정답과 해설

I 통계

1 자료의 정리

STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.10~16

1-1 ③, ⑤	**1-2** 6명	**1-3** 7	**1-4** 52%
2-1 6개	**2-2** $A=12$, $B=16$	**2-3** ②, ③	**2-4** 9명
3-1 ⑤	**3-2** 37.5%	**3-3** 3	
4-1 12	**4-2** 50회	**4-3** 28명	
5-1 73.6점	**5-2** 162.5cm	**5-3** 18℃	**5-4** ④
5-5 5	**5-6** 91점	**6-1** $A=2$, $B=4$	**6-2** 77.6분
6-3 25.75개		**6-4** 27, 13	
7-1 ㄴ	**7-2** 10%	**7-3** ㄹ, ㄱ	**8-1** 12명
8-2 $\frac{5a+4b}{9}$		**8-3** 75명	**9-1** 14.8회
9-2 5명	**10-1** 150	**10-2** 10	

1-1 주어진 자료를 줄기와 잎 그림으로 나타내면 다음과 같다.

수학 성적 (6|2는 62점)

줄기	잎
6	0 2 5 8
7	0 2 2 4 7
8	1 2 3 3 5 8 9
9	0 0 1 4

③ 잎이 가장 많은 줄기는 잎의 개수가 7개인 8이다.
⑤ 전체 학생 수가 20명이고, 70점 미만인 학생 수가 4명이므로 전체의 $\frac{4}{20}\times100=20(\%)$이다.

1-2 줄기가 4인 학생 수가 5명이므로
(전체 학생 수) : $5=6:1$, (전체 학생 수)$=5\times6=30$(명)
독서 시간이 적은 쪽에서 20%에 속하는 학생 수를 x명이라 하면
$\frac{x}{30}\times100=20$, $100x=600$ $\therefore x=6$
따라서 구하는 학생 수는 6명이다.

1-3 대회 참가자의 평균 나이가 34세이므로
$\frac{678+(40+x)+(50+x)}{23}=34$에서
$768+2x=782$, $2x=14$ $\therefore x=7$

1-4 보라네 반 전체 학생 수는 25명이므로
(평균)$=\frac{750}{25}=30(\text{m})$
따라서 30m보다 멀리 던진 학생 수는 13명이므로 전체의 $\frac{13}{25}\times100=52(\%)$이다.

2-1 도수분포표의 계급은 12kg 이상 15kg 미만, 15kg 이상 18kg 미만, 18kg 이상 21kg 미만, 21kg 이상 24kg 미만, 24kg 이상 27kg 미만, 27kg 이상 30kg 미만의 6개이다.

2-2 도수분포표 ㈎에서 성적이 40점 이상 50점 미만, 50점 이상 60점 미만, 60점 이상 70점 미만인 도수의 합과 ㈏에서 성적이 40점 이상 55점 미만, 55점 이상 70점 미만인 도수의 합이 같아야 하므로
$3+6+7=4+A$ $\therefore A=12$
또 ㈎에서 성적이 70점 이상 80점 미만, 80점 이상 90점 미만, 90점 이상 100점 미만인 도수의 합과 ㈏에서 성적이 70점 이상 85점 미만, 85점 이상 100점 미만인 도수의 합이 같아야 하므로
$10+11+3=B+8$ $\therefore B=16$

2-3 $155.5-\frac{13}{2}\le x<155.5+\frac{13}{2}$이므로 $149\le x<162$
따라서 변량 x의 값으로 옳은 것은 ②, ③이다.

2-4 점수가 80점 이상인 학생이 전체의 16%이므로 학생 수는
$50\times\frac{16}{100}=8$(명)
따라서 점수가 80점 미만인 학생 수는 $50-8=42$(명)이므로 50점 이상 60점 미만인 학생 수는
$42-(4+13+16)=9$(명)이다.

3-1 ① (전체 학생 수)$=6+10+12+8+8+4+2=50$(명)
② 운동 시간이 4번째로 많은 학생은 30분 이상 35분 미만인 계급에 속하므로 계급값은 $\frac{30+35}{2}=32.5$(분)이다.
③ 운동 시간이 15분 미만인 학생 수는 $6+10=16$(명)이므로 전체의 $\frac{16}{50}\times100=32(\%)$이다.
④ 계급값이 12.5분인 계급의 도수는 10명, 27.5분인 계급의 도수는 8명이므로 직사각형의 넓이의 비는 $10:8=5:4$이다.
⑤ 운동 시간이 많은 쪽에서 12%에 속하는 학생 수는 $50\times\frac{12}{100}=6$(명)이고, 운동 시간이 6번째로 많은 학생은 30분 이상 35분 미만인 계급에 속하므로 은서는 하루에 최소 30분 이상 운동을 하였다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

3-2 통학 시간이 30분 이상인 학생이 전체의 25%이므로
$32\times\frac{25}{100}=8$(명)
즉, 통학 시간이 30분 미만인 학생 수는 $32-8=24$(명)이므로 20분 이상 30분 미만인 학생 수는
$24-(5+7)=12$(명)이다.
따라서 통학 시간이 20분 이상 30분 미만인 학생은 전체의 $\frac{12}{32}\times100=37.5(\%)$이다.

3-3 a는 b의 2.5배이므로 $a=2.5b$이고, 황사 발생일 수가 9일 미만인 해가 전체의 70 %이므로

$6+2.5b+3=0.7(6+2.5b+3+1+b+2+1)$

$2.5b+9=0.7(3.5b+13)$, $2.5b+9=2.45b+9.1$

$0.05b=0.1 \quad \therefore b=2$

따라서 $a=2.5\times2=5$이므로 $a-b=5-2=3$

4-1 도수분포다각형과 가로축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 히스토그램에서 각 직사각형의 넓이의 합과 같으므로

$10\times(1+3+a+5+2)=230$, $10(a+11)=230$

$a+11=23 \quad \therefore a=12$

4-2 (전체 학생 수)$=3+8+10+6+1=28$(명)이므로

기록이 좋은 쪽에서 25 %에 속하는 학생 수는

$28\times\frac{25}{100}=7$(명)이다.

따라서 줄넘기 기록이 50회 이상인 학생 수가

$6+1=7$(명)이므로 형준이의 기록은 최소 50회 이상이다.

4-3 인터넷 사용 시간이 30분 이상 40분 미만인 학생 수를 x명이라 하면

(40분 미만인 학생 수)$=2+5+x=7+x$(명),

(40분 이상인 학생 수)$=6+5+1=12$(명)이므로

$(7+x):12=4:3$, $3(7+x)=48$

$21+3x=48 \quad \therefore x=9$

따라서 전체 학생 수는 $2+5+9+6+5+1=28$(명)이다.

5-1 (A반 학생들의 수학 성적의 총점)$=28\times72=2016$(점)

(B반 학생들의 수학 성적의 총점)$=32\times75=2400$(점)

$\therefore$ (전체 학생에 대한 수학 성적의 평균)

$=\frac{2016+2400}{28+32}=\frac{4416}{60}=73.6$(점)

5-2 (처음 키의 총합)$=38\times162=6156$(cm)

(나중 키의 총합)$=6156-148+167=6175$(cm)

$\therefore$ (평균)$=\frac{6175}{38}=162.5$(cm)

5-3 흐린 날의 수를 a일이라 하면 맑은 날의 수는 $1.5a$일이므로 6월의 맑은 날과 흐린 날의 수의 합은

$a+1.5a=2.5a$(일)이다.

따라서 6월의 맑은 날과 흐린 날 전체의 평균 기온은

$\frac{1.5a\times20+a\times15}{2.5a}=\frac{45a}{2.5a}=18$(℃)

5-4 남학생과 여학생의 수를 각각 a명, b명이라 하면

	학생 수(명)	평균(kg)	총합(kg)
남학생	a	60	$60a$
여학생	b	50	$50b$
전체 학생	$a+b$	56	$56(a+b)$

즉, $60a+50b=56(a+b)$이므로

$60a+50b=56a+56b$, $2a=3b$

$\therefore a:b=3:2$

따라서 남학생과 여학생 수의 비는 3 : 2이다.

5-5 (주현이의 성적)$=90-10=80$(점)

(숙영이의 성적)$=90+5=95$(점)

(희정이의 성적)$=90-15=75$(점)

따라서 평균은 $\frac{90+80+95+75}{4}=\frac{340}{4}=85$(점)이므로

$90-a=85 \quad \therefore a=5$

[다른 풀이] 가평균을 이용하여 평균 구하기

90점을 가평균으로 하였으므로

(평균)$=90+\frac{0+(-10)+5+(-15)}{4}$

$=90-5$

$\therefore a=5$

5-6 중간고사 성적의 가평균을 x점이라 하면

$x+\frac{(a_1-x)+(a_2-x)+(a_3-x)+\cdots+(a_{12}-x)}{12}=88.5$

$x+\frac{-30}{12}=88.5 \quad \therefore x=91$

따라서 가평균은 91점이다.

6-1 전체 학생 수가 20명이므로

$A+3+6+5+B=20$에서

$A+B=6 \quad \therefore B=6-A$

이때 시험 점수의 평균이 5.6점이므로

$\frac{1\times A+3\times3+5\times6+7\times5+9\times(6-A)}{20}=5.6$

$128-8A=112$, $8A=16$

$\therefore A=2$, $B=6-2=4$

6-2 걸린 시간이 90분 이상 100분 미만인 사람 수를 x명이라 하면

$\frac{13+x}{50}\times100=42$, $2x=16 \quad \therefore x=8$

이때 걸린 시간이 70분 이상 80분 미만인 사람 수는

$50-(3+10+13+8)=16$(명)이므로

(평균)$=\frac{55\times3+65\times10+75\times16+85\times13+95\times8}{50}$

$=\frac{3880}{50}=77.6$(분)

6-3 (전체 학생 수)$=2+7+15+9+7=40$(명)이므로

스티커를 많이 받은 쪽에서 40 %에 속하는 학생 수는

$40\times\frac{40}{100}=16$(명)이다.

스티커가 22개 이상 26개 미만인 학생 수가 9명,

26개 이상 30개 미만인 학생 수가 7명으로 모두

$9+7=16$(명)이므로 스티커를 많이 받은 쪽에서 40 %에 속하는 학생들의 스티커의 개수의 평균은

$\frac{24\times9+28\times7}{16}=\frac{412}{16}=25.75$(개)

6-4 (전체 학생 수)$=4+9+13+7+5+2=40$(명)이므로

(평균)$=\frac{45\times4+55\times9+65\times13+75\times7+85\times5+95\times2}{40}$

$=\frac{2660}{40}=66.5$(분)

이때 독서 시간이 60분 이상 70분 미만인 학생들이 모두 66.5분보다 많으면 a는 최댓값을 갖고, b는 최솟값을 갖는다.
따라서 a의 최댓값은 $13+7+5+2=27$이고, b의 최솟값은 $4+9=13$이다.

7-1 ㄱ. (남학생 수)$=1+3+7+10+3+2=26$(명)
(여학생 수)$=1+2+5+9+7+3=27$(명)
ㄴ. 그래프가 왼쪽으로 치우쳐 있을수록 달리기 기록은 좋으므로 기록이 좋은 학생은 남학생이 여학생보다 더 많다.
ㄷ. 도수분포다각형과 가로축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 (계급의 크기)$\times$(도수의 총합)이므로
남학생 : $1\times26=26$, 여학생 : $1\times27=27$
ㄹ. 기록이 14초 이상 17초 미만인 학생 수는
(남학생 수)$=7+10+3=20$(명),
(여학생 수)$=2+5+9=16$(명)
이므로 남학생이 여학생보다 더 많다.
따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

7-2 (A반 학생 수)$=1+6+10+14+7+2=40$(명)
(B반 학생 수)$=3+4+8+12+2+1=30$(명)
A반에서 성적이 9번째로 좋은 학생의 점수는 80점 이상이다.
따라서 B반에서 성적이 80점 이상인 학생 수는 $2+1=3$(명)이므로 A반에서 성적이 80점 이상인 학생의 점수는 B반에서는 성적이 좋은 쪽에서 최소 $\frac{3}{30}\times100=10(\%)$에 속한다.

7-3 시험에서 어려운 문제가 많이 출제된 경우 시험 점수가 낮은 학생들이 많이 나오므로 곡선은 위로 볼록한 부분이 왼쪽으로 치우친 ㄹ과 같은 모양이 된다.
또 시험에서 쉬운 문제가 많이 출제된 경우 시험 점수가 높은 학생들이 많이 나오므로 곡선은 위로 볼록한 부분이 오른쪽으로 치우친 ㄱ과 같은 모양이 된다.

8-1 (전체 학생 수)$=\frac{4}{0.1}=40$(명)
키가 160cm 이상인 학생이 전체의 60%이므로 155cm 이상 160cm 미만인 계급의 상대도수는
$1-(0.1+0.6)=0.3$
따라서 키가 155cm 이상 160cm 미만인 학생 수는
$40\times0.3=12$(명)이다.

8-2 A반에서 앉은키가 75cm 이상인 학생 수는
$30\times a=30a$(명)
B반에서 앉은키가 75cm 이상인 학생 수는
$24\times b=24b$(명)
따라서 A, B 두 반 전체 학생 54명에 대한 상대도수를 a, b를 사용하여 나타내면
$\frac{30a+24b}{54}=\frac{5a+4b}{9}$

8-3 영화반 학생 수를 a명, 방송반 학생 수를 b명이라 하면 $a=\frac{3}{2}b$이므로 각 계급의 도수를 b로 나타내면

영어 성적(점)	학생 수(명)	
	영화반	방송반
50이상 ~ 60미만	$0.18b$	$0.14b$
60 ~ 70	$0.3b$	$0.16b$
70 ~ 80	$0.48b$	$0.5b$
80 ~ 90	$0.36b$	$0.12b$
90 ~ 100	$0.18b$	$0.08b$
합계	$\frac{3}{2}b$	b

영화반에서 성적이 80점 이상인 학생 수는
$0.36b+0.18b=0.54b$(명)
방송반에서 성적이 80점 이상인 학생 수는
$0.12b+0.08b=0.2b$(명)
영화반과 방송반에서 성적이 80점 이상인 학생은 모두 37명이므로
$0.54b+0.2b=37$, $0.74b=37$ $\quad\therefore b=50$
따라서 영화반 학생 수는 $\frac{3}{2}b=\frac{3}{2}\times50=75$(명)이다.

9-1

줄넘기 횟수(회)	계급값(회)	상대도수	학생 수(명)
4이상 ~ 8미만	6	0.05	1
8 ~ 12	10	0.2	4
12 ~ 16	14	0.35	7
16 ~ 20	18	0.3	6
20 ~ 24	22	0.1	2
합계		1	20

$\therefore$ (평균)$=\frac{6\times1+10\times4+14\times7+18\times6+22\times2}{20}$
$=\frac{296}{20}=14.8$(회)

[다른 풀이] 상대도수를 이용하여 평균 구하기
(평균)$=\frac{\{(\text{계급값})\times(\text{도수})\text{의 총합}\}}{(\text{도수의 총합})}$
$=\left\{(\text{계급값})\times\frac{(\text{도수})}{(\text{도수의 총합})}\text{의 총합}\right\}$
$=\{(\text{계급값})\times(\text{각 계급의 상대도수})\text{의 총합}\}$
$=6\times0.05+10\times0.2+14\times0.35+18\times0.3+22\times0.1$
$=14.8$(회)

9-2 (받은 이메일의 개수가 50개 미만인 학생 수)
$=(0.04+0.16+0.3)\times50=25$(명)
받은 이메일의 개수가 70개 이상 80개 미만인 학생 수를 a명이라 하면
$6a+1=25$ $\quad\therefore a=4$
따라서 받은 이메일의 개수가 60개 이상인 학생이 9명이므로 계급값이 65개인 계급에 속하는 학생 수는 $9-4=5$(명)이다.

10-1 A 중학교에서 상위 30%에 속하려면
$0.04+0.1+0.16=0.3$이므로 최소 70점 이상을 받아야 한다.
B 중학교에서 상위 30%에 속하려면
$0.08+0.22=0.3$이므로 최소 80점 이상을 받아야 한다.
따라서 $x+y$의 값은 $x+y=70+80=150$이다.

10-2

영어 성적(점)	A학교의 학생 수(명)	B학교의 학생 수(명)	학생 수의 차(명)	상대도수의 차
40이상 ~ 50미만	44	60	16	0.01
50 ~ 60	52	75	23	0.02
60 ~ 70	80	100	20	0
70 ~ 80	120	110	10	0.08
80 ~ 90	60	100	40	0.05
90 ~ 100	44	55	11	0
합계	400	500		

따라서 실제 학생 수의 차가 가장 큰 계급은 80점 이상 90점 미만이므로 $a=85$이고, 상대도수의 차가 가장 큰 계급은 70점 이상 80점 미만이므로 $b=75$이다.

$\therefore a-b=85-75=10$

STEP 2 실전 문제 정복하기 P.17~22

01 50분 **02** ㄴ, ㄹ, ㅁ **03** 29권 **04** 13, 8
05 12명 **06** 18 **07** 3 : 2 **08** 82.2점
09 20 **10** 150 **11** 151 cm
12 60점, 65점, 93점 **13** -12, 12
14 $A=1$, $B=2$ **15** ② **16** $A=15$, $B=5$
17 6명 **18** ③, ④ **19** ④ **20** 5 : 8 **21** 28명
22 7시간 **23** ㄴ, ㄷ **24** A : 60 %, B : 58 %, A 지역
25 $A=0.52$, $B=0.16$ **26** 9명 **27** 32 %
28 100명

01 규윤이가 오후에 접속한 시간은 반에서 중간에 위치하므로 줄기가 4이고 잎이 2인 42분이다.
따라서 규윤이가 학교 홈페이지에 오전에 접속한 시간은 8분이므로 하루 동안의 접속 시간은 $42+8=50$(분)이다.

02 ㄴ, ㄹ은 자료의 개수가 많고, ㅁ은 자료의 범위가 크므로 줄기와 잎 그림으로 정리하기에 적절하지 않다.

03 (남학생의 평균 책의 수)$=\frac{546}{14}=39$(권),
(여학생의 평균 책의 수)$=39-2=37$(권)이므로
은미가 가지고 있는 책의 수를 x권이라 하면
$\frac{452+x}{13}=37$, $452+x=481$ $\therefore x=29$
따라서 은미가 가지고 있는 책의 수는 29권이다.

04 $4+x+15+y+3=40$에서 $x+y=18$ …… ㉠
기록이 10회 이하인 학생이 전체의 30 %이므로
$4+x\ge 40\times\frac{30}{100}$, $4+x\ge 12$ $\therefore x\ge 8$ …… ㉡
기록이 25회 이상인 학생이 전체의 20 %이므로
$y+3\ge 40\times\frac{20}{100}$, $y+3\ge 8$ $\therefore y\ge 5$ …… ㉢
이때 ㉠, ㉡, ㉢을 모두 만족하는 자연수 x, y의 값을 순서쌍으로 나타내면
$(x, y)=(8, 10), (9, 9), (10, 8), (11, 7), (12, 6), (13, 5)$
따라서 x의 값 중 가장 큰 값은 13이고, 가장 작은 값은 8이다.

05 키가 145cm 이상 150cm 미만인 학생 수를 a명, 155cm 이상 160cm 미만인 학생 수를 b명이라 하면
$3+9+a+12+b+2=40$이므로 $a+b=14$
이때 a, b의 최소공배수가 12이므로 a와 b는 12의 약수이고, 이 중 $a>b$, $a+b=14$를 만족하는 a, b의 값은 $a=12$, $b=2$이다.
따라서 키가 145cm 이상 150cm 미만인 학생 수는 12명이다.

06 도수의 총합은
$3+10+12+14+28+30+34+9=140$(명)이고
계급의 크기는 10분이므로
(직사각형의 전체 넓이)$=$(도수의 총합)$\times 10=1400$
이때 7시 20분 이상 7시 40분 미만인 직사각형의 넓이의 합은 $(34+9)\times 10=430$이므로
A 이상 7시 20분 미만인 직사각형의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 1400-430=270$
A 이상 7시 20분 미만의 간격을 x분이라 하면
$30x=270$ $\therefore x=9$
따라서 A가 나타내는 시각은
(7시 20분)$-$(9분)$=$(7시 11분)이므로
$a=7$, $b=11$ $\therefore a+b=7+11=18$

07 도수분포다각형에서 각 점의 좌표는 (계급값, 도수)이므로
$S_1=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{7-4}{2}=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{3}{2}=\frac{15}{4}$
$S_2=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{10-8}{2}=\frac{1}{2}\times 5\times 1=\frac{5}{2}$
$\therefore S_1 : S_2=\frac{15}{4} : \frac{5}{2}=3 : 2$

08 (지원자 120명의 총점)$=64\times 120=7680$(점)
(불합격자 70명의 총점)$=51\times 70=3570$(점)
따라서 합격자 50명의 총점은
$7680-3570=4110$(점)이므로
(합격자의 평균)$=\frac{4110}{50}=82.2$(점)

09 직사각형의 가로의 길이가 a, b, c, d이므로 세로의 길이는 각각 $10-a$, $10-b$, $10-c$, $10-d$이다.
따라서 각 직사각형의 넓이는 $a(10-a)$, $b(10-b)$, $c(10-c)$, $d(10-d)$이므로 구하는 평균은
$$\frac{a(10-a)+b(10-b)+c(10-c)+d(10-d)}{4}$$
$$=\frac{10(a+b+c+d)-(a^2+b^2+c^2+d^2)}{4}$$
$$=10\times\frac{a+b+c+d}{4}-\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$$
$$=10\times 7-50=20$$

10 $\dfrac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{100}}{100}=1$이므로

$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{100}=100$

$\dfrac{(ax_1+b)+(ax_2+b)+(ax_3+b)+\cdots+(ax_{100}+b)}{100}$

$=150$

$\dfrac{a(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{100})+100b}{100}=150$

$\dfrac{100a+100b}{100}=150$

$\therefore\ a+b=150$

11 1학년과 2학년의 남학생 전체 학생 수를 각각 a명, b명이라 하고, 여학생 전체 학생 수를 각각 x명, y명이라 하자.
남학생 전체의 키의 평균이 158 cm이므로

$\dfrac{157a+160b}{a+b}=158,\ 157a+160b=158a+158b$

$\therefore\ a=2b$ …… ㉠

또 1학년 학생 전체의 키의 평균이 154 cm이므로

$\dfrac{157a+150x}{a+x}=154,\ 157a+150x=154a+154x$

$\therefore\ 3a=4x$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $x=\dfrac{3b}{2}$ …… ㉢

2학년 학생 전체의 키의 평균이 158 cm이므로

$\dfrac{160b+154y}{b+y}=158,\ 160b+154y=158b+158y$

$\therefore\ y=\dfrac{b}{2}$ …… ㉣

따라서 여학생 전체의 키의 평균은 $\dfrac{150x+154y}{x+y}$ cm이므로
이 식에 ㉢과 ㉣을 각각 대입하면

$$\dfrac{150\times\dfrac{3b}{2}+154\times\dfrac{b}{2}}{\dfrac{3b}{2}+\dfrac{b}{2}}=\dfrac{225b+77b}{2b}$$

$$=\dfrac{302}{2}=151\ (\mathrm{cm})$$

12 5명의 학생 A, B, C, D, E의 중간고사 과학 성적을 각각 a점, b점, c점, d점, e점이라 하면

$\dfrac{a+b+c+d+e}{5}=62$

$\therefore\ a+b+c+d+e=310$

(경우 1) $a+(b-10)+c+d+e=a+b+c+d+e-10$
$=310-10=300$

$\therefore$ (평균)$=\dfrac{300}{5}=60$(점)

(경우 2) $(a+3)+(b+3)+(c+3)+(d+3)+(e+3)$
$=a+b+c+d+e+15=310+15=325$

$\therefore$ (평균)$=\dfrac{325}{5}=65$(점)

(경우 3) $1.5a+1.5b+1.5c+1.5d+1.5e$
$=1.5(a+b+c+d+e)=1.5\times310=465$

$\therefore$ (평균)$=\dfrac{465}{5}=93$(점)

13 4명의 학생들의 수학 성적의 가평균과 평균을 각각 x점, y점이라 하면

$y=x+\dfrac{a+b+c+d}{4},\ y-x=\dfrac{a+b+c+d}{4}$

이때 4명의 학생들의 수학 성적의 평균과 가평균의 차가 3점이므로

$|y-x|=\left|\dfrac{a+b+c+d}{4}\right|$

$\left|\dfrac{a+b+c+d}{4}\right|=3,\ |a+b+c+d|=12$

$\therefore\ a+b+c+d=-12$ 또는 $a+b+c+d=12$

14 도수분포표에서 각 계급에 속하는 변량은 다음과 같다.

점수(점)	변량	학생 수(명)
10이상 ~ 12미만	11	A
12 ~ 14	13, x	2
14 ~ 16	14, 15, 15	3
16 ~ 18	16, 17	B
18 ~ 20	19, y	2
합계		10

이때 $x<y$이므로 변량 x는 12점 이상 14점 미만인 계급에 속하고, 변량 y는 18점 이상 20점 미만인 계급에 속한다.
$\therefore\ A=1,\ B=2$

15 실제 평균이 15점이므로

$\dfrac{19+16+x+11+14+15+15+y+13+17}{10}=15$

$x+y+120=150$ $\quad\therefore\ x+y=30$

이때 한 문제당 점수는 1점이고, 변량 x는 12점 이상 14점 미만인 계급에 속하고, 변량 y는 18점 이상 20점 미만인 계급에 속하므로
(i) $x=12$이면 $y=18$(성립)
(ii) $x=13$이면 $y=17$(성립하지 않는다.)
따라서 $x=12,\ y=18$이므로 $y-x=6$이다.

16 전체 학생 수가 32명이므로
$3+5+A+B+4=32$ $\quad\therefore\ A+B=20$
10번째로 운동을 많이 한 학생이 속하는 계급은 60분 이상 90분 미만이므로
$B+4\le9$ $\quad\therefore\ B\le5$
$\therefore\ 15\le A\le20$
이때 평균 운동 시간은 60분 이상 120분 미만인 계급의 운동 시간의 총합인 $75\times A+105\times B$의 값이 클수록 많다.
따라서 B의 값이 최대일 때, 즉 $A=15,\ B=5$일 때, 평균 운동 시간이 가장 많다.

