는 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$이라 하면 (가), (나)에서 x의 계수와 상수항이 모두 유리수이고, (다)에서 한 근이 $-2-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $-2+\sqrt{3}$이다. 즉,
$(-2-\sqrt{3})+(-2+\sqrt{3})=-4$ $\therefore a=4$
$(-2-\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})=4-3=1$ $\therefore b=1$
따라서 구하는 이차방정식은 $x^2+4x+1=0$이다.

13 구하는 다각형을 n각형이라 하면

$\frac{n(n-3)}{2}=44$에서 $n(n-3)=88$, $n^2-3n-88=0$

$(n+8)(n-11)=0 \qquad \therefore n=11$ ($\because n\geq 3$)

따라서 구하는 다각형은 십일각형이다.

14 연속하는 세 홀수를 $x-2$, x, $x+2$($x\geq 3$인 홀수)라 하면

$(x-2)^2+x^2+(x+2)^2=155$에서

$3x^2=147$, $x^2=49 \qquad \therefore x=7$ ($\because x\geq 3$)

따라서 세 홀수는 5, 7, 9이므로 합은 $5+7+9=21$이다.

15 어떤 자연수를 x라 하면 $3(x+3)=(x^2+1)+4$에서

$3x+9=x^2+5$, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0 \qquad \therefore x=4$ ($\because x>0$)

16 학생 수를 x명이라 하면 한 사람이 받는 연필의 수는 $(x-3)$자루이므로

$x(x-3)=180$, $x^2-3x-180=0$

$(x-15)(x+12)=0 \qquad \therefore x=15$ ($\because x>3$)

따라서 학생 수는 15명이다.

17 $50+70t-5t^2=250$에서 $5t^2-70t+200=0$

$t^2-14t+40=0$, $(t-4)(t-10)=0$

$\therefore t=4$ 또는 $t=10$

따라서 쏘아 올린 지 4초 후에 높이 250 m인 지점을 처음으로 완전히 통과한다.

18 직사각형의 가로의 길이를 x cm라 하면 세로의 길이는 $(12-x)$ cm이므로 $x(12-x)=35$에서

$x^2-12x+35=0$, $(x-5)(x-7)=0$

$\therefore x=5$ 또는 $x=7$

이때 (가로의 길이)>(세로의 길이)이므로 $6<x<12$에서 $x=7$

따라서 직사각형의 가로의 길이는 7 cm이다.

STEP 2 내신 5% 따라잡기 P. 60~64

1 ⑤ **2** ⑤ **3** $c=2a-b$ **4** 2 또는 6

5 $\frac{4}{3}$ **6** 62 **7** $a<\frac{9}{4}$ **8** -94 **9** 6 **10** ③

11 111 **12** 23 **13** ③ **14** $x^2-4=0$ **15** 66

16 84 **17** ③ **18** 3초 **19** 5

20 $(-4+4\sqrt{3})$ cm **21** 13 cm

22 P(8, 5) 또는 P(10, 4) **23** ② **24** 3초 **25** $\frac{1}{2}$

26 20 % **27** 속력 : 시속 10 km, 걸린 시간 : 1시간 40분

28 14일, 21일, 28일 **29** 18명

30 (1) 231개 (2) 10번째

1 주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$\{-2(k+1)\}^2-4\times(k^2-1)\times 2=0$

$k^2+2k+1-2k^2+2=0$, $k^2-2k-3=0$

$(k+1)(k-3)=0 \qquad \therefore k=-1$ 또는 $k=3$

이때 $k^2-1\neq 0$이므로 $k\neq -1$ 그리고 $k\neq 1$

$\therefore k=3$

2 주어진 이차방정식이 서로 다른 두 근을 가지려면

$(-5)^2-4pq>0 \qquad \therefore pq<\frac{25}{4}$

따라서 $pq<\frac{25}{4}$를 만족하는 순서쌍 (p, q)는

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (5, 1), (6, 1)

의 14가지이고, 모든 경우의 수는 36가지이므로 구하는 확률은

$\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$

3 주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$(b-c)^2-4(a-b)(c-a)=0$

$b^2-2bc+c^2-4(ac-a^2-bc+ab)=0$

$4a^2-4(b+c)a+b^2+2bc+c^2=0$

$4a^2-4(\underbrace{b+c}_{A})a+(\underbrace{b+c}_{A})^2=0$

$\{2a-(\underbrace{b+c}_{A})\}^2=0$, $(2a-b-c)^2=0$

따라서 $2a-b-c=0$이므로 $c=2a-b$

4 $x^2-4(2k-3)x+k^2=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=4(2k-3)=8k-12$, $\alpha\beta=k^2$

$(\alpha-1)(\beta-1)=1$에서 $\alpha\beta-(\alpha+\beta)=0$

즉, $k^2-(8k-12)=0$에서

$k^2-8k+12=0$, $(k-2)(k-6)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=6$

5 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$

이때 $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta}$가 $2x^2-8x+a=0$의 두 근이므로

$\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a}{2}$에서 $\frac{a}{2}=1 \qquad \therefore a=2$

$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{8}{2}=4$이므로

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(-a)^2-2b}{b}=\frac{4-2b}{b}=4$$

$4-2b=4b \qquad \therefore b=\frac{2}{3}$

$\therefore a-b=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

6 $ax^2-bx+30=0$의 양변을 a로 나누면

$x^2-\frac{b}{a}x+\frac{30}{a}=0$ ($\because a>0$)

이때 이차방정식의 두 근이 모두 소수이므로 $\frac{30}{a}=\frac{2\times 3\times 5}{a}$가 두 소수의 곱이 되어야 한다.

$\therefore a=2$ 또는 $a=3$ 또는 $a=5$

(ⅰ) $a=2$일 때, 이차방정식의 두 근이 3, 5이므로

$3+5=\frac{b}{2}$ $\therefore b=16$

(ⅱ) $a=3$일 때, 이차방정식의 두 근이 2, 5이므로

$2+5=\frac{b}{3}$ $\therefore b=21$

(ⅲ) $a=5$일 때, 이차방정식의 두 근이 2, 3이므로

$2+3=\frac{b}{5}$ $\therefore b=25$

따라서 (ⅰ)~(ⅲ)에서 b의 값의 합은

$16+21+25=62$

7 $\begin{cases} p+q=3-2a \\ pq=a^2-2a \end{cases}$ 에서 p, q는 이차방정식

$x^2-(3-2a)x+(a^2-2a)=0$의 두 근이므로

$(3-2a)^2-4(a^2-2a)>0$, $9-12a+4a^2-4a^2+8a>0$

$9-4a>0$

$\therefore a<\frac{9}{4}$

8 $x^2-x-4=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-\alpha-4=0$, $\beta^2-\beta-4=0$

$\therefore \alpha^2=\alpha+4$, $\beta^2=\beta+4$

$\alpha^3=\alpha\times\alpha^2=\alpha(\alpha+4)=\alpha^2+4\alpha$,

$\beta^3=\beta\times\beta^2=\beta(\beta+4)=\beta^2+4\beta$

이때 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-4$이므로

$(\alpha^3-\alpha^2+\alpha+1)(\beta^3-\beta^2+\beta+1)$

$=(\alpha^2+4\alpha-\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+4\beta-\beta^2+\beta+1)$

$=(5\alpha+1)(5\beta+1)$

$=25\alpha\beta+5(\alpha+\beta)+1$

$=25\times(-4)+5\times1+1$

$=-100+5+1=-94$

9 주어진 이차방정식의 두 근이 절댓값은 같고, 부호가 반대이므로 두 근을 k, $-k(k>0)$라 하면

$k+(-k)=a^2-3a-18=0$에서

$(a+3)(a-6)=0$ $\therefore a=-3$ 또는 $a=6$

이때 $k\times(-k)=-a+2$에서

(ⅰ) $a=-3$일 때, $-k^2=5$ $\therefore k^2=-5$

양수의 제곱은 음수가 될 수 없으므로 이를 만족하는 k의 값은 없다.

(ⅱ) $a=6$일 때, $-k^2=-4$, $k^2=4$ $\therefore k=2$ ($\because k>0$)

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 상수 a의 값은 $a=6$이다.

10 주어진 이차방정식에서 (두 근의 곱)$=-32<0$이므로 두 근은 서로 다른 부호이고, 절댓값의 비가 $2:1$이므로 두 근을 α, -2α라 하면

$\alpha\times(-2\alpha)=-32$에서

$\alpha^2=16$ $\therefore \alpha=\pm4$

$\alpha+(-2\alpha)=-m+5$에서 $m=\alpha+5$

이때 $\alpha=4$이면 $m=9$, $\alpha=-4$이면 $m=1$이므로

모든 상수 m의 값의 합은 $9+1=10$이다.

11 주어진 이차방정식의 두 근의 최대공약수가 3이므로 두 근을 $a=3m$, $b=3n$(m, n은 서로소)이라 하면

$3m+3n=-\frac{-30}{2}=15$이므로 $m+n=5$

이때 $a>b>3$, 즉 $3m>3n>3$에서 $m>n>1$이므로

$m=3$, $n=2$ $\therefore a=9$, $b=6$

$ab=\frac{k}{2}$에서 $54=\frac{k}{2}$ $\therefore k=108$

$\therefore a-b+k=9-6+108=111$

12 (나)에서 주어진 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근의 차가 5이므로 두 근을 n, $n+5$(n은 자연수)라 하면

$n+(n+5)=a$에서 $a=2n+5$

$n\times(n+5)=b$에서 $b=n(n+5)$

이때 $a=2n+5$가 20 이하의 3의 배수이므로

$n=2$ 또는 $n=5$

(ⅰ) $n=2$일 때, $a=2\times2+5=9$, $b=2\times(2+5)=14$

(ⅱ) $n=5$일 때, $a=2\times5+5=15$, $b=5\times(5+5)=50$

그런데 b는 7의 배수가 아니므로 $n\neq5$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 $a=9$, $b=14$이므로

$a+b=23$

13 두 근이 연속하는 홀수이고, 두 근의 제곱의 차가 16이므로 두 근을 α, $\alpha+2$(α는 홀수)라 하면

$(\alpha+2)^2-\alpha^2=16$, $\alpha^2+4\alpha+4-\alpha^2=16$

$4\alpha=12$ $\therefore \alpha=3$

즉, 두 근이 3, 5이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-3)(x-5)=0$ $\therefore x^2-8x+15=0$

따라서 $a=-8$, $b=15$이므로 두 근이 -8, 15이고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x+8)(x-15)=0$ $\therefore x^2-7x-120=0$

14 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$

$x^2-8x+4=0$의 두 근이 α^2, β^2이므로

$\alpha^2+\beta^2=8$, $\alpha^2\beta^2=4$ $\therefore \alpha\beta=\pm2$

(ⅰ) $\alpha\beta=2$일 때,

$a^2=(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=8+2\times2=12$

$\therefore a=2\sqrt{3}$, $b=2$ ($\because a>b$)

이때 a가 정수가 아니므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(ⅱ) $\alpha\beta=-2$일 때,

$a^2=(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=8+2\times(-2)=4$

$\therefore a=2$, $b=-2$ ($\because a>b$)

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 $a=2$, $b=-2$를 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-2)(x+2)=0$ $\therefore x^2-4=0$

15 $x^2-5x+2=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=2$

이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha^2+\frac{1}{\beta}$, $\beta^2+\frac{1}{\alpha}$이므로

$\left(\alpha^2+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta^2+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=5^2-2\times2+\frac{5}{2}=\frac{47}{2}$

$\left(\alpha^2+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta^2+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha^2\beta^2+\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha\beta}$

$=2^2+5+\frac{1}{2}=\frac{19}{2}$

따라서 두 근이 $\alpha^2+\frac{1}{\beta}$, $\beta^2+\frac{1}{\alpha}$이고, x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2\left(x^2-\frac{47}{2}x+\frac{19}{2}\right)=0$ $\quad\therefore 2x^2-47x+19=0$

따라서 $a=-47$, $b=19$이므로 $b-a=19-(-47)=66$이다.

16 $2x^2+ax+b=0$에서 a, b가 유리수이고, 한 근이 $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$이므로

다른 한 근은 $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$이다.

$\frac{2-\sqrt{2}}{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{2}=-\frac{a}{2}$ $\quad\therefore a=-4$

$\frac{2-\sqrt{2}}{2}\times\frac{2+\sqrt{2}}{2}=\frac{b}{2}$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore a+b=-3$, $ab=-4$

이때 두 근이 -3, -4이고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x+3)(x+4)=0$ $\quad\therefore x^2+7x+12=0$

따라서 $p=7$, $q=12$이므로 $pq=7\times12=84$이다.

17 꿀벌의 수를 x마리라 하면

$\sqrt{\frac{1}{2}x}+\frac{7}{8}x=x$, $\sqrt{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{8}x$, $\frac{1}{2}x=\frac{1}{64}x^2$

$x^2-32x=0$, $x(x-32)=0$ $\quad\therefore x=32$ ($\because x\geq1$)

따라서 처음에 있던 꿀벌은 모두 32마리이다.

18 쏘아 올린 지 t초 후의 높이를 50 m라 하면

$35t-5t^2=50$, $5t^2-35t+50=0$

$t^2-7t+10=0$, $(t-2)(t-5)=0$ $\quad\therefore t=2$ 또는 $t=5$

따라서 물체의 높이가 50 m 이상일 때는 쏘아 올린 지 2초부터 5초까지이므로 3초 동안이다.

19 늘어난 원의 반지름의 길이는 $x+5$이므로

$\pi\times(x+5)^2=4\times(\pi\times5^2)$, $x^2+10x+25=100$

$x^2+10x-75=0$, $(x+15)(x-5)=0$

$\therefore x=5$ ($\because x>0$)

20 $\overline{AC}=x$ cm라 하면 $\overline{CB}=(8-x)$ cm이므로

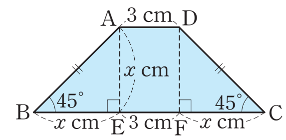
$x^2=\frac{1}{3}(8-x)^2$, $x^2+8x-32=0$

$\therefore x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-1\times(-32)}}{1}=-4\pm\sqrt{48}=-4\pm4\sqrt{3}$

이때 $0<x<8$이므로 $x=-4+4\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AC}=(-4+4\sqrt{3})$ cm

21 등변사다리꼴 ABCD의 두 꼭짓점 A, D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하면



$\angle DCF=\angle ABE=45°$

$\triangle ABE\equiv\triangle DCF$(RHA 합동)이므로

$\overline{BE}=x$ cm라 하면 $\overline{CF}=\overline{BE}=x$ cm이고

$\triangle ABE$가 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AE}=\overline{BE}=x$ cm

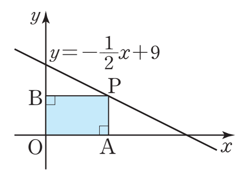
따라서 등변사다리꼴 ABCD의 넓이에서

$\frac{1}{2}\times\{3+(2x+3)\}\times x=40$, $x^2+3x-40=0$

$(x+8)(x-5)=0$ $\quad\therefore x=5$ ($\because x>0$)

$\therefore \overline{BC}=2x+3=2\times5+3=13$ (cm)

22 점 P의 x좌표를 p라 하면



$P\left(p,\ -\frac{1}{2}p+9\right)$이고

□OAPB$=\overline{OA}\times\overline{OB}$이므로

$p\left(-\frac{1}{2}p+9\right)=40$

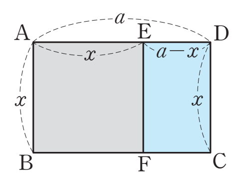
$p^2-18p+80=0$, $(p-8)(p-10)=0$

$\therefore p=8$ 또는 $p=10$

따라서 $x=8$일 때 $y=5$, $x=10$일 때 $y=4$이므로

P(8, 5) 또는 P(10, 4)이다.

23 □ABCD가 황금직사각형이고,



□ABCD와 □DEFC가 닮음이므로

□ABFE는 정사각형이다.

이때 $\overline{AD}=a$, $\overline{AB}=x$라 하면

□ABCD∽□DEFC이므로

$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{AD}:\overline{DC}$에서

$x:(a-x)=a:x$, $x^2=a(a-x)$, $x^2+ax-a^2=0$

$\therefore x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4\times1\times(-a^2)}}{2}=\frac{-a\pm\sqrt{5a^2}}{2}$

$=\frac{-a\pm\sqrt{5}a}{2}$ ($\because a>0$)

이때 $x>0$이므로 $x=\frac{-a+\sqrt{5}a}{2}$

따라서 □ABCD와 □DEFC의 닮음비는

$\overline{AD}:\overline{DC}=a:x=a:\frac{-a+\sqrt{5}a}{2}$

$=1:\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=2:(\sqrt{5}-1)$

24 점 P는 초속 1 cm로 움직이므로 t초 후에 $\overline{AP}=t$ cm

$\therefore \overline{BP}=(9-t)$ cm

또 점 Q는 초속 2 cm로 움직이므로 t초 후에 $\overline{BQ}=2t$ cm

따라서 t초 후에 $\triangle PBQ$의 넓이가 18 cm^{2}가 된다고 하면

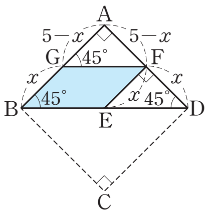
$\frac{1}{2}\times(9-t)\times2t=18$, $9t-t^2=18$, $t^2-9t+18=0$

$(t-3)(t-6)=0$ $\quad\therefore t=3$ 또는 $t=6$

이때 $0<2t<10$이므로 $0<t<5$ $\quad\therefore t=3$

따라서 $\triangle PBQ$의 넓이가 18 cm^{2}가 되는 것은 출발한 지 3초 후이다.

25 오른쪽 그림에서 △AGF와 △EDF는 직각이등변삼각형이다.
$\overline{BG}=x$라 하면 $\overline{AG}=5-x$이므로
□BEFG
=△ABD−△AGF−△EDF
에서



$4=\frac{1}{2}\times5\times5-\frac{1}{2}\times(5-x)\times(5-x)-\frac{1}{2}\times x\times x$

$4=\frac{25}{2}-\frac{(5-x)^2}{2}-\frac{x^2}{2}$, $8=25-(5-x)^2-x^2$

$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=4$

이때 $5-x>x$이므로 $0<x<\frac{5}{2}$ $\quad\therefore x=1$

$\therefore$ △EDF$=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$

26 처음 1인당 입장료를 a원, 입장객 수를 b명이라 하면
입장료를 x% 올린 후의 입장료는 $\left(1+\frac{x}{100}\right)a$원,
입장객 수는 $\left(1-\frac{x}{400}\right)b$명이다.
따라서 입장료를 x% 올린 후의 총 수입은
$\left(1+\frac{x}{100}\right)a\times\left(1-\frac{x}{400}\right)b$(원)
이때 총 수입이 14% 증가해야 하므로
$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{400}\right)ab=\frac{114}{100}ab$
$\frac{100+x}{100}\times\frac{400-x}{400}=\frac{114}{100}$, $(100+x)(400-x)=45600$
$x^2-300x+5600=0$, $(x-20)(x-280)=0$
$\therefore x=20$ ($\because 0<x<50$)
따라서 입장료는 20%를 올려야 한다.

27 두 사람이 만날 때까지 걸린 시간을 x시간, 두 사람이 만난 지점을 P지점이라 하면 민재가 A지점에서 P지점까지 간 거리는 $8x$ km이고, 은교가 B지점에서 P지점까지 간 거리는 ax km, P지점에서 A지점까지 간 거리는 $\frac{4}{3}a$ km이므로
$8x=\frac{4}{3}a$ ⋯ ㉠, $8x+ax=30$ ⋯ ㉡
㉠에서 $a=6x$를 ㉡에 대입하면
$3x^2+4x-15=0$, $(3x-5)(x+3)=0$ $\quad\therefore x=\frac{5}{3}$ ($\because x>0$)
$x=\frac{5}{3}$를 ㉠에 대입하면 $a=10$
따라서 은교의 속력은 시속 10 km이고, 두 사람이 만날 때까지 걸린 시간은 $\frac{5}{3}$시간, 즉 1시간 40분이다.

28 경희가 봉사 활동을 하는 3일의 날의 수를 차례로 $x-7$, x, $x+7$이라 하면
$(x-7)^2+2x+(x+7)=266$, $x^2-11x-210=0$
$(x+10)(x-21)=0$ $\quad\therefore x=21$ ($\because x>7$)
따라서 경희가 봉사 활동을 하는 3일은 14, 21, 28일이다.

29 학생이 받은 계산식의 규칙을 찾으면 번호가 n번인 학생이 받은 계산식은 $2\times n\times(n+2)-3\times n+5$이므로 간단히 하면
$2\times n\times(n+2)-3\times n+5=2n^2+4n-3n+5$
$=2n^2+n+5$
이때 n번 학생이 받은 계산식의 식의 값이 671이므로
$2n^2+n+5=671$, $2n^2+n-666=0$
$(n-18)(2n+37)=0$ $\quad\therefore n=18$ ($\because n>0$)
따라서 이 반 학생은 모두 18명이다.

30 1번째에 놓이는 검은색 바둑돌의 개수는 1개이고, 흰색 바둑돌의 개수는 0개
2번째에 놓이는 검은색 바둑돌의 개수는 $1+2=3$(개)이고, 흰색 바둑돌의 개수는 1개
3번째에 놓이는 검은색 바둑돌의 개수는 $1+2+3=6$(개)이고, 흰색 바둑돌의 개수는 $1+2=3$(개)
4번째에 놓이는 검은색 바둑돌의 개수는 $1+2+3+4=10$(개)이고, 흰색 바둑돌의 개수는 $1+2+3=6$(개)
⋮
n번째에 놓이는 검은색 바둑돌의 개수는
$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$(개)이고, 흰색 바둑돌의 개수는 $1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$(개)

(1) $\frac{n(n+1)}{2}$에 $n=21$을 대입하면
$\frac{21\times(21+1)}{2}=21\times11=231$
따라서 21번째에 놓이는 바둑돌에서 검은색 바둑돌은 231개이다.

(2) $\frac{n(n-1)}{2}=45$에서 $n^2-n=90$, $n^2-n-90=0$
$(n+9)(n-10)=0$ $\quad\therefore n=10$ ($\because n>0$)
따라서 흰색 바둑돌이 45개가 놓이는 것은 10번째이다.

STEP 3 내신 1% 뛰어넘기 P. 65~66

01 2	**02** $\sqrt{15}$	**03** 2	**04** $x^2-2014x-2015=0$
05 87	**06** $\frac{-5+5\sqrt{5}}{2}$ cm	**07** 12	**08** P(6, 9)

01 길잡이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 근을 가지려면 $b^2-4ac\geq0$이어야 함을 이용한다.
$x^2-ax+b+1=0$이 근을 가지므로
$(-a)^2-4(b+1)\geq0$ $\quad\therefore b\leq\frac{a^2}{4}-1$
즉, b의 최댓값은 $M=\frac{a^2}{4}-1$
이때 $-2\leq a\leq4$이므로
$0\leq a^2\leq16$, $-1\leq\frac{a^2}{4}-1\leq3$ $\quad\therefore -1\leq M\leq3$
따라서 $p=-1$, $q=3$이므로 $p+q=-1+3=2$이다.

02 **길잡이** $(\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1})^2$의 값을 먼저 구한다.

$(x-3)^2=7-x^2$에서 $x^2-3x+1=0$

$x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

이때 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\times1=7$이므로

$$\begin{aligned}(\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1})^2&=\alpha^2+1+2\sqrt{\alpha^2+1}\sqrt{\beta^2+1}+\beta^2+1\\&=\alpha^2+\beta^2+2+2\sqrt{(\alpha^2+1)(\beta^2+1)}\\&=7+2+2\sqrt{(\alpha\beta)^2+\alpha^2+\beta^2+1}\\&=9+2\sqrt{1^2+7+1}\\&=9+2\times3=15\end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1}>0$이므로

$\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1}=\sqrt{15}$

03 **길잡이** 이차방정식 $x^2+2kx-6k=0$의 양의 정수인 근을 α, 음의 정수인 근을 β라 하고, 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$와 $\alpha\beta$의 관계식을 구한다.

$x^2+2kx-6k=0$의 양의 정수인 근을 α, 음의 정수인 근을 β라 하면

$\alpha+\beta=-2k$, $\alpha\beta=-6k$

이때 $\alpha\beta=-6k$에 $k=-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$를 대입하면

$\alpha\beta=3(\alpha+\beta)$, $\alpha\beta-3\alpha-3\beta=0$

$\alpha\beta-3\alpha-3\beta+9=9$ $\quad\therefore (\alpha-3)(\beta-3)=9$

이때 $\alpha>0$, $\beta<0$에서 $\alpha-3>-3$, $\beta-3<-3$이므로

$(\alpha-3)(\beta-3)=9$를 만족하는 순서쌍 $(\alpha-3, \beta-3)$은 $(-1, -9)$이다.

따라서 $\alpha=2$, $\beta=-6$이므로 $k=-\dfrac{2+(-6)}{2}=2$이다.

04 **길잡이** 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 연속하는 자연수이므로 두 근을 α, $\alpha+1$로 놓는다.

$x^2-ax+b=0$의 두 근이 연속하는 자연수이고, 두 근의 제곱의 차가 5이므로 두 근을 α, $\alpha+1$(α는 자연수)이라 하면

$(\alpha+1)^2-\alpha^2=5$, $\alpha^2+2\alpha+1-\alpha^2=5$

$2\alpha=4$ $\quad\therefore \alpha=2$

즉, 두 근은 2, 3이므로

$a=2+3=5$, $b=2\times3=6$이고 $a-b=-1$, $b-a=1$

$$\begin{aligned}\therefore A&=(a-b)+(a-b)^2+\cdots+(a-b)^{2015}\\&=(-1)+(-1)^2+\cdots+(-1)^{2015}=-1\\B&=(b-a)+(b-a)^2+\cdots+(b-a)^{2015}\\&=1+1^2+\cdots+1^{2015}=2015\end{aligned}$$

따라서 두 근이 -1, 2015이고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x+1)(x-2015)=0$ $\quad\therefore x^2-2014x-2015=0$

05 **길잡이** 이차방정식 $x^2+ax+b=0$(a, b는 유리수)의 한 근이 $\dfrac{1-\sqrt5}{2}$이면 다른 한 근은 $\dfrac{1+\sqrt5}{2}$임을 이용하여 a, b의 값을 먼저 구한다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 유리수이고 한 근이 $\dfrac{1-\sqrt5}{2}$이므로 다른 한 근은 $\dfrac{1+\sqrt5}{2}$이다.

$\dfrac{1-\sqrt5}{2}+\dfrac{1+\sqrt5}{2}=-a$ $\quad\therefore a=-1$

$\dfrac{1-\sqrt5}{2}\times\dfrac{1+\sqrt5}{2}=b$ $\quad\therefore b=-1$

따라서 $x^2-x-1=0$에서 $x^2=x+1$이므로

$$\begin{aligned}x^5&=x^3\times x^2=x^3(x+1)=x^4+x^3\\&=(x+1)^2+x(x+1)=2x^2+3x+1\\&=2(x+1)+3x+1=5x+3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore x^{10}&=(x^5)^2=(5x+3)^2=25x^2+30x+9\\&=25(x+1)+30x+9=55x+34\end{aligned}$$

따라서 $p=55$, $q=34$이므로

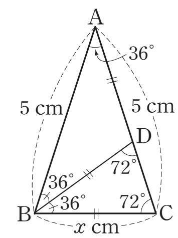
$a+b+p+q=(-1)+(-1)+55+34=87$

06 **길잡이** $\angle B$의 이등분선과 $\overline{AC}$의 교점을 D라 하고, $\overline{BD}$를 그어서 $\triangle ABC\backsim\triangle BDC$(AA 닮음)임을 이용한다.

$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이고 $\angle A=36^\circ$이므로

$\angle ABC=\angle ACB=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-36^\circ)=72^\circ$

오른쪽 그림에서 $\angle B$의 이등분선과 $\overline{AC}$의 교점을 D라 하면



$\angle ABD=\angle CBD=\dfrac{1}{2}\times72^\circ=36^\circ$이므로

$\overline{AD}=\overline{BD}$

또 $\triangle ABD$에서

$\angle BDC=\angle BAD+\angle ABD=72^\circ$

이고, $\angle BDC=\angle BCD$이므로

$\overline{BD}=\overline{BC}$

$\triangle ABC$와 $\triangle BDC$에서

$\angle A=\angle CBD=36^\circ$이고, $\angle C$는 공통이므로

$\triangle ABC\backsim\triangle BDC$(AA 닮음)

$\therefore \overline{AB}:\overline{BD}=\overline{BC}:\overline{DC}$

이때 $\overline{BC}=\overline{BD}=x$ cm라 하면 $\overline{DC}=(5-x)$ cm이므로

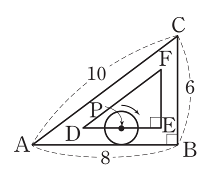
$5:x=x:(5-x)$, $x^2=5(5-x)$, $x^2+5x-25=0$

$\therefore x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times(-25)}}{2}=\dfrac{-5\pm5\sqrt5}{2}$

따라서 $x>0$이므로 $\overline{BC}=x=\dfrac{-5+5\sqrt5}{2}$ (cm)이다.

07 **길잡이** 원이 삼각형의 세 변을 따라 움직일 때, 원의 중심 P가 만드는 도형을 그려 본다.

오른쪽 그림에서 원 P가 삼각형 ABC의 세 변을 따라 움직일 때, 원의 중심 P가 그리는 도형을 $\triangle DEF$라 하면



$\triangle DEF\backsim\triangle ABC$이므로 $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FD}$의 길이를 각각 $4x$, $3x$, $5x$라 하자.

이때 □DABE, □EBCF, □FCAD는 모두 높이가 1인 사다리꼴이므로

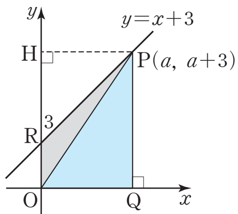
$$\begin{aligned}\triangle ABC&=\square DABE+\square EBCF+\square FCAD+\triangle DEF\\&=\frac{1}{2}\times(4x+8)\times1+\frac{1}{2}\times(3x+6)\times1\\&\quad+\frac{1}{2}\times(5x+10)\times1+\frac{1}{2}\times4x\times3x\\&=6x^2+6x+12\end{aligned}$$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times8\times6=24$이므로 $6x^2+6x+12=24$

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=1$ ($\because x>0$)

따라서 점 P가 그리는 △DEF의 둘레의 길이는
$3x+4x+5x=12x=12$

08 길잡이 직선 $y=x+3$ 위의 점 P의 좌표를 $P(a,\ a+3)$으로 놓는다.



직선 $y=x+3$ 위의 점 P의 좌표를 $P(a,\ a+3)(a>0)$이라 하면
$\overline{OQ}=a,\ \overline{PQ}=a+3$
$\therefore\ \triangle POQ=\frac{1}{2}a(a+3)$ $\cdots$ ㉠
점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PH}=\overline{OQ}=a$
직선 $y=x+3$의 y절편은 3이므로 $\overline{OR}=3$
$\therefore\ \triangle PRO=\frac{1}{2}\times3\times a=\frac{3}{2}a$ $\cdots$ ㉡
$\triangle POQ:\triangle PRO=3:1$이므로 ㉠, ㉡에서
$\frac{1}{2}a(a+3):\frac{3}{2}a=3:1,\ \frac{1}{2}a(a+3)=\frac{9}{2}a$
$a^2-6a=0,\ a(a-6)=0$ $\quad\therefore\ a=6\ (\because\ a>0)$
따라서 점 P의 좌표는 $P(6,\ 9)$이다.

서술형 완성하기

P. 67~68

1 -6 **2** -2190 **3** $4\sqrt{2}$ **4** 15 **5** $x=4$ 또는 $x=6$
6 $(4+4\sqrt{2})$ cm **7** 풀이 참조

1 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$x^2+4xy+3y^2-10x-14y+16$
$=x^2+(4y-10)x+3y^2-14y+16$ $\cdots$ (i)
$=x^2+(4y-10)x+(3y-8)(y-2)$
$=(x+3y-8)(x+y-2)$ $\cdots$ (ii)
따라서 $a=3,\ b=-8,\ c=1,\ d=-2$ 또는
$a=1,\ b=-2,\ c=3,\ d=-8$이므로 $\cdots$ (iii)
$a+b+c+d=-6$ $\cdots$ (iv)

채점 기준	배점
(i) 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하기	30 %
(ii) 주어진 식을 인수분해하기	30 %
(iii) $a,\ b,\ c,\ d$의 값 구하기	20 %
(iv) $a+b+c+d$의 값 구하기	20 %

2 $20=x,\ 50=y$로 놓으면
(주어진 식)
$=\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}-\sqrt{y(y+1)(y+2)(y+3)+1}$
$\cdots$ (i)
n에 대한 다항식 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$을 인수분해하면
$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=n(n+3)(n+1)(n+2)+1$
$=\underbrace{(n^2+3n)}_{A}\underbrace{(n^2+3n+2)}_{A}+1$
$=A(A+2)+1=A^2+2A+1$
$=(A+1)^2=(n^2+3n+1)^2$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{(x^2+3x+1)^2}-\sqrt{(y^2+3y+1)^2}$
$=x^2+3x+1-(y^2+3y+1)\ (\because\ x>0,\ y>0)$
$=x^2+3x-y^2-3y$ $\cdots$ (ii)
$=20^2+3\times20-50^2-3\times50$
$=400+60-2500-150=-2190$ $\cdots$ (iii)

채점 기준	배점
(i) $20=x,\ 50=y$로 놓고 주어진 식을 $x,\ y$에 관한 식으로 나타내기	30 %
(ii) 근호 안의 식을 인수분해하여 주어진 식을 간단히 정리하기	50 %
(iii) $x=20,\ y=50$을 대입하여 주어진 식의 값 구하기	20 %

3 주어진 식을 인수분해하면
$3x^2-8xy-3y^2=(3x+y)(x-3y)$ $\cdots$ (i)
이때 $2x-y=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$ $\cdots$ ㉠
$x+2y=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$ $\cdots$ ㉡
이므로 ㉠+㉡에서 $3x+y=2\sqrt{2}$, ㉠−㉡에서 $x-3y=2$ $\cdots$ (ii)
$\therefore$ (주어진 식)$=(3x+y)(x-3y)=2\sqrt{2}\times2=4\sqrt{2}$ $\cdots$ (iii)

채점 기준	배점
(i) $3x^2-8xy-3y^2$을 인수분해하기	30 %
(ii) 주어진 조건을 이용하여 $3x+y,\ x-3y$의 값 구하기	각 20 %
(iii) (ii)에서 구한 값을 이용하여 $3x^2-8xy-3y^2$의 값 구하기	30 %

4 $x(x-3)=18$에서 $x^2-3x-18=0$
$(x+3)(x-6)=0$ $\quad\therefore\ x=-3$ 또는 $x=6$ $\cdots$ (i)
따라서 $2x^2+(a+1)x+2a=0$에 $x=-3$을 대입하면
$18-3(a+1)+2a=0$ $\cdots$ (ii)
$18-3a-3+2a=0$ $\quad\therefore\ a=15$ $\cdots$ (iii)

채점 기준	배점
(i) 이차방정식 $x(x-3)=18$의 두 근 구하기	40 %
(ii) (i)의 두 근 중 작은 근을 $2x^2+(a+1)x+2a=0$에 대입하기	30 %
(iii) 상수 a의 값 구하기	30 %

5 혜림이는 5를 중근으로 구하였으므로 혜림이가 푼 이차방정식은
$(x-5)^2=0$ $\quad\therefore\ x^2-10x+25=0$ $\cdots$ (i)
이때 혜림이는 x의 계수를 바르게 보았으므로
x의 계수는 -10이다. $\cdots$ (ii)
현우는 $-2,\ -12$를 두 근으로 구하였으므로 현우가 푼 이차방정식은
$(x+2)(x+12)=0$ $\quad\therefore\ x^2+14x+24=0$ $\cdots$ (iii)
이때 현우는 상수항을 바르게 보았으므로 상수항은 24이다. $\cdots$ (iv)
따라서 처음 이차방정식은 $x^2-10x+24=0$이므로 $\cdots$ (v)
$(x-4)(x-6)=0$ $\quad\therefore\ x=4$ 또는 $x=6$ $\cdots$ (vi)

채점 기준	배점
(i) 혜림이가 푼 이차방정식 구하기	20 %
(ii) 처음 이차방정식의 x의 계수 구하기	10 %
(iii) 현우가 푼 이차방정식 구하기	20 %
(iv) 처음 이차방정식의 상수항 구하기	10 %
(v) 처음 이차방정식 구하기	10 %
(vi) 처음 이차방정식의 해 구하기	30 %

6 처음 색종이의 한 변의 길이를 x cm라 하면
상자의 밑면의 가로와 세로의 길이가 각각 $(x-4)$ cm이고,

높이는 2cm이다. $\cdots$ (i)

상자의 부피가 64cm^3이므로

$(x-4)\times(x-4)\times2=64$ $\cdots$ (ii)

$(x-4)^2=32,\ x-4=\pm4\sqrt{2}$

$\therefore\ x=4-4\sqrt{2}$ 또는 $x=4+4\sqrt{2}$ $\cdots$ (iii)

이때 $x>4$이므로 $x=4+4\sqrt{2}$

따라서 처음 색종이의 한 변의 길이는 $(4+4\sqrt{2})\text{cm}$이다. $\cdots$ (iv)

채점 기준	배점
(i) 미지수 정하기	20 %
(ii) 주어진 조건에 맞게 이차방정식 세우기	30 %
(iii) 이차방정식의 해 구하기	30 %
(iv) 처음 색종이의 한 변의 길이 구하기	20 %

7 |예시 답안|

한 자리의 자연수 x와 0 또는 한 자리의 자연수 y에 대하여 두 자리의 카프리카 수를 $10x+y$라 하자. $\cdots$ (i)

카프리카 수의 성질에 의해

$(x+y)^2=10x+y,\ x^2+2(y-5)x+(y^2-y)=0$

이므로

$x=-(y-5)\pm\sqrt{(y-5)^2-(y^2-y)}$

$=(5-y)\pm\sqrt{25-9y}$ $\cdots$ (ii)

이때 근호 안의 수 $25-9y$는 양수이어야 하므로 이를 만족하는 자연수 y는 $y=0,\ 1,\ 2$뿐이다. $\cdots$ (iii)

㉠ $y=0$일 때, $x=5\pm\sqrt{25}$ $\quad\therefore\ x=10$ 또는 $x=0$

이때 x는 조건을 만족하지 않는다.

㉡ $y=1$일 때, $x=4\pm\sqrt{16}$ $\quad\therefore\ x=8$ 또는 $x=0$

이때 x는 자연수이므로 $x=8$

㉢ $y=2$일 때, $x=3\pm\sqrt{7}$

이때 x는 조건을 만족하지 않는다. $\cdots$ (iv)

따라서 ㉠~㉢에서 두 자리의 카프리카 수는

$81(8+1=9,\ 9^2=81)$의 한 개뿐이다. $\cdots$ (v)

채점 기준	배점
(i) 두 자리의 수를 문자를 사용하여 나타내기	10 %
(ii) 근의 공식을 이용하기	20 %
(iii) 근호 안이 양수가 되도록 하는 y의 값 구하기	10 %
(iv) 조건을 만족하는 $x,\ y$의 값 구하기	각 20 %
(v) 두 자리의 카프리카 수 구하기	20 %

단원 마무리하기 P. 69~72

1 ② **2** ④ **3** ③ **4** $x=6,\ y=4$ **5** 0
6 ⑤ **7** 101 **8** ③ **9** 7개 **10** ②
11 4, 과정은 풀이 참조 **12** ④ **13** ⑤ **14** ④
15 $\frac{20}{7}$ **16** 4 **17** 5, 6 **18** ④ **19** 7 **20** ④
21 $\frac{5+\sqrt{57}}{4}$ **22** 11, 과정은 풀이 참조 **23** ④
24 20 **25** 2 **26** ③

1 $A=\sqrt{4(x-1)^2}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$이므로

① $x<-\frac{1}{2}$일 때, $A=-2(x-1)-\left(-x-\frac{1}{2}\right)=-x+\frac{5}{2}$

② $-\frac{1}{2}\le x<1$일 때, $A=-2(x-1)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=-3x+\frac{3}{2}$

③ $0<x<1$일 때, $A=-2(x-1)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=-3x+\frac{3}{2}$

④ $\frac{1}{2}\le x<1$일 때, $A=-2(x-1)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=-3x+\frac{3}{2}$

⑤ $x\ge1$일 때, $A=2(x-1)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=x-\frac{5}{2}$

따라서 옳은 것은 ②이다.