17 (i) $2+3+a+b+7+3=50$, 즉 $b=35-a$이므로
전체 학생들의 평균은

$\dfrac{45\times2+55\times3+65\times a+75\times(35-a)+85\times7+95\times3}{50}$

$=\dfrac{90+165+65a+2625-75a+595+285}{50}$

$=\dfrac{3760-10a}{50}=\dfrac{376-a}{5}$(점)

(ⅱ) 상위 20%에 해당하는 학생 수는 $50\times\frac{20}{100}=10$(명)

즉, 80점 이상인 학생이 10명이므로 상위 20%에 해당하는 학생들의 평균은

$\frac{85\times7+95\times3}{10}=\frac{595+285}{10}=88$(점)

(ⅲ) 하위 10%에 해당하는 학생 수는 $50\times\frac{10}{100}=5$(명)

즉, 60점 미만인 학생이 5명이므로 하위 10%에 해당하는 학생들의 평균은

$\frac{45\times2+55\times3}{5}=\frac{90+165}{5}=51$(점)

즉 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$\frac{376-a}{5}=2\times(88-51)$이므로

$376-a=370\qquad\therefore a=6$

따라서 계급값이 65점인 계급의 도수는 6명이다.

18 ① (A반 학생 수)$=4+9+12+10+5=40$(명)
(B반 학생 수)$=5+10+14+9+2=40$(명)

② B반의 도수분포다각형이 A반의 도수분포다각형보다 오른쪽으로 치우쳐 있으므로 용돈을 많이 쓴 학생은 B반 학생이 A반 학생보다 더 많다.

③ A반과 B반 모두 계급의 크기와 계급의 개수가 같고, 도수의 총합은 40명으로 같으므로 도수분포다각형과 가로축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 같다. 즉, 두 도수분포다각형의 공통 부분과 가로축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_0라 하면 $S_1+S_0=S_0+S_2$이므로 $S_1=S_2$이다.

④ 용돈을 3000원 미만으로 쓴 학생은 $4+9+5=18$(명)이므로 전체의 $\frac{18}{80}\times100=22.5$(%)이다.

⑤ 용돈을 1000원 이상 2000원 미만으로 쓴 학생은 A반에서만 4명이므로 가장 적게 쓴 학생 3명은 모두 A반이다.

따라서 옳지 않은 것은 ③, ④이다.

19 (학생 A의 평균)

$=\frac{3\times3+4\times1+5\times2+6\times2+7\times1+8\times1}{10}=5$(점)

(학생 B의 평균)

$=\frac{3\times1+4\times2+5\times4+6\times2+7\times1}{10}=5$(점)

따라서 A, B 두 학생의 평균이 같으므로 실력은 비슷하지만 학생 B의 성적이 평균 주위에 더 밀집해 있으므로 학생 B의 성적이 A의 성적보다 더 고른 편이다.

20 $b:d=1:2$이므로

$b=k,\ d=2k$(단, $k>0$),

$e:f=5:4$이므로

$e=5l,\ f=4l$(단, $l>0$)로 놓으면

(계급의 도수)=(도수의 총합)×(상대도수)이므로

$a:c=be:df=5kl:8kl=5:8$

21 4시간 이상 6시간 미만인 계급의 상대도수를 a, 6시간 이상 8시간 미만인 계급의 상대도수를 b라 하면

$a+b=3a\qquad\therefore b=2a$

상대도수의 합은 1이므로

$0.1+a+2a+0.2+0.1=1,\ 3a=0.6$

$\therefore a=0.2,\ b=0.4$

따라서 TV 시청 시간이 6시간 이상인 학생 수는

$40\times(0.4+0.2+0.1)=28$(명)

22 (평균)={(계급값)×(각 계급의 상대도수)의 총합}

$=3\times0.1+5\times0.2+7\times0.4+9\times0.2+11\times0.1$

$=7$(시간)

23 ㄱ. (가)동에 사는 2학년 학생의 비율은 $\frac{10}{y}$이고, 3학년 학생의 비율은 $\frac{20}{z}$이다.

그런데 y, z의 값을 알지 못하므로 상대적으로 3학년 학생이 더 많이 산다고 할 수 없다.

ㄴ. (나)동에 사는 3학년 학생의 비율은 $\frac{8}{z}$이고, 전교생의 비율은 $\frac{8+8+8}{x+y+z}$이므로

$\frac{8}{z}=\frac{24}{x+y+z},\ x+y+z=3z$

$x+y=2z\qquad\therefore z=\frac{x+y}{2}$

ㄷ. (다)동에 사는 1학년 학생의 비율은 $\frac{a}{x}$이고, 전교생의 비율은 $\frac{a+b+c}{x+y+z}$이므로

$\frac{a}{x}=\frac{a+b+c}{x+y+z},\ a(x+y+z)=x(a+b+c)$

$a(y+z)=x(b+c)$

$\therefore a:(b+c)=x:(y+z)$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

24 전체 설문 대상 인원이 다르므로 상대도수의 분포표로 나타내면 다음과 같다.

연령별	상대도수	찬성율(%)
20~30대	0.5	80
40~50대	0.3	50
60대 이상	0.2	25
합계	1	

〈표 1〉

연령별	상대도수	찬성율(%)
20~30대	0.3	80
40~50대	0.3	60
60대 이상	0.4	40
합계	1	

〈표 2〉

A 지역의 평균 찬성률은

$0.5\times80+0.3\times50+0.2\times25=60$(%)

B 지역의 평균 찬성률은

$0.3\times80+0.3\times60+0.4\times40=58$(%)

따라서 인간 복제 연구는 A 지역 사람들이 B 지역 사람들보다 더 많이 찬성한다.

25

과학 성적(점)	지난 학기 도수(명)	이번 학기 상대도수	이번 학기 도수(명)
40이상 ~ 50미만	3	0.04	1
50 ~ 60	4	0.2	5
60 ~ 70	12	A	
70 ~ 80	1	0	0
80 ~ 90	3	B	
90 ~ 100	2	0.08	2
합계	25		25

위의 표에서 성적이 40점 이상 50점 미만인 학생들 중 2명이 한 계급 올라갔고, 50점 이상 60점 미만인 학생들 중 1명이 한 계급 올라갔으므로 이번 학기에 60점 이상 70점 미만인 학생 수는 $12+1=13$(명)이다.

$\therefore\ A=\dfrac{13}{25}=0.52$

또 70점 이상 80점 미만인 학생들 중 1명이 한 계급 올라갔으므로 이번 학기에 80점 이상 90점 미만인 학생 수는 $3+1=4$(명)이다.

$\therefore\ B=\dfrac{4}{25}=0.16$

26 가장 늦은 시간대인 8시 30분 이상 8시 40분 미만인 계급의 상대도수가 0.04이므로

(전체 학생 수)$=\dfrac{60}{0.04}=1500$(명)

또 가장 많은 학생들이 등교하는 시간대는 8시 10분 이상 8시 20분 미만이고, 이 계급의 상대도수는 0.3이므로 이 시간대에 등교하는 학생 수는 $1500\times0.3=450$(명)이다.

이때 한 사람이 10분 동안 나누어 줄 수 있는 홍보지 수는 $5\times10=50$(장)이므로 450명에게 홍보지를 나누어 주려면 최소 $\dfrac{450}{50}=9$(명)이 필요하다.

27 상대도수의 합은 1이므로

$0.02+0.18+0.3+x+y+0.02=1$에서

$x+y=0.48$

이 식의 양변에 25를 곱하면

$25x+25y=12$

이때 $25x$, $25y$가 모두 4의 배수이므로

$25x=8$, $25y=4$($\because\ x>y$)

$\therefore\ x=0.32,\ y=0.16$

따라서 70점 이상 80점 미만인 학생은 전체의

$0.32\times100=32$ (%)이다.

28 전체 남학생과 전체 여학생 수를 각각 x명, y명이라 하면 계급값이 152.5 cm인 계급의 남학생 수와 여학생 수가 같으므로

$0.24x=0.36y$, $2x=3y$

$\therefore\ x:y=3:2$

이때 $x=3k$, $y=2k(k>0)$로 놓으면

$3\times2\times k=300$이므로 $k=50$

따라서 전체 여학생 수는 $2\times50=100$(명)이다.

STEP 3 최고 수준 완성하기

P.23~24

01 87000원　**02** 12400원　**03** ㄱ, ㄹ

04 풀이 참조　**05** 갑

01 오전에 입장한 사람은 7세 이하가 1명, 7세 초과 12세 이하가 2명, 12세 초과 65세 이하가 15명, 65세 초과가 2명이므로 (어린이의 요금)$=x$원이라 하면

(어른의 요금)$=2x$원이므로

$x\times2+2x\times15=96000$, $32x=96000$, $x=3000$

따라서 어린이 요금은 3000원, 어른 요금은 6000원이다.

이때 오후에 입장한 사람은 7세 이하가 2명, 7세 초과 12세 이하가 3명, 12세 초과 65세 이하가 13명, 65세 초과가 2명이므로

(오후에 입장한 사람들의 입장료의 합)

$=3000\times3+6000\times13=87000$(원)

02 x_2원까지의 평균 가격은 9000원

x_3원까지의 평균 가격은 $9000+200\times1=9200$(원)

x_4원까지의 평균 가격은 $9000+200\times2=9400$(원)

$\vdots$

x_{10}원까지의 평균 가격은 $9000+200\times8=10600$(원)

$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{10}=10600$, $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=106000$

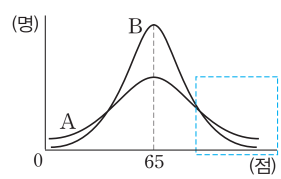
$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_9}{9}=10400$, $x_1+x_2+\cdots+x_9=93600$

따라서

$x_{10}=(x_1+x_2+\cdots+x_{10})-(x_1+x_2+\cdots+x_9)$

$=106000-93600=12400$(원)

03 ㄱ. 오른쪽 그래프에서 A, B 두 반의 그래프를 비교하면 성적이 우수한 학생은 A반이 B반보다 더 많다.



ㄴ. A반과 B반의 평균은 65점으로 같다.

ㄷ. 점수가 75점 이상인 B반 학생 수는 같은 점수의 C반 학생 수보다 적으므로 B반 내에서는 C반 학생들보다 상대적으로 반등수가 높다.

ㄹ. C반보다 B반의 학생들이 평균에 더 가까이 분포되어 있으므로 B반 학생들의 성적이 더 고른 편이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

04 $i+j$의 값은 〈표 1〉과 같으므로 변량 2, 3, 4에 대한 상대도수의 분포표는 〈표 2〉와 같다.

i \ j	1	2
1	2	3
2	3	4

〈표 1〉

변량	상대도수
2	$\dfrac{1}{4}=0.25$
3	$\dfrac{2}{4}=0.5$
4	$\dfrac{1}{4}=0.25$
합계	1

〈표 2〉

05 각 지역구의 조사 인원 수가 다르므로 상대도수를 이용하여 3명의 국회의원 후보의 지지율을 각각 계산해 보면

$$(\text{갑의 지지율})=\frac{100}{500}+\frac{200}{600}+\frac{150}{700}+\frac{300}{800}=1.12\cdots$$

$$(\text{을의 지지율})=\frac{200}{500}+\frac{200}{600}+\frac{200}{700}+\frac{200}{800}=1.26\cdots$$

$$(\text{병의 지지율})=\frac{150}{500}+\frac{100}{600}+\frac{300}{700}+\frac{300}{800}=1.27\cdots$$

따라서 갑의 지지율이 약 1.12로 가장 낮으므로 갑의 득표율이 가장 낮을 것으로 예상된다.

퍼펙트 **단원 마무리** P.25~27

01 ②, ⑤	**02** 55.5kg	**03** ㄹ	**04** 0
05 16명	**06** (1) 20점 (2) 52점	**07** 83점	**08** 3.7시간
09 60개	**10** 61kg	**11** 10원짜리, 50원짜리	
12 ①	**13** 0.3	**14** 남학생 : 25명, 여학생 : 20명	**15** ②

01 ① (A반의 학생 수)=25명, (B반의 학생 수)=20명

③ 시청 시간이 30시간 이상 40시간 미만인 학생의 비율은

A반은 $\frac{3}{25}\times100=12(\%)$,

B반은 $\frac{5}{20}\times100=25(\%)$이므로 서로 같지 않다.

④ A, B 두 반 전체 학생을 시청 시간이 많은 순서대로 나열할 때, 11번째 학생은 줄기가 4이고 잎이 5이므로 A반의 학생이다.

⑤ 시청 시간의 평균은 A반이 $\frac{775}{25}=31(\text{시간})$으로 B반의 $\frac{544}{20}=27.2(\text{시간})$보다 더 많다.

따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

02 줄기가 4인 학생 수는 6명이므로 전체 학생 수는 $6\times5=30(\text{명})$이다.
이때 줄기가 5인 학생 수는 $30-(3+6+11+2)=8(\text{명})$이고, 이 학생들의 몸무게의 평균이 54kg이므로 몸무게의 총합은 $54\times8=432(\text{kg})$이다.
따라서 소정이네 반 전체 학생들의 몸무게의 평균은

$\frac{432+1233}{30}=55.5(\text{kg})$이다.

03 (전체 학생 수)$=6x+110$(명),
(용돈을 3000원 이상 받는 학생 수)$=3x+72$(명)이므로

$\frac{3x+72}{6x+110}\times100=58.5$에서

$51x=765 \qquad \therefore x=15$

ㄱ. 조사한 전체 학생 수는 200명이다.

ㄴ. 용돈을 3000원 이상 3500원 미만으로 받는 학생이 가장 많다.

ㄷ. 용돈을 2000원 미만으로 받는 학생은 전체의 $\frac{15}{200}\times100=7.5(\%)$이다.

따라서 옳은 것은 ㄹ이다.

04 세 변량 a, b, c의 평균이 m이므로

$\frac{a+b+c}{3}=m \qquad \therefore a+b+c=3m$

따라서 $\frac{a-m}{m}$, $\frac{b-m}{m}$, $\frac{c-m}{m}$의 평균은

$$\frac{\frac{a-m}{m}+\frac{b-m}{m}+\frac{c-m}{m}}{3}=\frac{a+b+c-3m}{3m}=\frac{3m-3m}{3m}=0$$

05 여학생 수를 x명이라 하면 남학생 수는 $(40-x)$명이므로

$\frac{68\times(40-x)+83\times x}{40}=74$, $15x=240$

$\therefore x=16$

따라서 여학생 수는 16명이다.

06 합격자 중 가장 낮은 점수를 x점이라 하고, 합격자들의 평균을 a점, 불합격자들의 평균을 b점이라 하면

(1) $x=(\text{응시자들의 평균})+8=a-6$

즉, $(\text{응시자들의 평균})=a-14(\text{점})$이므로

$\frac{120a+280b}{400}=a-14$

$120a+280b=400a-5600$, $280a-280b=5600$

$\therefore a-b=20(\text{점})$

(2) $x=\frac{3}{2}b-5$이고 $x=a-6$이므로

$\frac{3}{2}b-5=a-6$에 $a=b+20$을 대입하면

$\frac{3}{2}b-5=(b+20)-6$, $\frac{1}{2}b=19$

$\therefore b=38 \qquad \therefore x=\frac{3}{2}\times38-5=52$

07 학생 B의 성적을 x점이라 하면 각 학생의 성적은 차례로 $x-1$, x, $x+4$, $x-2$, $x+4$이므로

$(\text{평균})=\frac{(x-1)+x+(x+4)+(x-2)+(x+4)}{5}=84$

$5x+5=420$, $5x=415 \qquad \therefore x=83$

따라서 학생 B의 성적은 83점이다.

[다른 풀이] 가평균을 이용하여 평균 구하기

학생 B의 성적을 x점이라 하면 평균이 84점이므로

$x+\frac{(-1)+0+4+(-2)+4}{5}=84$

$x+\frac{5}{5}=84 \qquad \therefore x=83$

08 인터넷 사용 시간이 4시간 미만인 학생 수는
$3+4+13=20$(명)이므로 4시간 이상인 학생 수는
$30-20=10$(명)이다.

$$\therefore \text{(전체 평균)}=\frac{1.5\times3+2.5\times4+3.5\times13+5.1\times10}{30}$$
$$=\frac{111}{30}=3.7\text{(시간)}$$

09 1학년의 평균 횟수를 m개라 하면 2학년의 평균 횟수는 $(m+10)$개이다.
3학년의 평균 횟수는 1학년의 1.5배이므로 $1.5m$개이고, 2학년보다 15개 많으므로 $(m+25)$개이다.
따라서 $1.5m=m+25$에서 $m=50$이므로
1학년의 평균 횟수는 50개, 2학년의 평균 횟수는 60개, 3학년의 평균 횟수는 75개이다.

$$\therefore \text{(전체 평균)}=\frac{30\times50+50\times60+20\times75}{30+50+20}$$
$$=\frac{6000}{100}=60\text{(개)}$$

10 5명의 학생 A, B, C, D, E의 몸무게를 각각 $a$kg, $b$kg, $c$kg, $d$kg, $e$kg이라 하면 각 학생을 제외한 몸무게의 평균에서 $a>b>c>d>e$이고
$b+c+d+e=51\times4$, $a+c+d+e=52\times4$,
$a+b+d+e=53\times4$, $a+b+c+e=54\times4$,
$a+b+c+d=55\times4$
이때 위의 5개의 식을 변끼리 각각 더하면
$4(a+b+c+d+e)=4(51+52+53+54+55)$
$\therefore a+b+c+d+e=265$
즉, $a+51\times4=265$ $\quad\therefore a=61$
따라서 학생 A의 몸무게가 61kg으로 가장 많이 나간다.

11 우표를 사는 데 사용한 두 동전의 금액의 합을 x원이라 하고, 전체 동전의 금액의 합을 y원이라 하면

$\frac{y}{n}=76$, $y=76n$ …… ㉠

$\frac{y-x}{n-2}=80$, $y-x=80(n-2)$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면
$76n-x=80(n-2)$, $4n=160-x$
이때 $160-x>0$인 x의 값은 15, 55, 60, 105, 110, 150이고 $160-x$는 4의 배수이므로 $x=60$
따라서 두 동전의 금액의 합이 60원이므로 사용한 두 동전은 10원짜리와 50원짜리이다.

12 상대도수의 합은 1이므로 160cm 이상 165cm 미만인 계급의 상대도수를 x라 하면

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+x+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=1$ $\quad\therefore x=\frac{1}{3}$

이때 (도수)=(상대도수)×(도수의 총합)이므로 이 모둠의 학생 수는 상대도수의 분모인 3, 4, 6, 8의 공배수, 즉 24의 배수이어야 한다.
따라서 이 모둠의 학생 수가 될 수 있는 것은 ① 24명이다.

13 (4개 반 전체 학생 수)$=10+20+30+40=100$(명)
∴ (4개 반 전체 학생 중 90점 이상인 학생 수)
$=100\times0.27=27$(명)
(A반 학생 중 90점 이상인 학생 수)$=10\times0.2$
$=2$(명)
(B반 학생 중 90점 이상인 학생 수)$=20\times x$
$=20x$(명)
(C반 학생 중 90점 이상인 학생 수)$=30\times0.3$
$=9$(명)
(D반 학생 중 90점 이상인 학생 수)$=40\times0.25$
$=10$(명)
따라서 $2+20x+9+10=27$이므로
$20x=6$ $\quad\therefore x=0.3$

14 여학생 수를 x명이라 하면 남학생 수는 $(x+5)$명이므로 통학 시간이 10분 이상 20분 미만인 남학생 수는 $0.16(x+5)$명, 여학생 수는 $0.1x$명이다.
즉, $0.16(x+5)=2\times0.1x$이므로
$0.16x+0.8=0.2x$, $0.04x=0.8$ $\quad\therefore x=20$
따라서 남학생 수는 25명, 여학생 수는 20명이다.

15 남학생 중 통학 시간이 7번째로 빠른 학생은 남학생 전체의 $\frac{7}{25}\times100=28(\%)$에 해당하므로 10분 이상 20분 미만인 계급에 속한다.
이때 통학 시간이 10분 미만인 여학생은 $0.15\times20=3$(명), 10분 이상 20분 미만인 여학생은 $0.1\times20=2$(명)이므로 남학생 중 통학 시간이 7번째로 빠른 학생은 반에서 대략 10번째에서 12번째라고 할 수 있다.

특목 경시 대비 **논술·구술 도전하기** P.28~29

1 |예시| 주어진 신문 기사에서 유행성 눈병의 감염 정도를 단순히 환자 발생 수로만 판단한다면 경기 지역의 감염 정도가 경북 지역보다 더 심각해 보인다. 그러나 전체 학생 수가 많을수록 감염된 학생 수, 즉 도수가 많아지므로 단순히 감염된 학생 수를 가지고 비교하는 것은 옳지 않다. 그러므로 감염 정도를 비교하려면 경기 지역과 경북 지역 각각의 전체 학생 수에 대한 감염된 학생 수의 비, 즉 상대도수를 비교하여 판단하여야 한다.
따라서 좀 더 정확한 해석을 위해서는 기사에 각 지역의 전체 학생 수가 추가되어야 한다.

2 |예시| 주어진 그림은 연도를 나타낸 통의 크기(부피)가 달라서 석유의 양에 따른 가격의 변화로 오해할 수 있다.
따라서 연도별로 같은 양, 즉 석유 1배럴당 가격을 표기하여야 하므로 조사한 자료를 의도에 맞게 전달하기 위해서는 통의 크기를 같게 하거나, 폭은 같고 가격에 따라 높이가 다른 막대 모양의 그림(막대 그래프) 또는 순서쌍 (연도, 가격)을 좌표로 하는 점을 선분으로 연결한 꺾은선 그래프로 나타내어야 한다.

Ⅱ 기본 도형

1 기본 도형

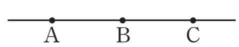
STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.35~40

1-1 6개, 12개, 6개		**1-2** 4	**1-3** 8개	
2-1 $\frac{3}{2}$배	**2-2** ⑤	**2-3** 18	**2-4** $\frac{2}{3}$	
3-1 24	**3-2** 8	**4-1** 30°	**4-2** 65°	**4-3** ②
4-4 $40° < \angle AOF < 60°$		**5-1** 31.25°	**5-2** 47.5°	
5-3 6시 $21\frac{9}{11}$분 또는 6시 $43\frac{7}{11}$분			**5-4** $\frac{240}{13}$분	
6-1 9	**6-2** 최솟값 : 4, 최댓값 : 6			**6-3** 3
7-1 6	**7-2** 3개	**7-3** ③, ⑤	**7-4** 195°	
7-5 ②, ⑤	**8-1** 17개	**8-2** 32개	**9-1** ④	
9-2 4개	**9-3** 115°	**9-4** 200°	**10-1** 227°	
10-2 130°	**10-3** 32°	**10-4** $\frac{80°}{3}$		

1-1 직선은 $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{CD}$의 6개이므로 반직선의 개수는 $6\times2=12$(개), 선분의 개수는 6개이다.

1-2 직선 l 위의 한 개의 점에 대하여 직선 m 위에 있는 점들을 각각 연결하면 그을 수 있는 직선은 x개이므로 직선 l과 m 위에 있는 점들을 각각 한 개씩 이어서 그을 수 있는 직선의 개수는 $6x$개이다.
즉, $6x=24$에서 $x=4$

1-3 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 점들을 이어서 만들 수 있는 선분과 직선의 개수는 같다.
그러나 오른쪽 그림과 같이 일직선 위에 있는 세 점으로 만들 수 있는 선분은 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$의 3개, 직선은 $\overleftrightarrow{AC}$의 1개이다.



따라서 일직선 위에 있는 세 점으로 만들 수 있는 선분의 개수와 직선의 개수의 차는 2개이므로 구하는 개수의 차는 $2\times4=8$(개)이다.

2-1 $\overline{AB}=6\overline{AM}$, $\overline{AB}=2\overline{MN}$이므로
$6\overline{AM}=2\overline{MN}$ $\quad\therefore \overline{MN}=3\overline{AM}$
$\overline{NB}=\overline{AB}-(\overline{AM}+\overline{MN})$
$=2\overline{MN}-\left(\frac{1}{3}\overline{MN}+\overline{MN}\right)=\frac{2}{3}\overline{MN}$
$\therefore \overline{MN}=\frac{3}{2}\overline{NB}$
따라서 $\overline{MN}$은 $\overline{NB}$의 $\frac{3}{2}$배이다.

2-2 $\overline{AD}=\frac{2}{3}\overline{AC}$이고 $\overline{AD}=8\text{cm}$이므로
$\overline{AC}=\frac{3}{2}\overline{AD}=\frac{3}{2}\times8=12(\text{cm})$
따라서 $\overline{DC}=\overline{AC}-\overline{AD}=12-8=4(\text{cm})$이고
$\overline{CB}=\overline{DC}=4\text{cm}$이므로
$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}=12+4=16(\text{cm})$

2-3 $\overline{AM}=\overline{MB}=a$라 하면
$\overline{BC}=3\overline{AB}=3\times2\overline{AM}=6a$,
$\overline{BN}=\frac{1}{2}\overline{BC}=3a$
이때
$\overline{MN}=\overline{MB}+\overline{BN}$
$=a+3a$
$=4a=12$
이므로 $a=3$
$\therefore \overline{BC}=6a=6\times3=18$

2-4 $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$라 하자.
$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BC}+\overline{CD}}{\overline{AB}+\overline{BC}}=\frac{2}{3}$이므로
$\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$에서 $a=3k$, $b=2k\,(k>0)$로 놓으면
$\frac{b+c}{a+b}=\frac{2}{3}$에서 $\frac{2k+c}{3k+2k}=\frac{2}{3}$
$\frac{2k+c}{5k}=\frac{2}{3}$, $10k=6k+3c$
$\therefore c=\frac{4}{3}k$
$\therefore \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{\frac{4}{3}k}{2k}=\frac{2}{3}$

3-1 $x=\frac{3\times(-2)+2\times8}{3+2}=\frac{10}{5}=2$
$y=\frac{3\times(-2)-2\times8}{3-2}=-22$
$\therefore \overline{PQ}=2-(-22)=24$

3-2 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표가 4이므로
$\frac{2\times(b+1)+1\times2}{2+1}=4$
$\frac{2b+4}{3}=4 \qquad \therefore b=4$
즉, 점 B의 좌표는 5이다.
또 $\overline{BC}$를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표가 8이므로
$\frac{3\times(c+2)-2\times5}{3-2}=8$
$3c-4=8 \qquad \therefore c=4$
$\therefore b+c=4+4=8$

4-1 맞꼭지각의 크기는 서로 같으므로
$(2\angle x-25°)+(\angle x+20°)+(\angle x+15°)+\angle x$
$+(\angle x-10°)=180°$
$6\angle x=180° \qquad \therefore \angle x=30°$

4-2 $\angle BOD+\angle COE=90^\circ+90^\circ=180^\circ$이므로
$(\angle BOC+\angle COD)+(\angle COD+\angle DOE)=180^\circ$
$\angle BOC+\angle DOE+2\angle COD=180^\circ$
이때 $\angle BOC+\angle DOE=50^\circ$이므로
$50^\circ+2\angle COD=180^\circ$, $2\angle COD=130^\circ$
$\therefore \angle COD=65^\circ$
$\therefore \angle AOB=90^\circ-\angle BOC$
$=90^\circ-(90^\circ-\angle COD)$
$=\angle COD=65^\circ$

4-3 $\angle BOC=\angle a$라 하면
$\angle AOC=3\angle BOC=3\angle a$이고 $\angle BOD=60^\circ$이므로
$\angle COD=60^\circ-\angle a$
또 $\angle AOC+\angle COE=180^\circ$이므로
$\angle COE=180^\circ-\angle AOC$
$=180^\circ-3\angle a$
$=3(60^\circ-\angle a)$
$=3\angle COD$
따라서 $\angle COE$는 $\angle COD$의 3배이다.

4-4 맞꼭지각의 크기는 서로 같으므로
$\angle AOF=\angle AOE-\angle EOF$
$=\angle AOE-\angle BOC$
$=90^\circ-\angle BOC$
따라서 $\angle BOC=30^\circ$일 때 $\angle AOF=60^\circ$,
$\angle BOC=50^\circ$일 때 $\angle AOF=40^\circ$이므로
$40^\circ<\angle AOF<60^\circ$

5-1 30초는 0.5분이므로
(시침이 움직인 각도)$=30^\circ\times7+0.5^\circ\times32.5$
$=226.25^\circ$
(분침이 움직인 각도)$=6^\circ\times32.5=195^\circ$
따라서 구하는 각의 크기는
$226.25^\circ-195^\circ=31.25^\circ$

5-2 일일생활 계획표는 24시간으로 짜여 있으므로 1시간에 대한 중심각의 크기는 $\dfrac{360^\circ}{24}=15^\circ$이고 10분에 대한 중심각의 크기는 $\dfrac{15^\circ}{6}=2.5^\circ$이다.
계획표에서의 영어 공부 시간은 3시간 10분이므로
$\angle x=15^\circ\times3+2.5^\circ\times1=47.5^\circ$

5-3 시침과 분침이 이루는 각 중에서 작은 쪽의 각의 크기를 $\angle x$라 하면 큰 쪽의 각의 크기는 $5\angle x$이므로
$\angle x+5\angle x=360^\circ$
$\therefore \angle x=60^\circ$
구하는 시각을 6시 t분이라 하면
$30^\circ\times6-5.5^\circ\times t=60^\circ$ 또는 $5.5^\circ\times t-30^\circ\times6=60^\circ$
$\therefore t=21\dfrac{9}{11}$ 또는 $t=43\dfrac{7}{11}$
따라서 구하는 시각은 6시 $21\dfrac{9}{11}$분 또는 6시 $43\dfrac{7}{11}$분이다.

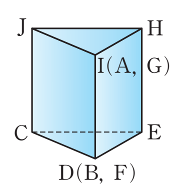
5-4 시침과 분침이 일직선을 이룬 시각을 10시 x분이라 하면
$60+0.5x+6x=180$, $600+5x+60x=1800$
$65x=1200$ $\therefore x=\dfrac{240}{13}$
따라서 운동하는 데 걸린 시간은 $\dfrac{240}{13}$분이다.

6-1 $\overline{AB}$와 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수는
$\overline{EH}$, $\overline{FG}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$, $\overline{GH}$의 5개이므로 $a=5$
$\overline{AB}$와 수직으로 만나는 모서리의 개수는
$\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$의 4개이므로 $b=4$
$\therefore a+b=9$

6-2 직육면체의 8개의 꼭짓점 중 두 점을 이은 선분이
(i) 직육면체의 모서리인 경우 최솟값을 갖는다.
예를 들어, $\overline{AD}$와 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수는 $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{EF}$, $\overline{HG}$의 4개이므로 a의 최솟값은 4이다.
(ii) 직육면체의 대각선 또는 각 면의 대각선인 경우 최댓값을 갖는다.
예를 들어, $\overline{DF}$와 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수는 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AE}$, $\overline{CG}$, $\overline{EH}$, $\overline{HG}$의 6개이므로 a의 최댓값은 6이다.

6-3 모서리 AB와 평행한 모서리는 7개이므로 $a=7$
모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는 $\overline{AB}$를 포함하는 위쪽에 있는 면과 평행한 모서리 중 6개와 수직인 모서리 중 4개를 더한 10개이므로 $b=10$
$\therefore b-a=3$

7-1 주어진 전개도로 만든 삼각기둥은 오른쪽 그림과 같다.



(i) $\overline{AB}$와 평행한 모서리의 개수는 $\overline{JC}$, $\overline{HE}$의 2개이므로 $x=2$
(ii) $\overline{JI}$와 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수는 $\overline{CE}$, $\overline{DE}$, $\overline{HE}$의 3개이므로 $y=3$
(iii) 면 HEFG와 평행한 모서리의 개수는 $\overline{JC}$의 1개이므로 $z=1$
$\therefore x+y+z=2+3+1=6$

7-2 직선 EA와 평면 P가 수직이므로 점 A를 지나는 평면 P 위의 모든 직선은 직선 EA와 수직으로 만난다.
따라서 구하는 직선의 개수는 $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$의 3개이다.

7-3 ① 두 평면 P와 Q는 한 직선에서 만날 수도 있고 평행할 수도 있다.
② 직선 m과 평면 P는 한 점에서 만날 수도 있고 평행할 수도 있다.
④ 두 직선 l, m은 만날 수도 있고 꼬인 위치에 있을 수도 있다.
따라서 옳은 것은 ③, ⑤이다.

7-4 면 ABFE와 $\overline{FG}$가 수직이므로 $\overline{AF}$와 $\overline{FG}$가 이루는 각의 크기는 90°이다.

$\therefore\ \angle x=90^\circ$

삼각형 AFH는 $\overline{AF}=\overline{FH}=\overline{AH}$인 정삼각형이므로 $\overline{AF}$와 $\overline{FH}$가 이루는 각의 크기는 60°이다.

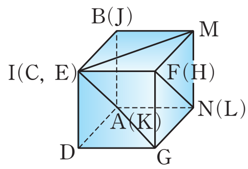
$\therefore \angle y=60^\circ$

삼각형 AFE는 $\overline{AE}=\overline{EF}$인 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AF}$와 $\overline{FE}$가 이루는 각의 크기는 45°이다.

$\therefore \angle z=45^\circ$

$\therefore \angle x+\angle y+\angle z=90^\circ+60^\circ+45^\circ=195^\circ$

7-5 전개도로 정육면체를 만들면 오른쪽과 같다.



② 삼각형 ACG는 정삼각형이므로 $\angle CAG=60^\circ$이다.

④ $\overline{AB}$와 평행한 모서리의 개수는 $\overline{ID}(\overline{CD}, \overline{ED})$, $\overline{FG}(\overline{HG})$, $\overline{MN}(\overline{ML})$의 3개이다.

⑤ $\overline{AG}$와 수직으로 만나는 모서리의 개수는 $\overline{BA}(\overline{BK}, \overline{JA}, \overline{JK})$, $\overline{FG}(\overline{HG})$의 2개이다.

8-1 점 X와 평면 위의 두 점으로 만들 수 있는 평면의 최대 개수는 6개, 점 Y와 평면 위의 두 점으로 만들 수 있는 평면의 최대 개수는 6개, 두 점 X, Y와 평면 위의 한 점으로 만들 수 있는 평면의 최대 개수는 4개, 한 평면 위에 있는 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는 1개이다.

따라서 구하는 평면의 최대 개수는

$6+6+4+1=17$(개)이다.

8-2 평면 P 위의 두 점과 평면 Q 위의 한 점으로 만들 수 있는 평면의 최대 개수는 $3\times4=12$(개), 평면 P 위의 한 점과 평면 Q 위의 두 점으로 만들 수 있는 평면의 최대 개수는 $3\times6=18$(개), 평면 P와 평면 Q의 2개를 만들 수 있다.

따라서 구하는 평면의 최대 개수는

$12+18+2=32$(개)이다.

9-1 ① $\angle a$와 크기가 같은 각은 맞꼭지각인 $\angle c$이다.

② $\angle b$와 $\angle g$의 크기는 같은 지 알 수 없다.

③ $\angle b$의 동위각은 $\angle i$와 $\angle f$이다.

⑤ $\angle h$의 엇각은 $\angle b$와 $\angle l$이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

9-2 $\overline{AB}/\!/\overline{FG}$이므로 $\angle A=\angle GFC$(동위각)

$\overline{AC}/\!/\overline{HI}$이므로 $\angle A=\angle BHI$(동위각)

$\overline{AC}/\!/\overline{HI}$이므로 $\angle PFE=\angle HPF$(엇각)

$\angle HPF=\angle GPI$(맞꼭지각)

따라서 $\angle A$와 크기가 같은 각은 $\angle GFC$, $\angle BHI$, $\angle HPF$, $\angle GPI$의 4개이다.

9-3 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로

$\angle ADB=\angle DBC=20^\circ$(엇각)

$\overline{AB}/\!/\overline{DC}$이므로

$\angle ABD=\angle BDC=30^\circ$(엇각)

삼각형 ABD에서

$2\bullet+30^\circ+20^\circ=180^\circ \qquad \therefore\ \bullet=65^\circ$

따라서 삼각형 ABE에서

$\angle AEB=180^\circ-(65^\circ+50^\circ)=65^\circ$

$\therefore \angle x=180^\circ-65^\circ=115^\circ$

9-4 $\angle CDB=\angle a$(접은 각)이므로

$2\angle a=70^\circ$(동위각) $\qquad \therefore \angle a=35^\circ$

$2\angle a+60^\circ+\angle b=180^\circ$이므로

$70^\circ+60^\circ+\angle b=180^\circ \qquad \therefore \angle b=50^\circ$

$\angle c=\angle b=50^\circ$(엇각)

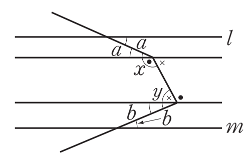
접은 각의 크기는 같으므로

$\angle c+2\angle d=180^\circ$, $50^\circ+2\angle d=180^\circ$

$\therefore \angle d=65^\circ$

$\therefore \angle a+\angle b+\angle c+\angle d=35^\circ+50^\circ+50^\circ+65^\circ$
$=200^\circ$

10-1 오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, m과 평행한 직선을 그으면



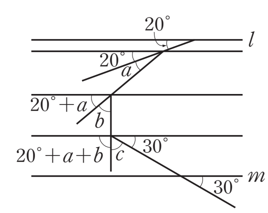
$\angle x+\angle y$

$=\angle a+\angle b+\bullet+\times$

$=47^\circ+180^\circ$

$=227^\circ$

10-2 오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, m과 평행한 직선을 그으면

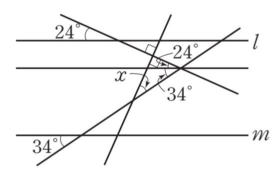


$20^\circ+\angle a+\angle b+\angle c+30^\circ$

$=180^\circ$

$\therefore \angle a+\angle b+\angle c=130^\circ$

10-3 오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, m과 평행한 직선을 그으면

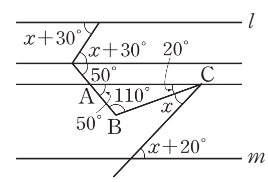


$90^\circ+\angle x+24^\circ+34^\circ$

$=180^\circ$

$\therefore \angle x=32^\circ$

10-4 오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, m과 평행한 직선을 그으면 삼각형 ABC에서



$\angle ACB$

$=\angle x+20^\circ-\angle x$

$=20^\circ$

$\angle BAC=180^\circ-(110^\circ+20^\circ)$
$=50^\circ$

따라서

$4\angle x=(\angle x+30^\circ)+50^\circ$이므로 $3\angle x=80^\circ$

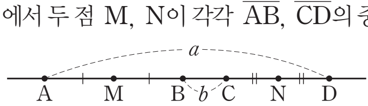
$\therefore \angle x=\dfrac{80^\circ}{3}$

STEP 2 실전 문제 정복하기 P.41~45

01 38	**02** $\frac{1}{2}(a+b)$	**03** ㄱ, ㄴ, ㄹ		
04 $\overline{GH}=4$, $\overline{HI}=3$		**05** $\frac{8}{3}$	**06** 24	**07** 7
08 72°	**09** 10	**10** $\angle x=75°$, $\angle y=105°$		
11 3시 20분		**12** ④	**13** ②, ⑤	**14** ㄴ, ㄷ, ㅁ
15 90°	**16** 4개	**17** 56개	**18** 40°	**19** 18°
20 25°	**21** 75°	**22** 15 cm		

01 (i) 직선의 개수를 구하면
세 점 A, B, C로 만들 수 있는 직선의 개수는 1개,
네 점 P, Q, R, S로 만들 수 있는 직선의 개수는
$\frac{4\times(4-1)}{2}=6$(개),
호와 지름 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선의 개수는 $4\times3=12$(개)
따라서 만들 수 있는 직선의 개수는 모두
$1+6+12=19$(개)이므로 $a=19$
(ii) 반직선의 개수를 구하면
세 점 A, B, C로 만들 수 있는 반직선의 개수는 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}$의 4개,
네 점 P, Q, R, S로 만들 수 있는 반직선의 개수는
$4\times(4-1)=12$(개),
호와 지름 위에 있는 점으로 만들 수 있는 반직선의 개수는 호 위의 한 개의 점에 대하여 나올 수 있는 반직선의 개수가 6개이므로 $6\times4=24$(개)
따라서 만들 수 있는 반직선의 개수는 모두
$4+12+24=40$(개)이므로 $b=40$
(iii) 선분의 개수를 구하면
세 점 A, B, C로 만들 수 있는 선분의 개수는 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$의 3개,
네 점 P, Q, R, S로 만들 수 있는 선분의 개수는
$\frac{4\times(4-1)}{2}=6$(개),
호와 지름 위에 있는 점으로 만들 수 있는 선분의 개수는
$4\times3=12$(개)
따라서 만들 수 있는 선분의 개수는 모두
$3+6+12=21$(개)이므로 $c=21$
$\therefore a+b-c=19+40-21=38$

02 다음 그림에서 두 점 M, N이 각각 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 중점이므로



$\overline{MB}=\frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{CN}=\frac{1}{2}\overline{CD}$
$\therefore \overline{MN}=\overline{MB}+\overline{BC}+\overline{CN}$
$=\frac{1}{2}\overline{AB}+\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{CD}$
$=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})+\overline{BC}$
$=\frac{1}{2}(a-b)+b$
$=\frac{1}{2}(a+b)$

03 오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 6등분하여 차례로 C, D, E, F, G라 하면

ㄱ. $A*(A◎B)=A*E=D=A\triangle B$
ㄴ. $(A◎B)\triangle B=E\triangle B=F=A*B$
ㄷ. $(B*A)◎A=D◎A=C\neq B\triangle A=F$
ㄹ. $B◎(A\triangle B)=B◎D=F=B\triangle A$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

04 $\overline{GH}=4$, $\overline{HI}=3$이면
$\overline{EF}=1$, $\overline{EG}=2$, $\overline{HI}=3$, $\overline{GH}=4$, $\overline{FH}=5$, $\overline{EH}=6$, $\overline{GI}=7$, $\overline{FI}=8$, $\overline{EI}=9$와 같이 길이가 1, 2, 3, ⋯, 9인 선분을 모두 나타낼 수 있다.

05 $\overline{BD}:\overline{CE}=5:3$이므로
$\overline{BD}=5k$, $\overline{CE}=3k\,(k>0)$로 놓고 $\overline{CD}=x$라 하면
$\overline{BE}=\overline{BD}+\overline{DE}=\overline{BD}+\overline{CE}-\overline{CD}$
$=5k+3k-x=8k-x$
또 $\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{AF}=\overline{AC}$이므로 $\overline{AC}=8k-x$
따라서 $\overline{AD}=\overline{AC}+\overline{CD}=8k-x+x=8k$이므로
$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AD}-\overline{BD}}=\frac{8k}{8k-5k}=\frac{8}{3}$

06 $2\overline{AP}=3\overline{PB}$에서 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:2$이므로 점 P는 $\overline{AB}$를 3 : 2로 내분하는 점이고, $\overline{AP'}:\overline{BP'}=3:2$이므로 점 P′은 $\overline{AB}$를 3 : 2로 외분하는 점이다.
따라서 $\overline{AB}=10$이므로 점 $A(x)$, $B(x+10)$이라 하면
점 P의 좌표는
$\frac{3(x+10)+2x}{3+2}=\frac{5x+30}{5}=x+6$
점 P′의 좌표는
$\frac{3(x+10)-2x}{3-2}=x+30$
$\therefore \overline{PP'}=x+30-(x+6)=24$

07 $\frac{q}{p}=\frac{r}{q}=\frac{s}{r}=\frac{3}{4}$이므로
$\frac{q}{p}=\frac{3}{4}$에서 $q=\frac{3}{4}p$ ⋯⋯ ㉠
$\frac{r}{q}=\frac{3}{4}$에서 $r=\frac{3}{4}q$ ⋯⋯ ㉡
$\frac{s}{r}=\frac{3}{4}$에서 $s=\frac{3}{4}r$ ⋯⋯ ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 각각 더하면
$q+r+s=\frac{3}{4}(p+q+r)$이고 $p+q+r\neq0$이므로
$\frac{q+r+s}{p+q+r}=\frac{\angle BOE}{\angle AOD}=\frac{3}{4}$

따라서 $a=3$, $b=4$이므로 $a+b=7$이다.

08 $5\angle\mathrm{AOC}=3\angle\mathrm{AOD}$에서

$\angle\mathrm{AOC}=\frac{3}{5}\angle\mathrm{AOD}$이므로

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{COD}&=\angle\mathrm{AOD}-\angle\mathrm{AOC}\\&=\angle\mathrm{AOD}-\frac{3}{5}\angle\mathrm{AOD}\\&=\frac{2}{5}\angle\mathrm{AOD}\end{aligned}$$

$5\angle\mathrm{EOB}=3\angle\mathrm{DOB}$에서

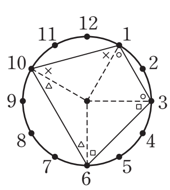
$\angle\mathrm{EOB}=\frac{3}{5}\angle\mathrm{DOB}$이므로

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{DOE}&=\angle\mathrm{DOB}-\angle\mathrm{EOB}\\&=\angle\mathrm{DOB}-\frac{3}{5}\angle\mathrm{DOB}\\&=\frac{2}{5}\angle\mathrm{DOB}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \angle\mathrm{COE}&=\angle\mathrm{COD}+\angle\mathrm{DOE}\\&=\frac{2}{5}\angle\mathrm{AOD}+\frac{2}{5}\angle\mathrm{DOB}\\&=\frac{2}{5}(\angle\mathrm{AOD}+\angle\mathrm{DOB})\\&=\frac{2}{5}\angle\mathrm{AOB}\\&=\frac{2}{5}\times180^\circ=72^\circ\end{aligned}$$

09 2개의 직선이 만나서 생기는 맞꼭지각은 $2=2\times1$(쌍)
3개의 직선이 만나서 생기는 맞꼭지각은 $6=3\times2$(쌍)
4개의 직선이 만나서 생기는 맞꼭지각은 $12=4\times3$(쌍)
5개의 직선이 만나서 생기는 맞꼭지각은 $20=5\times4$(쌍)
$\vdots$
n개의 직선이 만나서 생기는 맞꼭지각은 $n(n-1)$(쌍)
따라서 맞꼭지각이 모두 90쌍이므로
$n(n-1)=90$, $n(n-1)=10\times9$
$\therefore n=10$

10 오른쪽 그림과 같이 시계의 문자판의 중심에서 1시, 3시, 6시, 10시에 보조선을 그으면 원의 반지름의 길이는 모두 같으므로 4개의 이등변삼각형이 만들어지고 이때 1시간에 대한 각의 크기는 $\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$이므로



$\circ=\frac{1}{2}\times(180^\circ-60^\circ)=60^\circ$,

$\square=\frac{1}{2}\times(180^\circ-90^\circ)=45^\circ$,

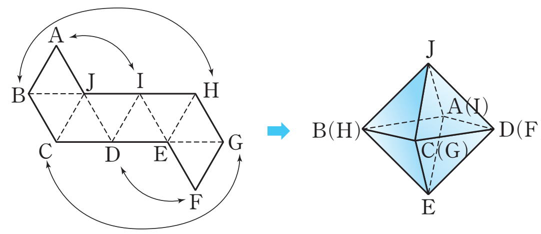
$\triangle=\frac{1}{2}\times(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$,

$\times=\frac{1}{2}\times(180^\circ-90^\circ)=45^\circ$

$\therefore \angle x=\triangle+\times=75^\circ$, $\angle y=\circ+\square=105^\circ$

11 분침은 1시간 동안 360°를 움직이므로 1분에 $\frac{360^\circ}{60}=6^\circ$를 움직이고, 시침은 1시간 동안 $\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$를 움직이므로 1분에 $\frac{36^\circ}{60}=0.6^\circ$를 움직인다.
3시 x분에 시침과 분침이 일치한다고 하면 시침이 움직인 각도는 $36^\circ\times3+0.6^\circ\times x$이고, 분침이 움직인 각도는 $6^\circ x$이므로
$108^\circ+0.6^\circ x=6^\circ x$, $5.4^\circ x=108^\circ$ $\quad\therefore x=20$
따라서 3시 20분에 시침과 분침이 일치한다.

12 주어진 전개도로 정팔면체를 만들면 다음과 같다.



따라서 모서리 CD와 꼬인 위치에 있는 모서리는
$\overline{\mathrm{HE}}(\overline{\mathrm{BE}})$, $\overline{\mathrm{AE}}(\overline{\mathrm{IE}})$, $\overline{\mathrm{JB}}(\overline{\mathrm{JH}})$, $\overline{\mathrm{JA}}(\overline{\mathrm{JI}})$이다.

13 ① 모서리 AD와 평행한 면의 개수는
면 CQG, 면 HEPQG의 2개이다.
② 면 HEPQG와 만나는 면의 개수는
면 AEHD, 면 DHGC, 면 CQG, 면 APQC, 면 AEP의 5개이다.
③ 모서리 CG와 수직으로 만나는 모서리의 개수는
$\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{DC}}$, $\overline{\mathrm{HG}}$, $\overline{\mathrm{QG}}$의 4개이다.
④ 모서리 DH와 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수는
$\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{EP}}$, $\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{CQ}}$, $\overline{\mathrm{GQ}}$의 6개이다.
⑤ 모서리 AP와 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수는
$\overline{\mathrm{DH}}$, $\overline{\mathrm{EH}}$, $\overline{\mathrm{GH}}$, $\overline{\mathrm{GQ}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{CG}}$의 6개이다.
따라서 옳지 않은 것은 ②, ⑤이다.

14 ㄱ. 직선 l과 평면 P는 만날 수도 있고 평행할 수도 있다.
ㄹ. 두 직선 l, m은 만날 수도 있고 평행할 수도 있고 꼬인 위치에 있을 수도 있다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

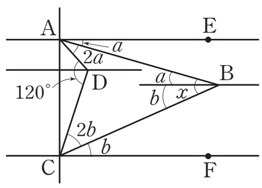
15 $\overline{\mathrm{BC}}$는 면 DABG와 수직이므로 $\overline{\mathrm{BC}}$는 점 B를 지나는 면 DABG 위의 모든 직선과 수직이다.
$\therefore \angle\mathrm{GBC}=90^\circ$

16 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 네 점으로 사면체를 만들 때 평면의 개수는 최대가 된다.
따라서 만들 수 있는 평면의 최대 개수는 4개이다.

17 (i) 직선의 개수가 1개일 때, 나누어지는 평면의 개수는 2개
(ii) 직선의 개수가 2개일 때, 나누어지는 평면의 개수는
$2+2=4$(개)

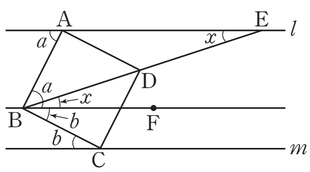
(iii) 직선의 개수가 3개일 때, 나누어지는 평면의 최대 개수는 $2+2+3=7$(개)
(iv) 직선의 개수가 4개일 때, 나누어지는 평면의 최대 개수는 $2+2+3+4=11$(개)
(v) 직선의 개수가 5개일 때, 나누어지는 평면의 최대 개수는 $2+2+3+4+5=16$(개)
⋮
따라서 직선의 개수가 10개일 때, 나누어지는 평면의 최대 개수는 $2+2+3+4+5+6+7+8+9+10=56$(개)이다.

18 오른쪽 그림과 같이 $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{CF}$와 평행한 직선을 긋고



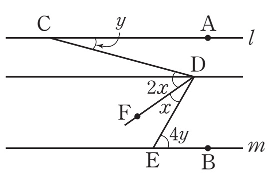
$\angle BAE=\angle a$,
$\angle BCF=\angle b$라 하면
$\angle BAD=2\angle BAE=2\angle a$,
$\angle BCD=2\angle BCF=2\angle b$
이므로 $\angle DAE=3\angle a$, $\angle DCF=3\angle b$이다.
$\angle ADC=3\angle a+3\angle b=120°$에서
$3(\angle a+\angle b)=120°$, $\angle a+\angle b=40°$
$\therefore \angle x=\angle a+\angle b=40°$

19 다음 그림과 같이 두 직선 l, m과 평행한 직선을 긋고, 이 직선 위의 한 점을 F라 하면



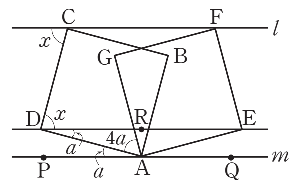
$\angle ABF=\angle a$(엇각), $\angle CBF=\angle b$(엇각)이고
$\angle ABC=90°$이므로 $\angle a+\angle b=90°$
이때 $\angle a : \angle b=7 : 3$이므로
$\angle b=90°\times\frac{3}{10}=27°$
$\angle DBF=\angle x$(엇각)이므로
$\angle x+\angle b=45°$, $\angle x+27°=45°$ $\therefore \angle x=18°$

20 다음 그림과 같이 점 D를 지나고 두 직선 l, m과 평행한 직선을 긋고 $\angle FDE=\angle x$, $\angle ACD=\angle y$라 하자.