2 $a^4-625=(a^2)^2-25^2=(a^2+25)(a^2-25)$

$=(a^2+25)(a+5)(a-5)$

따라서 인수가 아닌 것은 ④이다.

3 $5x^2+kx+6=(x+a)(5x+b)$

$=5x^2+(5a+b)x+ab$

이므로 $k=5a+b,\ ab=6$

이때 곱이 6인 두 정수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1),\ (-1,\ -6),\ (-2,\ -3),$
$(-3,\ -2),\ (-6,\ -1)$이므로

$(1,\ 6)$일 때, $k=5\times1+6=11$

$(2,\ 3)$일 때, $k=5\times2+3=13$

$(3,\ 2)$일 때, $k=5\times3+2=17$

$(6,\ 1)$일 때, $k=5\times6+1=31$

$(-1,\ -6)$일 때, $k=5\times(-1)+(-6)=-11$

$(-2,\ -3)$일 때, $k=5\times(-2)+(-3)=-13$

$(-3,\ -2)$일 때, $k=5\times(-3)+(-2)=-17$

$(-6,\ -1)$일 때, $k=5\times(-6)+(-1)=-31$

따라서 k의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

4 $\sqrt{x^2-20}=y$의 양변을 제곱하면

$x^2-20=y^2,\ x^2-y^2=20,\ (x+y)(x-y)=20$

이때 $x+y>0$이므로 $x-y>0$에서 $x>y$

(i) $x+y=20,\ x-y=1$일 때, 만족하는 자연수 $x,\ y$의 값은 없다.

(ii) $x+y=10,\ x-y=2$일 때, $x=6,\ y=4$

(iii) $x+y=5,\ x-y=4$일 때, 만족하는 자연수 $x,\ y$의 값은 없다.

따라서 (i)~(iii)에서 주어진 식을 만족하는 $x,\ y$의 값은

$x=6,\ y=4$

5 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=k$에서 $a+b=1$이므로 $a-b=k$

$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$이므로 $a-b=k$를 대입하면

$k^3=k^3-3abk$ $\quad\therefore\ 3abk=0$

따라서 $ab\ne0$이므로 $k=0$이다.

6 $x^4-y^4=(x^2+y^2)(x^2-y^2)=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

$(x+y)^2+(x-y)^2=(x^2+2xy+y^2)+(x^2-2xy+y^2)$

$=2(x^2+y^2)$

에서 $x+y=\sqrt{3},\ x-y=\sqrt{2}$이므로

$(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2=2(x^2+y^2)$ $\quad\therefore\ x^2+y^2=\frac{5}{2}$

$\therefore\ x^4-y^4=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)=\frac{5}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$

7 $(1+x-y)^2-(x+y)^2$
$=\{(1+x-y)+(x+y)\}\{(1+x-y)-(x+y)\}$
$=(1+2x)(1-2y)=-21$
$\therefore\ (2x+1)(2y-1)=21$
이때 x, y가 자연수이므로 $2x+1$, $2y-1$도 자연수이다.
(i) $2x+1=1$, $2y-1=21$일 때, $x=0$, $y=11$
이때 x가 자연수가 아니므로 조건을 만족하지 않는다.
(ii) $2x+1=3$, $2y-1=7$일 때, $x=1$, $y=4$이므로
$x^2+y^2=1+16=17$
(iii) $2x+1=7$, $2y-1=3$일 때, $x=3$, $y=2$이므로
$x^2+y^2=9+4=13$
(iv) $2x+1=21$, $2y-1=1$일 때, $x=10$, $y=1$이므로
$x^2+y^2=100+1=101$
따라서 (i)~(iv)에서 x^2+y^2의 최댓값은 101이다.

8 (주어진 식)$=(x^2+x-6)(x^2+x-4)-8$
이때 $x^2+x=A$로 놓으면
$(A-6)(A-4)-8=A^2-10A+16$
$=(A-2)(A-8)$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-8)$
$=(x-1)(x+2)(x^2+x-8)$
따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

9 $3^{128}-1$
$=(3^{64}+1)(3^{64}-1)=(3^{64}+1)(3^{32}+1)(3^{32}-1)$
$=(3^{64}+1)(3^{32}+1)(3^{16}+1)(3^{16}-1)$
$=(3^{64}+1)(3^{32}+1)(3^{16}+1)(3^{8}+1)(3^{8}-1)$
$=(3^{64}+1)(3^{32}+1)(3^{16}+1)(3^{8}+1)(3^{4}+1)(3^{4}-1)$
$=(3^{64}+1)(3^{32}+1)(3^{16}+1)(3^{8}+1)(3^{4}+1)(3^{2}+1)(3^{2}-1)$
$=(3^{64}+1)(3^{32}+1)(3^{16}+1)(3^{8}+1)(3^{4}+1)(3^{2}+1)(3+1)(3-1)$
따라서 3^n+1의 꼴의 약수는 $3^{64}+1$, $3^{32}+1$, $3^{16}+1$, 3^8+1, 3^4+1, 3^2+1, $3+1$의 7개이다.

10 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
(주어진 식)$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$
$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)$
$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

11 $\sqrt{6}+x=a$, $\sqrt{6}-x=b$로 놓으면
(주어진 식)$=(a^n+b^n)^2-(a^n-b^n)^2$ ··· (i)
$=\{(a^n+b^n)+(a^n-b^n)\}\{(a^n+b^n)-(a^n-b^n)\}$
$=2a^n\times 2b^n=4(ab)^n=4\{(\sqrt{6}+x)(\sqrt{6}-x)\}^n$ ··· (ii)
이때 $x=\sqrt{5}$이므로
$4\{(\sqrt{6}+x)(\sqrt{6}-x)\}^n=4\{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})\}^n$
$=4(6-5)^n=4\times 1^n=4$ ··· (iii)

채점 기준	배점
(i) $\sqrt{6}+x=a$, $\sqrt{6}-x=b$로 놓고 주어진 식을 a, b에 관한 식으로 나타내기	20 %
(ii) 주어진 식을 인수분해하기	60 %
(iii) $x=\sqrt{5}$를 대입하여 식의 값 구하기	20 %

12 (가) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$
$=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)+1$
$=(\underbrace{x^2+5x}_{A}+4)(\underbrace{x^2+5x}_{A}+6)+1$
$=(A+4)(A+6)+1=A^2+10A+25$
$=(A+5)^2=(x^2+5x+5)^2$
$\therefore\ a=5$, $b=5$
(나) (가)에서 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1=(x^2+5x+5)^2$
이므로 $x=30$을 대입하면
$31\times32\times33\times34+1=(30^2+5\times30+5)^2=1055^2$
$\therefore\ \sqrt{31\times32\times33\times34+1}=\sqrt{1055^2}=1055=c$
따라서 $a=5$, $b=5$, $c=1055$이므로 $a+b+c=1065$이다.

13 $x^2+ax-3=0$에 $x=-3$을 대입하면
$9-3a-3=0$ $\quad\therefore\ a=2$
따라서 $3x^2-8x+b=0$에 $x=2$를 대입하면
$12-16+b=0$ $\quad\therefore\ b=4$
$\therefore\ a+b=2+4=6$

14 $x^2-4x+2=0$에 $x=\alpha$를 대입하면
$\alpha^2-4\alpha+2=0$ ··· ㉠
$\therefore\ \alpha^2-4\alpha=-2$
$\alpha\neq0$이므로 ㉠의 양변을 α로 나누면
$\alpha-4+\dfrac{2}{\alpha}=0$ $\quad\therefore\ \alpha+\dfrac{2}{\alpha}=4$
$\therefore\ (\alpha^2-4\alpha+3)\left(\alpha+\dfrac{2}{\alpha}\right)=(-2+3)\times4=4$

15 $(a-1)x^2-2a(a+1)x-4=0$에 $x=-1$을 대입하면
$(a-1)+2a(a+1)-4=0$, $2a^2+3a-5=0$
$(2a+5)(a-1)=0$ $\quad\therefore\ a=-\dfrac{5}{2}$ 또는 $a=1$
이때 $a-1\neq0$, 즉 $a\neq1$이므로 $a=-\dfrac{5}{2}$
따라서 주어진 이차방정식은 $7x^2+15x+8=0$이므로
$(7x+8)(x+1)=0$ $\quad\therefore\ x=-\dfrac{8}{7}$ 또는 $x=-1$
즉, $b=-\dfrac{8}{7}$이므로 $ab=-\dfrac{5}{2}\times\left(-\dfrac{8}{7}\right)=\dfrac{20}{7}$

16 $x^2+3x-18=0$, $(x+6)(x-3)=0$
$\therefore\ x=-6$ 또는 $x=3$
$x^2+13x=-42$, $x^2+13x+42=0$
$(x+7)(x+6)=0$ $\quad\therefore\ x=-7$ 또는 $x=-6$
따라서 두 이차방정식의 공통인 근은 $x=-6$이므로
$3x^2+(k+8)x-9k=0$에 $x=-6$을 대입하면
$3\times(-6)^2+(k+8)\times(-6)-9k=0$, $108-6k-48-9k=0$
$15k=60$ $\quad\therefore\ k=4$

17 $\langle x\rangle^2+5\langle x\rangle-24=0$에서 $(\langle x\rangle+8)(\langle x\rangle-3)=0$
$\therefore\ \langle x\rangle=-8$ 또는 $\langle x\rangle=3$

이때 $\langle x \rangle$는 0 또는 자연수이므로 $\langle x \rangle=3$
따라서 자연수 x의 값이 될 수 있는 것은 5, 6이다.

18 직선 $ax+2y=6$이 점 $(a-5,\ a^2-3)$을 지나므로
$ax+2y=6$에 $x=a-5,\ y=a^2-3$을 대입하면
$a(a-5)+2(a^2-3)=6,\ 3a^2-5a-12=0$
$(3a+4)(a-3)=0 \qquad \therefore\ a=-\frac{4}{3}$ 또는 $a=3$
이때 점 $(a-5,\ a^2-3)$이 제2사분면 위의 점이므로
$a-5<0,\ a^2-3>0$
$a=-\frac{4}{3}$일 때, $a^2-3=\frac{16}{9}-3=-\frac{11}{9}<0$이므로 $a\neq-\frac{4}{3}$
따라서 상수 a의 값은 $a=3$이다.

19 $x^2-ax+b=0$의 한 근을 n(n은 자연수)이라 하면
다른 한 근은 $3n$이므로
$n+3n=a \qquad \therefore\ a=4n$
$n\times3n=b \qquad \therefore\ b=3n^2$
이때 두 근의 합이 7 이하이므로
$a\leq7$, 즉 $4n\leq7 \qquad \therefore\ n=1$ ($\because$ n은 자연수)
따라서 $a=4\times1=4,\ b=3\times1^2=3$이므로
$a+b=4+3=7$

20 $x^2+ax+b=0$에서 $a,\ b$가 유리수이고 한 근이 $1+\sqrt{2}$이므로
다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-a \qquad \therefore\ a=-2$
$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=b \qquad \therefore\ b=-1$
따라서 이차방정식 $-x^2-2x+1=0$에서
$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-1$
$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-2}{-1}=2$

21 $x^2-2(2k+3)x+4k^2+10k+3=0$이 중근을 가지므로
$\{-(2k+3)\}^2-(4k^2+10k+3)=0$
$4k^2+12k+9-4k^2-10k-3=0,\ 2k=-6$
$\therefore\ k=-3$
$(k+5)x^2+(k-2)x-4=0$에 $k=-3$을 대입하면
$2x^2-5x-4=0$
$\therefore\ x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times2\times(-4)}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{57}}{4}$
따라서 두 근 중 큰 근은 $\frac{5+\sqrt{57}}{4}$이다.

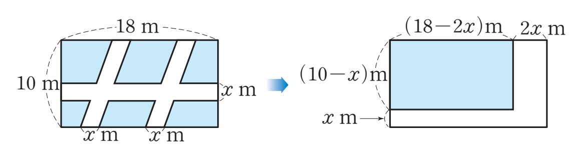
22 연속하는 세 홀수를 $x-2,\ x,\ x+2$($x\geq3$인 홀수)라 하면
$a=x-2,\ b=x,\ c=x+2$이므로 … (i)
$ac=8b+5$에 $a,\ b,\ c$를 각각 대입하면
$(x-2)(x+2)=8x+5$ … (ii)
$x^2-8x-9=0,\ (x+1)(x-9)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=9$
이때 x는 3 이상의 홀수이므로 $x=9$ … (iii)
$\therefore\ c=9+2=11$ … (iv)

채점 기준	배점
(i) 연속하는 세 홀수 $a,\ b,\ c$를 미지수로 나타내기	20 %
(ii) $a,\ b,\ c$를 $ac=8b+5$에 대입하여 이차방정식 세우기	30 %
(iii) 이차방정식의 해 구하기	30 %
(iv) c의 값 구하기	20 %

23 전체 학생 수를 x명이라 하면 한 사람이 가진 사탕의 수는
$(x-5)$개이므로
$x(x-5)=150,\ x^2-5x-150=0$
$(x+10)(x-15)=0 \qquad \therefore\ x=-10$ 또는 $x=15$
이때 x는 $x>5$인 자연수이므로 $x=15$
따라서 이 반의 전체 학생 수는 15명이다.

24 (정가)$=5000+5000\times\frac{x}{100}=5000+50x$(원)
(판매 금액)$=5000+50x-(5000+50x)\times\frac{x}{100}$
$=5000+50x-50x-\frac{1}{2}x^2$
$=5000-\frac{1}{2}x^2$(원)
이때 원가의 4 %의 손해를 보았으므로
(판매 금액)$-$(원가)$=-\left(5000\times\frac{4}{100}\right)=-200$(원)에서
$\left(5000-\frac{1}{2}x^2\right)-5000=-200$
$x^2=400 \qquad \therefore\ x=20$ ($\because$ $x>0$)

25



도로를 제외한 땅의 넓이가 $112\,\text{m}^2$이므로
$(18-2x)(10-x)=112,\ 2x^2-38x+180=112$
$x^2-19x+34=0,\ (x-2)(x-17)=0$
$\therefore\ x=2$ 또는 $x=17$
이때 $0<2x<18$에서 $0<x<9$이므로 $x=2$

26 $\overline{AC}=x\,\text{cm}$라 하면 $\overline{BC}=(40-x)\,\text{cm}$이므로
(색칠한 부분의 넓이)$=$($\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)
$-$($\overline{AC}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)
$-$($\overline{BC}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)
에서 $\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{40}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{40-x}{2}\right)^2=99\pi$
$200-\frac{x^2}{8}-\frac{(40-x)^2}{8}=99$
$1600-x^2-(x^2-80x+1600)=792$
$2x^2-80x+792=0,\ x^2-40x+396=0$
$(x-18)(x-22)=0$
$\therefore\ x=18$ 또는 $x=22$
이때 $\overline{AC}>\overline{BC}$에서 $x>40-x$이므로
$20<x<40 \qquad \therefore\ x=22$
따라서 $\overline{AC}$의 길이는 22 cm이다.

Ⅲ 이차함수

1 이차함수와 그 그래프

STEP 1 개념 + 대표문제 확인하기 P. 74~77

1 ㄷ, ㅁ	**2** $a\neq-9$	**3** 9	**4** 9	**5** ㄹ, ㅁ
6 $-2<a<-\frac{2}{3}$		**7** $-\frac{5}{3}$	**8** $(0,\ 1)$	**9** $-1,\ 3$
10 ②, ⑤	**11** 1	**12** -6	**13** ㄴ, ㄷ	**14** ②
15 $\frac{1}{2}$	**16** $a=-\frac{1}{2},\ p=-2,\ q=1$			
17 $y=-2(x+3)^2+11$		**18** $a<0,\ p>0,\ q<0$		**19** ③
20 ②	**21** $\frac{3}{4}$	**22** 4		

1 ㄱ. $y=2000x$ (일차함수)
ㄴ. $y=80x$ (일차함수)
ㄷ. $y=x(5-x)=-x^2+5x$ (이차함수)
ㄹ. $y=x^3$ (이차함수가 아니다.)
ㅁ. $y=4\pi x^2$ (이차함수)
따라서 이차함수인 것은 ㄷ, ㅁ이다.

2 $y=(3x-1)^2-ax(2-x)=(9+a)x^2-2(3+a)x+1$
이므로 이차함수가 되려면 x^2의 계수가 0이 아니어야 한다.
$9+a\neq0\qquad\therefore a\neq-9$

3 $f(3)=2$이므로 $-\frac{1}{3}\times3^2+a\times3-1=2$
$3a=6\qquad\therefore a=2$
$f(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x-1$에서 $f(b)=-\frac{10}{3}$이므로
$-\frac{1}{3}\times b^2+2\times b-1=-\frac{10}{3},\ b^2-6b-7=0$
$(b+1)(b-7)=0\qquad\therefore b=7$ ($\because$ b는 자연수)
$\therefore a+b=2+7=9$

4 $y=ax^2$의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지나므로
$2=4a\qquad\therefore a=\frac{1}{2}$
또 점 $(-6,\ b)$를 지나므로
$b=\frac{1}{2}\times(-6)^2=18\qquad\therefore ab=\frac{1}{2}\times18=9$

5 ㄱ. 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 0)$이다.
ㄴ. 축의 방정식은 $x=0$이다.
ㄷ. $y=ax^2$에서 $a<0$이므로 위로 볼록한 포물선이다.
ㄹ. 제3사분면과 제4사분면을 지난다.
ㅁ. $\left|-\frac{1}{2}\right|>\left|\frac{1}{4}\right|$이므로 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프는 $y=\frac{1}{4}x^2$의 그래프보다 폭이 좁다.
따라서 옳은 것은 ㄹ, ㅁ이다.

6 $y=ax^2$의 그래프의 폭이 $y=-\frac{2}{3}x^2$의 그래프보다 좁고, $y=-2x^2$의 그래프보다 넓으므로
$\left|-\frac{2}{3}\right|<|a|<|-2|,\ \frac{2}{3}<|a|<2$
이때 $a<0$이므로 $-2<a<-\frac{2}{3}$

7 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은 $f(x)=ax^2-3$이고, 이 그래프가 점 $(3,\ 0)$을 지나므로
$0=9a-3\qquad\therefore a=\frac{1}{3}$
따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^2-3$이므로 $f(-2)=\frac{1}{3}\times(-2)^2-3=-\frac{5}{3}$

8 $y=ax^2+q$의 그래프가 점 $(-3,\ -2)$를 지나므로
$-2=9a+q\qquad\cdots$ ㉠
또 점 $\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$를 지나므로
$\frac{2}{3}=a+q\qquad\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{3},\ q=1$
따라서 $y=-\frac{1}{3}x^2+1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

9 $y=-3x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-3(x-p)^2$이고, 이 그래프가 점 $(1,\ -12)$를 지나므로
$-12=-3(1-p)^2,\ (1-p)^2=4,\ 1-p=\pm2$
$\therefore p=-1$ 또는 $p=3$

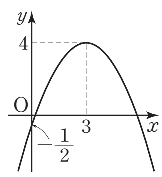
10 ② 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 0)$이다.
⑤ $x<-1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

11 $y=a(x-p)^2$의 그래프의 축의 방정식은 $x=p$이므로 $p=-2$
$y=a(x+2)^2$의 그래프가 점 $(-4,\ -2)$를 지나므로
$-2=a(-4+2)^2,\ 4a=-2\qquad\therefore a=-\frac{1}{2}$
$\therefore ap=1$

12 $y=-2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-2(x-3)^2+a$이고, 이 그래프가 점 $(2,\ -1)$을 지나므로
$-1=-2(2-3)^2+a,\ -1=-2+a\qquad\therefore a=1$
또 점 $(5,\ b)$를 지나므로 $b=-2(5-3)^2+1=-7$
$\therefore a+b=1+(-7)=-6$

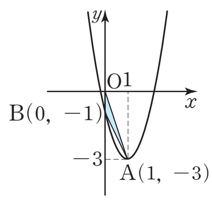
13 ㄴ. 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ -5)$이므로
$y=-2x-1$에 $x=-2,\ y=-5$를 대입하면
$-5\neq-2\times(-2)-1$
즉, 꼭짓점은 일차함수 $y=-2x-1$의 그래프 위에 있지 않다.
ㄷ. 축의 방정식은 $x=-2$이다.
따라서 옳지 않은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

14 오른쪽 그림에서 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+4$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 4)$이고 $x=0$일 때, $y=-\frac{1}{2}$이므로 y축과 만나는 점의 좌표는 $\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$이다.