$\angle CDF=2\angle x$, $\angle DEB=4\angle y$이므로
$2\angle x+\angle x=\angle y+4\angle y$에서 $3\angle x=5\angle y$
즉, $\angle x : \angle y=5 : 3$
이때 $\angle x+\angle y=40°$이므로
$\angle x=40°\times\frac{5}{8}=25°$ $\therefore \angle FDE=\angle x=25°$

21 $\angle DAP=\angle a$라 하면
$\angle GAP=5\angle DAP$이므로
$\angle GAD=\angle GAP-\angle DAP$
$=5\angle DAP-\angle DAP$
$=4\angle DAP=4\angle a$
정사각형 AEFG는 정사각형 ABCD를 점 A를 중심으로 회전시킨 것이므로
$\angle EAQ=\angle DAP=\angle a$
즉, $\angle GAP+\angle EAQ=90°$이므로
$5\angle a+\angle a=90°$, $6\angle a=90°$
$\therefore \angle a=15°$
다음 그림과 같이 l, m에 평행한 직선을 긋고 이 직선 위의 한 점을 R라 하면



$\angle ADR=\angle a=15°$(엇각), $\angle CDR=\angle x$(엇각)이고
$\angle CDA=90°$이므로
$\angle x+15°=90°$ $\therefore \angle x=75°$

22 $\overline{EF}/\!/\overline{BD}$이므로
$\angle EIB=\angle IBD$(엇각), $\angle FID=\angle IDB$(엇각)
따라서 $\angle EIB=\angle EBI$, $\angle FID=\angle FDI$이므로
두 삼각형 EBI, FDI는 이등변삼각형이다.
$\therefore \overline{EB}=\overline{EI}$, $\overline{FD}=\overline{FI}$
$\therefore$ (삼각형 CEF의 둘레의 길이)
$=\overline{CE}+\overline{EF}+\overline{FC}$
$=\overline{CE}+\overline{EI}+\overline{FI}+\overline{FC}$
$=\overline{CE}+\overline{EB}+\overline{FD}+\overline{FC}$
$=\overline{CB}+\overline{CD}$
$=\overline{AB}+\overline{GD}$
$=9+6=15$ (cm)

STEP 3 최고 수준 완성하기 P.46~47

01 $\frac{13}{18}$ **02** $60°$ **03** 13개 **04** $92°$ **05** ④
06 55개

01 점 Q는 $\overline{PB}$를 $5 : 4$로 내분하는 점이므로
$\overline{PQ} : \overline{BQ}=5 : 4$
$\therefore \overline{BQ}=\frac{4}{5}\overline{PQ}$
점 Q는 $\overline{PC}$를 $4 : 3$으로 외분하는 점이므로
$\overline{PQ} : \overline{CQ}=4 : 3$
$\therefore \overline{CQ}=\frac{3}{4}\overline{PQ}$
이때 $\overline{PQ}=k$라 하면
$\overline{BQ}=\frac{4}{5}k$, $\overline{CQ}=\frac{3}{4}k$이므로

$\overline{BP}=\overline{PQ}+\overline{BQ}=k+\frac{4}{5}k=\frac{9}{5}k$

$\overline{AP}=\overline{AC}-\overline{CP}=\overline{BC}-\overline{CP}$

$=(\overline{BQ}+\overline{CQ})-(\overline{PQ}-\overline{CQ})$

$=\left(\frac{4}{5}k+\frac{3}{4}k\right)-\left(k-\frac{3}{4}k\right)$

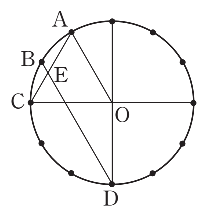
$=\frac{31}{20}k-\frac{5}{20}k$

$=\frac{26}{20}k=\frac{13}{10}k$

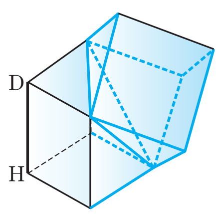
$\therefore \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\frac{\frac{13}{10}k}{\frac{9}{5}k}=\frac{13}{18}$

02 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$를 그으면 $\angle AOC=60^\circ$이고 $\overline{OA}=\overline{OC}$이므로 삼각형 ACO는 정삼각형이다.

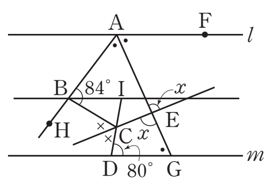
$\therefore \angle AEB=\angle CAO$(엇각)$=60^\circ$



03 두 입체도형의 대칭성을 이용하여 $\overline{DH}$와 꼬인 위치에 있는 모서리를 찾으면 다음 그림에서 굵은 색 선 부분이므로 모두 13개이다.



04 다음 그림과 같이 두 직선 l, m과 평행한 직선을 그으면



$\angle CBH=180^\circ-84^\circ=96^\circ$이고

$\angle IBH=2\bullet$(동위각)이므로

$\angle IBC=2\bullet-96^\circ$, $\angle BCI=180^\circ-2\times$

$\angle BIC=\angle CDG=80^\circ$(엇각)

따라서 삼각형 BCI에서

$(2\bullet-96^\circ)+(180^\circ-2\times)+80^\circ=180^\circ$

$2(\bullet-\times)=16^\circ$

$\therefore \bullet-\times=8^\circ$

이때 $\overline{AE}$의 연장선과 직선 m의 교점을 G라 하면 사각형 CDGE에서

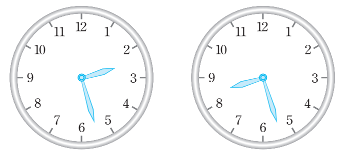
$(180^\circ-\times)+80^\circ+\bullet+\angle x=360^\circ$이므로

$260^\circ+(\bullet-\times)+\angle x=360^\circ$

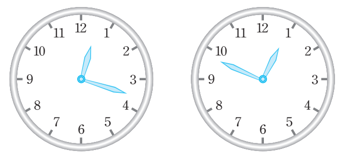
$260^\circ+8^\circ+\angle x=360^\circ$

$\therefore \angle x=92^\circ$

05 (i) 시침과 분침은 다음 그림과 같이 $2:00\sim2:59$에 한 번 수직을 이루고, $8:00\sim8:59$에 한 번 수직을 이룬다.

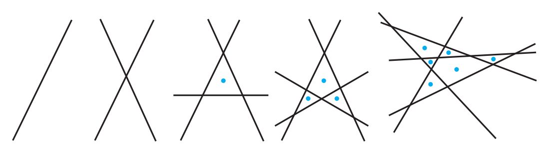


(ii) 시침과 분침은 다음 그림과 같이 $12:00\sim12:59$에 두 번 수직을 이루고, $1:00\sim1:59$, $3:00\sim3:59$, $4:00\sim4:59$, $5:00\sim5:59$, $6:00\sim6:59$, $7:00\sim7:59$, $9:00\sim9:59$, $10:00\sim10:59$, $11:00\sim11:59$에 각각 두 번씩 수직을 이룬다.



따라서 (i), (ii)에서 시침과 분침이 수직을 이루는 것은 모두 $1\times2+2\times10=22$(번)이다.

06 n개의 직선을 그었을 때 생기는 영역 중 그 넓이가 유한한 영역의 개수를 $f(n)$이라 하자.



위의 그림에서 보면

$f(1)=f(2)=0$

$f(3)=1$

$f(4)=1+2=3$

$f(5)=1+2+3=6$

$\vdots$

$f(12)=1+2+3+\cdots+10=55$

따라서 구하는 영역의 개수는 55개이다.

2 작도와 합동

STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.50~53

1-1 풀이 참조

1-2 이용한 성질 : 서로 다른 두 직선이 한 직선과 만날 때 엇각의 크기가 같으면 두 직선은 평행하다.

작도 순서 : ㉠→㉤→㉡→㉥→㉣→㉢

2-1 $\angle B$의 이등분선의 작도 **2-2** ④

2-3 ⑤ **2-4** ③ **2-5** ㄷ, ㄹ

3-1 $\overline{BC}$의 길이, $\angle A$의 크기, $\angle C$의 크기

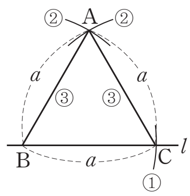
3-2 ㄹ, ㅁ, ㅅ **3-3** 4 **3-4** $\frac{1}{3}<x<\frac{7}{5}$

4-1 10 cm **4-2** 60° **4-3** 정삼각형

5-1 16 cm^2 **5-2** 52° **5-3** 36 cm^2 **5-4** 90°

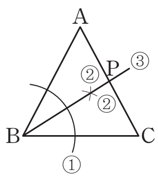
6-1 14 cm **6-2** 18 cm **6-3** 15 cm^2

1-1 ① 직선 l을 그리고, 그 위에 길이가 a인 선분 BC를 잡는다.
② 두 점 B와 C를 중심으로 반지름의 길이가 a인 원을 각각 그려 두 원의 교점을 A라 한다.
③ 두 점 A와 B, 두 점 A와 C를 각각 잇는다.



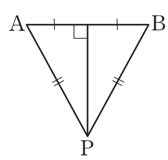
1-2 평행선의 작도는 서로 다른 두 직선이 한 직선과 만날 때 동위각 또는 엇각의 크기가 같으면 두 직선은 평행하다는 성질을 이용한 것이다.
작도 순서 : ㉠→㉢→㉡→㉥→㉣→㉢

2-1 각의 이등분선 위의 임의의 한 점에서 각을 이루는 두 변의 이르는 거리는 같으므로 오른쪽 그림과 같이 ∠B의 이등분선을 작도하면 된다.



2-2 직선 l 밖의 한 점 P에서 직선 l에 수선을 작도하기 위해 평각의 이등분선을 작도한 것이므로 이용한 작도 방법은 ④ 각의 이등분선의 작도이다.

2-3 도서관은 A, B 두 아파트로부터 같은 거리에 있어야 하므로 도서관의 위치를 점 P라 하면 점 P는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$의 수직이등분선 위에 존재해야 한다.
따라서 도서관의 위치는 $\overline{AB}$의 수직이등분선을 작도하여 그 위에 정해야 한다.



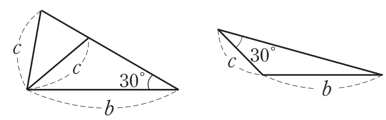
2-4 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$는 $\angle XOY=90^\circ$의 삼등분선이므로
$\angle AOP=\angle POQ=\angle QOB=30^\circ$,
$\angle AOQ=\angle POB=60^\circ$,
$\overline{OA}=\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OB}=\overline{AQ}=\overline{PB}$,
$\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QB}$
③ $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}>\overline{AB}$이므로 $\overline{BQ}\neq\frac{1}{3}\overline{AB}$

2-5 $180^\circ \xrightarrow[\text{ㄷ}]{\text{선분의 수직이등분선의 작도}} 90^\circ \xrightarrow[\text{ㄹ}]{\text{각의 이등분선의 작도}} 45^\circ$

3-1 (ⅰ) 두 변의 길이와 그 끼인 각의 크기가 주어지면 삼각형은 하나로 정해지므로 $\overline{BC}$의 길이가 주어지면 된다.
(ⅱ) 한 변의 길이와 그 양 끝각의 크기가 주어지면 삼각형은 하나로 정해지므로 ∠A의 크기가 주어지면 된다.
(ⅲ) ∠C의 크기가 주어지면 $\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)$에서 ∠A의 크기를 알 수 있으므로 (ⅱ)의 경우와 같게 된다.

3-2 ㄱ. 세 각의 크기가 주어지면 모양은 같고, 크기가 다른 삼각형이 무수히 많이 만들어진다.
ㄴ. $6>2+3$이므로 삼각형을 작도할 수 없다.
ㄷ, ㅂ. 두 변의 길이와 그 끼인 각이 아닌 다른 한 각의 크기가 주어졌으므로 삼각형을 하나로 작도할 수 없다.
ㅇ. $140^\circ+75^\circ>180^\circ$이므로 삼각형을 작도할 수 없다.
따라서 △ABC가 하나로 정해지는 것은 ㄹ, ㅁ, ㅅ이다.

3-3 (ⅰ) 두 변의 길이와 그 끼인 각의 크기가 주어지면 삼각형은 하나로 결정되므로 $x=1$
(ⅱ) 두 변의 길이와 그 끼인 각이 아닌 다른 한 각의 크기가 주어지면 다음과 같이 삼각형은 3개 작도할 수 있으므로 $y=3$



따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 $x+y=1+3=4$이다.

3-4 세 변의 길이는 모두 양수이므로
$5-3x>0,\ x+1>0,\ 3-x>0$
즉, $x<\frac{5}{3}$, $x>-1$, $x<3$에서
$-1<x<\frac{5}{3}$ ...... ㉠
또 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 커야 하므로
(ⅰ) $(5-3x)$ cm가 가장 긴 변의 길이일 때
$(x+1)+(3-x)>5-3x,\ 3x>1 \quad \therefore x>\frac{1}{3}$
(ⅱ) $(x+1)$cm가 가장 긴 변의 길이일 때
$(5-3x)+(3-x)>x+1,\ -5x>-7$
$\therefore x<\frac{7}{5}$
(ⅲ) $(3-x)$ cm가 가장 긴 변의 길이일 때
$(5-3x)+(x+1)>3-x,\ -x>-3$
$\therefore x<3$
이때 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $\frac{1}{3}<x<\frac{7}{5}$ ...... ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 x의 값의 범위는 $\frac{1}{3}<x<\frac{7}{5}$이다.

4-1 △ABD와 △ACE에서
$\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{AD}=\overline{AE}$,
$\angle BAD=60^\circ+\angle CAD=\angle CAE$이므로
△ABD≡△ACE(SAS 합동)
$\therefore \overline{CE}=\overline{BD}=\overline{BC}+\overline{CD}$
$=4+6=10\,(\text{cm})$

4-2 △ACD와 △BCE에서
$\overline{AC}=\overline{BC}$, $\overline{CD}=\overline{CE}$,
$\angle ACD=60^\circ+\angle ACE=\angle BCE$이므로
△ACD≡△BCE(SAS 합동)
$\therefore \angle CAD=\angle CBE$
$\therefore \angle AFG=180^\circ-(\angle GAF+\angle AGF)$
$=180^\circ-(\angle GBC+\angle BGC)$
$=180^\circ-(180^\circ-\angle ACB)$
$=\angle ACB=60^\circ$

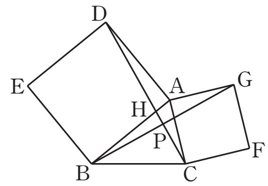
4-3 $\triangle ABE$, $\triangle BCF$, $\triangle CAD$에서
$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$, $\overline{BE}=\overline{CF}=\overline{AD}$,
$\angle ABE=\angle BCF=\angle CAD=60°$이므로
$\triangle ABE\equiv\triangle BCF\equiv\triangle CAD$(SAS 합동)
$\therefore \angle PQR=\angle BQE$
$=180°-(\angle QBE+\angle BEQ)$
$=180°-(\angle BAE+\angle BEQ)$
$=\angle ABC$
$=60°$
같은 방법으로 하면 $\angle QPR=\angle QRP=60°$이므로
$\triangle PQR$는 정삼각형이다.

5-1 $\triangle ABF$와 $\triangle CEF$에서
$\overline{AB}=\overline{DC}=\overline{CE}$, $\angle ABF=\angle CEF=90°$,
$\angle BFA=\angle EFC$(맞꼭지각)이므로
$\angle BAF=\angle ECF$
$\therefore$ $\triangle ABF\equiv\triangle CEF$(ASA 합동)
따라서
$\overline{AB}=\overline{CE}=4$ cm, $\overline{BF}=\overline{EF}=3$ cm이므로
($\triangle ABC$의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AB}$
$=\frac{1}{2}\times(\overline{BF}+\overline{FC})\times\overline{AB}$
$=\frac{1}{2}\times(3+5)\times4$
$=16\,(\text{cm}^2)$

5-2 $\overline{AD}/\!/\overline{BF}$이므로
$\angle DAF=\angle AFC=38°$(엇각)
$\triangle ABE$와 $\triangle CBE$에서
$\overline{AB}=\overline{CB}$, $\overline{BE}$는 공통,
$\angle ABE=\angle CBE=45°$이므로
$\triangle ABE\equiv\triangle CBE$(SAS 합동)
$\therefore \angle x=\angle BAE$
$=\angle BAD-\angle DAF$
$=90°-38°$
$=52°$

5-3 $\triangle OCE$와 $\triangle ODF$에서
$\overline{OC}=\overline{OD}$, $\angle OCE=\angle ODF=45°$,
$\angle EOC=90°-\angle COF=\angle FOD$이므로
$\triangle OCE\equiv\triangle ODF$(ASA 합동)
$\therefore$ (사각형 OECF의 넓이)$=\triangle OCE+\triangle OCF$
$=\triangle ODF+\triangle OCF$
$=\triangle OCD$
$=9\,(\text{cm}^2)$
따라서 정사각형 ABCD의 넓이는
$4\triangle COD=4\times9=36\,(\text{cm}^2)$

5-4 $\triangle ADC$와 $\triangle ABG$에서
$\overline{AD}=\overline{AB}$, $\overline{AC}=\overline{AG}$,
$\angle DAC=90°+\angle BAC=\angle BAG$이므로
$\triangle ADC\equiv\triangle ABG$(SAS 합동) ······㉠

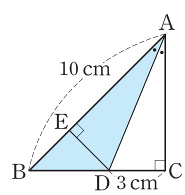


$\overline{AB}$와 $\overline{DC}$의 교점을 H라
하면
$\triangle DHA$와 $\triangle BHP$에서
$\angle DHA=\angle BHP$(맞꼭지각)
이므로
$\angle ADC+\angle DAB$
$=\angle ABG+\angle BPD$
$\angle ADC+90°=\angle ABG+(180°-\angle BPC)$
이때 ㉠에서 $\angle ADC=\angle ABG$이므로
$90°=180°-\angle BPC$
$\therefore \angle BPC=90°$

6-1 $\triangle ABD$와 $\triangle CAE$에서
$\angle ADB=\angle CEA=90°$, $\overline{AB}=\overline{CA}$이고
$\angle ABD+\angle DAB=90°$,
$\angle DAB+\angle CAE=90°$이므로
$\angle ABD=\angle CAE$
$\therefore$ $\triangle ABD\equiv\triangle CAE$(RHA 합동)
$\therefore$ $\overline{DE}=\overline{DA}+\overline{AE}$
$=\overline{EC}+\overline{BD}$
$=6+8=14\,(\text{cm})$

6-2 $\triangle ABD$와 $\triangle BCE$에서
$\angle ADB=\angle BEC=90°$, $\overline{AB}=\overline{BC}$이고,
$\angle BAD+\angle ABD=90°$,
$\angle ABD+\angle CBE=90°$이므로
$\angle BAD=\angle CBE$
$\therefore$ $\triangle ABD\equiv\triangle BCE$(RHA 합동)
이때 점 E는 $\overline{BD}$를 $3:2$로 내분하는 점이므로
$\overline{BE}=3k$, $\overline{ED}=2k\,(k>0)$로 놓으면
$\overline{CE}=\overline{BD}=5k$
$\therefore$ $\triangle BCE=\frac{1}{2}\times\overline{CE}\times\overline{BE}$
$=\frac{1}{2}\times5k\times3k$
$=\frac{15}{2}k^2$
$\frac{15}{2}k^2=270$이므로 $k^2=36=6\times6$ $\therefore$ $k=6$
$\therefore$ $\overline{BE}=3k=18\,(\text{cm})$

6-3 점 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을
E라 하면 $\triangle AED$와 $\triangle ACD$에서
$\angle AED=\angle ACD=90°$,
$\angle EAD=\angle CAD$,
$\overline{AD}$는 공통이므로
$\triangle AED\equiv\triangle ACD$(RHA 합동)
$\therefore$ $\overline{ED}=\overline{CD}=3$ cm
$\therefore$ $\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{ED}$
$=\frac{1}{2}\times10\times3$
$=15(\text{cm}^2)$



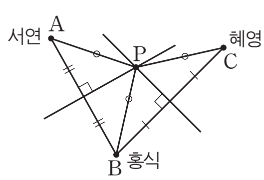
STEP 2 실전 문제 정복하기 P.54~56

01 ③　02 ㉢→㉠→㉡→㉣→㉥→㉤
03 풀이 참조　04 ㉡→㉤→㉥→㉣→㉠→㉢
05 3개　06 ①　07 ㄴ, ㄷ　08 120°　09 30°
10 110°　11 120°　12 $\frac{13}{2}$ cm　13 4 cm
14 7 cm　15 $90^\circ-\frac{\angle x}{2}$

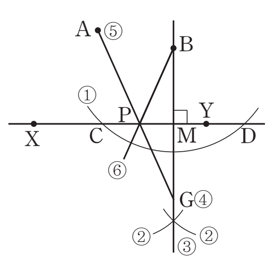
01 컴퍼스를 2번 사용하는 작도는
ㄴ. 선분의 수직이등분선의 작도
컴퍼스를 3번 사용하는 작도는
ㄱ. 각의 이등분선의 작도
컴퍼스를 4번 사용하는 작도는
ㄷ. 크기가 같은 각의 작도, ㄹ. 평행선의 작도
따라서 컴퍼스를 사용해야 하는 최소 횟수를 모두 더하면
$2+3+4+4=13$(번)이다.

02 작도 순서는 다음과 같다.
① 점 O를 중심으로 적당한 반지름을 갖는 원을 그려 $\overrightarrow{OX}$와 $\overrightarrow{OY}$와의 교점을 각각 A, B라 한다.
② 점 P를 중심으로 ①의 원과 반지름의 길이가 같은 원을 그려 $\overrightarrow{PQ}$와의 교점을 C라 한다.
③ 점 C를 중심으로 하고 $\overline{AB}$의 길이를 반지름으로 하는 원을 그려 ②의 원과의 교점을 D라 한다.
④ 점 D를 중심으로 하고 $\overline{AB}$의 길이를 반지름으로 하는 원을 그려 ②의 원과의 교점을 E라 한다.
⑤ $\overrightarrow{PE}$를 그리면 $\angle BPC$의 크기는 $\angle XOY$의 크기의 2배가 되는 각이다.
따라서 작도 순서를 바르게 나열하면
㉢(㉠)→㉠(㉢)→㉡→㉣→㉥→㉤이다.

03 자동차의 위치를 P라 하고, 서연, 홍식, 혜영이의 위치를 각각 A, B, C라 하자.
점 P의 위치는 A, B, C로부터 같은 거리에 있으므로 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 수직이등분선의 교점이 자동차의 위치 P가 된다.



04

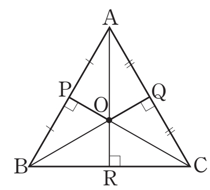


점 B에서 $\overleftrightarrow{XY}$에 수선을 그어 $\overline{BM}=\overline{MG}$인 점 G를 잡고 $\overline{AG}$와 $\overleftrightarrow{XY}$의 교점을 P라 하면 $\angle BPY=\angle GPY$이다.
이때 $\angle APX=\angle GPY$(맞꼭지각)이므로
$\angle APX=\angle BPY$이다.

[참고] $\triangle PBG$에서
$\overline{PB}=\overline{PG}$이므로 $\angle PBG=\angle PGB$이고
$\angle PMB=\angle PMG=90^\circ$이므로
$\angle BPY=\angle GPY$

05 (i) x가 가장 긴 변일 때
$x>y$, $x>6$, $y+6>x$이고, $y=12-x$이므로
$y+6>x$에서 $12-x+6>x$
$2x<18$　$\therefore x<9$
$\therefore 6<x<9$
이때 x는 자연수이므로 $x=7, 8$
$\therefore (x, y, 6)=(7, 5, 6), (8, 4, 6)$
(ii) y가 가장 긴 변일 때
$y>x$, $y>6$, $x+6>y$이고, $x=12-y$이므로
(i)과 같은 방법으로 하면 $y=7, 8$
$\therefore (x, y, 6)=(5, 7, 6), (4, 8, 6)$
(iii) $(x, y, 6)=(6, 6, 6)$
이때 (i)과 (ii)는 서로 SSS 합동인 삼각형이므로
(i), (ii), (iii)에서 구하는 삼각형의 개수는 모두 3개이다.

06 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$를 그으면
$\triangle APO\equiv\triangle BPO$(SAS 합동)
이므로 $\overline{OA}=\overline{OB}$　…… ㉠
$\triangle AQO\equiv\triangle CQO$(SAS 합동)
이므로 $\overline{OA}=\overline{OC}$　…… ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서
$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$이다.