따라서 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.

15 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\mathrm{A}(1,\ -3)$이고 $x=0$일 때, $y=-1$이므로 y축과 만나는 점의 좌표는 $\mathrm{B}(0,\ -1)$이다.



$\therefore\ \triangle\mathrm{OBA}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$

16 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 1)$이므로 $p=-2,\ q=1$
따라서 그래프의 식은 $y=a(x+2)^2+1$이고, 이 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로
$-1=a(0+2)^2+1,\ 4a=-2\qquad\therefore\ a=-\frac{1}{2}$

17 (가)에서 축의 방정식이 $x=-3$이므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x+3)^2+q$라 하면
(나)에서 이 그래프가 두 점 $(-5,\ 3)$, $(-2,\ 9)$를 지나므로
$3=4a+q,\ 9=a+q$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ q=11$
따라서 이차함수의 식은 $y=-2(x+3)^2+11$이다.

18 그래프가 위로 볼록한 포물선이므로 $a<0$
꼭짓점 $(-p,\ -q)$가 제2사분면 위에 있으므로
$-p<0,\ -q>0\qquad\therefore\ p>0,\ q<0$

19 일차함수의 그래프가 오른쪽 아래로 향하므로 $a<0$이고, y절편이 양수이므로 $b>0$이다.
따라서 $y=a(x-b)^2$의 그래프는 $a<0$이므로 위로 볼록한 포물선이고, 꼭짓점의 좌표 $(b,\ 0)$에서 $b>0$이므로 꼭짓점은 x축 위의 점이며 y축의 오른쪽에 있으므로 그래프로 적당한 것은 ③이다.

20 각 그래프의 꼭짓점을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동시켜 꼭짓점이 위치하는 사분면을 구하면
① $(0,\ 4)$ ⇨ $(1,\ 2)$: 제1사분면
② $(-2,\ 0)$ ⇨ $(-1,\ -2)$: 제3사분면
③ $(0,\ 3)$ ⇨ $(1,\ 1)$: 제1사분면
④ $(1,\ 0)$ ⇨ $(2,\ -2)$: 제4사분면
⑤ $(-3,\ 4)$ ⇨ $(-2,\ 2)$: 제2사분면

21 이차함수의 그래프를 평행이동할 때 그래프의 모양과 폭은 변하지 않으므로 $a=\frac{3}{4}$
꼭짓점이 $(2,\ 1)$에서 $(5,\ -2)$로 이동했으므로
$2+m=5,\ 1+n=-2\qquad\therefore\ m=3,\ n=-3$
$\therefore\ a+m+n=\frac{3}{4}+3+(-3)=\frac{3}{4}$

22 주어진 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=-\frac{1}{3}(-x-2)^2+a,\ y=\frac{1}{3}(x+2)^2-a$
이 그래프가 점 $(-5,\ -1)$을 지나므로 $-1=\frac{1}{3}(-5+2)^2-a$
$-1=3-a\qquad\therefore\ a=4$

STEP 2 내신 5% 따라잡기 P. 78~82

1 ④ **2** ②, ⑤ **3** ③ **4** 12 **5** $\mathrm{P}(2,\ 1)$ **6** ⑤
7 $\mathrm{B}\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{9}\right)$ **8** $y=-\frac{1}{3}x^2$ **9** ③ **10** 18
11 12 m **12** $\frac{2}{25}<a<\frac{5}{9}$ **13** ④
14 $-\frac{2}{9}<a<0$ **15** 16 **16** $\frac{13}{2}$ **17** $\frac{4}{9}\le a\le1$
18 ⑤ **19** -4 **20** $f(x)=\frac{1}{3}(x-2)^2+1$ **21** ②
22 ②, ④ **23** -4 **24** 6 **25** $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2+5$
26 -1 **27** 66.56 m **28** 200 cm **29** ㄱ, ㄴ

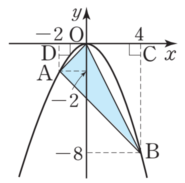
1 ㄱ. $y=\frac{x(x-3)}{2}=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$ (이차함수)
ㄴ. 원의 둘레의 길이가 $4\pi x$ cm이므로 반지름의 길이는 $2x$ cm
$\therefore\ y=\pi\times(2x)^2=4\pi x^2$ (이차함수)
ㄷ. $y=\frac{1}{2}\times(x+x+2)\times2x=2x^2+2x$ (이차함수)
ㄹ. 밑면인 원의 반지름의 길이가 x cm, 모선의 길이가 10 cm인 원뿔의 옆넓이 $y\ \mathrm{cm}^2$는 반지름의 길이가 10 cm, 호의 길이가 $2\pi x$ cm인 부채꼴의 넓이와 같으므로
$y=\frac{1}{2}\times10\times2\pi x=10\pi x$ (일차함수)
ㅁ. $y=\frac{1}{3}\times x^2\times12=4x^2$ (이차함수)
따라서 이차함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ의 4개이다.

2 $y=k(k-1)x^2-12x^2-5x=(k^2-k-12)x^2-5x$
$=(k+3)(k-4)x^2-5x$
이므로 이차함수가 되려면 x^2의 계수가 0이 아니어야 한다.
$\therefore\ k\ne-3$ 그리고 $k\ne4$

3 $y=ax^2$의 그래프의 폭이 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프보다 좁고, $y=\frac{5}{2}x^2$의 그래프보다 넓으므로 $\left|-\frac{1}{3}\right|<|a|<\left|\frac{5}{2}\right|,\ \frac{1}{3}<|a|<\frac{5}{2}$
이때 $a<0$이므로 $\frac{1}{3}<-a<\frac{5}{2}\qquad\therefore\ -\frac{5}{2}<a<-\frac{1}{3}$
따라서 a의 값으로 알맞은 것은 ③이다.

4 $y=ax^2$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(-2,\ -2)$를 지나므로
$-2=4a\qquad\therefore\ a=-\frac{1}{2}$
$y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프가 점 $\mathrm{B}(4,\ b)$를 지나므로
$b=-\frac{1}{2}\times4^2=-8$

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, C라 하면



$\triangle OAB$

$=\square ABCD-\triangle ODA-\triangle OBC$

$=\frac{1}{2}\times(2+8)\times6-\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times4\times8$

$=30-2-16=12$

5 $y=ax^2$의 그래프가 점 A$(-4,\ 4)$를 지나므로

$4=16a \qquad \therefore\ a=\frac{1}{4}$

점 P의 좌표를 $P\left(k,\ \frac{1}{4}k^2\right)$이라 하면

(직선 AP의 기울기)$=\dfrac{\frac{1}{4}k^2-4}{k-(-4)}=-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}k^2-8=-k-4,\ \frac{1}{2}k^2+k-4=0,\ k^2+2k-8=0$

$(k+4)(k-2)=0 \qquad \therefore\ k=-4$ 또는 $k=2$

이때 점 P는 점 A와 서로 다른 점이므로 $k=2$

$\therefore$ P$(2,\ 1)$

6 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=2k\,(k>0)$라 하면

$y=ax^2$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$B(-k,\ ak^2)$, $C(k,\ ak^2)$

점 D의 x좌표는 $k+2k=3k$이므로 $D(3k,\ 6k^2)$

점 C와 점 D의 y좌표는 서로 같으므로

$ak^2=6k^2 \qquad \therefore\ a=6\ (\because k>0)$

7 두 점 A, D의 좌표를 각각 $A\left(k,\ \frac{1}{2}k^2\right)$, $D(k,\ 2k^2)\,(k>0)$이라 하면 점 C의 y좌표는 점 D의 y좌표와 같고, 점 C는 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프 위의 점이므로 $y=2k^2$을 대입하면

$2k^2=\frac{1}{2}x^2,\ x^2=4k^2 \qquad \therefore\ x=2k\ (\because x>0)$

$\therefore\ C(2k,\ 2k^2)$

$\overline{AD}=2k^2-\frac{1}{2}k^2=\frac{3}{2}k^2$, $\overline{DC}=2k-k=k$이고

$\square ABCD$가 정사각형이므로 $\overline{AD}=\overline{DC}$에서

$\frac{3}{2}k^2=k \qquad \therefore\ k=\frac{2}{3}\ (\because k>0)$

따라서 $B\left(2k,\ \frac{1}{2}k^2\right)$이므로 $B\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{9}\right)$이다.

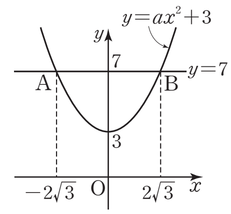
8 점 A의 좌표를 $A\left(k,\ \frac{1}{3}k^2\right)(k>0)$이라 하면 $B(k,\ -k^2)$

이때 $\left\{\frac{1}{3}k^2+(-k^2)\right\}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}k^2$이므로 $M\left(k,\ -\frac{1}{3}k^2\right)$

따라서 구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2$이라 하면 이 이차함수의 그래프가 점 M을 지나므로 $-\frac{1}{3}k^2=ak^2$

$\therefore\ a=-\frac{1}{3}\ (\because k>0) \qquad \therefore\ y=-\frac{1}{3}x^2$

9 $y=ax^2+3$의 그래프의 축은 y축이므로 점 A와 점 B는 y축에 대하여 서로 대칭이다.



이때 $\overline{AB}=4\sqrt{3}$이고, y좌표는 7로 같으므로 오른쪽 그림에서

$A(-2\sqrt{3},\ 7)$, $B(2\sqrt{3},\ 7)$

따라서 점 B는 $y=ax^2+3$의 그래프 위의 점이므로

$7=a\times(2\sqrt{3})^2+3,\ 12a=4 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{3}$

10 두 이차함수의 그래프가 모두 점 C$(2,\ 0)$을 지나므로

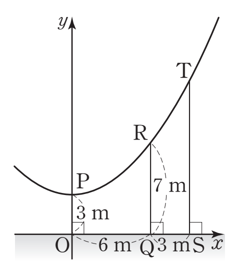
$0=\frac{5}{4}\times2^2+m$에서 $m=-5$, $0=-2^2+n$에서 $n=4$

따라서 점 B, D는 각각 두 이차함수 $y=\frac{5}{4}x^2-5$, $y=-x^2+4$의 그래프의 꼭짓점이므로 $B(0,\ -5)$, $D(0,\ 4)$

$\therefore\ \square ABCD=\triangle ACD+\triangle ABC$

$=\frac{1}{2}\times4\times4+\frac{1}{2}\times4\times5=8+10=18$

11 오른쪽 그림과 같이 지면 위의 O지점을 원점으로 하는 좌표평면에서 포물선의 꼭짓점의 좌표가 P$(0,\ 3)$이므로 이 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+3$이라 하자.



이 그래프가 점 R$(6,\ 7)$을 지나므로

$7=a\times6^2+3,\ 36a=4 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{9}$

이때 점 T의 좌표를 $T(9,\ h)$라 하면 $y=\frac{1}{9}x^2+3$의 그래프가 점 T를 지나므로

$h=\frac{1}{9}\times9^2+3=12 \qquad \therefore\ T(9,\ 12)$

따라서 S지점에서 T지점까지의 높이는 12 m이다.

12 $y=ax^2-1$의 그래프가 직사각형 ABCD의 둘레 위의 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=ax^2-1$의 그래프가 점 A와 점 C 사이를 지나야 한다.

점 A$(3,\ 4)$를 지날 때, $4=9a-1 \qquad \therefore\ a=\frac{5}{9}$

점 C$(5,\ 1)$을 지날 때, $1=25a-1 \qquad \therefore\ a=\frac{2}{25}$

따라서 구하는 a의 값의 범위는 $\frac{2}{25}<a<\frac{5}{9}$이다.

13 $y=a(x-p)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(p,\ 0)$이고 축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $p>0$

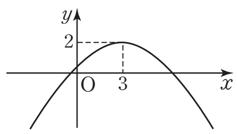
$y=-\frac{1}{2}x^2+3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 3)$이고, 점 $(p,\ 0)$을 지나므로

$0=-\frac{1}{2}p^2+3,\ p^2=6 \qquad \therefore\ p=\sqrt{6}\ (\because p>0)$

이때 $y=a(x-\sqrt{6})^2$의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=a(-\sqrt{6})^2 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ ap=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

14 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=a(x-3)^2+2$



이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 2)$이고, 이 그래프가 모든 사분면을 지나려면

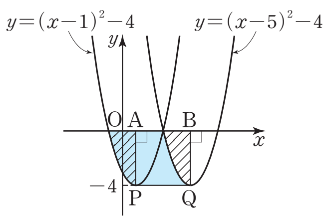
(i) 그래프의 모양이 위로 볼록해야 하므로 $a<0$

(ii) (y축과 만나는 점의 y좌표)>0이어야 하므로 $y=a(x-3)^2+2$에 $x=0$을 대입하면

$y=9a+2>0 \qquad \therefore a>-\dfrac{2}{9}$

따라서 (i), (ii)에서 a의 값의 범위는 $-\dfrac{2}{9}<a<0$이다.

15 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자.



$y=(x-5)^2-4$의 그래프는 $y=(x-1)^2-4$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이는 직사각형 APQB의 넓이와 같고, $\mathrm{P}(1,\ -4)$, $\mathrm{Q}(5,\ -4)$이므로

(색칠한 부분의 넓이)$=\square\mathrm{APQB}=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AP}}$

$=(5-1)\times4=16$

16 일차함수 $y=ax+b$에서

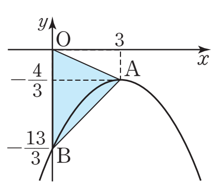
(기울기)$=a=-\dfrac{2}{3}$, (y절편)$=b=-2$이므로 이차함수의 그래프의 식은

$y=-\dfrac{1}{3}(x-3)^2-\dfrac{4}{3} \qquad \therefore \mathrm{A}\left(3,\ -\dfrac{4}{3}\right)$

$x=0$일 때, $y=-\dfrac{1}{3}\times(-3)^2-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{13}{3}$

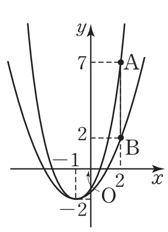
$\therefore \mathrm{B}\left(0,\ -\dfrac{13}{3}\right)$

따라서 $y=-\dfrac{1}{3}(x-3)^2-\dfrac{4}{3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\triangle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{13}{3}\times3=\dfrac{13}{2}$

17 오른쪽 그림에서 $y=a(x+1)^2-2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -2)$이고, 이 그래프가 $\overline{\mathrm{AB}}$와 만나야 하므로



점 $\mathrm{A}(2,\ 7)$을 지날 때,

$7=9a-2 \qquad \therefore a=1$

점 $\mathrm{B}(2,\ 2)$를 지날 때,

$2=9a-2 \qquad \therefore a=\dfrac{4}{9}$

$\therefore \dfrac{4}{9}\le a\le1$

18 이차함수의 그래프의 꼭짓점 $(p,\ q)$가 직선 $y=-2x$ 위에 있으므로 $q=-2p$

$y=(x-p)^2-2p$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=(1-p)^2-2p,\ p^2-4p-1=0 \qquad \therefore p=2+\sqrt{5}\ (\because p>0)$

$\therefore p+q=p+(-2p)=-p=-2-\sqrt{5}$

19 $\overline{\mathrm{BC}}=6$이므로 $\triangle\mathrm{ABC}=12$에서

$\dfrac{1}{2}\times6\times\overline{\mathrm{AO}}=12 \qquad \therefore \overline{\mathrm{AO}}=4 \qquad \therefore \mathrm{A}(0,\ 4)$

이때 축의 방정식이 $x=p$이고, 두 점 B, C는 축에 대하여 서로 대칭이므로 $p=\dfrac{-2+4}{2}=1$

따라서 이차함수 $y=a(x-1)^2+q$의 그래프가

점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$를 지나므로 $4=a+q$ $\qquad\cdots$ ㉠

점 $\mathrm{C}(4,\ 0)$을 지나므로 $0=9a+q$ $\qquad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{1}{2},\ q=\dfrac{9}{2}$

$\therefore a+p-q=-\dfrac{1}{2}+1-\dfrac{9}{2}=-4$

20 (가)에서 $y=\dfrac{1}{3}x^2-4$의 그래프와 포개어지므로 이차항의 계수는 $\dfrac{1}{3}$, (나)에서 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

즉, 축의 방정식이 $x=2$이다.

따라서 구하는 이차함수의 식을 $y=\dfrac{1}{3}(x-2)^2+q$라 하면 (다)에서 이 이차함수의 그래프가 점 $(-1,\ 4)$를 지나므로

$4=\dfrac{1}{3}(-1-2)^2+q,\ 4=3+q \qquad \therefore q=1$

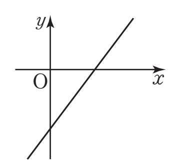
$\therefore f(x)=\dfrac{1}{3}(x-2)^2+1$

21 주어진 이차함수의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

꼭짓점 $(p,\ -q)$가 제1사분면 위에 있으므로 $p>0,\ q<0$

직선 $px+qy+a=0$에서 $q\ne0$이므로 $y=-\dfrac{p}{q}x-\dfrac{a}{q}$

따라서 (기울기)$=-\dfrac{p}{q}>0$,



(y절편)$=-\dfrac{a}{q}<0$이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 $px+qy+a=0$은 제2사분면을 지나지 않는다.

22 $ap<0,\ aq>0$이므로 a와 p는 부호가 서로 다르고, a와 q는 부호가 서로 같으므로

(i) $a>0,\ p<0,\ q>0$일 때,

$a>0$이므로 아래로 볼록한 포물선이고,

$p<0,\ q>0$이므로 꼭짓점 $(p,\ q)$는 제2사분면 위에 있다.

(ii) $a<0,\ p>0,\ q<0$일 때,

$a<0$이므로 위로 볼록한 포물선이고,

$p>0,\ q<0$이므로 꼭짓점 $(p,\ q)$는 제4사분면 위에 있다.

따라서 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 될 수 있는 것은 ②, ④이다.

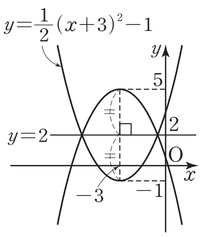
23 $y=(x-2)^2$의 그래프는 $y=(x+4)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼 평행이동한 그래프이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=6$

$\triangle\mathrm{ACB}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}\times6\times\overline{\mathrm{AC}}=12$에서 $\overline{\mathrm{AC}}=4$

따라서 $y=(x+4)^2+q$의 그래프는 $y=(x+4)^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프이므로 $q=-4$이다.

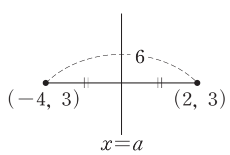
24 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면
$-y=a(x-p)^2+q$ $\quad\therefore\ y=-a(x-p)^2-q$
이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ -1)$이므로
$p=-3,\ -q=-1$에서 $q=1$
따라서 $y=a(x+3)^2+1$의 그래프가 점 $(-1,\ -7)$을 지나므로
$-7=a(-1+3)^2+1,\ 4a=-8$ $\quad\therefore\ a=-2$
$\therefore\ apq=(-2)\times(-3)\times1=6$

25 오른쪽 그림에서 이차함수 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-1$의 그래프를 직선 $y=2$에 대하여 대칭이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ 5)$이다.
또 대칭이동한 그래프는 대칭이동하기 전의 그래프와 폭은 같고, 위로 볼록한 포물선이므로 이차항의 계수는 $-\frac{1}{2}$이다.



따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2+5$이다.

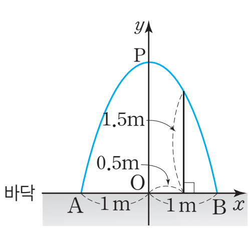
26 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 3)$인 이차함수의 그래프를 x축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-4,\ 3)$이고, 이 그래프가 처음 이차함수의 그래프를 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동한 그래프와 완전히 포개어지므로 두 점 $(2,\ 3)$과 $(-4,\ 3)$이 직선 $x=a$에 대하여 대칭이어야 한다.



$\therefore\ a=\frac{-4+2}{2}=-1$

27 제동거리는 자동차의 속력의 제곱에 비례하므로 제동거리를 y m, 자동차의 속력을 시속 x km라 하면 $y=kx^2$(k는 상수)
시속 50 km의 속력으로 달리는 자동차의 제동거리가 20 m이므로
$20=k\times50^2$ $\quad\therefore\ k=\frac{1}{125}$
즉, $y=\frac{1}{125}x^2$이므로 시속 80 km의 속력으로 달리는 자동차의 제동거리는 $y=\frac{1}{125}\times80^2=51.2\,(\text{m})$
따라서 빗길에서 이 자동차의 제동거리는
$51.2+51.2\times0.3=66.56\,(\text{m})$

28 오른쪽 그림과 같이 분수의 바닥의 중앙을 원점 O로 하는 좌표평면에서 분수에서 나온 물이 포물선 모양으로 떨어지므로 이 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+q$라 하자.



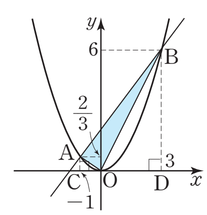
이 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로
$0=a+q$ $\quad\cdots$ ㉠
또 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$을 지나므로 $\frac{3}{2}=\frac{1}{4}a+q$ $\quad\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ q=2$
따라서 그래프의 식은 $y=-2x^2+2$이고 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ 2)$이므로 분수의 물을 맞지 않고 분수 사이의 한가운데를 지나가려면 키가 2 m, 즉 200 cm 미만이어야 한다.

29 ㄱ. $n=2$일 때, 점 B의 좌표는 $(\sqrt{2},\ 2)$이므로 $A_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$
ㄴ. $n=3$일 때, 점 B의 좌표는 $(\sqrt{3},\ 3)$이므로 $A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 3\right)$
원점과 점 A_1을 지나는 일차함수의 그래프의 식을 $y=ax$라 하면 $3=a\times\frac{\sqrt{3}}{3},\ \sqrt{3}a=9$ $\quad\therefore\ a=3\sqrt{3}$
따라서 원점과 점 A_1을 지나는 일차함수의 그래프의 식은 $y=3\sqrt{3}x$이다.
ㄷ. 직선 $y=n$과 이차함수 $y=x^2$의 그래프가 만나는 점 B의 좌표는 $(\sqrt{n},\ n)$이고, $\overline{AB}=\sqrt{n}$이므로 $\overline{AB}$를 n등분하면 A_1의 x좌표는 $\frac{\sqrt{n}}{n}$이다.
따라서 원점을 꼭짓점으로 하고, 점 $A_1\left(\frac{\sqrt{n}}{n},\ n\right)$을 지나는 이차함수의 그래프의 식은 $y=n^2x^2$이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

STEP 3 내신 1% 뛰어넘기 P. 83~84

01 4 **02** $\frac{9}{4}$ **03** 3π **04** $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ **05** 5001
06 3개 **07** $2\le x\le8$
08 $f(3^n),\ f(2^n),\ f\left(\frac{1}{3^n}\right),\ f\left(\frac{1}{2^n}\right),\ f(1)$

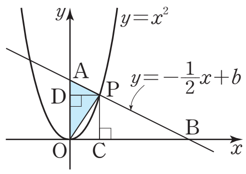
01 **길잡이** 직선 AB의 기울기를 이용하여 상수 a의 값을 먼저 구한다.
$A\left(a,\ \frac{2}{3}a^2\right)$, $B\left(a+4,\ \frac{2}{3}(a+4)^2\right)$이고 직선 AB의 기울기가 $\frac{4}{3}$이므로 $\dfrac{\frac{2}{3}(a+4)^2-\frac{2}{3}a^2}{(a+4)-a}=\frac{4}{3}$에서 $\dfrac{\frac{2}{3}(8a+16)}{4}=\frac{4}{3}$
$2(8a+16)=16,\ 16a=-16$ $\quad\therefore\ a=-1$
따라서 $A\left(-1,\ \frac{2}{3}\right)$, $B(3,\ 6)$이므로
오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면



$\triangle AOB$
$=\square ACDB-\triangle OAC-\triangle OBD$
$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}+6\right)\times4-\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times3\times6$
$=\frac{40}{3}-\frac{1}{3}-9=13-9=4$

02 **길잡이** 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하면 $\triangle AOB$와 $\triangle PCB$는 닮음이므로 $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{OC}:\overline{CB}=1:3$이다.
직선 $y=-\frac{1}{2}x+b$에서 (x절편)$=2b$, (y절편)$=b$이므로
$A(0,\ b)$, $B(2b,\ 0)$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면 $\triangle AOB \backsim \triangle PCB$이므로 $\overline{AP} : \overline{PB} = 1 : 3$에서 $\overline{OC} : \overline{CB} = 1 : 3$



$\therefore\ \overline{OC} = \frac{1}{4}\overline{OB} = \frac{1}{4} \times 2b = \frac{b}{2}$

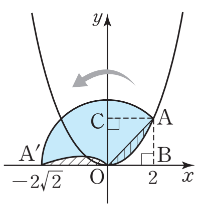
따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{b}{2},\ \frac{b^2}{4}\right)$이고, 점 P는 직선 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 위의 점이므로 $\frac{b^2}{4} = -\frac{1}{2} \times \frac{b}{2} + b$

$b^2-3b=0,\ b(b-3)=0 \qquad \therefore\ b=3\ (\because\ b>0)$

$\therefore\ \triangle AOP = \frac{1}{2} \times \overline{AO} \times \overline{DP} = \frac{1}{2} \times b \times \frac{b}{2} = \frac{b^2}{4} = \frac{9}{4}$

03 길잡이 A$(2,\ 2)$이므로 점 A에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하면 □OBAC는 정사각형이고, 선분 OA는 대각선이므로 $\angle AOB = 45°$이다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$를 그으면 빗금 친 부분의 넓이는 서로 같으므로 색칠한 부분의 넓이는 부채꼴 A′OA의 넓이와 같다. 이때 점 A에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하면 A$(2,\ 2)$이므로 □OBAC는 한 변의 길이가 2인 정사각형이고 $\angle AOB = 45°$이다.



따라서 부채꼴 A′OA의 반지름의 길이는 $\overline{OA} = \overline{OA'} = 2\sqrt{2}$이고, 중심각의 크기가 $\angle A'OA = 180° - 45° = 135°$이므로

(색칠한 부분의 넓이)=(부채꼴 A′OA의 넓이)

$$= \pi \times (2\sqrt{2})^2 \times \frac{135}{360} = \pi \times 8 \times \frac{3}{8} = 3\pi$$

04 길잡이 $\triangle ABC$에서 $\overline{OA} = \overline{OB}$이므로 $\triangle ABC = 2\triangle CAO = 2\triangle COB$이다. 이때 $\triangle APC = \frac{1}{2}\triangle ABC$이면 $\triangle APC = \triangle CAO = \triangle COB$임을 알 수 있다.

$\overline{OA} = \overline{OB}$이므로 $\triangle CAO = \triangle COB = \frac{1}{2}\triangle ABC$이고,

$\triangle APC = \frac{1}{2}\triangle ABC$이므로 $\triangle APC = \triangle CAO$

이때 두 삼각형의 밑변의 길이가 $\overline{AC}$로 같으므로 $\overline{AC} /\!/ \overline{OP}$이고

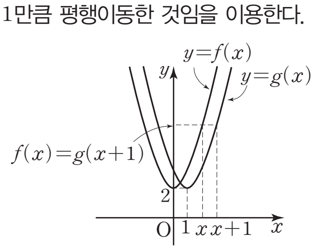
직선 AC의 기울기는 $\frac{3-0}{1-(-2)} = 1$이므로 직선 OP의 식은 $y=x$

따라서 점 P의 좌표를 P$(a,\ -a^2+4)\ (a>0)$라 하면 점 P가 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$-a^2+4=a,\ a^2+a-4=0 \qquad \therefore\ a = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\ (\because\ a>0)$

05 길잡이 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$ 사이의 관계에서 $g(x)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것임을 이용한다.

이차함수 $g(x)=(x-1)^2+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $f(x)=x^2+2$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. 따라서 $f(x)=g(x+1)$이 성립한다.



$\therefore$ (주어진 식)$= \frac{g(2) \times g(3) \times g(4) \times \cdots \times g(101)}{g(1) \times g(2) \times g(3) \times \cdots \times g(100)}$

$= \frac{g(101)}{g(1)} = \frac{100^2+2}{0^2+2} = 5001$

다른 풀이 (주어진 식)

$= \frac{\cancel{(1^2+2)} \times \cancel{(2^2+2)} \times \cancel{(3^2+2)} \times \cdots \times (100^2+2)}{(0^2+2) \times \cancel{(1^2+2)} \times \cancel{(2^2+2)} \times \cdots \times \cancel{(99^2+2)}}$

$= \frac{100^2+2}{0^2+2}$

$= \frac{10002}{2} = 5001$

06 길잡이 $f(x)=A$로 놓고 주어진 방정식을 풀어 $f(x)$의 값을 먼저 구한다.

$\{f(x)\}^2-3f(x)+2=0$에서 $f(x)=A$로 놓으면

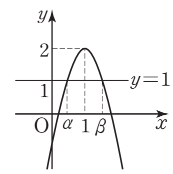
$A^2-3A+2=0,\ (A-1)(A-2)=0$

$\therefore\ A=1$ 또는 $A=2$

$\therefore\ f(x)=1$ 또는 $f(x)=2$

(i) $f(x)=1$일 때,

오른쪽 그림과 같이 $f(x)=1$을 만족하는 서로 다른 실수 x의 값은 α, β의 2개이다. (단, $\alpha<1$, $\beta>1$)



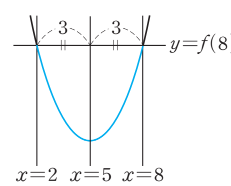
(ii) $f(x)=2$일 때,

$f(x)=2$를 만족하는 실수 x의 값은 1뿐이므로 1개이다.

따라서 (i), (ii)에서 주어진 방정식을 만족하는 서로 다른 실수 x의 값은 α, β, 1의 3개이다.

07 길잡이 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=5$이므로 $f(8)$과 $f(2)$의 함숫값은 같음을 이용한다.

이차함수 $f(x)=(x-5)^2+k$의 그래프의 축의 방정식이 $x=5$이므로 오른쪽 그림과 같이 그래프가 직선 $x=5$에 대하여 대칭이다.



따라서 $f(2)=f(8)$이므로

$f(x) \le f(8)$을 만족하는 x의 값의 범위는 $2 \le x \le 8$이다.

08 길잡이 이차함수 $y=f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(a+x)=f(a-x)$가 성립한다. ⇨ 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.

$f(1+x)=f(1-x)$가 성립하므로 주어진 이차함수의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다. 즉, 축의 방정식이 $x=1$이다.

또 이차항의 계수가 음수이므로 그래프의 모양은 위로 볼록하다.

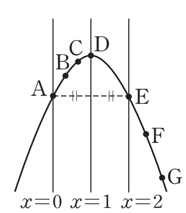
이때 자연수 n에 대하여 $0 < \frac{1}{3^n} < \frac{1}{2^n} < 1 < 2 \le 2^n < 3^n$이므로

오른쪽 그림에서 A$(0,\ f(0))$,

B$\left(\frac{1}{3^n},\ f\left(\frac{1}{3^n}\right)\right)$, C$\left(\frac{1}{2^n},\ f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$,

D$(1,\ f(1))$, E$(2,\ f(2))$, F$(2^n,\ f(2^n))$,

G$(3^n,\ f(3^n))$



따라서 위의 점들의 y좌표의 값을 비교하면

$f(3^n) < f(2^n) < f\left(\frac{1}{3^n}\right) < f\left(\frac{1}{2^n}\right) < f(1)$

2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

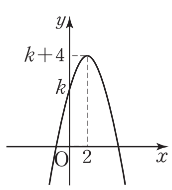
STEP 1 개념 + 대표 문제 확인하기 P. 85~88

1 -30	**2** 29	**3** $k>0$	**4** ①, ⑤	**5** 10
6 $x=-1$, $(-1, 1)$	**7** -2	**8** $a>0$, $b<0$, $c>0$	**9** ⑤	
10 $(-1, 2)$, $(5, -4)$	**11** 2	**12** $\frac{45}{8}$	**13** 48	
14 $(0, 24)$	**15** $\frac{5}{4}$	**16** 16	**17** -4, 4	
18 3	**18** 15, 450	**20** 1	**21** 5 cm	**22** 3초

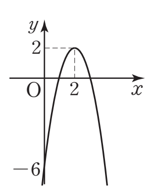
1 $y=-2x^2-24x-40=-2(x+6)^2+32$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-2(x+6-m)^2+32+n$
이때 $y=-2x^2+4x-7=-2(x-1)^2-5$이므로
$6-m=-1$, $32+n=-5$ $\quad\therefore m=7$, $n=-37$
$\therefore m+n=7+(-37)=-30$

2 $y=2x^2-16x+k+3=2(x-4)^2+k-29$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 꼭짓점이 x축 위에 있다. 이때 꼭짓점의 좌표는 $(4, k-29)$이고, 꼭짓점의 y좌표가 0이므로
$k-29=0$ $\quad\therefore k=29$
다른 풀이 이차함수의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로
$(-16)^2-4\times2\times(k+3)=0$, $256-8(k+3)=0$
$8k=232$ $\quad\therefore k=29$

3 $y=-x^2+4x+k=-(x-2)^2+4+k$의
그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2, 4+k)$,
y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, k)$이다.
따라서 그래프가 모든 사분면을 지나기 위해서는 오른쪽 그림과 같이 y축과 만나는 점의 y좌표가 0보다 커야 하므로 $k>0$



4 $y=-2x^2+8x-6=-2(x-2)^2+2$의 그래프에서
① 꼭짓점의 좌표는 $(2, 2)$이다.
② 축의 방정식은 $x=2$이다.
③ 위로 볼록하고, y축과의 교점의 y좌표가 0보다 작으므로 제2 사분면을 지나지 않는다.
④ $y=-2x^2+8x-6$에 $y=0$을 대입하면
$-2x^2+8x-6=0$, $x^2-4x+3=0$
$(x-1)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=3$
즉, x축과 두 점 $(1, 0)$, $(3, 0)$에서 만난다.
⑤ 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x>2$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 옳은 것은 ①, ⑤이다.



5 $y=-x^2+3x+4$에 $y=0$을 대입하면
$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$ $\quad\therefore B(-1, 0)$, $C(4, 0)$
$x=0$을 대입하면 $y=4$ $\quad\therefore A(0, 4)$
$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AO}=\frac{1}{2}\times5\times4=10$

6 이차함수의 그래프의 식을 $y=ax^2+bx+c$라 하면
점 $(0, 3)$을 지나므로 $c=3$
즉, $y=ax^2+bx+3$의 그래프가
점 $(-1, 1)$을 지나므로 $1=a-b+3$
$\therefore a-b=-2$ $\quad\cdots$ ㉠
점 $(1, 9)$를 지나므로 $9=a+b+3$
$\therefore a+b=6$ $\quad\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$
따라서 $y=2x^2+4x+3=2(x+1)^2+1$이므로 이 그래프의 축의 방정식은 $x=-1$이고, 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 1)$이다.

7 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 두 점 $(-2, 0)$, $(4, 0)$에서 만나므로 $y=a(x+2)(x-4)$라 하면 점 $(0, 4)$를 지나므로
$4=a\times2\times(-4)$, $-8a=4$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$
즉, $y=-\frac{1}{2}(x+2)(x-4)=-\frac{1}{2}x^2+x+4$이므로
$b=1$, $c=4$ $\quad\therefore abc=\left(-\frac{1}{2}\right)\times1\times4=-2$

8 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$
축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0$ $\quad\therefore b<0$
y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $c>0$

9 $y=ax+b$의 그래프에서 (기울기)$=a>0$, (y절편)$=b<0$
$y=-x^2+ax+b$에서
(i) (이차항의 계수)$=-1<0$이므로 위로 볼록하다.
(ii) (이차항의 계수)<0, $a>0$이므로 축은 y축의 오른쪽에 위치한다.
(iii) $b<0$이므로 y축과의 교점은 x축보다 아래쪽에 있다.
따라서 (i)~(iii)에서 그래프로 알맞은 것은 ⑤이다.

10 이차함수 $y=x^2-5x-4$의 그래프와 직선 $y=-x+1$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-5x-4=-x+1$의 두 근이므로
$x^2-4x-5=0$, $(x+1)(x-5)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$
$y=-x+1$에 $x=-1$을 대입하면 $y=2$
$x=5$를 대입하면 $y=-4$
따라서 두 교점의 좌표는 $(-1, 2)$, $(5, -4)$이다.

11 $y=2x^2-3$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=2(x+1)^2+2$이므로 최솟값은 2이다.

12 $y=\frac{1}{2}x^2-3x+k=\frac{1}{2}(x-3)^2-\frac{9}{2}+k$
이므로 최솟값은 $-\frac{9}{2}+k$이다.
$y=-3x^2+9x-k=-3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}-k$
이므로 최댓값은 $\frac{27}{4}-k$이다.

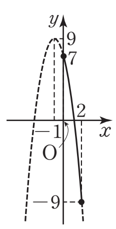
따라서 $-\frac{9}{2}+k=\frac{27}{4}-k$이므로 $2k=\frac{45}{4}$ $\quad\therefore k=\frac{45}{8}$

13 $y=ax^2+bx+c$는 $x=3$일 때, 최댓값이 1이므로 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 1)$이다.
즉, $y=a(x-3)^2+1$의 그래프가 점 $(1,\ -3)$을 지나므로
$-3=a(1-3)^2+1,\ 4a=-4 \quad \therefore a=-1$
따라서 $y=-(x-3)^2+1=-x^2+6x-8$이므로
$b=6,\ c=-8 \quad \therefore abc=(-1)\times6\times(-8)=48$

14 그래프가 x축과 두 점 $(-2,\ 0)$, $(6,\ 0)$에서 만나므로 구하는 이차함수의 식은 $y=a(x+2)(x-6)=a(x-2)^2-16a$
이때 최댓값이 32이므로 $a<0$이고
$-16a=32 \quad \therefore a=-2$
$y=-2(x-2)^2+32$에 $x=0$을 대입하면
$y=-2\times(-2)^2+32=24 \quad \therefore (0,\ 24)$

15 $y=-x^2+2kx-k+1=-(x-k)^2+k^2-k+1$
$\therefore M=k^2-k+1=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$
따라서 M은 $k=\frac{1}{2}$일 때 최솟값이 $\frac{3}{4}$이므로 그 합은
$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$

16 $y=-2x^2-4x+7=-2(x+1)^2+9$
$0\le x\le2$에서 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=0$일 때 최댓값은 $M=7$
$x=2$일 때 최솟값은 $m=-2\times3^2+9=-9$
$\therefore M-m=7-(-9)=16$

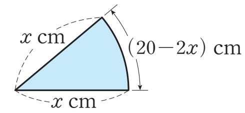
17 두 수를 $x,\ y(x>y)$라 하면 $x-y=8$에서 $y=x-8$
$xy=x(x-8)=(x^2-8x+16)-16=(x-4)^2-16$
따라서 $x=4$일 때 두 수의 곱이 최소가 된다.
$\therefore x=4,\ y=4-8=-4$

18 새로 만든 직사각형의 가로의 길이는 $(8+2x)$cm이고, 세로의 길이는 $(10-x)$cm이므로
$y=(8+2x)(10-x)=-2x^2+12x+80$
$=-2(x-3)^2+98$ (단, $0<x<10$)
따라서 $x=3$일 때 직사각형의 넓이 y는 최대가 된다.