07 ㄱ. $\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서
$\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{BD}=\overline{CD}$, $\overline{AD}$는 공통이므로
$\triangle ABD\equiv\triangle ACD$(SSS 합동)
$\therefore \angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\times60^\circ=30^\circ$
$\triangle ADE$와 $\triangle AFE$에서
$\overline{AD}=\overline{AF}$, $\overline{AE}$는 공통, $\angle DAE=\angle FAE=30^\circ$이므로
$\triangle ADE\equiv\triangle AFE$(SAS 합동)
$\triangle AFE$와 $\triangle AFH$에서
$\overline{AE}=\overline{AH}$, $\overline{AF}$는 공통, $\angle EAF=\angle HAF=30^\circ$이므로
$\triangle AFE\equiv\triangle AFH$(SAS 합동)
$\therefore \triangle ADE\equiv\triangle AFE\equiv\triangle AFH$(SAS 합동)
ㄴ. $\triangle ADE\equiv\triangle AFH$이므로 $\overline{DE}=\overline{FH}$
ㄷ. $\triangle ABC$와 $\triangle AEH$는 모두 정삼각형이므로
$\angle BAH=60^\circ+60^\circ=120^\circ$이고, $\angle AHG=60^\circ$
즉, $\angle BAH+\angle AHG=180^\circ$이므로 $\overline{AB}/\!/\overline{HE}$
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

08 $\triangle QBA$와 $\triangle PCA$에서
$\overline{QA}=\overline{PA}$, $\overline{BA}=\overline{CA}$
$\angle QAB=60^\circ+\angle PAB=\angle PAC$이므로
$\triangle QBA\equiv\triangle PCA$(SAS 합동)
$\therefore \angle ABQ=\angle ACP=60^\circ$

따라서 $\triangle$ABQ에서

$\angle\mathrm{BAQ}+\angle\mathrm{BQA}=180^\circ-\angle\mathrm{ABQ}$

$=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

09 $\triangle$BCD와 $\triangle$ACD에서

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$는 공통이므로

$\triangle\mathrm{BCD}\equiv\triangle\mathrm{ACD}$(SSS 합동)

$\therefore \angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{ACD}$

$=\frac{1}{2}\times60^\circ$

$=30^\circ$

또 $\triangle$BCD와 $\triangle$BED에서

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BE}}$, $\angle\mathrm{DBC}=\angle\mathrm{DBE}$,

$\overline{\mathrm{BD}}$는 공통이므로

$\triangle\mathrm{BCD}\equiv\triangle\mathrm{BED}$(SAS 합동)

$\therefore \angle\mathrm{BED}=\angle\mathrm{BCD}=30^\circ$

10 $\triangle$ABE와 $\triangle$CBD에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CB}}$, $\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{BD}}$,

$\angle\mathrm{ABE}=60^\circ-\angle\mathrm{EBC}=\angle\mathrm{CBD}$이므로

$\triangle\mathrm{ABE}\equiv\triangle\mathrm{CBD}$(SAS 합동)

이때 $\angle\mathrm{DCB}=\angle a$라 하면 $\angle\mathrm{EAB}=\angle a$이므로

$\angle\mathrm{CAE}=60^\circ-\angle a$, $\angle\mathrm{ECB}=50^\circ-\angle a$

$\therefore \angle\mathrm{ACE}=\angle\mathrm{ACB}-\angle\mathrm{ECB}$

$=60^\circ-(50^\circ-\angle a)$

$=10^\circ+\angle a$

따라서 $\triangle$AEC에서

$\angle\mathrm{AEC}+(60^\circ-\angle a)+(10^\circ+\angle a)=180^\circ$

$\therefore \angle\mathrm{AEC}=110^\circ$

11 $\triangle$ADC와 $\triangle$ABH에서

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AH}}$

$\angle\mathrm{DAC}=60^\circ+\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BAH}$이므로

$\triangle\mathrm{ADC}\equiv\triangle\mathrm{ABH}$(SAS 합동)

$\triangle$BFD에서

$\angle\mathrm{BFD}=180^\circ-(\angle\mathrm{BDF}+\angle\mathrm{DBF})$

$=180^\circ-(\angle\mathrm{BDF}+\angle\mathrm{EBF}+\angle\mathrm{DBE})$

$=180^\circ-(\angle\mathrm{BDF}+\angle\mathrm{FDA}+\angle\mathrm{DBE})$

$=180^\circ-(\angle\mathrm{ADB}+\angle\mathrm{ABD})$

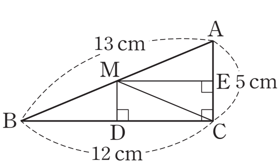
$=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$

$\therefore \angle\mathrm{DFH}=180^\circ-\angle\mathrm{BFD}$

$=180^\circ-60^\circ$

$=120^\circ$

12 오른쪽 그림과 같이 점 M에서 $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면



$\triangle$AME와 $\triangle$MBD에서

$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{MB}}$,

$\angle\mathrm{MAE}=\angle\mathrm{BMD}$(동위각),

$\angle\mathrm{AME}=\angle\mathrm{MBD}$(동위각)이므로

$\triangle\mathrm{AME}\equiv\triangle\mathrm{MBD}$(ASA 합동)

따라서 $\triangle$MAE와 $\triangle$MCE에서

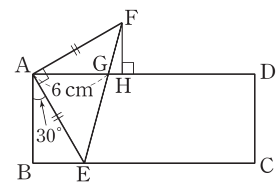
$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{MD}}=\overline{\mathrm{CE}}$이고, $\overline{\mathrm{ME}}$는 공통, $\angle\mathrm{MEA}=\angle\mathrm{MEC}$

이므로

$\triangle\mathrm{MAE}\equiv\triangle\mathrm{MCE}$(SAS 합동)

$\therefore \overline{\mathrm{MC}}=\overline{\mathrm{MA}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{13}{2}$ (cm)

13 오른쪽 그림과 같이 점 F에서 $\overline{\mathrm{AD}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle$AEB와 $\triangle$AFH에서

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AF}}$,

$\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{HAF}=30^\circ$,

$\angle\mathrm{AEB}=\angle\mathrm{AFH}=60^\circ$

이므로

$\triangle\mathrm{AEB}\equiv\triangle\mathrm{AFH}$(ASA 합동)

이때 $\triangle$AFG의 넓이가 12 cm^{2}이므로

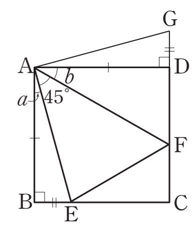
$\frac{1}{2}\times6\times\overline{\mathrm{HF}}=12$ $\therefore \overline{\mathrm{HF}}=4$ (cm)

$\therefore \overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{HF}}=4$ (cm)

14 오른쪽 그림에서 $\angle\mathrm{BAE}=\angle a$,

$\angle\mathrm{DAF}=\angle b$라 하면

$\angle a+\angle b=45^\circ$ …… ㉠



또 $\overline{\mathrm{CD}}$의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{DG}}$가 되도록 점 G를 잡으면

$\triangle\mathrm{ABE}\equiv\triangle\mathrm{ADG}$(SAS 합동)

이므로 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AG}}$,

$\angle\mathrm{GAD}=\angle\mathrm{EAB}=\angle a$

따라서 $\triangle$AEF와 $\triangle$AGF에서

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AG}}$, $\overline{\mathrm{AF}}$는 공통,

$\angle\mathrm{EAF}=\angle\mathrm{GAF}=45^\circ$($\because$ ㉠)이므로

$\triangle\mathrm{AEF}\equiv\triangle\mathrm{AGF}$(SAS 합동)

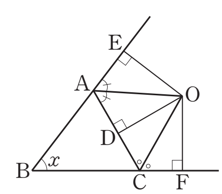
$\therefore \overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{GF}}$

$=\overline{\mathrm{GD}}+\overline{\mathrm{DF}}$

$=\overline{\mathrm{BE}}+\overline{\mathrm{DF}}$

$=3+4=7$ (cm)

15 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ 위에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자.



$\triangle\mathrm{OAE}\equiv\triangle\mathrm{OAD}$(RHA 합동)

이므로 $\angle\mathrm{AOE}=\angle\mathrm{AOD}$

$\triangle\mathrm{OCD}\equiv\triangle\mathrm{OCF}$(RHA 합동)

이므로 $\angle\mathrm{COD}=\angle\mathrm{COF}$

이때 사각형 BFOE의 내각의 크기의 합은 360°이고

$\angle\mathrm{EOF}=\angle\mathrm{EOD}+\angle\mathrm{FOD}$

$=2\angle\mathrm{AOD}+2\angle\mathrm{COD}$

$=2\angle\mathrm{AOC}$

이므로 $\angle x+90^\circ+\angle\mathrm{EOF}+90^\circ=360^\circ$에서

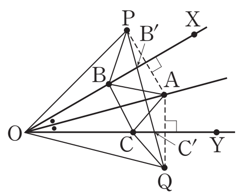
$\angle x+2\angle\mathrm{AOC}=180^\circ$

$\therefore \angle\mathrm{AOC}=90^\circ-\frac{\angle x}{2}$

STEP 3 최고 수준 완성하기 P.57~58

01 5 cm **02** 불가능하다, 풀이 참조 **03** ①, ③
04 13 cm **05** 12 cm^2 **06** 90°
07 b

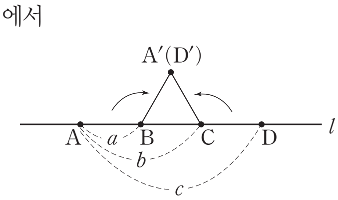
01 다음 그림과 같이 점 A를 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 P, Q라 하고 $\overline{PQ}$와 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$의 교점을 각각 B′, C′라 하자.



이때 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{PB}+\overline{BC}+\overline{CQ}$
$\geq\overline{PB'}+\overline{B'C'}+\overline{C'Q}=\overline{PQ}$
이므로 △ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 $\overline{PQ}$의 길이와 같다.
또 ∠XOP=∠XOA=15°, $\overline{OP}=\overline{OA}=5$ cm이고
∠YOQ=∠YOA=15°, $\overline{OQ}=\overline{OA}=5$ cm이므로
∠POQ=60°이고 $\overline{OP}=\overline{OQ}=5$ cm이다.
즉, △OPQ는 정삼각형이므로 $\overline{PQ}=5$ cm이다.

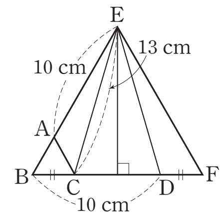
02 (ⅰ) $\overline{AB}<\overline{AD}+\overline{DB}$이므로
$\overline{AB}<5+6=11$ (km)
(ⅱ) $\overline{BC}<\overline{BD}+\overline{DC}$이므로
$\overline{BC}<6+7=13$ (km)
(ⅲ) $\overline{CA}<\overline{AD}+\overline{DC}$이므로
$\overline{CA}<5+7=12$ (km)
이때 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여
$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}<11+13+12=36$ (km)
따라서 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$는 36 km 미만이므로
$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=37$ (km)는 불가능하다.

03 다음 그림에서



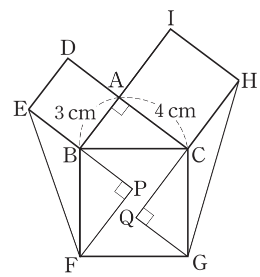
$\overline{A'B}=\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b-a$, $\overline{CD'}=\overline{CD}=c-b$이고
a, $b-a$, $c-b$가 △A′BC의 세 변의 길이이므로
(ⅰ) $a+(b-a)>c-b$에서
$2b>c$, $b>\frac{c}{2}$ (②)
(ⅱ) $(b-a)+(c-b)>a$에서
$c>2a$ (④)
(ⅲ) $a+(c-b)>b-a$에서
$2a+c>2b$ (⑤)
따라서 옳지 않은 것은 ①, ③이다.

04 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$의 연장선 위에 $\overline{DF}=\overline{BC}$가 되도록 점 F를 잡고 $\overline{EF}$를 그으면



△BEF에서 ∠B=60°이고,
$\overline{BE}=\overline{BA}+\overline{AE}=\overline{BC}+\overline{BD}$
$=\overline{BC}+\overline{CF}=\overline{BF}$
이므로 △BEF는 정삼각형이다.
∴ $\overline{BE}=\overline{EF}$
이때 △BCE와 △FDE에서
$\overline{BE}=\overline{FE}$, $\overline{BC}=\overline{FD}$,
∠EBC=∠EFD=60°이므로
△BCE≡△FDE(SAS 합동)
∴ $\overline{DE}=\overline{CE}=13$ cm

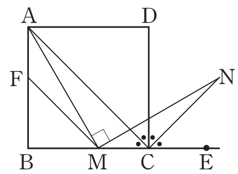
05 다음 그림과 같이 $\overline{EB}$의 연장선 위에 $\overline{AB}=\overline{BP}$가 되도록 점 P를 잡고 $\overline{PF}$를 긋는다.



$\overline{AB}=\overline{PB}$, $\overline{BC}=\overline{BF}$,
∠ABC=90°−∠CBP=∠PBF이므로
△ABC≡△PBF(SAS 합동)
∴ ∠BPF=∠BAC=90°, $\overline{PF}=\overline{AC}=4$ (cm)
∴ $\triangle BEF=\frac{1}{2}\times\overline{BE}\times\overline{PF}$
$=\frac{1}{2}\times3\times4=6\ (\text{cm}^2)$
같은 방법으로 하면
$\triangle CGH=\frac{1}{2}\times\overline{CH}\times\overline{GQ}$
$=\frac{1}{2}\times4\times3=6\ (\text{cm}^2)$
∴ $\triangle BEF+\triangle CGH=6+6=12\ (\text{cm}^2)$

06 △GBC와 △EDC에서
$\overline{BC}=\overline{DC}$, $\overline{CG}=\overline{CE}$,
∠GCB=90°−∠DCG
=∠ECD
이므로 △GBC≡△EDC(SAS 합동)
따라서 사각형 PBCE에서
∠PBC=∠EDC이므로
∠BPE+∠PBC+∠BCE+∠PEC
=∠BPE+∠EDC+(90°+∠DCE)+∠CED
=360° …… ㉠
이때 △EDC에서
∠EDC+∠DCE+∠CED=180° …… ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서
∠BPE+90°+180°=360°
∴ ∠BPE=90°

07 다음 그림과 같이 $\overline{AC} /\!/ \overline{MF}$가 되도록 $\overline{AB}$ 위에 점 F를 잡으면



$\angle ACB = \angle FMB = 45°$(동위각)이므로

$\angle BFM = 180° - (90° + 45°) = 45°$

즉, $\triangle BMF$는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BF} = \overline{BM}$

이때

$\overline{AF} = \overline{AB} - \overline{BF} = \overline{BC} - \overline{BM} = \overline{MC}$ …… ㉠

$\angle AFM = 180° - \angle BFM$

$= 180° - 45°$

$= 135°$

$\angle MCN = \angle MCD + \angle DCN$

$= 90° + 45°$

$= 135°$

$\therefore \angle AFM = \angle MCN$ …… ㉡

$\angle BAM = 90° - \angle AMB = \angle NMC$

$\therefore \angle FAM = \angle CMN$ …… ㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢에서

$\triangle AFM \equiv \triangle MCN$(ASA 합동)

$\therefore \overline{MN} = \overline{AM} = b$

퍼펙트 **단원 마무리** P.59~61

01 105개	**02** $\frac{1}{4}(a-b)$	**03** 46	**04** 6개
05 ID, IH, DK	**06** 40°	**07** 32°	**08** 285°
09 풀이 참조	**10** 60°	**11** 풀이 참조	**12** 6
13 160°	**14** 96 m^2	**15** 32	**16** $n+2$

01 점 A_1을 왼쪽 끝점으로 하는 선분은

$\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$, …, $\overline{A_1A_{15}}$의 14개

점 A_2를 왼쪽 끝점으로 하는 선분은

$\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_2A_4}$, $\overline{A_2A_5}$, …, $\overline{A_2A_{15}}$의 13개

⋮

점 A_{14}를 왼쪽 끝점으로 하는 선분은 $\overline{A_{14}A_{15}}$의 1개

따라서 만들 수 있는 선분의 개수는

$14+13+12+\cdots+3+2+1=105$(개)

02 $\overline{MC} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}a$, $\overline{CN} = \frac{1}{2}\overline{CB} = \frac{1}{2}b$이므로

$\overline{MN} = \overline{MC} + \overline{CN} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(a+b)$

이때 점 P가 $\overline{MN}$의 중점이므로

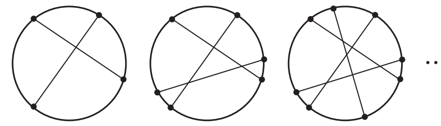
$\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{MN} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{4}(a+b)$

$\therefore \overline{PC} = \overline{MC} - \overline{MP} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}(a+b) = \frac{1}{4}(a-b)$

03 16개의 점, 즉 8개의 서로 만나지 않는 선분으로 원을 나누면 원은 최소 9개의 영역으로 나누어진다.

$\therefore a=9$

또 다음 그림과 같이 새로운 직선을 다른 직선과 모두 만나게 하면 직선의 개수만큼 새로운 영역이 더 생긴다.



[4개의 점일 때] [6개의 점일 때] [8개의 점일 때]

즉, 점의 개수에 따른 영역의 최대 개수는

4개의 점일 때, 4개

6개의 점일 때, $4+3=7$(개)

8개의 점일 때, $4+3+4=11$(개)

⋮

따라서 16개의 점일 때 나누어지는 영역의 최대 개수는

$b=4+3+4+5+6+7+8=37$(개)

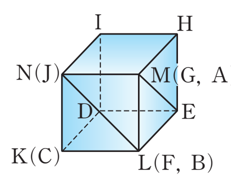
$\therefore a+b=9+37=46$

04 ㄴ. 두 평면 P, Q는 만날 수도 있고 평행할 수도 있다.

ㅇ. 두 직선 l, m은 만날 수도 있고 평행할 수도 있고 꼬인 위치에 있을 수도 있다.

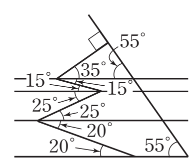
따라서 옳은 것의 개수는 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ, ㅂ, ㅅ의 6개이다.

05 주어진 전개도로 만든 정육면체는 오른쪽 그림과 같다.



$\overline{BJ}$와 꼬인 위치에 있는 선분은 $\overline{ID}$, $\overline{IH}$, $\overline{HE}$, $\overline{HM}$, $\overline{DE}$, $\overline{DK}$, $\overline{ME}$이고, $\overline{EG}$와 꼬인 위치에 있는 선분은 $\overline{ID}$, $\overline{IN}$, $\overline{IH}$, $\overline{NK}$, $\overline{DK}$, $\overline{KL}$, $\overline{NL}$이므로 $\overline{BJ}$, $\overline{EG}$와 모두 꼬인 위치에 있는 선분은 $\overline{ID}$, $\overline{IH}$, $\overline{DK}$이다.

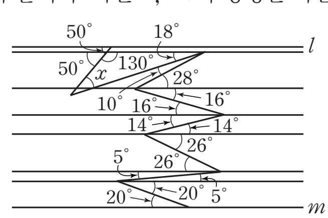
06 오른쪽 그림과 같이 평행한 직선을 그으면



$\angle x = 15° + 25°$

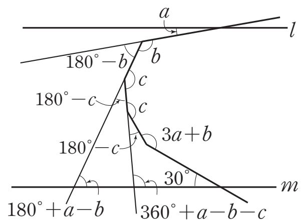
$= 40°$

07 다음 그림과 같이 두 직선 l, m과 평행한 직선을 그으면



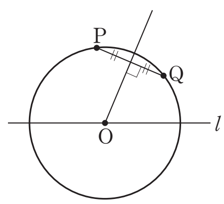
$130° + \angle x + 18° = 180°$ $\therefore \angle x = 32°$

08 다음 그림과 같이 연장선을 그으면



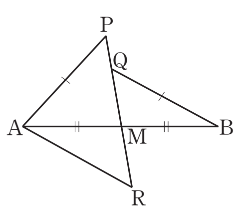
$540^\circ+\angle a-\angle b-2\angle c+30^\circ=3\angle a+\angle b$
$570^\circ=2\angle a+2\angle b+2\angle c$
$\therefore \angle a+\angle b+\angle c=285^\circ$

09 오른쪽 그림과 같이 선분 PQ를 긋고, 선분 PQ의 수직이등분선을 작도한 후 직선 l과의 교점 O를 중심으로 하고 선분 OP를 반지름으로 하는 원을 그린다.



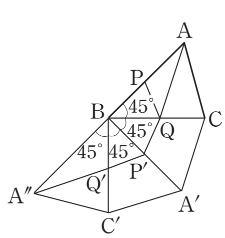
10 $\triangle ACD$와 $\triangle BCE$에서
$\overline{AC}=\overline{BC}$, $\overline{CD}=\overline{EC}$,
$\angle ACD=60^\circ-\angle ACE=\angle BCE$이므로
$\triangle ACD\equiv\triangle BCE$(SAS 합동)
$\therefore \angle ADC=\angle BEC$
$=180^\circ-\angle DEC$
$=180^\circ-60^\circ$
$=120^\circ$
$\therefore \angle ADB=\angle ADC-\angle EDC$
$=120^\circ-60^\circ=60^\circ$

11 오른쪽 그림과 같이 $\overline{QM}$의 연장선 위에 점 R를 $\overline{MR}=\overline{MQ}$가 되도록 잡는다.



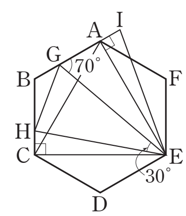
$\triangle AMR$와 $\triangle BMQ$에서
$\overline{AM}=\overline{BM}$, $\overline{MR}=\overline{MQ}$,
$\angle AMR=\angle BMQ$(맞꼭지각)
이므로
$\triangle AMR\equiv\triangle BMQ$(SAS 합동)
$\therefore \overline{AR}=\overline{BQ}=\overline{AP}$
즉, $\triangle APR$는 이등변삼각형이므로
$\angle APR=\angle ARP$
이때 $\angle ARM=\angle BQM$이므로
$\angle APM=\angle BQM$이다.

12 오른쪽 그림과 같이 점 A를 $\overline{BC}$에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 C를 $\overline{BA'}$에 대하여 대칭이동한 점을 C′, 점 A′을 $\overline{BC'}$에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하자.



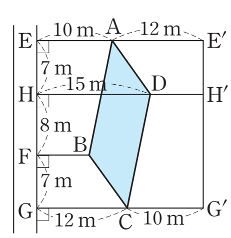
이와 같은 대칭이동에 따라 두 점 P, Q가 이동한 점을 각각 P′, Q′이라 하면
$\angle PBQ=\angle P'BQ=45^\circ$, $\overline{PB}=\overline{P'B}$,
$\overline{QB}$는 공통이므로
$\triangle PBQ\equiv\triangle P'BQ$(SAS 합동)
$\therefore \overline{PQ}=\overline{P'Q}$
$\angle P'BQ=\angle P'BQ'=45^\circ$, $\overline{QB}=\overline{Q'B}$,
$\overline{P'B}$는 공통이므로
$\triangle P'BQ\equiv\triangle P'BQ'$(SAS 합동)
$\therefore \overline{P'Q}=\overline{P'Q'}$
또 $\angle ABQ=\angle A''BQ'=45^\circ$,
$\overline{AB}=\overline{A''B}$, $\overline{QB}=\overline{Q'B}$이므로
$\triangle ABQ\equiv\triangle A''BQ'$(SAS 합동)
$\therefore \overline{AQ}=\overline{A''Q'}$
이때 $\angle ABA''=45^\circ\times4=180^\circ$이므로
$2\overline{AQ}+2\overline{PQ}=\overline{AQ}+\overline{AQ}+\overline{PQ}+\overline{PQ}$
$=\overline{AQ}+\overline{A''Q'}+\overline{P'Q}+\overline{P'Q'}$
$\geq\overline{AA''}=2\overline{AB}=6$
따라서 $2\overline{AQ}+2\overline{PQ}$의 최솟값은 6이다.

13 세 삼각형 ABC, CDE, EFA는 모두 합동인 이등변삼각형이므로
$\overline{AC}=\overline{CE}=\overline{EA}$
즉, $\triangle ACE$는 정삼각형이므로
$\angle AEC=60^\circ$



오른쪽 그림과 같이 $\overline{BA}$의 연장선 위에 $\overline{AI}=\overline{CH}$가 되도록 점 I를 잡으면
$\angle HCE=\angle IAE=90^\circ$, $\overline{CE}=\overline{AE}$이므로
$\triangle HCE\equiv\triangle IAE$(SAS 합동)
$\therefore \angle CHE=\angle AIE$, $\angle HEC=\angle IEA$
이때
$\angle HEC+\angle AEG=\angle IEA+\angle AEG$
$=60^\circ-\angle GEH$
$=30^\circ$
이므로
$\angle GEH=\angle GEI=30^\circ$, $\overline{HE}=\overline{IE}$, $\overline{GE}$는 공통
$\therefore \triangle GHE\equiv\triangle GIE$(SAS 합동)
따라서 $\angle HGE=\angle IGE=70^\circ$이고
$\angle GHE=\angle GIE=\angle CHE$
$=180^\circ-(70^\circ+30^\circ)$
$=80^\circ$
$\therefore \angle GHC=2\angle GHE$
$=2\times80^\circ=160^\circ$

14 오른쪽 그림과 같이 염소 우리에서 양변에 대칭이 되도록 사각형 EGG′E′을 그리면



$\overline{AE'}=\overline{CG}=12\,\text{m}$,
$\overline{CG'}=\overline{AE}=10\,\text{m}$
$\overline{DH'}=\overline{HH'}-\overline{HD}$
$=22-15=7\,(\text{m})$
또 사각형 ADH′E′의 넓이와 사각형 BFGC의 넓이가 같고, 사각형 DCG′H′의 넓이와 사각형 AEFB의 넓이가 같다.

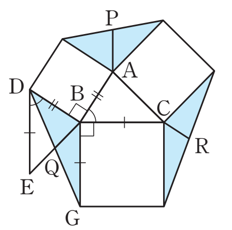
따라서
(사각형 ABCD의 넓이)
=(사각형 EGG′E′의 넓이)
 −2{(사각형 ADH′E′의 넓이)
 +(사각형 DCG′H′의 넓이)}

$=22\times22-2\times\left(\frac{12+7}{2}\times7+\frac{7+10}{2}\times15\right)$

$=484-133-255$

$=96\,(\mathrm{m}^2)$

15 다음 그림과 같이 점 Q를 지나는 선분의 양 끝점을 D, G라 하고, △BQG를 점 Q에 대하여 대칭이동시킨 도형을 △EQD라 하면 도형 DEB는 삼각형이 된다.