19 물받이의 단면의 가로의 길이는 $(60-2x)$cm이므로
$y=x(60-2x)=-2x^2+60x$
$=-2(x-15)^2+450$ (단, $0<x<30$)
따라서 물받이의 높이가 $x=15$일 때 단면의 넓이는 $y=450$으로 최대가 된다.

20 점 P의 좌표를 $(p,\ -2p+4)$라 하고, $\triangle$POH의 넓이를 q라 하면 $\triangle$POH에서 $\overline{OH}=p$, $\overline{PH}=-2p+4$이므로
$q=\frac{1}{2}\times p\times(-2p+4)=-p^2+2p$
$=-(p-1)^2+1$ (단, $0<p<2$)
따라서 $p=1$일 때 $\triangle$POH의 넓이의 최댓값은 1이다.

21 오른쪽 그림에서 부채꼴의 반지름의 길이를 $x$cm라 하면 부채꼴의 호의 길이는 $(20-2x)$cm이므로 부채꼴의 넓이를 $y\text{cm}^2$라 하면



$y=\frac{1}{2}\times x\times(20-2x)=-x^2+10x$
$=-(x-5)^2+25$ (단, $0<x<10$)
따라서 반지름의 길이가 $x=5$일 때 부채꼴의 넓이는 최대가 된다.

22 $y=80+30x-5x^2=-5(x-3)^2+125$
따라서 공은 쏘아 올린 지 3초 후에 최고 높이에 도달한다.

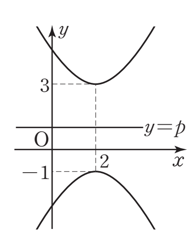
STEP 2 내신 5% 따라잡기 P. 89~94

1 $a=1,\ m=3,\ n=-1$		**2** ⑤	**3** 1	**4** 8	
5 ③	**6** ③	**7** A$(-1,\ 0)$, B$(4,\ 0)$			
8 $\left(-\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$		**9** $\frac{1}{30}$	**10** $\frac{10}{3}$	**11** 6	**12** ④
13 ③	**14** ㄱ, ㄷ	**15** ③	**16** ③	**17** $\frac{2}{3}$	**8** $-\frac{15}{4}$
19 -3	**20** $0<a<\frac{1}{4}$		**21** -12	**22** $\frac{25}{4}$	**23** 1
24 ③	**25** 4	**26** 5초	**27** 25cm^2, 5cm		
28 $72\pi\ \text{cm}^2$		**29** 45m	**30** 20m	**31** 1150원	
32 7	**33** P$(2,\ 5)$		**34** ㄴ, ㄷ		

1 $y=-x^2-2x+1=-(x+1)^2+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-(x+1-m)^2+2+n$이고, 다시 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=-(x+1-m)^2+2+n$
$\therefore y=(x+1-m)^2-2-n$
이 그래프가 $y=ax^2-4x+3$의 그래프와 일치하므로 $a=1$
이때 $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$이므로
$1-m=-2,\ -2-n=-1 \quad \therefore m=3,\ n=-1$

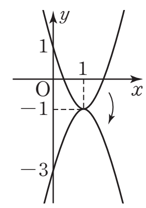
2 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-k+1=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{11}{2}-k$의 그래프는 위로 볼록하고, 꼭짓점의 좌표가 $\left(3,\ \frac{11}{2}-k\right)$이므로 x축과 두 점에서 만나려면 꼭짓점의 y좌표가 0보다 커야 한다.
즉, $\frac{11}{2}-k>0 \quad \therefore k<\frac{11}{2}$
또 그래프가 제2사분면을 지나지 않으므로
$-k+1\le0 \quad \therefore k\ge1 \quad \therefore 1\le k<\frac{11}{2}$

3 $y=x^2-4x+7=(x-2)^2+3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 3)$이고,
$y=-x^2+4x-5=-(x-2)^2-1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -1)$이다.
따라서 두 그래프가 직선 $y=p$에 대하여 서로 대칭이므로 두 그래프의 꼭짓점도 직선 $y=p$에 대하여 대칭이다.



$\therefore\ p=\dfrac{3+(-1)}{2}=1$

4 $y=2x^2-4x+1=2(x-1)^2-1$의 그래프를 꼭짓점을 중심으로 하여 180° 회전시킨 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 이 그래프의 식은 $y=-2(x-1)^2-1$이고, 다시 y축의 방향으로 h만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-2(x-1)^2-1+h$

이때 이 그래프가 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$0=-2(3-1)^2-1+h\qquad\therefore\ h=9$

$y=-2(x-1)^2+8$에 $y=0$을 대입하면

$0=-2(x-1)^2+8,\ (x-1)^2=4$

$x-1=\pm2\qquad\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 $y=-2(x-1)^2+8$의 그래프가 x축과 만나는 두 점이 $(-1,\ 0),\ (3,\ 0)$이므로 $k=-1$

$\therefore\ h+k=9+(-1)=8$

5 $y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$이므로

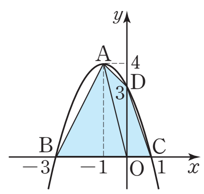
$\mathrm{A}(-1,\ 4),\ \mathrm{D}(0,\ 3)$

$y=-x^2-2x+3$에 $y=0$을 대입하면

$-x^2-2x+3=0,\ (x+3)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 $\mathrm{B}(-3,\ 0),\ \mathrm{C}(1,\ 0)$이므로



$\square\mathrm{ABCD}$

$=\triangle\mathrm{ABO}+\triangle\mathrm{AOD}+\triangle\mathrm{DOC}$

$=\dfrac{1}{2}\times3\times4+\dfrac{1}{2}\times3\times1+\dfrac{1}{2}\times1\times3=9$

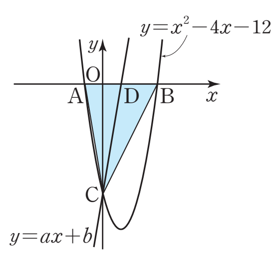
6 $y=x^2-4x-12$에 $y=0$을 대입하면

$x^2-4x-12=0,\ (x+2)(x-6)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=6\qquad\therefore\ \mathrm{A}(-2,\ 0),\ \mathrm{B}(6,\ 0)$

$x=0$을 대입하면 $y=-12\qquad\therefore\ \mathrm{C}(0,\ -12)$

이때 점 C를 지나고 $\triangle\mathrm{ACB}$의 넓이를 이등분하는 직선 $y=ax+b$가 x축과 만나는 점을 D라 하면 점 D는 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이므로



$\mathrm{D}(2,\ 0)$

따라서 직선 $y=ax+b$는 두 점 C, D를 지나므로

$a=(\text{기울기})=\dfrac{0-(-12)}{2-0}=6,\ b=(y\text{절편})=-12$

$\therefore\ a+b=6+(-12)=-6$

7 $y=2x^2-6x+k$에 $x=0$을 대입하면 $y=k$

$\therefore\ \mathrm{C}(0,\ k)\ (k<0)$

$y=2x^2-6x+k=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+k-\dfrac{9}{2}$

$\therefore\ \mathrm{D}\left(\dfrac{3}{2},\ k-\dfrac{9}{2}\right)\ \left(k-\dfrac{9}{2}<0\right)$

이때 $\triangle\mathrm{ACB}$와 $\triangle\mathrm{ADB}$는 밑변의 길이가 $\overline{\mathrm{AB}}$로 같으므로 두 삼각형의 높이의 비는 넓이의 비와 같다.

$|k|:\left|k-\dfrac{9}{2}\right|=16:25,\ -k:\left(-k+\dfrac{9}{2}\right)=16:25$

$-25k=-16k+72,\ -9k=72\qquad\therefore\ k=-8$

따라서 $y=2x^2-6x-8$에 $y=0$을 대입하면

$2x^2-6x-8=0,\ x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0\qquad\therefore\ x=-1$ 또는 $x=4$

$\therefore\ \mathrm{A}(-1,\ 0),\ \mathrm{B}(4,\ 0)$

8 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ -4)$이므로 $y=a(x+2)^2-4$라 하면 이 그래프가 점 $(0,\ -3)$을 지나므로

$-3=4a-4\qquad\therefore\ a=\dfrac{1}{4}$

즉, $y=\dfrac{1}{4}(x+2)^2-4=\dfrac{1}{4}x^2+x-3$이므로 $b=1,\ c=-3$

따라서 $y=-bx^2+cx+a=-x^2-3x+\dfrac{1}{4}=-\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{5}{2}$

이므로 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$이다.

9 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 두 점 $(-5,\ 0),\ (3,\ 0)$에서 만나므로 $y=a(x+5)(x-3)$이라 하면

$y=a(x^2+2x-15)=a(x+1)^2-16a$

이때 이 그래프의 꼭짓점이 직선 $y=-3x+1$ 위에 있으므로

$-16a=3+1\qquad\therefore\ a=-\dfrac{1}{4}$

따라서 $y=-\dfrac{1}{4}(x+1)^2-16\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{15}{4}$

이므로 $b=-\dfrac{1}{2},\ c=\dfrac{15}{4}$

$\therefore\ \dfrac{ab}{c}=\left\{\left(-\dfrac{1}{4}\right)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}\div\dfrac{15}{4}=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{4}{15}=\dfrac{1}{30}$

10 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ -3)$이므로 $y=a(x+2)^2-3$이라 하면 이 그래프의 축의 방정식은 $x=-2$이고, $\overline{\mathrm{AB}}=6$이므로

$\mathrm{A}(-5,\ 0),\ \mathrm{B}(1,\ 0)$

$y=a(x+2)^2-3$에 $x=-5,\ y=0$을 대입하면 $a=\dfrac{1}{3}$

따라서 $y=\dfrac{1}{3}(x+2)^2-3=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3}$이므로

$a+b-c=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}-\left(-\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{10}{3}$

11 $y=-x^2+ax+b$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-x^2+ax+b\qquad\therefore\ y=x^2-ax-b$

이 그래프가 $y=x^2-cx+d$의 그래프와 일치하므로

$a=c,\ -b=d$

$y=-x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$3=-1+a+b\qquad\therefore\ a+b=4\qquad\cdots$ ㉠

$y=x^2-ax-b$의 그래프가 점 $(-2,\ 9)$를 지나므로

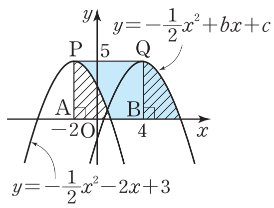
$9=4+2a-b\qquad\therefore\ 2a-b=5\qquad\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=1$

$\therefore\ c=a=3,\ d=-b=-1$

$\therefore\ a+b+c+d=3+1+3+(-1)=6$

12 $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+3=-\frac{1}{2}(x+2)^2+5$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ 5)$이고, 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 서로 같으므로



(색칠한 부분의 넓이)

$=\square\mathrm{PABQ}=5\times\overline{\mathrm{AB}}=30$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{AB}}=6$

따라서 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(4,\ 5)$이므로

$y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+5=-\frac{1}{2}x^2+4x-3$

$\therefore\ b=4,\ c=-3\qquad\therefore\ b-c=4-(-3)=7$

13 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $ab>0\qquad\therefore\ b>0$

y축과의 교점이 x축보다 아래쪽에 있으므로 $c<0$

따라서 $y=cx^2+bx+a$의 그래프는 $c<0$이므로 위로 볼록한 포물선이고, $cb<0$이므로 축이 y축의 오른쪽에 있고, $a>0$이므로 y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있다.

따라서 그래프로 알맞은 것은 ③이다.

14 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

ㄱ. 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0\qquad\therefore\ b>0$

y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $c>0$

$\therefore\ abc<0$

ㄴ. 축의 방정식이 $x=-\frac{b}{2a}$이고, 축이 y축의 오른쪽에 있으므로

$-\frac{b}{2a}>0\qquad\therefore\ \frac{b}{2a}<0$

ㄷ. $x=1$일 때 $y>0$이므로 $y=a+b+c>0$

ㄹ. $x=\frac{1}{2}$일 때 $y>0$이므로

$y=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c=\frac{1}{4}(a+2b+4c)>0$

$\therefore\ a+2b+4c>0$

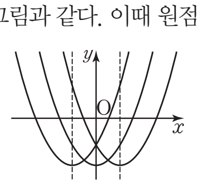
ㅁ. (꼭짓점의 y좌표)$=-\frac{b^2-4ac}{4a}>0$이므로

양변에 $-4a$를 곱하면 $b^2-4ac>0$ ($\because\ -4a>0$)

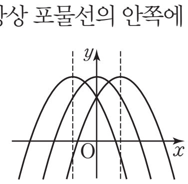
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

15 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 모든 사분면을 지나는 경우는 다음 그림과 같다. 이때 원점 O는 항상 포물선의 안쪽에 있다.

(i)



(ii)

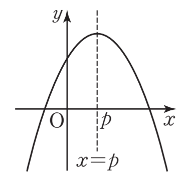


(i) $a>0$일 때, (y축과의 교점의 y좌표)$=c<0$

(ii) $a<0$일 때, (y축과의 교점의 y좌표)$=c>0$

따라서 (i), (ii)에서 항상 옳은 것은 ③ $ac<0$이다.

16 (가), (나)를 모두 만족하는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0$

$\therefore\ b>0$

y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $c>0$

17 이차함수 $y=ax^2+bx+1$의 그래프는 $y=2x^2-3x+2$의 그래프와 직선 $y=4x-1$의 교점을 지난다.

$2x^2-3x+2=4x-1$에서 $2x^2-7x+3=0$

$(2x-1)(x-3)=0\qquad\therefore\ x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

$y=4x-1$에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면 $y=1$,

$x=3$을 대입하면 $y=11$이므로

두 교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, $(3,\ 11)$이다.

$y=ax^2+bx+1$의 그래프가 점 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$을 지나므로

$\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+1=1\qquad\therefore\ a+2b=0\qquad\cdots$ ㉠

점 $(3,\ 11)$을 지나므로

$9a+3b+1=11\qquad\therefore\ 9a+3b=10\qquad\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{4}{3},\ b=-\frac{2}{3}\qquad\therefore\ a+b=\frac{2}{3}$

개념 더하기 다시 보기

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 좌표

⇨ 이차함수 $ax^2+bx+c=mx+n$의 해 $x=\alpha,\ x=\beta$가 교점의 x좌표이고, $x=\alpha,\ x=\beta$를 주어진 식에 대입하여 구한 y의 값이 교점의 y좌표이다.

18 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $-3,\ 5$이므로

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만나는 두 점은 $(-3,\ 0)$, $(5,\ 0)$이다.

주어진 이차함수를 $y=a(x+3)(x-5)$라 하면

$y=a(x+3)(x-5)=a(x^2-2x-15)=a(x-1)^2-16a$

이 이차함수의 최댓값이 8이므로 $a<0$이고

$-16a=8\qquad\therefore\ a=-\frac{1}{2}$

따라서 $y=-\frac{1}{2}(x^2-2x-15)=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{15}{2}$이므로

$b=1,\ c=\frac{15}{2}\qquad\therefore\ abc=\left(-\frac{1}{2}\right)\times1\times\frac{15}{2}=-\frac{15}{4}$

19 $y=\frac{1}{4}x^2-2kx+k^2-6k+2=\frac{1}{4}(x-4k)^2-3k^2-6k+2$

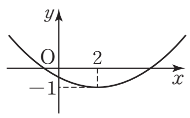
이 함수의 최솟값이 -7이므로 $-3k^2-6k+2=-7$

$k^2+2k-3=0,\ (k+3)(k-1)=0$

$\therefore\ k=-3$ 또는 $k=1$

이때 꼭짓점 $(4k,\ -7)$이 제3사분면 위에 있으므로
$4k<0$ $\quad\therefore\ k=-3$

20 $y=ax^2+bx+c$는 $x=2$일 때 최솟값이 -1이므로
$y=a(x-2)^2-1$라 하면
최솟값을 가지므로 $a>0$ $\quad\cdots$ ㉠



또 이 그래프가 모든 사분면을 지나므로 오른쪽 그림과 같이 y축과 만나는 점이 x축보다 아래에 있어야 한다.
즉, $y=a(x-2)^2-1$에 $x=0$을 대입하면
$y=4a-1<0$ $\quad\therefore\ a<\dfrac{1}{4}$ $\quad\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 $0<a<\dfrac{1}{4}$이다.

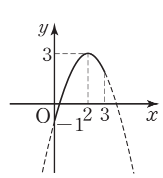
21 $m^2-4(x-2)m+x^2-10x+1-y=0$이 중근을 가지므로
$\{-2(x-2)\}^2-(x^2-10x+1-y)=0$
$4(x^2-4x+4)-x^2+10x-1+y=0$
$\therefore\ y=-3x^2+6x-15=-3(x-1)^2-12$
따라서 y의 최댓값은 -12이다.

22 $4x+y=10$에서 $y=10-4x$이므로
$xy=x(10-4x)=-4x^2+10x=-4\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{25}{4}$
따라서 xy의 최댓값은 $\dfrac{25}{4}$이다.

23 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(k,\ 2k+6)$이라 하면 두 점 P, Q의 x좌표는 같으므로 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(k,\ 4-k^2)$이다.
이때 $\overline{\mathrm{PQ}}$는 y축에 평행하고, 점 P가 점 Q보다 위쪽에 있으므로
$\overline{\mathrm{PQ}}=(2k+6)-(4-k^2)=k^2+2k+2=(k+1)^2+1$
따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은 1이다.

24 $y=\dfrac{1}{5}x^2-2kx+3k-7=\dfrac{1}{5}(x-5k)^2-5k^2+3k-7$
이 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(5k,\ -5k^2+3k-7)$이므로
$a=5k,\ b=-5k^2+3k-7$
$\therefore\ a+b=5k+(-5k^2+3k-7)=-5k^2+8k-7$
$\qquad=-5\left(k-\dfrac{4}{5}\right)^2-\dfrac{19}{5}$
따라서 $a+b$의 최댓값은 $-\dfrac{19}{5}$이다.

25 $y=a(x^2-4x+4)+3=a(x-2)^2+3$



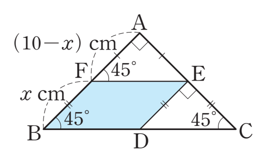
이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 3)$이고, 최솟값 -1을 가지므로 $a<0$
이때 꼭짓점의 x좌표가 x의 값의 범위에 포함되므로
$x=2$일 때 최댓값은 3이다. $\quad\therefore\ b=3$
또 $x=0$일 때 최솟값 -1을 가지므로
$4a+3=-1$ $\quad\therefore\ a=-1$
$y=-x^2+4x-1$의 그래프가 점 $(1,\ c)$를 지나므로
$c=-1+4-1=2$ $\quad\therefore\ a+b+c=4$

개념 더하기 다시 보기

x의 값의 범위가 $m\le x\le n$인 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$에서 $ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q$일 때
$\begin{cases} m\le p\le n\text{이면 } f(p),\ f(m),\ f(n) \\ p<m \text{ 또는 } p>n\text{이면 } f(m),\ f(n)\end{cases}$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

26 두 점 P, Q가 동시에 출발한 지 x초 후의 $\triangle\mathrm{PBQ}$의 넓이를 $y\,\mathrm{cm}^2$라 하면
$\overline{\mathrm{PB}}=(20-2x)\,\mathrm{cm},\ \overline{\mathrm{BQ}}=3x\,\mathrm{cm}$이므로
$y=\dfrac{1}{2}\times3x\times(20-2x)=-3x^2+30x$
$\quad=-3(x-5)^2+75$ (단, $0<x\le8$)
따라서 두 점 P, Q가 동시에 출발한 지 5초 후에 $\triangle\mathrm{PBQ}$의 넓이는 최대가 된다.

27 오른쪽 그림에서 $\triangle\mathrm{AFE}$와 $\triangle\mathrm{EDC}$는 모두 직각이등변삼각형이므로



$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{EC}}=x\,\mathrm{cm}$라 하면
$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AE}}=(10-x)\,\mathrm{cm}$
평행사변형 BDEF의 넓이를 $y\,\mathrm{cm}^2$라 하면
□BDEF$=\triangle\mathrm{ABC}-\triangle\mathrm{AFE}-\triangle\mathrm{EDC}$이므로
$y=\dfrac{1}{2}\times10\times10-\dfrac{1}{2}\times(10-x)\times(10-x)-\dfrac{1}{2}\times x\times x$
$\quad=-x^2+10x=-(x-5)^2+25$ (단, $0<x<10$)
따라서 $x=\overline{\mathrm{BF}}=5\,\mathrm{cm}$일 때 평행사변형 BDEF의 넓이는 $25\,\mathrm{cm}^2$로 최대가 된다.

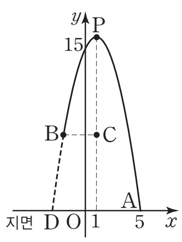
28 원 O의 반지름의 길이를 $x\,\mathrm{cm}$라 하면 원 O′의 반지름의 길이는 $(12-x)\,\mathrm{cm}$이다.
두 원 O, O′의 넓이의 합을 $y\,\mathrm{cm}^2$라 하면
$y=\pi x^2+\pi(12-x)^2=\pi(2x^2-24x+144)$
$\quad=2\pi(x-6)^2+72\pi$ (단, $0<x<12$)
따라서 두 원 O, O′의 반지름의 길이가 각각 6 cm, 6 cm일 때, 두 원의 넓이의 합의 최솟값은 $72\pi\,\mathrm{cm}^2$이다.

29 폭죽을 쏘아 올린 지 3초 후에 최고 높이 $b\,\mathrm{m}$에 도달한다고 하면
$h=-5(t-3)^2+b=-5t^2+30t-45+b$
즉, $h=-5t^2+at=-5t^2+30t-45+b$이므로
$a=30,\ -45+b=0$에서 $b=45$
따라서 폭죽의 최고 높이는 45 m이다.

30 튀어 오른 공의 최고 높이는 $4\le x\le8$의 범위에 있는 포물선의 식의 최댓값과 같다.
이 포물선과 x축과의 두 교점이 $(4,\ 0),\ (8,\ 0)$이므로
$y=a(x-4)(x-8)$이라 하면 이 그래프가 점 $(5,\ 15)$를 지나므로
$15=a\times1\times(-3)$ $\quad\therefore\ a=-5$
$\therefore\ y=-5(x-4)(x-8)=-5x^2+60x-160$
$\qquad=-5(x-6)^2+20$ (단, $4\le x\le8$)
따라서 튀어 오른 공의 최고 높이는 20 m이다.

31 도넛의 가격이 50원씩 오를 때마다 하루 판매량이 10개씩 감소하므로 도넛의 가격을 $(800+50x)$원으로 정할 때, 도넛의 하루 판매량은 $(300-10x)$개가 된다.
하루 수입을 y원이라 하면
$y=(800+50x)(300-10x)$
$=-500x^2+7000x+240000$
$=-500(x-7)^2+264500$
따라서 $x=7$일 때 하루 수입이 최대가 되므로 도넛의 가격을 $800+50\times7=1150$(원)으로 정할 때, 하루 수입은 최대가 된다.

32 오른쪽 그림에서 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이므로 점 D의 좌표는 $(-3,\ 0)$
이때 그래프가 두 점 A, D를 지나므로 $y=a(x+3)(x-5)$라 하면 이 그래프가 점 $(0,\ 15)$를 지나므로
$15=-15a \qquad \therefore a=-1$
즉, $y=-(x+3)(x-5)$
$=-x^2+2x+15$



이때 점 B의 x좌표는 $1-3=-2$이므로 $x=-2$를 대입하면
$y=-x^2+2x+15=-4-4+15=7$
따라서 건물의 높이는 7이다.

33 주어진 포물선의 그래프의 식을 $y=ax^2+bx+c$라 하면
이 그래프가 점 $\left(0,\ \frac{7}{2}\right)$을 지나므로 $c=\frac{7}{2}$
점 $(-2,\ 5)$를 지나므로 $5=4a-2b+\frac{7}{2}$ $\cdots$ ㉠
점 $(10,\ 11)$을 지나므로 $11=100a+10b+\frac{7}{2}$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 풀면 $a=\frac{1}{8},\ b=-\frac{1}{2}$
즉, 그래프의 식은 $y=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}=\frac{1}{8}(x-2)^2+3$
따라서 초점 P가 포물선의 축 위에 존재하므로 초점 P의 x좌표는 2이고, y좌표는 5이다.
$\therefore$ P$(2,\ 5)$

34 ㄱ. 아이스크림 100 mg을 1100원에 판매하면 하루 평균 판매량은 $20000-10\times100=20000-1000=19000$ (mg)이 된다.
ㄴ. 여름철 동안 아이스크림 100 mg을 $(1000+x)$원에 판매하므로 1 mg을 $\frac{1}{100}(1000+x)$원에 판매하는 것과 같다.
따라서 여름철 하루 평균 판매 금액 y원은
$y=\frac{1}{100}(1000+x)(20000-10x)$
$=-\frac{1}{10}x^2+100x+200000$
ㄷ. $y=-\frac{1}{10}x^2+100x+200000$
$=-\frac{1}{10}(x-500)^2+225000$
따라서 $x=500$일 때 여름철 하루 평균 판매 금액이 최대가 되므로 아이스크림 100 mg을 $1000+500=1500$(원)에 판매해야 한다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

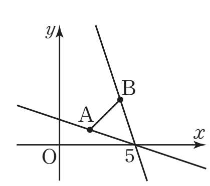
STEP 3 내신 1% 뛰어넘기 P. 95~96

01 $a=1,\ b=8$ **02** $x=b$ 또는 $x=\frac{a+c}{2}$ **03** $\frac{2}{3}$
04 최댓값 : 없다, 최솟값 : 2 **05** 최댓값 : 8, 최솟값 : $\frac{7}{4}$
06 2 **07** 10 **08** 400원

01 길잡이 △CAO와 △COB는 높이가 $\overline{\mathrm{CO}}$로 같으므로 밑변의 길이의 비는 넓이의 비와 같다. 따라서 $\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{BO}}=1:2$이다.
△CAO와 △COB는 높이가 $\overline{\mathrm{CO}}$로 같고, 넓이의 비가 $1:2$이므로 $\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{BO}}=1:2$
A$(-k,\ 0)$, B$(2k,\ 0)$ $(k>0)$이라 하면
$y=-\frac{1}{4}x^2+ax+b=-\frac{1}{4}(x+k)(x-2k)$
$=-\frac{1}{4}(x^2-kx-2k^2)=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{9}{16}k^2$
이 그래프의 꼭짓점의 y좌표가 9이므로
$\frac{9}{16}k^2=9,\ k^2=16 \qquad \therefore k=4\ (\because k>0)$
따라서 $y=-\frac{1}{4}(x^2-4x-32)=-\frac{1}{4}x^2+x+8$이므로
$a=1,\ b=8$

02 길잡이 이차항의 계수가 1이고, x축과 만나는 두 점의 x좌표가 각각 $\alpha,\ \beta$인 이차함수의 그래프의 식 ⇨ $y=(x-\alpha)(x-\beta)$
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 각각 $a,\ b$이고, 이차항의 계수가 1이므로
$f(x)=(x-a)(x-b)$
이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 각각 $b,\ c$이고, 이차항의 계수가 1이므로
$g(x)=(x-b)(x-c)$
이차방정식 $f(x)+g(x)=0$에서
$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)=0$
$(x-b)(2x-a-c)=0 \qquad \therefore x=b$ 또는 $x=\frac{a+c}{2}$

03 길잡이 ① 직선 $y=a(5-x)$가 점 A, B를 지날 때의 a의 값의 범위를 구한 후, 자연수 a의 값을 모두 구한다.
② ①에서 구한 자연수 a의 값을 만족하는 경우의 수를 모두 구한다.
이차방정식 $-\frac{1}{2}(x-4)^2+3=x-1$에서
$-(x^2-8x+16)+6=2x-2,\ x^2-6x+8=0$
$(x-2)(x-4)=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=4$
$y=x-1$에 $x=2$를 대입하면 $y=1$
$x=4$를 대입하면 $y=3 \qquad \therefore$ A$(2,\ 1)$, B$(4,\ 3)$
직선 $y=a(5-x)$는 $x=5$일 때, $y=0$이므로 항상 점 $(5,\ 0)$을 지난다.
따라서 직선 $y=a(5-x)$가 점 A$(2,\ 1)$을 지날 때,
$1=a(5-2) \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$
점 B$(4,\ 3)$을 지날 때,
$3=a(5-4) \qquad \therefore a=3$



즉, 직선 $y=a(5-x)$와 선분 AB가 만나려면 $\frac{1}{3} \le a \le 3$이어야 하고, 주사위의 눈의 수의 차는 자연수이므로 $a=1,\ 2,\ 3$

(i) $a=1$일 때, 즉 눈의 수의 차가 1인 경우를 순서쌍으로 나타내면
$(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 5),$
$(5,\ 4),\ (4,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 1)$의 10가지

(ii) $a=2$일 때, 즉 눈의 수의 차가 2인 경우를 순서쌍으로 나타내면
$(1,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6),\ (6,\ 4),\ (5,\ 3),$
$(4,\ 2),\ (3,\ 1)$의 8가지

(iii) $a=3$일 때, 즉 눈의 수의 차가 3인 경우를 순서쌍으로 나타내면
$(1,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (6,\ 3),\ (5,\ 2),\ (4,\ 1)$의 6가지

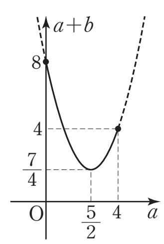
따라서 모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)이므로 구하는 확률은
$\frac{10+8+6}{36}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$

04 길잡이 $f(x)$와 $f(3-x)$가 나오도록 주어진 식에 x 대신 $3-x$를 대입한 후 두 식을 연립하여 $f(x)$를 구한다.

$2f(x)-f(3-x)=x^2$ … ㉠
㉠에 x 대신 $3-x$를 대입하면
$2f(3-x)-f(x)=(3-x)^2$ … ㉡
㉠×2+㉡을 하면
$3f(x)=2x^2+(3-x)^2,\ 3f(x)=3x^2-6x+9$
$\therefore\ f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$
따라서 이차함수 $y=f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값이 2이고, 최댓값은 없다.

05 길잡이 (점 A의 x좌표)$\le a \le$(점 B의 x좌표)일 때, $a+b$의 값의 최댓값과 최솟값을 구한다.

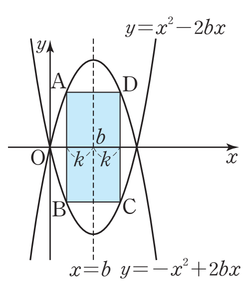
$y=x^2-6x+8$에서 $x=0$일 때, $y=8$이므로 $\mathrm{A}(0,\ 8)$
$y=0$일 때, $0=x^2-6x+8$이므로 $(x-2)(x-4)=0$
$\therefore\ x=2$ 또는 $x=4 \qquad \therefore\ \mathrm{B}(4,\ 0)$
점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 점 A에서 점 B까지 이차함수 $y=x^2-6x+8$의 그래프 위를 움직이므로 $\mathrm{P}(a,\ a^2-6a+8)$ (단, $0\le a\le4$)
$\therefore\ a+b=a+(a^2-6a+8)=a^2-5a+8$
$=\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$ (단, $0\le a\le4$)



따라서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $a+b$는 $a=\frac{5}{2}$일 때 최솟값이 $\frac{7}{4}$이고, $a=0$일 때 최댓값이 8이다.

06 길잡이 두 점 A, D는 축에 대하여 대칭임을 이용하여 두 점 A, D의 x좌표를 정한 후, 두 점 C, D의 좌표를 구해 본다.

$y=-x^2+2bx=-(x-b)^2+b^2$,
$y=x^2-2bx=(x-b)^2-b^2$이므로
두 그래프의 축의 방정식은 $x=b$
이때 두 점 A, D는 직선 $x=b$에 대하여 대칭이므로 x좌표를 각각 $b-k,\ b+k\,(0<k<b)$라 하자.
점 D는 $y=-(x-b)^2+b^2$의 그래프 위의 점이므로 $x=b+k$를 대입하면 $y=-k^2+b^2$



$\therefore\ \mathrm{D}(b+k,\ -k^2+b^2)$
두 이차함수 $y=-(x-b)^2+b^2,\ y=(x-b)^2-b^2$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이므로 점 C와 점 D는 x좌표가 같고, y좌표는 부호가 서로 반대이다. $\qquad \therefore\ \mathrm{C}(b+k,\ k^2-b^2)$
$\overline{\mathrm{AD}}=2k,\ \overline{\mathrm{CD}}=(-k^2+b^2)-(k^2-b^2)=2b^2-2k^2$이므로
(□ABCD의 둘레의 길이)
$=2(\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{CD}})=2\{2k+(2b^2-2k^2)\}$
$=-4k^2+4k+4b^2=-4\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+1+4b^2$ (단, $0<k<b$)
이때 □ABCD의 둘레의 길이의 최댓값이 17이므로
$1+4b^2=17,\ b^2=4 \qquad \therefore\ b=2\ (\because\ b>1)$

07 길잡이 수리 센터와 B공장 사이의 거리를 $x$km, A, B, C 세 공장에서의 총 수송비를 y원이라 하고 y를 $a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타낸다.

A, B, C 세 부품 공장에서 수리 센터까지의 수송비는 각각 $k(50-x)^2,\ kx^2,\ k(20+x)^2\,(k>0)$이므로 총 수송비를 y원이라 하면
$y=k\{(50-x)^2+x^2+(20+x)^2\}$
$=k(3x^2-60x+2900)$
$=k\{3(x-10)^2+2600\}$
따라서 $x=10$일 때 최솟값을 가지므로 수리 센터는 B공장에서 A공장 쪽으로 10 km 떨어진 지점에 지어야 한다.

08 길잡이 주어진 그래프의 식을 구한 후, (하루 매출액)=(판매가)×(하루 판매량)임을 이용한다.

판매가를 x원, 하루 판매량을 y개라 하고 주어진 그래프의 식을 $y=ax+b$라 하면 이 그래프가 두 점 $(250,\ 1100),\ (300,\ 1000)$을 지나므로
$1100=250a+b$ … ㉠, $1000=300a+b$ … ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=1600$
$\therefore\ y=-2x+1600$
하루 매출액을 S원이라 하면
$S=xy=x(-2x+1600)=-2x^2+1600x$
$=-2(x-400)^2+320000$
따라서 판매가를 400원으로 할 때, 하루 매출액이 최대가 된다.

서술형 완성하기 P. 97~98

1 $a=-5,\ b=68$ **2** $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ **3** 제3, 4사분면
4 (1) -6 (2) 최댓값 : 없다, 최솟값 : -23 **5** 3초
6 2 **7** 풀이 참조

1 이차함수 $y=-2(x-1)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-2(x-a-1)^2+4$ … (i)
다시 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=-2(x-a-1)^2+4 \qquad \therefore\ y=2(x-a-1)^2-4$ … (ii)
이 그래프가 점 $(-1,\ 14)$를 지나므로
$14=2(-a-2)^2-4,\ a^2+4a-5=0$

$(a+5)(a-1)=0 \qquad \therefore a=-5\ (\because a<0)$ … (iii)

따라서 $y=2(x+4)^2-4$의 그래프가 점 $(2,\ b)$를 지나므로

$b=2\times(2+4)^2-4=68$ … (iv)

채점 기준	배점
(i) 평행이동한 그래프의 식 구하기	30 %
(ii) 대칭이동한 그래프의 식 구하기	30 %
(iii) a의 값 구하기	20 %
(iv) b의 값 구하기	20 %

2 축의 방정식이 $x=-1$이므로 그래프의 식을 $y=a(x+1)^2+q$라 하면 이 그래프가

점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $1=a+q$ … ㉠

점 $(2,\ -1)$을 지나므로 $-1=9a+q$ … ㉡

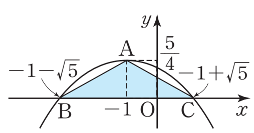
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{4},\ q=\frac{5}{4}$

즉, $y=-\frac{1}{4}(x+1)^2+\frac{5}{4}$이므로 … (i)

$A\left(-1,\ \frac{5}{4}\right)$ … (ii)

이때 x축과의 교점의 x좌표는 $0=-\frac{1}{4}(x+1)^2+\frac{5}{4}$

$(x+1)^2=5 \qquad \therefore x=-1\pm\sqrt{5}$



$\therefore B(-1-\sqrt{5},\ 0)$,

$C(-1+\sqrt{5},\ 0)$

(또는 $B(-1+\sqrt{5},\ 0)$,

$C(-1-\sqrt{5},\ 0)$) … (iii)

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\{(-1+\sqrt{5})-(-1-\sqrt{5})\}\times\frac{5}{4}$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{5}{4}=\frac{5\sqrt{5}}{4}$ … (iv)

채점 기준	배점
(i) 이차함수의 식 구하기	30 %
(ii) 점 A의 좌표 구하기	10 %
(iii) 두 점 B, C의 좌표 구하기	30 %
(iv) $\triangle ABC$의 넓이 구하기	30 %

3 그래프가 위로 볼록하므로 $ab<0$ … ㉠

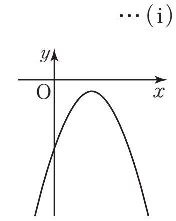
축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $ab\times bc>0$

$\therefore bc<0$ … ㉡

(y축과 만나는 점의 y좌표)$=abc>0$ … ㉢

㉠, ㉢에서 $c<0$, ㉡에서 $b>0$, ㉠에서 $a<0$ … (i)

이때 이차함수 $y=a(x+c)^2-b$의 그래프는 $a<0$이므로 위로 볼록하고, $-c>0,\ -b<0$에서 꼭짓점 $(-c,\ -b)$는 제4사분면 위에 있으므로 오른쪽 그림과 같다. … (ii)



따라서 이 그래프가 지나는 사분면은 제3, 4사분면이다. … (iii)

채점 기준	배점
(i) $a,\ b,\ c$의 부호 구하기	각 10 %
(ii) 이차함수 $y=a(x+c)^2-b$의 그래프 그리기	40 %
(iii) 그래프가 지나는 사분면 구하기	30 %

4 (1) $y=\frac{1}{2}x^2-kx+k+1=\frac{1}{2}(x-k)^2-\frac{1}{2}k^2+k+1$ … (i)

꼭짓점이 직선 $3x-y=5$ 위에 있으므로

$3k-\left(-\frac{1}{2}k^2+k+1\right)=5,\ k^2+4k-12=0$

$(k+6)(k-2)=0 \qquad \therefore k=-6$ 또는 $k=2$

(가) $k=-6$일 때, $y=\frac{1}{2}(x+6)^2-23$이므로 이 그래프는 모든 사분면을 지난다.

(나) $k=2$일 때, $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$이므로 이 그래프는 제1, 2 사분면을 지난다.