△BDE와 △ABC에서

$\overline{\mathrm{DB}}=\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{DE}}(=\overline{\mathrm{GB}})=\overline{\mathrm{BC}}$ …… ㉠

$\angle\mathrm{BDE}=\angle\mathrm{EDQ}+\angle\mathrm{BDQ}$

$=\angle\mathrm{BGQ}+\angle\mathrm{BDQ}$

$=180^\circ-\angle\mathrm{DBG}$ …… ㉡

$\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ABD}+\angle\mathrm{DBG}+\angle\mathrm{CBG}$

$=\angle\mathrm{ABC}+90^\circ+\angle\mathrm{DBG}+90^\circ$

$=360^\circ$

이므로 $\angle\mathrm{ABC}=180^\circ-\angle\mathrm{DBG}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $\angle\mathrm{BDE}=\angle\mathrm{ABC}$ …… ㉣

따라서 ㉠, ㉣에 의하여

△BDE≡△ABC(SAS 합동)

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{BQ}}$

같은 방법으로 하면

$\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{CR}}$

따라서

(△ABC의 둘레의 길이)$=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}$

$=2(\overline{\mathrm{CR}}+\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BQ}})$

$=2\times16$

$=32$

16 (i) $n=1$일 때,

(1, 1, 1)이므로 $f(1)=1$

(ii) $n=2$일 때,

(2, 2, 2), (2, 2, 1)이므로 $f(2)=2$

(iii) $n=3$일 때,

(3, 3, 3), (3, 3, 2), (3, 3, 1),
(3, 2, 2)이므로 $f(3)=4$

(iv) $n=4$일 때,

(4, 4, 4), (4, 4, 3), (4, 4, 2),
(4, 4, 1), (4, 3, 3), (4, 3, 2)
이므로 $f(4)=6$

(v) $n=5$일 때,

(5, 5, 5), (5, 5, 4), (5, 5, 3),
(5, 5, 2), (5, 5, 1), (5, 4, 4),
(5, 4, 3), (5, 4, 2), (5, 3, 3)
이므로 $f(5)=9$

⋮

따라서

$f(1)=1$,

$f(2)=2$,

$f(3)=3+1=3+f(1)$,

$f(4)=4+2=4+f(2)$,

$f(5)=5+3+1=5+f(3)$,

$f(6)=6+4+2=6+f(4)$,

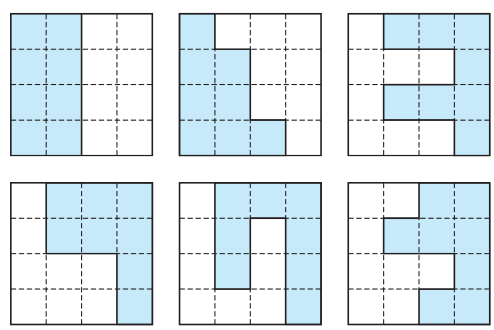
⋮

이므로 $f(n+2)=n+2+f(n)$

$\therefore\ f(n+2)-f(n)=n+2$

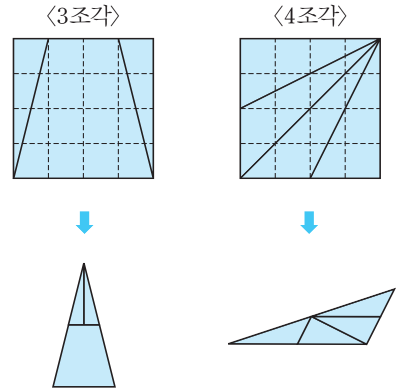
특목 경시 대비 논술·구술 도전하기 P.62~63

1 |예시| 주어진 정사각형을 점선을 따라 이등분하는 방법은 다음 그림과 같다.



2 |예시| 각 조각 수에 맞게 삼각형을 만들 수 있도록 자르는 선을 표시하면 다음 그림과 같다.

〈3조각〉 〈4조각〉



III 평면도형과 입체도형

1 평면도형의 성질

STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.68~72

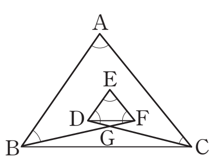
1-1 십각형	**1-2** ②	**1-3** 160개	**2-1** 360°
2-2 15°	**2-3** ⑤	**2-4** 195°	
2-5 $\angle x=40°$, $\angle y=20°$			**2-6** 160°
2-7 124°	**3-1** ②	**3-2** ⑤	**3-3** 320°
3-4 $\angle x=48°$, $\angle y=12°$			**3-5** 1080°
4-1 ③	**4-2** 45°	**4-3** $\frac{25}{11}$	**4-4** 6
4-5 2 : 1	**5-1** $(56\pi+160)\mathrm{m}^2$		
5-2 $(48+8\pi)$ cm, $(96+16\pi)\mathrm{cm}^2$			**5-3** $(48-12\pi)\mathrm{cm}^2$
5-4 80°	**5-5** $\frac{9}{2}\pi\,\mathrm{cm}^2$		**5-6** 24π cm
5-7 $\frac{\pi}{4}\,\mathrm{cm}^2$		**5-8** $\left(16\pi-\frac{64}{3}\right)\mathrm{cm}^2$	

1-1 구하는 다각형을 n각형이라 하면
$a=n-3$, $b=n-2$이므로 $a+b=15$에서
$(n-3)+(n-2)=15$, $2n=20$ $\quad\therefore n=10$
따라서 구하는 다각형은 십각형이다.

1-2 원 위에 있는 이웃하는 점들을 모두 연결한 도형은 n각형이므로 두 꼭짓점을 지나는 직선의 개수는
$\frac{n(n-3)}{2}+n=55$, $n^2-n=110$
$n(n-1)=11\times10$ $\quad\therefore n=11$
따라서 십일각형의 한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선의 개수는 $11-3=8$(개)이다.

1-3 점 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{20}을 순서대로 연결한 다각형은 정이십각형이므로 대각선의 개수는
$\frac{20\times17}{2}=170$(개)
이고, 이 대각선 중 길이가 10인 대각선은 $\overline{P_1P_{11}}$, $\overline{P_2P_{12}}$, $\overline{P_3P_{13}}$, $\cdots$, $\overline{P_{10}P_{20}}$의 10개이다.
따라서 정이십각형의 대각선 중에서 길이가 10보다 짧은 대각선의 개수는 $170-10=160$(개)이다.

2-1 오른쪽 그림과 같이
$\overline{BC}$와 $\overline{DF}$를 그으면

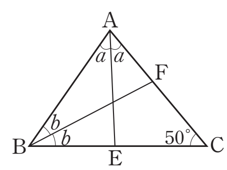


$\angle GDF+\angle GFD$
$=\angle GBC+\angle GCB$
$\therefore \angle A+\angle B+\angle C+\angle D$
$+\angle E+\angle F$
$=$(△ABC의 내각의 크기의 합)
$+$(△DEF의 내각의 크기의 합)
$=180°+180°=360°$

2-2 △ABC를 점 C를 중심으로 하여 50°만큼 회전시켰으므로
$\angle BCB'=\angle ACA'=50°$, $\angle B'=\angle B=50°$이고
$\overline{AC}=\overline{A'C}$이므로
$\angle CAA'=\angle CA'A=\frac{1}{2}\times(180°-50°)=65°$
따라서 △AB'C에서
$\angle A'AC=\angle AB'C+\angle ACB'$이므로
$65°=50°+\angle x$ $\quad\therefore \angle x=15°$

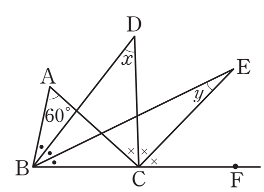
2-3 $\angle DBE=\angle EBC=\angle a$, $\angle BCE=\angle ECF=\angle b$라 하면
△ABC에서
$\angle ABC=180°-2\angle a$, $\angle ACB=180°-2\angle b$이므로
$68°+(180°-2\angle a)+(180°-2\angle b)=180°$
$2\angle a+2\angle b=248°$, $2(\angle a+\angle b)=248°$
$\therefore \angle a+\angle b=124°$
따라서 △BEC에서
$\angle BEC=180°-(\angle a+\angle b)=180°-124°=56°$

2-4 $\angle BAE=\angle CAE=\angle a$,
$\angle ABF=\angle CBF=\angle b$라 하면



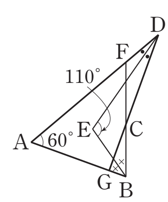
△ABC에서
$2\angle a+2\angle b+50°=180°$,
$2(\angle a+\angle b)=130°$
$\therefore \angle a+\angle b=65°$
△ABE에서 $\angle AEC=\angle a+2\angle b$
△ABF에서 $\angle BFC=2\angle a+\angle b$
$\therefore \angle AEC+\angle BFC=\angle a+2\angle b+2\angle a+\angle b$
$=3(\angle a+\angle b)$
$=3\times65°=195°$

2-5 △ABC에서 $60°+3\bullet=3\times$



$3(\times-\bullet)=60°$
$\therefore \times-\bullet=20°$
△DBC에서 $\angle x+2\bullet=2\times$
$\therefore \angle x=2(\times-\bullet)$
$=2\times20°=40°$
△EBC에서 $\angle y+\bullet=\times$ $\quad\therefore \angle y=\times-\bullet=20°$

2-6 $\angle DAB+\bullet+\times=\angle DEB$이므로



$60°+\bullet+\times=110°$
$\therefore \bullet+\times=50°$
또 $\angle DEB+\bullet+\times=\angle DCB$이므로
$110°+\bullet+\times=\angle DCB$
$\therefore \angle DCB=110°+50°=160°$
$\therefore \angle FCG=\angle DCB=160°$(맞꼭지각)

2-7 $\overline{AM}$의 연장선을 긋고, $\overline{DM}=\overline{ME}$인 점을 E라 하면
$\overline{BM}=\overline{MC}$, $\overline{DM}=\overline{ME}$, $\angle DMC=\angle EMB$(맞꼭지각)
이므로 $\triangle MCD\equiv\triangle MBE$(SAS 합동)
$\therefore \overline{BE}=\overline{CD}=\overline{AB}$

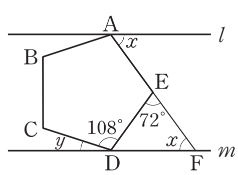
즉, $\triangle ABE$는 $\overline{AB}=\overline{BE}$인 이등변삼각형이므로
$\angle BEA=\angle BAE=28^\circ$
$\angle AMB=180^\circ-(28^\circ+100^\circ)=52^\circ$이므로
$\triangle MBE$에서 $\angle MBE=52^\circ-28^\circ=24^\circ$
$\therefore \angle DCM=\angle MBE=24^\circ$
따라서 $\triangle NBC$에서
$\angle x=100^\circ+24^\circ=124^\circ$

3-1 주어진 다각형을 n각형이라 하면
$1100^\circ<180^\circ\times(n-2)<1300^\circ$, $6.1\cdots<n-2<7.2\cdots$
$\therefore 8.1\cdots<n<9.2\cdots$
n은 정수이므로 $n=9$
$\therefore$ (구각형의 대각선의 개수)$=\dfrac{9\times(9-3)}{2}$
$=27$(개)

3-2 정칠각형 ABCDEFG에서 $\overline{AD}=\overline{BE}$이므로
사각형 ABCD와 사각형 BCDE는 합동이다.
따라서 $\triangle PDE$에서
$\angle APE=\angle BED+\angle ADE=\angle ADC+\angle ADE$
$=\angle CDE$
$=\dfrac{180^\circ\times(7-2)}{7}=\dfrac{900^\circ}{7}$

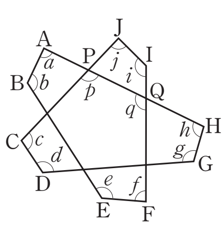
3-3 $\triangle APF$에서 $\angle A+40^\circ=\angle APB$
$\triangle BPQ$에서 $\angle B+\angle QPB=\angle CQE$
$\therefore \angle CQE=\angle B+\angle A+40^\circ$
따라서 사각형 QCDE에서
$\angle CQE+\angle C+\angle D+\angle E=360^\circ$이므로
$(\angle A+\angle B+40^\circ)+\angle C+\angle D+\angle E=360^\circ$
$\therefore \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=320^\circ$

3-4 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AE}$의 연장선을 그어 직선 m과 만나는 점을 F라 하면 정오각형의 한 내각의 크기는
$\dfrac{180^\circ\times(5-2)}{5}=108^\circ$이므로



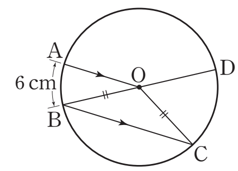
$\angle EFD=\angle x$(엇각), $\angle DEF=180^\circ-108^\circ=72^\circ$
$\triangle EDF$에서
$\angle y+108^\circ=72^\circ+\angle x$ $\quad\therefore \angle x-\angle y=36^\circ$
$\angle x:\angle y=4:1$에서 $\angle x=4\angle y$이므로
$4\angle y-\angle y=36^\circ$ $\quad\therefore \angle y=12^\circ$
$\therefore \angle x=4\times12^\circ=48^\circ$

3-5 오른쪽 그림의 오각형 ABEFQ에서
$a+b+e+f+q=540^\circ$
$\therefore q=540^\circ-(a+b+e+f)$
$\cdots\cdots$ ㉠



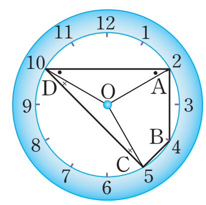
오각형 CDGHP에서
$c+d+g+h+p=540^\circ$
$\therefore p=540^\circ-(c+d+g+h)$ $\cdots\cdots$ ㉡
사각형 IJPQ에서
$i+j+(180^\circ-p)+(180^\circ-q)=360^\circ$이므로
$i+j-(p+q)=0^\circ$ $\cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면
$i+j-\{540^\circ-(a+b+e+f)+540^\circ-(c+d+g+h)\}=0^\circ$
$\therefore a+b+c+d+e+f+g+h+i+j=1080^\circ$
$\therefore \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H$
$+\angle I+\angle J=1080^\circ$

4-1 오른쪽 그림에서
$\overline{AO}/\!/\overline{BC}$이므로
$\angle AOB=\angle OBC$(엇각)
$\triangle OBC$는 $\overline{OB}=\overline{OC}$인 이등변삼각형이므로



$\angle OBC=\angle OCB$
$\triangle OBC$에서 $\angle OBC+\angle OCB=\angle COD$
따라서 $\angle COD=2\angle AOB$이므로 $\overset{\frown}{CD}=12\,\text{cm}$이다.

4-2 오른쪽 그림과 같이 시계의 중심을 O라 하면 1시간에 대한 중심각의 크기는 $\dfrac{360^\circ}{12}=30^\circ$이므로



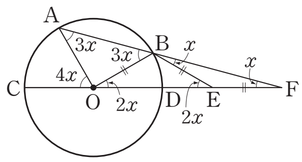
$\triangle AOD$에서
$\angle AOD=30^\circ\times4=120^\circ$
$\therefore \angle ODA=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$
$\triangle COD$에서
$\angle COD=30^\circ\times5=150^\circ$
$\therefore \angle ODC=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-150^\circ)=15^\circ$
$\therefore \angle ADC=\angle ODA+\angle ODC$
$=30^\circ+15^\circ=45^\circ$

4-3 $\triangle OCD$에서 $\overline{OC}=\overline{OD}$이므로
$\angle ODC=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-60^\circ)=60^\circ$
$\therefore \angle ODE=180^\circ-60^\circ=120^\circ$
또 $\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 $\angle AOB=\angle COD=60^\circ$이고
$\angle OBA=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-60^\circ)=60^\circ$
$\therefore \angle OBE=180^\circ-60^\circ=120^\circ$
사각형 ODEB에서
$\angle BOD=360^\circ-(120^\circ+120^\circ+45^\circ)=75^\circ$
$\therefore \angle AOC=360^\circ-(60^\circ+60^\circ+75^\circ)=165^\circ$
$\therefore \dfrac{5\overset{\frown}{BD}}{\overset{\frown}{AC}}=\dfrac{5\angle BOD}{\angle AOC}=\dfrac{5\times75^\circ}{165^\circ}=\dfrac{25}{11}$

4-4 $\triangle OCD$에서 $\overline{OC}=\overline{OD}$이므로
$\angle ODC=\angle OCD=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-30^\circ)=75^\circ$
$\triangle AED$에서
$\angle EAD=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$
$\triangle OAB$에서 $\overline{OA}=\overline{OB}$이므로

$\angle ABO=\angle BAO=60^\circ$이고
$\angle AOB=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$
$\therefore\ \angle BOC=180^\circ-(60^\circ+30^\circ)=90^\circ$
$\therefore\ \dfrac{4\overset{\frown}{BC}}{\overset{\frown}{AB}}=\dfrac{4\angle BOC}{\angle AOB}=\dfrac{4\times 90^\circ}{60^\circ}=6$

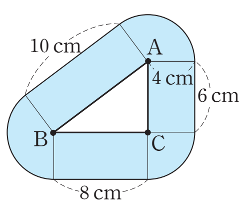
4-5



$\angle EFB=\angle x$라 하면
$\overline{EB}=\overline{EF}$이므로 $\angle EBF=\angle EFB=\angle x$
$\triangle BEF$에서
$\angle BEO=\angle EBF+\angle EFB$
$\quad=\angle x+\angle x=2\angle x$
$\overline{BO}=\overline{BE}$이므로 $\angle BOE=\angle BEO=2\angle x$
$\triangle BOF$에서
$\angle ABO=\angle BOF+\angle BFO$
$\quad=2\angle x+\angle x=3\angle x$
$\overline{OA}=\overline{OB}$이므로 $\angle OAB=\angle OBA=3\angle x$
$\triangle AOF$에서
$\angle AOC=\angle OAF+\angle OFA$
$\quad=3\angle x+\angle x=4\angle x$
$\therefore\ \overset{\frown}{AC} : \overset{\frown}{BD}=\angle AOC : \angle BOD$
$\quad=4\angle x : 2\angle x=2 : 1$

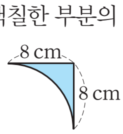
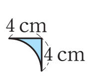
5-1 (넓이)=(반지름의 길이가 9m인 원의 넓이)
−(반지름의 길이가 5m인 원의 넓이)
+(가로의 길이가 20m이고
세로의 길이가 4m인 직사각형의 넓이)×2
$=\pi\times 9^2-\pi\times 5^2+20\times 4\times 2$
$=81\pi-25\pi+160$
$=56\pi+160\,(m^2)$

5-2 원이 지나간 자리는 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로



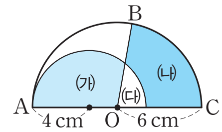
(둘레의 길이)
$=2\times(10+6+8)+2\pi\times 4$
$=48+8\pi\ (cm)$
(넓이)
$=4\times(10+6+8)+\pi\times 4^2$
$=96+16\pi\ (cm^2)$

5-3 (색칠한 부분의 넓이)

=  − 

$=\left(8\times 8-\pi\times 8^2\times\dfrac{90}{360}\right)-\left(4\times 4-\pi\times 4^2\times\dfrac{90}{360}\right)$
$=(64-16\pi)-(16-4\pi)$
$=48-12\pi\ (cm^2)$

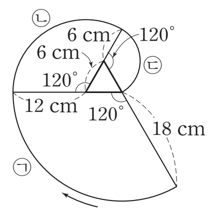
5-4 오른쪽 그림에서 ㈎와 ㈏의 넓이가 같으므로



㈎+㈐=㈏+㈐
따라서 $\angle BOC=x^\circ$라 하면
$\pi\times 4^2\times\dfrac{1}{2}=\pi\times 6^2\times\dfrac{x}{360}$
$\therefore\ x=80$
$\therefore\ \angle BOC=80^\circ$

5-5 (색칠한 부분의 넓이)
=(부채꼴 AEC의 넓이)+($\triangle ABC$의 넓이)
−($\triangle ADE$의 넓이)−(부채꼴 ADB의 넓이)
=(부채꼴 AEC의 넓이)−(부채꼴 ADB 넓이)
$=\left(\pi\times 6^2\times\dfrac{60}{360}\right)-\left(\pi\times 3^2\times\dfrac{60}{360}\right)$
$=6\pi-\dfrac{3}{2}\pi=\dfrac{9}{2}\pi\ (cm^2)$

5-6 오른쪽 그림에서 줄의 끝이 움직인 거리는 부채꼴 ㉠, ㉡, ㉢의 호의 길이의 합과 같다.



∴ (줄의 끝이 움직인 거리)
$=\left(2\pi\times 18\times\dfrac{120}{360}\right)$
$\quad+\left(2\pi\times 12\times\dfrac{120}{360}\right)$
$\quad+\left(2\pi\times 6\times\dfrac{120}{360}\right)$
$=12\pi+8\pi+4\pi$
$=24\pi\,(cm)$

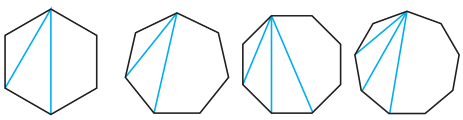
5-7 $\overline{AC}=2a\,cm$, $\overline{BD}=2b\,cm$라 하면
$S_1=S_2$이므로
($\overline{AC}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)
+($\overline{BD}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)
=($\overline{CD}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)
즉, $\dfrac{1}{2}\times\pi\times\left(\dfrac{2a}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\times\pi\times\left(\dfrac{2b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}\times\pi\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$
$\dfrac{1}{2}\pi a^2+\dfrac{1}{2}\pi b^2=\dfrac{\pi}{8}\qquad\therefore\ \pi a^2+\pi b^2=\dfrac{\pi}{4}$
따라서 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$를 각각 지름으로 하는 두 원의 넓이의 합은 $\dfrac{\pi}{4}\,cm^2$이다.

5-8 $\overline{FC}=x\,cm$라 하면 $\overline{DF}=(8-x)\,cm$이므로
$S_1=\dfrac{1}{2}\times 4\times(8-x)=16-2x\ (cm^2)$
$S_2=\dfrac{1}{2}\times 8\times x=4x\ (cm^2)$
이때 $S_2=4S_1$이므로
$4x=4(16-2x)$, $4x=64-8x\qquad\therefore\ x=\dfrac{16}{3}$
∴ (색칠한 부분의 넓이)$=\pi\times 8^2\times\dfrac{90}{360}-\dfrac{1}{2}\times 8\times\dfrac{16}{3}$
$\qquad=16\pi-\dfrac{64}{3}\ (cm^2)$

STEP 2 실전 문제 정복하기 P.73~75

01 79 **02** 24개 **03** 90° **04** 100° **05** 720°
06 900° **07** 10개 **08** 12 **09** 10개 **10** $3:1$ **11** 3
12 1 **13** 6π cm, 2π cm^2 **14** 4π cm
15 6π cm

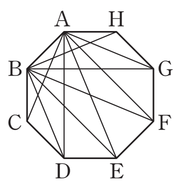
01 다음 그림에서
$f(6)=2,\ f(7)=2,\ f(8)=3,\ f(9)=3$이므로



[정육각형] [정칠각형] [정팔각형] [정구각형]

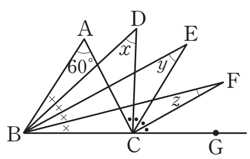
$f(10)=f(11)=4,\ f(12)=f(13)=5,$
$f(14)=f(15)=6,\ f(16)=f(17)=7,$
$f(18)=f(19)=8,\ f(20)=9$
$\therefore\ f(6)+f(7)+\cdots+f(20)=2\times(2+3+\cdots+8)+9$
$=79$

02 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$에 대하여 만들 수 있는 삼각형은 $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ABE$, $\triangle ABF$, $\triangle ABG$, $\triangle ABH$의 6개이다.



이때 $\triangle ABE$와 $\triangle ABF$는 직각삼각형이므로 $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 둔각삼각형의 개수는 4개이다. 나머지 7개의 변에 대해서도 마찬가지이므로 모든 둔각삼각형의 개수는 $8\times4=32$(개)이다.
따라서 $\triangle ABH$와 같이 정팔각형의 두 변을 포함하는 이등변삼각형이 두 번씩 반복되므로 구하는 삼각형의 개수는 $32-8=24$(개)이다.

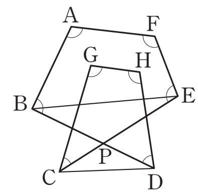
03 $\triangle ABC$에서



$60^\circ+4\times=4\bullet,\ \bullet-\times=15^\circ$
$\triangle DBC$에서
$\angle x+3\times=3\bullet$
$\angle x=3(\bullet-\times)=3\times15^\circ=45^\circ$
$\triangle EBC$에서
$\angle y+2\times=2\bullet,\ \angle y=2(\bullet-\times)=2\times15^\circ=30^\circ$
$\triangle FBC$에서
$\angle z+\times=\bullet,\ \angle z=\bullet-\times=15^\circ$
$\therefore\ \angle x+\angle y+\angle z=45^\circ+30^\circ+15^\circ=90^\circ$

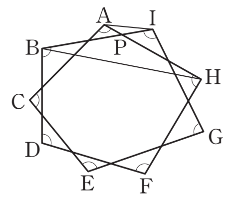
04 $\angle BAD=\angle x,\ \angle BCD=\angle y$라 하면
$\angle ECF=\angle BCD=\angle y$(맞꼭지각)
$\angle ECF=\angle x+\angle AED+\angle AFB$이므로
$\angle x+2\bullet+2\times=\angle y \qquad \therefore\ \bullet+\times=\dfrac{\angle y-\angle x}{2}$
이때 $\angle ECF=\angle EPF+\bullet+\times=\angle y$이므로
$\angle EPF=\angle y-(\bullet+\times)=\angle y-\dfrac{\angle y-\angle x}{2}$
$=\dfrac{\angle x+\angle y}{2}=\dfrac{200^\circ}{2}=100^\circ$

05 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$와 $\overline{CE}$의 교점을 P라 하고 $\overline{BE}$와 $\overline{CD}$를 그으면 $\triangle PCD$와 $\triangle PEB$에서



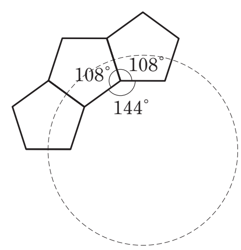
$\angle PCD+\angle PDC$
$=\angle PEB+\angle PBE$
$\therefore\ \angle A+\angle B+\angle C+\angle D$
$+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H$
$=$(사각형 ABEF의 내각의 크기의 합)
$+$(사각형 GCDH의 내각의 크기의 합)
$=360^\circ+360^\circ=720^\circ$

06 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AH}$와 $\overline{BI}$의 교점을 P라 하고 $\overline{AI}$와 $\overline{BH}$를 그으면



$\triangle PAI$와 $\triangle PBH$에서
$\angle PAI+\angle PIA$
$=\angle PBH+\angle PHB$
$\therefore\ \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H+\angle I$
$=$(사각형 BDFH의 내각의 크기의 합)
$+$(오각형 ACEGI의 내각의 크기의 합)
$=360^\circ+180^\circ\times(5-2)$
$=360^\circ+540^\circ=900^\circ$

07 정오각형의 한 내각의 크기는

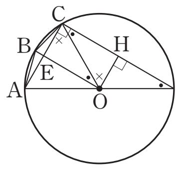


$\dfrac{180^\circ\times(5-2)}{5}=108^\circ$이므로
원 내부에 생기는 정 n각형의 한 내각의 크기는
$360^\circ-108^\circ\times2=144^\circ$이다.
$\dfrac{180^\circ\times(n-2)}{n}=144^\circ$라 하면
$180^\circ\times(n-2)=144^\circ n,\ 180^\circ n-360^\circ=144^\circ n$
$36^\circ n=360^\circ \qquad \therefore\ n=10$
따라서 원주를 완벽하게 채우려면 10개의 정오각형이 필요하다.