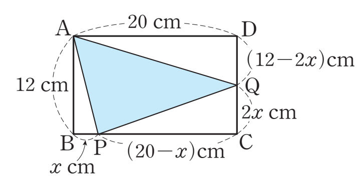
따라서 (가), (나)에서 $k=-6$이다. … (ii)

(2) $y=\frac{1}{2}(x+6)^2-23$에서

$x=-6$일 때 최솟값은 -23이고 최댓값은 없다. … (iii)

채점 기준	배점
(i) 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타내기	20 %
(ii) 그래프가 모든 사분면을 지날 때의 k의 값 구하기	40 %
(iii) 최댓값과 최솟값 각각 구하기	각 20 %

5 출발한 지 x초 후의 $\triangle APQ$의 넓이를 $y\,cm^2$라 하면 $\overline{BP}=x\,cm$, $\overline{PC}=(20-x)\,cm$, $\overline{CQ}=2x\,cm$, $\overline{QD}=(12-2x)\,cm$이고,



$\triangle APQ=\square ABCD-\triangle ABP-\triangle PCQ-\triangle AQD$이므로

$y=20\times12-\frac{1}{2}\times x\times12-\frac{1}{2}\times(20-x)\times2x$

$-\frac{1}{2}\times20\times(12-2x)$

$=240-6x-20x+x^2-120+20x$

$=x^2-6x+120$ … (i)

$=(x-3)^2+111$ (단, $0<x<6$) … (ii)

따라서 3초 후에 $\triangle APQ$의 넓이는 최소가 된다. … (iii)

채점 기준	배점
(i) $\triangle APQ$의 넓이를 이차함수의 식으로 나타내기	40 %
(ii) (i)의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타내기	30 %
(iii) $\triangle APQ$의 넓이가 최소가 될 때의 시간 구하기	30 %

6 $y=\frac{1}{2}x^2$에 $x=-1,\ x=2$를 각각 대입하면 $y=\frac{1}{2},\ y=2$

$\therefore A\left(-1,\ \frac{1}{2}\right),\ B(2,\ 2)$ … (i)

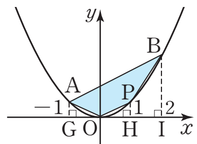
점 P의 좌표를 $P\left(k,\ \frac{1}{2}k^2\right)\ (k>0)$이라 하면

$\overline{AB}/\!/\overline{OP}$이므로 (직선 AB의 기울기)=(직선 OP의 기울기)에서

$\frac{2-\frac{1}{2}}{2-(-1)}=\frac{\frac{1}{2}k^2}{k},\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2}k \qquad \therefore k=1$

$\therefore P\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ … (ii)

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, P, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 G, H, I라 하면



□AOPB

=□AGIB−△AGO−△POH−□PHIB

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+2\right)\times3-\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+2\right)\times1$

$=\frac{15}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}=2$ … (iii)

채점 기준	배점
(i) 두 점 A, B의 좌표 구하기	각 10 %
(ii) 점 P의 좌표 구하기	40 %
(iii) □AOPB의 넓이 구하기	40 %

7 |예시 답안|

$y=\frac{1}{2}gx^2$에서 $x^2=\frac{2y}{g}$이므로

$x=\sqrt{\frac{2y}{g}}$ ($\because x>0$) … (i)

이때 각 행성에서 같은 물체를 같은 높이에서 떨어뜨렸으므로 물체가 떨어진 거리 y의 값이 같다고 하면 중력가속도 g의 값이 클수록 시간 x의 값은 작아진다. … (ii)

따라서 주어진 5개의 행성 중 중력가속도 g의 값이 가장 큰 토성에서 물체가 가장 빨리 떨어지고, 중력가속도 g의 값이 가장 작은 수성에서 물체가 가장 늦게 떨어진다. … (iii)

채점 기준	배점
(i) 주어진 x, y 사이의 관계식을 x에 관한 식으로 나타내기	30 %
(ii) 물체가 떨어지는 시간 x초와 중력가속도 g가 서로 반비례함을 알기	30 %
(iii) 물체가 가장 빨리 떨어지는 행성과 가장 늦게 떨어지는 행성을 각각 구하기	각 20 %

단원 마무리하기

P. 99~102

1 ③	**2** ④	**3** ②	**4** $-\frac{1}{4}$	**5** ②	**6** ①, ⑤
7 ②	**8** (4, −2), (12, −18)			**9** $\frac{3}{2}$	**10** 27
11 ⑤	**12** ④	**13** ④	**14** ①	**15** 12	**16** ②
17 ③	**18** ②	**19** ②	**20** $\frac{4}{3}$, 과정은 풀이 참조		
21 ②	**22** ④	**23** 29, 과정은 풀이 참조			

1 ㄷ. $y=3(1-x)^2=3(x-1)^2$

ㅁ. $y=x(2-x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$

① 이차함수의 그래프에서 이차항의 계수의 절댓값이 작을수록 그래프의 폭이 넓으므로 폭이 가장 넓은 그래프는 ㄹ이다.

② 이차항의 계수가 양수일 때, 아래로 볼록하므로 ㄴ, ㄷ이다.

③ 제2사분면을 지나지 않으려면 그래프가 위로 볼록한 포물선이어야 하므로 ㄱ, ㄹ, ㅁ, ㅂ이고 이 중에서 제2사분면을 지나지 않는 것은 ㄱ, ㅁ이다.

④ 축이 제1, 4사분면을 지나려면 축이 y축의 오른쪽에 있어야 한다. 즉, 축의 방정식이 $x=$(양수)인 것을 찾으면 ㄷ, ㅁ이다.

⑤ $y=2x^2-1$과 $y=-2x^2+1$은 x축에 대하여 서로 대칭이다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

2 $f(x)=ax^2$이므로 $f(x+2)-f(x-2)=6x$에서

$a(x+2)^2-a(x-2)^2=6x$, $8ax=6x$ $\quad\therefore a=\frac{3}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{4}x^2$이므로

$f(-3)=\frac{3}{4}\times(-3)^2=\frac{27}{4}$

3 점 A의 x좌표를 $k(k>0)$라 하면

$A(k,\ 3k^2)$, $B(-k,\ 3k^2)$, $C\left(-k,\ -\frac{1}{5}k^2\right)$, $D\left(k,\ -\frac{1}{5}k^2\right)$

이때 $\overline{AB}=k-(-k)=2k$, $\overline{AD}=3k^2-\left(-\frac{1}{5}k^2\right)=\frac{16}{5}k^2$이고,

□ABCD는 정사각형이므로 $\overline{AB}=\overline{AD}$에서

$2k=\frac{16}{5}k^2$, $5=8k$ ($\because k>0$) $\quad\therefore k=\frac{5}{8}$

∴ (□ABCD의 둘레의 길이)

$=4\overline{AB}=4\times2k=4\times2\times\frac{5}{8}=5$

4 $y=x^2$에 $y=4$를 대입하면 $4=x^2$

$\therefore x=\pm2$ $\quad\therefore A(-2,\ 4)$, $B(2,\ 4)$

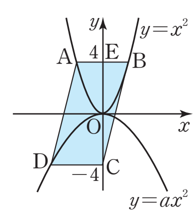
이때 $\overline{AB}=4$이고, $\overline{AB}$와 y축과의 교점을 E라 하면 □ADCB$=4\times\overline{EC}=32$에서

$\overline{EC}=8$ $\quad\therefore C(0,\ -4)$

□ADCB가 평행사변형이므로

$\overline{DC}=\overline{AB}=4$ $\quad\therefore D(-4,\ -4)$

따라서 $y=ax^2$의 그래프가 점 D를 지나므로



$-4=16a$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{4}$

5 직선 $ax+by+6=0$이 두 점 $(6,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지나므로

$6a+6=0$에서 $a=-1$이고 $2b+6=0$에서 $b=-3$

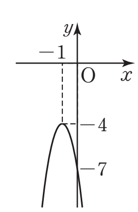
따라서 이차함수 $y=-(x+3)^2$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 0)$인 위로 볼록한 포물선이고, y축과의 교점의 좌표는 $(0,\ -9)$이므로 그래프로 알맞은 것은 ②이다.

6 ① $|-3|>|2|$이므로 그래프의 폭이 더 좁다.

② 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -4)$이므로 제3사분면에 속한다.

③ 축의 방정식은 $x=-1$이므로 점 $(-1,\ -4)$를 지나고 y축에 평행하다.

④ 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2사분면을 지나지 않는다.



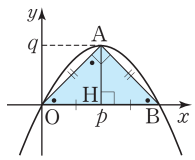
⑤ x축의 방향으로 −2만큼 평행이동하면

$y=-3(x+2+1)^2-4=-3x^2-18x-31$

의 그래프와 완전히 포개어진다.

따라서 옳지 않은 것은 ①, ⑤이다.

7 주어진 이차함수의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(p,\ q)$이고, 직선 $x=p$에 대하여 대칭이므로 $\triangle$AOB는 직각이등변삼각형이다.



이때 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$AOH도 직각이등변삼각형이다. ($\because \angle AOH=\angle OAH=45°$)

$\therefore p=q$

$y=-\frac{1}{4}(x-p)^2+p$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=-\frac{1}{4}(0-p)^2+p,\ p^2-4p=0$

$p(p-4)=0 \qquad \therefore p=4\ (\because p>0)$

$\therefore\ \triangle AOB=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times8\times4=16$

8 $y=-2x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(2,\ -2)$를 지나므로

$-2=-8+2a+b \qquad \therefore b=-2a+6$

$y=-2x^2+ax+b=-2x^2+ax-2a+6$

$=-2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^2}{8}-2a+6$

이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{a}{4},\ \frac{a^2}{8}-2a+6\right)$이고, x축과 한 점에서 만나므로 꼭짓점의 y좌표가 0이다.

즉, $\frac{a^2}{8}-2a+6=0$이므로 $a^2-16a+48=0$

$(a-4)(a-12)=0 \qquad \therefore a=4$ 또는 $a=12$

따라서 $a=4$일 때 $b=-2\times4+6=-2$,

$a=12$일 때 $b=-2\times12+6=-18$이므로 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(4,\ -2)$, $(12,\ -18)$이다.

9 (가) 주어진 그래프의 식을 $y=a'(x+2)^2-3$이라 하면 이 그래프가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2=4a'-3 \qquad \therefore a=a'=\frac{1}{4}$

(나) 꼭짓점이 직선 $y=x-3$ 위의 점이므로 꼭짓점의 좌표를 $(t,\ t-3)$이라 하면 구하는 이차함수의 식은

$y=\frac{1}{4}(x-t)^2+t-3$

(다) 이차함수의 그래프가 점 $(3,\ -1)$을 지나므로

$-1=\frac{1}{4}(3-t)^2+t-3,\ -4=t^2-6t+9+4t-12$

$t^2-2t+1=0,\ (t-1)^2=0 \qquad \therefore t=1$ (중근)

따라서 이차함수의 식은

$y=\frac{1}{4}(x-1)^2-2=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}$이므로

$b=-\frac{1}{2},\ c=-\frac{7}{4}$

$\therefore\ a+b-c=\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{7}{4}\right)=\frac{3}{2}$

10 $y=-x^2+5x+k=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}+k$이므로

이 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{5}{2}$이고, $\overline{BC}=6$이므로 그래프의 축에서 두 점 B, C까지의 거리는 각각 3이다.

$\therefore\ B\left(-\frac{1}{2},\ 0\right),\ C\left(\frac{11}{2},\ 0\right)$

$y=-x^2+5x+k$의 그래프가 점 $B\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$을 지나므로

$0=-\frac{1}{4}-\frac{5}{2}+k \qquad \therefore k=\frac{11}{4}$

따라서 $A\left(\frac{5}{2},\ 9\right)$이므로 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times9=27$

11 ① $y=-2x^2+20x-5=-2(x-5)^2+45$

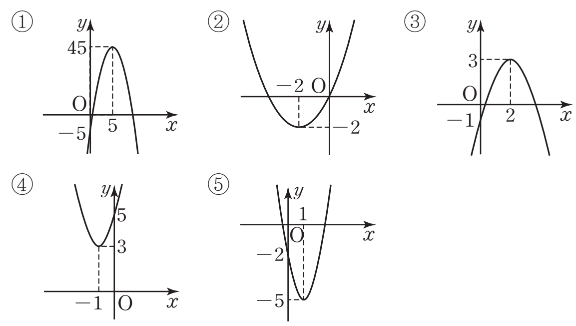
② $y=\frac{1}{2}x^2+2x=\frac{1}{2}(x+2)^2-2$

③ $y=-x^2+4x-1=-(x-2)^2+3$

④ $y=2x^2+4x+5=2(x+1)^2+3$

⑤ $y=3x^2-6x-2=3(x-1)^2-5$

위의 이차함수의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 모든 사분면을 지나는 것은 ⑤이다.

12 $y=2x^2-3x+4a=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}+4a$

이 그래프가 아래로 볼록하고 x축과 만나지 않으므로

(꼭짓점의 y좌표)$=-\frac{9}{8}+4a>0,\ 4a>\frac{9}{8} \qquad \therefore a>\frac{9}{32}$

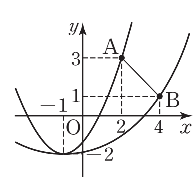
또 이 그래프가 점 $(a,\ a^2+6)$을 지나므로

$a^2+6=2a^2-3a+4a,\ a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0 \qquad \therefore a=2\ \left(\because a>\frac{9}{32}\right)$

13 $y=ax^2+2ax+a-2=a(x+1)^2-2$

이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -2)$로 일정하므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



점 A$(2,\ 3)$을 지날 때,

$3=a(2+1)^2-2 \qquad \therefore a=\frac{5}{9}$

점 B$(4,\ 1)$을 지날 때, $1=a(4+1)^2-2 \qquad \therefore a=\frac{3}{25}$

따라서 이 이차함수의 그래프가 $\overline{AB}$와 만나기 위한 a의 값의 범위는 $\frac{3}{25}\le a\le\frac{5}{9}$이다.

14 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로 $c=3$

즉, $y=ax^2+bx+3$의 그래프가 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$4a+2b+3=3 \qquad \therefore 2a+b=0 \qquad \cdots ㉠$

점 $(4,\ -5)$를 지나므로

$16a+4b+3=-5 \qquad \therefore 4a+b=-2 \qquad \cdots ㉡$

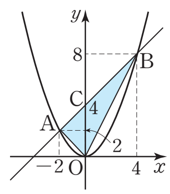
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

$\therefore \dfrac{ab}{c}=\dfrac{(-1)\times 2}{3}=-\dfrac{2}{3}$

15 $\dfrac{1}{2}x^2=x+4$에서 $x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$ $\quad\therefore \mathrm{A}(-2,\ 2)$, $\mathrm{B}(4,\ 8)$

직선 $y=x+4$와 y축과의 교점을 C라 하면 $\mathrm{C}(0,\ 4)$이므로

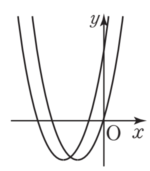


$\triangle\mathrm{AOB}=\triangle\mathrm{AOC}+\triangle\mathrm{COB}$

$=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2+\dfrac{1}{2}\times 4\times 4=12$

16 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

이고, 제4사분면을 제외한 모든 사분면을 지나는 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



아래로 볼록하므로 $a>0$

축이 y축의 왼쪽에 있으므로

$ab>0 \qquad \therefore b>0$

y축과의 교점이 원점이거나 x축보다 위쪽에 있으므로 $c\ge 0$

꼭짓점의 y좌표가 음수이어야 하므로

$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}<0$에서 $\dfrac{b^2-4ac}{4a}>0$

이때 $4a>0$이므로 부등식의 양변에 $4a$를 곱하면 $b^2-4ac>0$

17 $\overline{\mathrm{PQ}}=5$이므로 $\mathrm{P}(k,\ 0)$, $\mathrm{Q}(k+5,\ 0)$이라 하면 k, $k+5$는 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x좌표와 같으므로 이차방정식 $(x-3)^2=x+b$, 즉 $x^2-7x+9-b=0$의 두 근이다. 따라서

$x^2-7x+9-b=(x-k)(x-k-5)$

$=x^2-(2k+5)x+k(k+5)=0$

이므로 $2k+5=7$에서 $2k=2 \qquad \therefore k=1$

$9-b=k(k+5)$에서 $9-b=1\times(1+5) \qquad \therefore b=3$

18 이차함수의 그래프의 최댓값이 9이므로

(꼭짓점의 y좌표)$=q=9$

또 두 점 $(-3,\ 1)$, $(5,\ 1)$은 y좌표가 같으므로 직선 $x=p$에 대하여 대칭이다.

$\therefore p=\dfrac{-3+5}{2}=1$

따라서 $y=a(x-1)^2+9$의 그래프가 점 $(5,\ 1)$을 지나므로

$1=a(5-1)^2+9$, $16a=-8 \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore apq=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times 1\times 9=-\dfrac{9}{2}$

19 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2kx-4k+5$

$=-\dfrac{1}{2}(x^2-4kx+4k^2-4k^2)-4k+5$

$=-\dfrac{1}{2}(x-2k)^2+2k^2-4k+5$

$\therefore M=2k^2-4k+5=2(k-1)^2+3$

따라서 $k=1$일 때 M의 최솟값은 3이다.

20 $f(x)=ax^2+3$으로 놓으면 점 $\mathrm{Q}(3,\ 0)$을 지나므로

$0=9a+3 \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore f(x)=-\dfrac{1}{3}x^2+3$ ⋯ (i)

$g(x)=b(x-3)^2$으로 놓으면 점 $\mathrm{P}(0,\ 3)$을 지나므로

$3=b(0-3)^2 \qquad \therefore b=\dfrac{1}{3}$

$\therefore g(x)=\dfrac{1}{3}(x-3)^2$ ⋯ (ii)

두 점 A, B의 x좌표가 1이므로

$f(1)=-\dfrac{1}{3}\times 1^2+3=\dfrac{8}{3}$, $g(1)=\dfrac{1}{3}(1-3)^2=\dfrac{4}{3}$

따라서 $\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{8}{3}\right)$, $\mathrm{B}\left(1,\ \dfrac{4}{3}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{8}{3}-\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{3}$ ⋯ (iii)

채점 기준	배점
(i) $y=f(x)$의 식 구하기	40 %
(ii) $y=g(x)$의 식 구하기	40 %
(iii) $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이 구하기	20 %

21 $\overline{\mathrm{AP}}=x\,\mathrm{cm}$라 하면 $\overline{\mathrm{PB}}=(18-x)\mathrm{cm}$

두 도형의 넓이의 합을 $y\,\mathrm{cm}^2$라 하면

$y=x^2+\dfrac{1}{2}\times(18-x)^2=\dfrac{3}{2}x^2-18x+162$

$=\dfrac{3}{2}(x-6)^2+108$ (단, $0<x<18$)

따라서 $x=\overline{\mathrm{AP}}=6\,\mathrm{cm}$일 때 두 도형의 넓이의 합이 최소가 된다.

22 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(k,\ -3k+18)$이라 하면

$\square\mathrm{ROQP}=k\times(-3k+18)=-3k^2+18k$

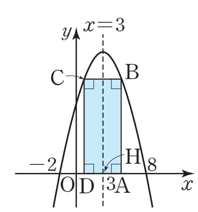
$=-3(k-3)^2+27$ (단, $0<k<6$)

따라서 $k=3$일 때 $\square\mathrm{ROQP}$의 넓이가 최대가 되고 이때 점 P의 좌표는 $(3,\ 9)$이다.

23 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3x+8=-\dfrac{1}{2}(x-3)^2+\dfrac{25}{2}$

두 점 A, B의 좌표를 각각

$\mathrm{A}(k,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(k,\ -\dfrac{1}{2}k^2+3k+8\right)$



이라 하고, 축의 방정식이 $x=3$이므로 축과 x축이 만나는 점을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2(k-3)=2k-6$

또 $\overline{\mathrm{AB}}=-\dfrac{1}{2}k^2+3k+8$이므로

($\square$ABCD의 둘레의 길이)

$=2(\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{AB}})=2\left(2k-6-\dfrac{1}{2}k^2+3k+8\right)$

$=-k^2+10k+4$ ⋯ (i)

$=-(k-5)^2+29$ (단, $3<k<8$) ⋯ (ii)

따라서 $k=5$일 때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는 29로 최대가 된다. ⋯ (iii)

채점 기준	배점
(i) $\square$ABCD의 둘레의 길이를 이차함수의 식으로 나타내기	40 %
(ii) (i)의 식을 $a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타내기	30 %
(iii) $\square$ABCD의 둘레의 길이의 최댓값 구하기	30 %