08 각 변마다 2개의 교점이 생기므로 2개의 같은 정n각형을 겹치면 작은 삼각형을 제외한 부분은 $2n$각형이 된다.
따라서 $2n$각형의 내각의 크기의 합은 3960°이므로
$180^\circ\times(2n-2)=3960^\circ,\ 2n-2=22$
$\therefore\ n=12$

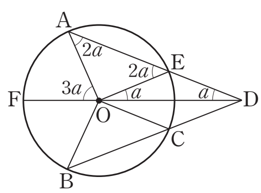
09 정n각형의 한 내각의 크기는
$\dfrac{180^\circ\times(n-2)}{n}=180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$
이므로 이 식에서 각의 크기가 짝수가 되려면 $\dfrac{360^\circ}{n}$가 짝수이어야 한다.
$360=2^3\times3^2\times5$이므로
n은 $3\le n\le20$인 $2^2\times3^2\times5$의 약수가 되어야 한다.
따라서 구하는 n의 개수는 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20의 10개이다.

10 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CO}$를 긋고



$\angle AOB=\angle x$라 하면
$\overline{AB}=\overline{BC}$이므로
$\angle BOC=\angle AOB=\angle x$,
$\overline{OC}=\overline{OA}$, $\overline{OE}$는 공통
$\therefore$ $\triangle OCE\equiv\triangle OAE$(SAS 합동)
$\widehat{CD}=4\widehat{AB}$이므로 $\angle COD=4\angle AOB=4\angle x$
즉, $\angle AOD=6\angle x=180^\circ$에서 $\angle x=30^\circ$
이때 점 O에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\angle ACD=90^\circ$이고, $\angle x=\bullet=30^\circ$이므로
$\times=90^\circ-30^\circ=60^\circ$, $\overline{CO}$는 공통
$\therefore$ $\triangle CEO\equiv\triangle OHC$(ASA 합동)
또 $\triangle OHC\equiv\triangle OHD$(RHA 합동)
따라서 $\triangle CEO\equiv\triangle OHC\equiv\triangle OHD\equiv\triangle AEO$이므로
$S_1=\triangle CEO+\triangle OHC+\triangle OHD=3\triangle AEO$,
$S_2=\triangle AEO$
$\therefore$ $S_1 : S_2=3 : 1$

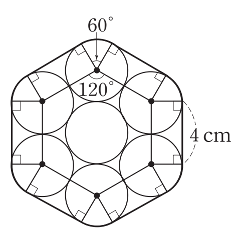
11 오른쪽 그림에서 $\overline{OD}$의 연장선이 원 O와 만나는 점을 F라 하자.



사각형 OCDE가 마름모이므로 $\triangle EOD$, $\triangle COD$는 모두 이등변삼각형이고
$\angle EOD=\angle a$라 하면
$\angle EDO=\angle a$, $\angle OEA=2\angle a$($\angle OED$의 외각)
$\triangle OAE$에서
$\overline{OA}=\overline{OE}$이므로 $\angle OAE=\angle OEA=2\angle a$
$\triangle AOD$에서
$\angle AOF=2\angle a+\angle a=3\angle a$($\angle AOD$의 외각)
또 $\triangle OED\equiv\triangle OCD$(SSS 합동)이므로
$\angle ODC=\angle ODE=\angle a$
따라서 같은 방법으로 하면 $\angle BOF=3\angle a$

$\therefore$ $\dfrac{\widehat{AB}}{\widehat{CE}}=\dfrac{6\angle a}{2\angle a}=3$

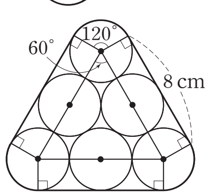
12 오른쪽 그림과 같이 6개의 원의 중심을 연결한 도형은 한 변의 길이가 4 cm인 정육각형이므로



$l_1=4\times6+\left(2\pi\times2\times\dfrac{60}{360}\right)\times6$

$\quad=24+4\pi$ (cm)

오른쪽 그림과 같이 6개의 원의 중심을 연결한 도형은 한 변의 길이가 8 cm인 정삼각형이므로



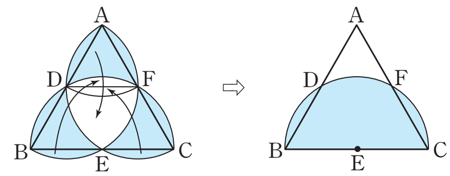
$l_2=8\times3+\left(2\pi\times2\times\dfrac{120}{360}\right)\times3$

$\quad=24+4\pi$ (cm)

$\therefore$ $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{24+4\pi}{24+4\pi}=1$

13 색칠한 부분의 둘레의 길이는 반원인 부채꼴의 호의 길이의 3배와 같으므로

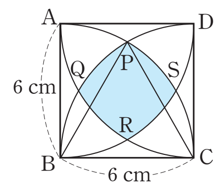
(색칠한 부분의 둘레의 길이)$=\left(2\pi\times2\times\dfrac{1}{2}\right)\times3=6\pi$ (cm)



색칠한 부분의 넓이는 위의 그림과 같이 이동하면 반원의 넓이와 같으므로

(색칠한 부분의 넓이)$=\pi\times2^2\times\dfrac{1}{2}=2\pi$ (cm^2)

14 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PB}$, $\overline{PC}$를 그으면 $\overline{PB}=\overline{BC}=\overline{PC}$이므로 $\triangle PBC$는 정삼각형이다.



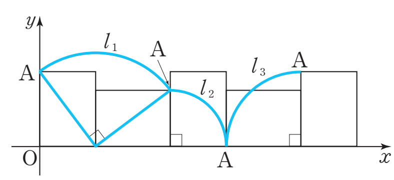
같은 방법으로 하면
$\triangle RDA$, $\triangle SAB$, $\triangle QCD$는 모두 정삼각형이므로

$\widehat{PQ}=\widehat{QR}=\widehat{RS}=\widehat{PS}=\dfrac{1}{3}\widehat{AC}$

$\quad=\dfrac{1}{3}\times\left(2\pi\times6\times\dfrac{90}{360}\right)=\pi$ (cm)

$\therefore$ (색칠한 부분의 둘레의 길이)$=4\times\widehat{PQ}=4\pi$ (cm)

15 다음 그림과 같이 꼭짓점 A가 움직인 거리를 차례로 l_1, l_2, l_3라 하자.



$l_1=2\pi\times5\times\dfrac{90}{360}=\dfrac{5}{2}\pi$ (cm)

$l_2=2\pi\times3\times\dfrac{90}{360}=\dfrac{3}{2}\pi$ (cm)

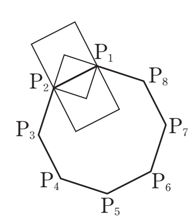
$l_3=2\pi\times4\times\dfrac{90}{360}=2\pi$ (cm)

$\therefore$ $l_1+l_2+l_3=\dfrac{5}{2}\pi+\dfrac{3}{2}\pi+2\pi=6\pi$ (cm)

STEP 3 최고 수준 완성하기 P.76~77

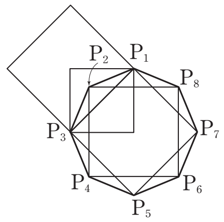
01 74개	**02** 275개	**03** 54°
04 $32\pi+5$	**05** 7000 m^2	**06** $\dfrac{38}{3}\pi$ cm

01 (i) 인접한 두 점을 공유하는 경우
두 점 P_1, P_2에서 3개의 정사각형을 그릴 수 있고 나머지 두 점 (P_2, P_3), (P_3, P_4), (P_4, P_5), (P_5, P_6), (P_6, P_7), (P_7, P_8), (P_8, P_1)에 대해서도 마찬가지이므로 구하는 정사각형의 개수는 $3\times8=24$(개)이다.



(ii) 한 칸 건너 두 점을 공유하는 경우

정사각형의 개수는 사각형 $P_1P_3P_5P_7$, $P_2P_4P_6P_8$과 두 정사각형의 각 변에 대하여 2개씩 더 그릴 수 있으므로 $2\times8=16$(개)를 더 그릴 수 있다.



$\therefore\ 2+16=18$(개)

(iii) 두 칸 건너 두 점을 공유하는 경우

두 점 P_1, P_4에서 (i)과 같은 모양으로 3개의 정사각형을 그릴 수 있고, 나머지 두 점 $(P_1,\ P_6)$, $(P_2,\ P_5)$, $(P_2,\ P_7)$, $(P_3,\ P_6)$, $(P_3,\ P_8)$, $(P_4,\ P_7)$, $(P_5,\ P_8)$에 대해서도 마찬가지이므로 구하는 정사각형의 개수는 $3\times8=24$(개)이다.

(iv) 세 칸 건너 두 점을 공유하는 경우

두 점 P_1, P_5에서 (i)과 같은 모양으로 3개의 정사각형을 그릴 수 있는데 (ii)의 정사각형과 중복되는 정사각형이 1개 있으므로 2개의 정사각형을 그릴 수 있다.

이때 나머지 두 점 $(P_2,\ P_6)$, $(P_3,\ P_7)$, $(P_4,\ P_8)$에 대해서도 마찬가지이므로 구하는 정사각형의 개수는 $2\times4=8$(개)이다.

따라서 (i)~(iv)에서 구하는 정사각형의 개수는 $24+18+24+8=74$(개)이다.

02 정십오각형의 꼭짓점을 차례로 A_1, A_2, $\cdots$, A_{15}라 하면

(i) 한 변이 겹치는 경우

한 변이 $\overline{A_1A_2}$일 때, 나머지 꼭짓점은 A_4, A_5, A_6, $\cdots$, A_{14} 중 한 개이므로 삼각형의 개수는 11개이다.

나머지 14개의 변에 대해서도 마찬가지이므로 모든 삼각형의 개수는 $15\times11=165$(개)이다.

(ii) 두 변이 겹치는 경우

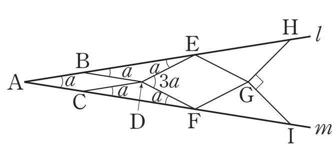
$\triangle A_1A_2A_3$, $\triangle A_2A_3A_4$, $\triangle A_3A_4A_5$, $\cdots$,

$\triangle A_{13}A_{14}A_{15}$, $\triangle A_{14}A_{15}A_1$, $\triangle A_{15}A_1A_2$의 15개

따라서 (i), (ii)에서 정십오각형의 변과 겹치는 삼각형의 개수는 $165+15=180$(개)이다.

$\therefore$ (구하는 삼각형의 개수)$=455-180=275$(개)

03



$\angle BAC=\angle a$라 하면

$\overline{BD}/\!/\overline{AC}$이므로 $\angle EBD=\angle BAC=\angle a$(동위각)

$\triangle BDE$에서 $\overline{BD}=\overline{ED}$이므로

$\angle BED=\angle EBD=\angle a$

같은 방법으로 하면 $\angle DFC=\angle DCF=\angle a$

이때

$\angle EDF=\angle EAF+\angle AED+\angle AFD$

$\quad=\angle a+\angle a+\angle a=3\angle a$

$\overline{EF}$를 그으면 $\triangle DEF\equiv\triangle GEF$(SSS 합동)이므로

$\angle EGF=\angle EDF=3\angle a$

$\overline{DG}$를 그으면 $\triangle EDG\equiv\triangle FDG$(SSS 합동)이므로

$\angle DEG=\angle DFG=\frac{1}{2}(360^\circ-3\angle a-3\angle a)$

$\quad=180^\circ-3\angle a$

$\angle BEH=180^\circ$이므로

$\angle GEH=180^\circ-\angle a-(180^\circ-3\angle a)=2\angle a$

$\triangle EGH$에서 $\overline{EG}=\overline{HG}$이므로

$\angle EHG=\angle HEG=2\angle a$

같은 방법으로 하면 $\angle GIF=\angle GFI=2\angle a$

이때

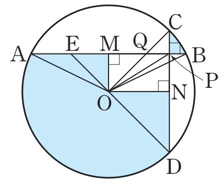
$\angle HGI=\angle HAI+\angle AHG+\angle AIG$

$\quad=\angle a+2\angle a+2\angle a=5\angle a$

따라서 $5\angle a=90^\circ$에서 $\angle a=18^\circ$이므로

$\angle EDF=3\angle a=3\times18^\circ=54^\circ$

04 오른쪽 그림과 같이 선분 DO의 연장선이 현 AB와 만나는 점을 E라 하면 $\overline{MO}/\!/\overline{CD}$이므로



$\angle QOM=\angle OCD$(엇각)

$\overline{OC}=\overline{OD}$(반지름)이므로

$\angle ODC=\angle OCD$이고

$\angle ODC+\angle OCD=\angle COE$이므로

$\angle ODC+\angle OCD=\angle EOM+\angle QOM$

$\angle ODC=\angle OCD=\angle EOM=\angle QOM$

이때 $\triangle AOB$는 이등변삼각형이므로 $\angle AOM=\angle BOM$

$\therefore \angle AOE=\angle BOC$

즉, $\angle AOD+\angle BOC=\angle AOD+\angle AOE=180^\circ$이므로

두 부채꼴 OAD, OBC의 넓이의 합을 S라 하면

$$S=\pi\times8^2\times\frac{\angle AOD}{360^\circ}+\pi\times8^2\times\frac{\angle BOC}{360^\circ}$$

$$=64\pi\times\frac{180}{360}=32\pi$$

$\therefore$ (색칠한 두 부분의 넓이의 합)

$=S-(\triangle COP+\triangle BOP)+\triangle OBM+\triangle ONC$

$=S-\frac{1}{2}\times\overline{CP}\times\overline{ON}-\frac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{OM}$

$\quad+\frac{1}{2}\times\overline{OM}\times\overline{BM}+\frac{1}{2}\times\overline{ON}\times\overline{NC}$

$=S+\frac{1}{2}\times\overline{ON}\times(\overline{NC}-\overline{CP})$

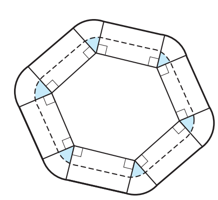
$\quad+\frac{1}{2}\times\overline{OM}\times(\overline{BM}-\overline{BP})$

$=S+\frac{1}{2}\times\overline{ON}\times\overline{PN}+\frac{1}{2}\times\overline{OM}\times\overline{PM}$

$=S+\frac{1}{2}\square ONPM+\frac{1}{2}\square ONPM$

$=S+\square ONPM=32\pi+5$

05 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 둘레의 길이의 합은 반지름의 길이가 2m인 원의 둘레의 길이와 같으므로 $2\times\pi\times2=4\pi$ (m)



산책로의 중앙선에서 색칠한 부분을 제외한 직선 부분의 둘레의 길이의 합을 xm라 하면

산책로의 중앙선 둘레의 길이의 합은 1750 m이므로

$4\pi + x = 1750\ (\mathrm{m})$

∴ (산책로의 넓이)

$=$(반지름의 길이가 4 m인 원의 넓이)

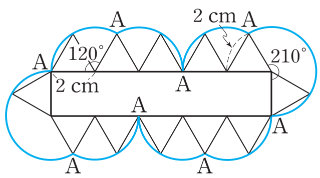
$+$(직사각형의 넓이의 합)

$=(\pi \times 4^2) + 4 \times x$

$=4(4\pi + x)$

$=4 \times 1750 = 7000\ (\mathrm{m}^2)$

06 점 A가 움직인 자리를 나타내면 다음 그림과 같다.



∴ (점 A가 움직인 거리)

$=6\times$(반지름의 길이가 2 cm이고 중심각의 크기가 120°인 부채꼴의 호의 길이)

$+2\times$(반지름의 길이가 2 cm이고 중심각의 크기가 210°인 부채꼴의 호의 길이)

$=6 \times \left(2\pi \times 2 \times \frac{120}{360}\right) + 2 \times \left(2\pi \times 2 \times \frac{210}{360}\right)$

$=8\pi + \frac{14}{3}\pi = \frac{38}{3}\pi\ (\mathrm{cm})$

2 입체도형의 성질

STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.80~84

1-1 33개 **1-2** ④ **1-3** 38 **1-4** ② **2-1** ①

2-2 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형 **2-3** 면 ⓑ, ⓔ, ⓠ

2-4 280 **3-1** 101 **3-2** 정십이면체 **3-3** 30

4-1 ② **4-2** 4 **4-3** $16\ \mathrm{cm}^2$ **5-1** $72\pi\ \mathrm{cm}^3$

5-2 $72\pi\ \mathrm{cm}^2$ **5-3** $864\ \mathrm{cm}^2$

5-4 $(128\pi + 32n\pi)\ \mathrm{cm}^2$

5-5 $(120\pi - 240)\ \mathrm{cm}^3$ **6-1** $180\ \mathrm{cm}^3$

6-2 $\frac{14}{3}$ cm **6-3** $384\pi\ \mathrm{cm}^2$

7-1 $\frac{256}{3}\pi\ \mathrm{cm}^3$ **7-2** 119000원 **7-3** π

7-4 $\frac{1701}{2}\pi\ \mathrm{cm}^3$ **7-5** 60

1-1 n각기둥의 꼭짓점의 개수는 $2n$개, 면의 개수는 $(n+2)$개이므로 $2n-(n+2)=9$

$n-2=9$ ∴ $n=11$

따라서 십일각기둥의 모서리의 개수는 $3\times 11=33$(개)이다.

1-2 ① 옆면은 사다리꼴이다.

② 두 밑면은 서로 평행하고 모양은 같지만 크기가 다르다.

③ 오각뿔대와 오각기둥의 면의 개수는 $5+2=7$(개)로 같다.

④ 오각뿔대의 모서리의 개수는 $3\times 5=15$(개), 오각뿔의 모서리의 개수는 $2\times 5=10$(개)이므로 모서리의 개수는 오각뿔대가 오각뿔보다 5개 더 많다.

⑤ 오각뿔을 밑면에 평행한 평면으로 자르면 오각뿔대를 얻는다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

1-3 각뿔대의 밑면을 n각형이라 하면

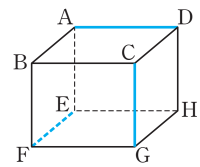
$\frac{n(n-3)}{2}=54$, $n(n-3)=108=12\times 9$

∴ $n=12$

따라서 십이각뿔대이므로 $a=14$, $b=24$

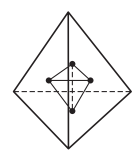
∴ $a+b=14+24=38$

1-4 오른쪽 그림과 같이 모서리 CG에 파란색을 칠하면 면 BFGC와 면 CGHD가 파란색 모서리를 공유하고, 모서리 AD와 EF에 파란색을 칠하면 각각 면 ABCD와 AEHD, 면 ABFE와 EFGH가 파란색을 공유하게 된다.



따라서 적어도 3개 이상의 모서리에 파란색을 칠해야 한다.

2-1 ① 정사면체의 면은 4개이므로 꼭짓점이 4개인 정다면체, 즉 정사면체가 생긴다.



[참고]

	정사면체	정육면체	정팔면체
꼭짓점의 개수	4개	8개	6개
면의 개수	4개	6개	8개

	정십이면체	정이십면체
꼭짓점의 개수	20개	12개
면의 개수	12개	20개

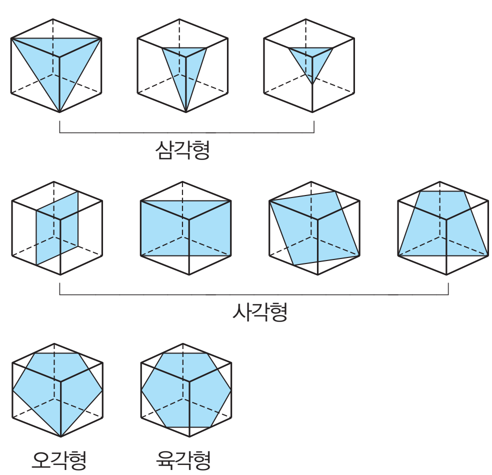
즉, 각 면의 중심을 연결하여 생기는 입체도형은 다음과 같다.

정사면체 − 정사면체, 정육면체 − 정팔면체,

정팔면체 − 정육면체, 정십이면체 − 정이십면체,

정이십면체 − 정십이면체

2-2



따라서 가능한 다각형은 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형이다.

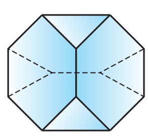
2-3 면 ⓐ, ⓔ, ⓘ, ⓜ, ⓠ가 한 꼭짓점에 모인다. 이때 면 ⓐ와 인접하는 면이 면 ⓠ가 되므로 면 ⓐ와 인접하는 면은 면 ⓑ, ⓔ, ⓠ가 된다.

2-4 한 면만 색칠된 정육면체의 개수는 커다란 정육면체의 모서리와 꼭짓점을 포함하지 않고 밖에서 보이는 면에 위치한 정육면체의 개수와 같다.
즉, $a=(8\times8)\times6=384$(개)
두 면이 색칠된 정육면체의 개수는 커다란 정육면체의 꼭짓점을 포함하지 않고 모서리에 위치한 정육면체의 개수와 같다.
즉, $b=8\times12=96$(개)
세 면이 색칠된 정육면체의 개수는 커다란 정육면체의 꼭짓점에 위치한 정육면체의 개수와 같다.
즉, $c=1\times8=8$(개)
$\therefore\ a-b-c=384-96-8=280$

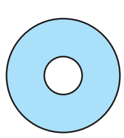
3-1 직육면체의 꼭짓점의 개수는 8개, 모서리의 개수는 12개, 면의 개수는 6개이다.
100개의 직육면체의 꼭짓점의 개수는 $100\times8=800$(개)이고, 연결된 입체도형에서 겹치는 꼭짓점이 99개 있으므로
$v=800-99=701$(개), $e=100\times12=1200$(개)
$f=100\times6=600$(개)
$\therefore\ v-e+f=701-1200+600=101$

3-2 오일러의 공식 $v-e+f=2$에 $f=\frac{2}{5}e$, $v=\frac{2}{3}e$를 대입하면
$\frac{2}{3}e-e+\frac{2}{5}e=2$, $\frac{1}{15}e=2$ $\qquad\therefore\ e=30$
$\therefore\ f=\frac{2}{5}e=\frac{2}{5}\times30=12$
따라서 면의 개수가 12개이므로 구하는 정다면체는 정십이면체이다.

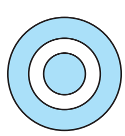
3-3 정삼각형의 모서리의 개수는 3개, 정육각형의 모서리의 개수는 6개이고, 모서리가 한 곳에서 2개씩 만나므로
$a=\frac{3\times4+6\times4}{2}=18$
정삼각형이 4개, 정육각형이 4개이므로 면의 개수는 8개이다.
따라서 오일러의 공식에 대입하면
$b-a+8=2$, $b-18+8=2$ $\qquad\therefore\ b=12$
$\therefore\ a+b=18+12=30$
[참고] 정삼각형 4개와 정육각형 4개로 만들어지는 입체도형은 오른쪽 그림과 같다.



4-1 주어진 도형을 직선 l을 축으로 하여 1회전시킬 때 생기는 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자르면 ①, ③, ④, ⑤는 오른쪽 그림과 같은 단면이 나온다.

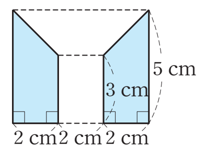


②는 오른쪽 그림과 같은 단면이 나온다.



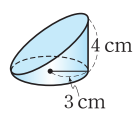
4-2 $\overline{OA}=x$cm라 하면 부채꼴 OAA′에서
$2\pi\times x\times\frac{120}{360}=2\pi\times r$ $\qquad\therefore\ r=\frac{1}{3}x$
부채꼴 OBB′에서
$2\pi\times(x+12)\times\frac{120}{360}=2\pi\times R$
$\therefore\ R=\frac{1}{3}x+4$
$\therefore\ R-r=\left(\frac{1}{3}x+4\right)-\frac{1}{3}x=4$

4-3 주어진 회전체를 회전축을 포함하는 평면으로 자를 때 생기는 단면은 오른쪽 그림과 같다.

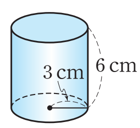


$\therefore$ (구하는 넓이)
$=\frac{(5+3)\times2}{2}\times2$
$=16\ (\text{cm}^2)$

5-1



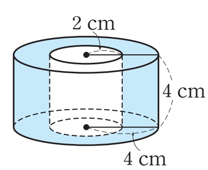
: $(\pi\times3^2\times4)\times\frac{1}{2}=18\pi\ (\text{cm}^3)$



: $\pi\times3^2\times6=54\pi\ (\text{cm}^3)$

$\therefore$ (부피)$=18\pi+54\pi$
$=72\pi\ (\text{cm}^3)$

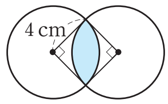
5-2 (밑넓이)$=\pi\times4^2-\pi\times2^2$
$=12\pi\ (\text{cm}^2)$
(옆넓이)$=2\pi\times4\times4+2\pi\times2\times4$
$=48\pi\ (\text{cm}^2)$
$\therefore$ (겉넓이)$=12\pi\times2+48\pi$
$=72\pi\ (\text{cm}^2)$



5-3 물 속에 있는 물체의 한 모서리의 길이를 $x$cm라 하면 물체를 꺼냈을 때 수면의 높이가 2cm 내려갔으므로
$x^3=32\times27\times2$, $x^3=2^5\times3^3\times2=(4\times3)^3$
$\therefore\ x=12$
따라서 물 속에 있는 물체의 겉넓이는
$6x^2=6\times12^2=864(\text{cm}^2)$

5-4 원기둥을 밑면에 평행인 평면으로 n번 자르면 $(n+1)$개의 원기둥이 생긴다.
$(n+1)$개의 원기둥의 옆넓이의 합은 자르기 전 원기둥의 옆넓이와 같으므로 $(n+1)$개의 원기둥의 옆넓이의 합은
$2\pi\times4\times12=96\pi\ (\text{cm}^2)$
$(n+1)$개의 원기둥의 밑넓이의 합은
$\pi\times4^2\times2(n+1)=32\pi+32n\pi\ (\text{cm}^2)$
따라서 $(n+1)$개의 원기둥의 겉넓이의 총합은
$96\pi+32\pi+32n\pi=128\pi+32n\pi\ (\text{cm}^2)$

5-5 색칠한 부분의 밑면은 오른쪽 그림과 같으므로



(색칠한 부분의 밑넓이)

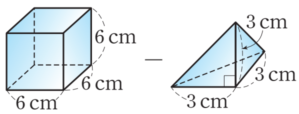
$=\left(\pi\times4^2\times\frac{90}{360}-\frac{1}{2}\times4\times4\right)\times2$

$=8\pi-16\,(\text{cm}^2)$

$\therefore$ (색칠한 부분의 부피)$=(8\pi-16)\times15$

$=120\pi-240\,(\text{cm}^3)$

6-1 (남은 입체도형의 부피)

$=$  $\times8$

$=6\times6\times6-\left\{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times3\times3\right)\times3\right\}\times8$

$=216-36=180\,(\text{cm}^3)$

6-2 원뿔대 모양의 그릇에 담겨 있는 물의 부피는

$\frac{1}{3}\times(\pi\times6^2)\times(4+4)-\frac{1}{3}\times(\pi\times3^2)\times4$

$=96\pi-12\pi=84\pi\,(\text{cm}^3)$

컵 1개에 들어가는 물의 양은 $84\pi\div2=42\pi\,(\text{cm}^3)$

이때 컵 1개에 들어가는 물의 높이를 h cm라 하면

$\pi\times3^2\times h=42\pi \qquad \therefore h=\frac{14}{3}$

따라서 컵 1개에 들어가는 물의 높이는 $\frac{14}{3}$ cm이다.

6-3 원뿔의 모선의 길이를 l cm라 하면 원 O의 둘레의 길이는 원뿔의 밑면인 원의 둘레의 길이의 $\frac{5}{3}$배이므로

$2\pi l=(2\pi\times12)\times\frac{5}{3} \qquad \therefore l=20$

$\therefore$ (원뿔의 겉넓이)$=\pi\times12^2+\frac{1}{2}\times20\times(2\pi\times12)$

$=144\pi+240\pi$

$=384\pi\,(\text{cm}^2)$

7-1 (야구공의 겉넓이)$=32\pi+32\pi=64\pi\,(\text{cm}^2)$

야구공의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$4\pi r^2=64\pi,\ r^2=16 \qquad \therefore r=4$

$\therefore$ (야구공의 부피)$=\frac{4}{3}\pi\times4^3=\frac{256}{3}\pi\,(\text{cm}^3)$

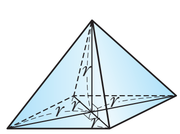
7-2 (전체 아이스크림의 부피)$=30\times30\times30=27000\,(\text{cm}^3)$

(구 모양 1개의 부피)$=\frac{4}{3}\pi\times3^3=36\pi$

$=36\times3.14=113.04\,(\text{cm}^3)$

따라서 $\frac{27000}{113.04}=238.85\cdots$에서 238개의 아이스크림콘을 만들 수 있으므로 $238\times500=119000$(원)을 벌 수 있다.

7-3 구의 반지름의 길이를 r라 하면 정팔면체는 오른쪽 그림과 같이 밑면이 정사각형이고 높이가 r인 두 개의 정사각뿔을 붙여 놓은 것이다. 이 정사각뿔의 밑넓이는

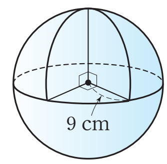


$\frac{1}{2}\times2r\times2r=2r^2$

$\therefore V_2=\left(\frac{1}{3}\times2r^2\times r\right)\times2=\frac{4}{3}r^3$

따라서 $V_1=\frac{4}{3}\pi r^3$이므로 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{3}\pi r^3\div\frac{4}{3}r^3=\pi$

7-4 벌은 정육면체 모양의 상자 안쪽 공간으로는 움직일 수 없으므로 벌이 움직일 수 있는 공간은 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 9 cm인 구의 $\frac{7}{8}$과 같다.

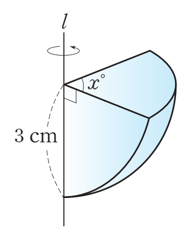


$\therefore$ (벌이 움직일 수 있는 공간의 부피)

$=\left(\frac{4}{3}\pi\times9^3\right)\times\frac{7}{8}$

$=\frac{1701}{2}\pi\,(\text{cm}^3)$

7-5 사분원을 $x°$만큼 회전시켜서 생기는 입체도형은 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ (입체도형의 겉넓이)

$=\pi\times3^2\times\frac{x}{360}+\left(4\pi\times3^2\times\frac{1}{2}\right)$

$\times\frac{x}{360}+\left(\pi\times3^2\times\frac{1}{4}\right)\times2$

이므로

$27\pi\times\frac{x}{360}+\frac{9}{2}\pi=9\pi,\ \frac{3}{40}\pi x=\frac{9}{2}\pi \qquad \therefore x=60$

STEP 2 실전 문제 정복하기 P.85~88

01 16, 13 **02** $v=\frac{nf}{m}$, $e=\frac{nf}{2}$

03 ㄱ, ㄷ **04** 74 **05** $78.5\,\text{cm}^2$ **06** $198\,\text{cm}^2$

07 1000원 **08** $16:\pi$ **09** 2^{10}배

10 92 **11** $\frac{1}{3}a$ **12** 24 **13** $23:20:17$

14 $\overline{CG}$의 중점 **15** $\frac{56}{9}$ **16** $250\pi\,\text{cm}^3$

17 $162\pi\,\text{cm}^2$ **18** $\frac{8}{3}$ cm **19** $\frac{320}{3}\pi\,\text{cm}^3$

20 $\frac{9}{2}\pi\,\text{cm}^3$

01 m각기둥과 n각뿔의 모서리의 개수의 합이 36개이므로

$3m+2n=36$ (단, $m\geq3$, $n\geq3$)

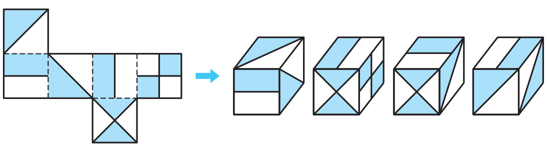
따라서 위의 식을 만족하는 (m각기둥, n각뿔)을 구하면

(4, 12), (6, 9), (8, 6), (10, 3)

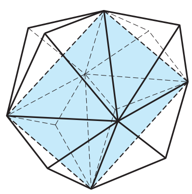
이므로 $m+n$의 최댓값과 최솟값은 각각 16, 13이다.

02 정n각형의 꼭짓점의 개수는 n개이고, 정n각형이 f개이면 꼭짓점의 총 개수는 nf개이다.
이때 정다면체에서 한 꼭짓점에 모이는 면의 개수가 m개이므로 m개의 꼭짓점이 중복된다.
따라서 정다면체의 꼭짓점의 개수를 식으로 나타내면
$v=\dfrac{nf}{m}$이다.
또 정n각형의 모서리의 개수는 n개, 정n각형이 f개이면 모서리의 총 개수는 nf개이고, 정다면체에서 모서리가 2개씩 중복되므로 모서리의 개수를 식으로 나타내면
$e=\dfrac{nf}{2}$이다.

03

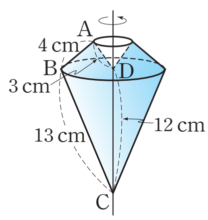


04 정팔면체의 꼭짓점의 개수는 6개이고, 정팔면체의 각 면마다 꼭짓점의 개수가 1개씩 늘어나므로
$v=6+1\times8=14$
정팔면체의 모서리의 개수는 12개이고, 정팔면체의 각 면마다 모서리의 개수가 3개씩 늘어나므로
$e=12+3\times8=36$
정팔면체의 면은 정사면체와 겹쳐져서 없어지고, 정팔면체의 각 면마다 3개씩의 면이 생기므로
$f=3\times8=24$
$\therefore\ v+e+f=14+36+24=74$

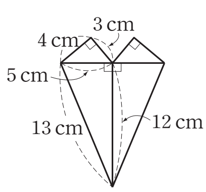


[참고] 이 입체도형은 오일러의 공식을 만족해야 하므로 오일러의 공식을 이용하여 바르게 구했는지 확인해 볼 수 있다. 즉, $v-e+f=14-36+24=2$로 오일러의 공식을 만족하므로 올바른 답이다.

05 사각형 ABCD를 변 CD를 축으로 하여 1회전시킬 때 생기는 입체도형은 오른쪽 그림과 같다.

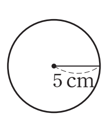


(i) 입체도형을 회전축과 평행한 평면으로 잘랐을 때 단면의 넓이가 최대인 경우는 회전축을 포함하는 평면으로 잘랐을 때이다.



$\therefore$ (넓이)
$=\left(\dfrac{1}{2}\times4\times3+\dfrac{1}{2}\times5\times12\right)\times2=72\ (\text{cm}^2)$

(ii) 입체도형을 회전축과 수직인 평면으로 잘랐을 때 단면의 넓이가 최대인 경우는 $\overline{\text{BD}}$를 포함하는 평면으로 잘랐을 때이다.



$\therefore$ (넓이)$=5\times5\times3.14=78.5\ (\text{cm}^2)$
따라서 (i), (ii)에서 단면의 넓이의 최댓값은 $78.5\,\text{cm}^2$이다.

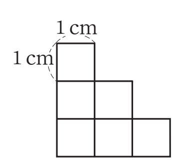
06 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 차례로 $(a-d)\,\text{cm}$, $a\,\text{cm}$, $(a+d)\,\text{cm}$라 하면 모든 모서리의 길이의 합은 $72\,\text{cm}$이므로
$4(a-d+a+a+d)=72 \qquad \therefore\ a=6$
또 부피가 $162\,\text{cm}^3$이므로 $a(a-d)(a+d)=162$
$\therefore\ (a-d)(a+d)=\dfrac{162}{6}=27$
$\therefore$ (겉넓이)$=2\{a(a-d)+a(a+d)+(a-d)(a+d)\}$
$=2\{a(a-d+a+d)+(a-d)(a+d)\}$
$=2\{2a^2+(a-d)(a+d)\}$
$=2(2\times6^2+27)=198\ (\text{cm}^2)$

07 우유팩은 직육면체 부분과 윗부분으로 나누어진다.
이때 우유팩을 거꾸로 하면 우유가 들어 있지 않은 부분의 높이는 $2\,\text{cm}$가 되므로 윗부분의 부피는 높이가 $2\,\text{cm}$인 직육면체의 부피와 같다.
즉, (윗부분의 부피)$=5\times5\times2=50(\text{cm}^3)=50\,(\text{mL})$이므로 우유팩 전체의 부피는 $200+50=250\,(\text{mL})$
우유팩에 우유를 가득 채웠을 때의 가격을 x원이라 하면
$200:800=250:x \qquad \therefore\ x=1000$
따라서 우유팩의 가격은 1000원으로 정해야 한다.

08 물 속에 잠기는 원기둥의 높이를 $x\,\text{cm}$, 원기둥이 물 속에 잠기면서 증가하는 정육면체의 높이를 $y\,\text{cm}$라 하자.
물 속에 잠기는 원기둥의 부피와 원기둥이 물 속에 잠기면서 증가하는 정육면체 안의 부피가 같으므로
$\pi a^2x=(4a\times4a)\times y=16a^2y \qquad \therefore\ \pi x=16y$
즉, $x:y=16:\pi$
따라서 (속력)$=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{시간})}$에서 같은 시간$(t)$에 대한 속력의 비는
$\dfrac{x}{t}:\dfrac{y}{t}=\dfrac{16}{t}:\dfrac{\pi}{t}=16:\pi$

09 (처음 정육면체의 겉넓이)$=4^2\times6=2^4\times6$
(1회 시행 후 분리된 모든 정육면체의 겉넓이의 합)
$=2^2\times6\times8=2^5\times6$
이므로 처음 정육면체의 겉넓이의 2배이다.
(2회 시행 후 분리된 모든 정육면체의 겉넓이의 합)
$=1^2\times6\times64=2^6\times6$
이므로 처음 정육면체의 겉넓이의 2^2배이다.
따라서 1회 시행할 때마다 겉넓이가 2배씩 증가하므로 10회 시행 후 분리된 모든 정육면체의 겉넓이의 합은 처음 정육면체의 겉넓이의 2^{10}배이다.

10 (i) 3단까지 쌓은 입체도형을 앞에서 바라 본 모양은 오른쪽 그림과 같으므로



$S=6\times$(오른쪽 그림의 도형의 넓이)
$=6\times(6\times1\times1)$
$=36\ (\text{cm}^2)$

(ⅱ) 각 단의 맨 아래에 놓인 정육면체의 개수를 살펴보면 오른쪽 표와 같다.
따라서 6단까지 쌓는 데 필요한 정육면체의 개수는 오른쪽 표의 6단까지의 총합과 같으므로

1단	1
2단	1+2
3단	1+2+3
4단	1+2+3+4
5단	1+2+3+4+5
6단	1+2+3+4+5+6
⋮	⋮

$a=1+3+6+10+15+21=56$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 $S+a=36+56=92$

11 사면체 G−DEF의 부피는 삼각뿔 D−EFG의 부피와 같다.
이때 사면체 G−DEF의 꼭짓점 G에서 밑면 DEF에 내린 수선의 길이를 h cm라 하면

$\triangle DEF=\square ABCD-(\triangle AED+\triangle DFC+\triangle EBF)$

$=a\times a-\left\{\left(\frac{1}{2}\times a\times\frac{1}{2}a\right)\times 2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}a\right\}$

$=a^2-\frac{5}{8}a^2=\frac{3}{8}a^2$

이므로

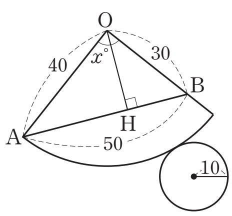
(사면체 G−DEF의 부피)$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}a^2\times h=\frac{1}{8}a^2h$

(삼각뿔 D−EFG의 부피)$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}a\right)\times a$

$=\frac{1}{24}a^3$

따라서 $\frac{1}{8}a^2h=\frac{1}{24}a^3$이므로 $h=\frac{1}{3}a$

12 입체도형의 전개도는 오른쪽 그림과 같고 부채꼴의 중심각의 크기를 $x°$라 하면



$2\pi\times 40\times\frac{x}{360}=2\pi\times 10$

$\therefore x=90$

이때 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 A에서 점 H까지는 오르막길이고, 점 H에서 점 B까지는 내리막길이다.
따라서 $\overline{OH}=h$라 하면

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times 40\times 30=\frac{1}{2}\times 50\times h$ $\quad\therefore h=24$

13 $\overline{AD}=\overline{CF}=h$라 하면
$3\overline{AP}=2\overline{PD}$, 즉 $\overline{AP}:\overline{PD}=2:3$이므로

$\overline{AP}=\frac{2}{5}\overline{AD}=\frac{2}{5}h$, $\overline{PD}=\frac{3}{5}\overline{AD}=\frac{3}{5}h$

$\overline{CQ}=3\overline{QF}$, 즉 $\overline{CQ}:\overline{QF}=3:1$이므로

$\overline{CQ}=\frac{3}{4}\overline{CF}=\frac{3}{4}h$, $\overline{QF}=\frac{1}{4}\overline{CF}=\frac{1}{4}h$

따라서 삼각기둥 ABC−DEF의 부피를 V라 하면

$V=\left(\frac{1}{2}\times 3\times 4\right)\times h=6h$

$V_1=\frac{1}{3}\times$(사다리꼴 APQC의 넓이)$\times\overline{AB}$

$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}h+\frac{3}{4}h\right)\times 3\right\}\times 4=\frac{23}{10}h$

$V_3=\frac{1}{3}\times$(사다리꼴 PDFQ의 넓이)$\times\overline{DE}$

$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{5}h+\frac{1}{4}h\right)\times 3\right\}\times 4=\frac{17}{10}h$

$V_2=V-(V_1+V_3)=6h-\left(\frac{23}{10}h+\frac{17}{10}h\right)$

$=6h-4h=2h$

$\therefore V_1:V_2:V_3=\frac{23}{10}h:2h:\frac{17}{10}h=23:20:17$

14 사각형 PQRS의 넓이를 T라 하고, 직육면체의 높이를 h라 하면 점 X는 선분 AB 위를 움직이므로
사각뿔 X−PQRS의 높이는 h로 일정하다.

$\therefore$ (사각뿔 X−PQRS의 부피)$=\frac{1}{3}Th$

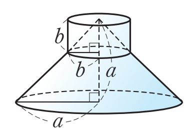
이때 삼각뿔 Y−EPS의 높이를 h'이라 하면

$\triangle EPS=\frac{1}{4}T$이고, 사각뿔 X−PQRS의 부피가 삼각뿔 Y−EPS의 부피의 8배이므로

$\frac{1}{3}Th=8\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}T\times h'\right)$ $\quad\therefore h'=\frac{1}{2}h$

따라서 점 Y는 선분 CG의 중점에 있어야 한다.

15 $\overline{AC}=\overline{BC}=a$, $\overline{AD}=b$라 하면
$\angle BAC=\angle DAF=45°$이고,
$\angle DFA=\angle BAC=45°$(엇각)이므로
$\triangle ADF$는 직각이등변삼각형이다.
$\therefore \overline{DF}=\overline{DA}=b$
이때 1회전시켜서 생기는 입체도형은 오른쪽 그림과 같고 $P=3Q$이므로



$\frac{1}{3}\times\pi\times a^2\times a=3\times(\pi\times b^2\times a)$

$a^2=9b^2$, $a^2=(3b)^2$

$\therefore a=3b$ ($\because a>0$, $b>0$)

$P=\frac{1}{3}\times\pi\times a^2\times a=\frac{1}{3}\pi a^3=9\pi b^3$,

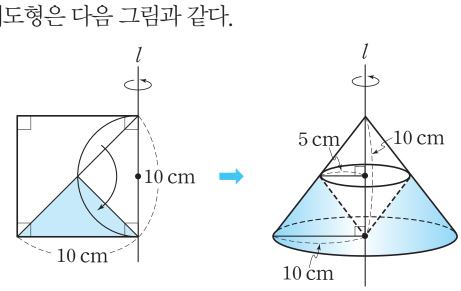
$Q=\pi\times b^2\times a=3\pi b^3$,

$R=(\pi\times b^2\times b)+\left(\frac{1}{3}\times\pi\times a^2\times a-\frac{1}{3}\times\pi\times b^2\times b\right)$

$=\pi b^3+\left(9\pi b^3-\frac{1}{3}\pi b^3\right)=\frac{29}{3}\pi b^3$

$\therefore \frac{P+R}{Q}=\frac{9\pi b^3+\frac{29}{3}\pi b^3}{3\pi b^3}=\frac{56}{9}$

16 주어진 도형을 직선 l을 축으로 하여 1회전시킬 때 생기는 입체도형은 다음 그림과 같다.

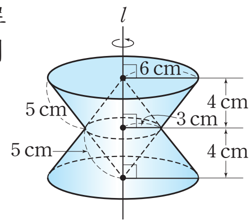


$\therefore$ (부피)

$=\frac{1}{3}\times(\pi\times10^2)\times10-\left\{\frac{1}{3}\times(\pi\times5^2)\times5\right\}\times2$

$=\frac{1000}{3}\pi-\frac{250}{3}\pi=250\pi\ (\text{cm}^3)$

17 주어진 도형을 직선 l을 축으로 하여 1회전시킬 때 생기는 입체도형은 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ (입체도형의 겉넓이)

$=\left\{\pi\times6^2+\left(\frac{1}{2}\times10\times12\pi-\frac{1}{2}\times5\times6\pi\right)\right\}\times2$

$=(36\pi+45\pi)\times2=162\pi\ (\text{cm}^2)$

18 (그릇에 들어 있는 물의 양)

$=$(원기둥의 부피)$-$(구의 부피)

$=\pi\times3^2\times6-\frac{4}{3}\pi\times3^3$

$=54\pi-36\pi=18\pi\ (\text{cm}^3)$

구를 꺼낸 다음 다시 원뿔을 넣었을 때 그릇에 있는 물의 높이를 x cm라 하면

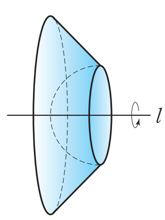
(물의 양)$+$(원뿔의 부피)$=\pi\times3^2\times x$

$18\pi+\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times2=9\pi x$

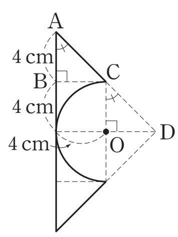
$9\pi x=24\pi \qquad \therefore x=\frac{8}{3}$

따라서 물의 높이는 $\frac{8}{3}$ cm이다.

19



[그림 1]



[그림 2]

주어진 도형을 직선 l을 축으로 하여 1회전시킬 때 생기는 입체도형은 위의 [그림 1]과 같고, 이 입체도형을 회전축을 포함하는 평면으로 자른 단면은 [그림 2]와 같다.

$\triangle$ABC와 $\triangle$COD에서

$\overline{AB}=\overline{CO}=4$ cm, $\angle ABC=\angle COD=90^\circ$,

$\angle BAC=\angle OCD$ (동위각)이므로

$\triangle ABC\equiv\triangle COD$ (ASA 합동)

$\therefore \overline{OD}=\overline{BC}=4$ cm

$\therefore$ (입체도형의 부피)

$=$(원뿔대의 부피)$-$(반구의 부피)

$=\left\{\frac{1}{3}\times(\pi\times8^2)\times8-\frac{1}{3}\times(\pi\times4^2)\times4\right\}-\left(\frac{4}{3}\pi\times4^3\right)\times\frac{1}{2}$

$=\left(\frac{512}{3}\pi-\frac{64}{3}\pi\right)-\frac{128}{3}\pi$

$=\frac{320}{3}\pi\ (\text{cm}^3)$

20 정팔면체는 8개의 정삼각형으로 이루어져 있으므로 한 면의 넓이는 $\frac{64}{8}=8\ (\text{cm}^2)$

이때 구의 중심을 O라 하고, 구의 반지름의 길이를 r cm라 하면 삼각뿔 O$-$ACD의 부피는 정팔면체의 부피의 $\frac{1}{8}$이므로

$\frac{1}{3}\times(\triangle\text{ACD의 넓이})\times r=\frac{1}{8}\times32$

$\frac{1}{3}\times8\times r=4 \qquad \therefore r=\frac{3}{2}$

$\therefore$ (구의 부피)$=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9}{2}\pi\ (\text{cm}^3)$

STEP 3 최고 수준 완성하기

P.89~90

01 241개 **02** 2 **03** ④ **04** 32 cm^3
05 3 **06** 35 : 21 : 15

01 26개의 꼭짓점 중 두 개의 꼭짓점을 연결하여 만든 선분의 개수는 (26×25)개이고 선분이 2개씩 서로 중복되므로

$\frac{26\times25}{2}=325$(개)

다면체의 대각선의 개수는 사각형에서의 대각선의 개수와 같으므로 $2\times12=24$(개)

다면체의 모서리의 개수는 60개이다.

$\therefore$ (구하는 대각선의 개수)$=325-24-60=241$(개)

02 32면체의 꼭짓점의 개수를 v개, 모서리의 개수를 e개, 면의 개수를 f개라 하면 오일러의 공식 $v-e+f=2$에서

$v-e+32=2 \qquad \therefore e=v+30$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 다면체에서 삼각형의 모서리의 개수는 $2v$개, 오각형의 모서리의 개수는 $(v\times a)$개이고, 모서리가 2개씩 서로 중복되므로

$e=\frac{2v+av}{2}=\left(1+\frac{a}{2}\right)v$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $av=60$

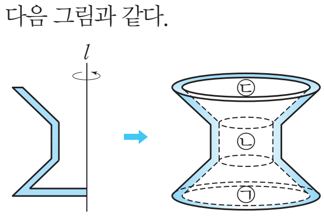
또 삼각형의 개수는 $\frac{2v}{3}$개, 오각형의 개수는 $\frac{av}{5}$개이므로

$\frac{2v}{3}+\frac{av}{5}=32$, $\frac{2v}{3}+\frac{60}{5}=32$

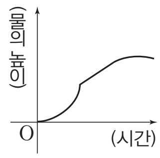
$\frac{2v}{3}+12=32 \qquad \therefore v=30$

따라서 $av=60$에서 $30a=60 \qquad \therefore a=2$

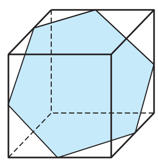
03 주어진 도형을 직선 l을 축으로 하여 1회전시킬 때 생기는 입체도형은 다음 그림과 같다.



이 그릇에 일정한 속력으로 물을 채우면 ㉠은 원뿔대 모양이므로 물의 높이가 점점 더 빨리 높아진다.
또 ㉡은 원기둥 모양이므로 물의 높이가 일정하게 높아지고, ㉢은 원뿔대를 뒤집어 놓은 모양이므로 물이 높이가 점점 더 느리게 높아진다.
따라서 시간에 따른 물의 높이를 그래프로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



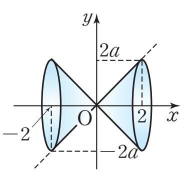
04 주어진 전개도로 만들어지는 입체도형은 칠면체이고, 같은 칠면체를 만들어 육각형인 면끼리 꼭 맞게 붙이면 오른쪽 그림과 같은 정육면체가 된다.



$\therefore$ (구하는 부피)$=(4\times4\times4)\times\dfrac{1}{2}$

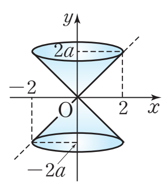
$=32\,(\text{cm}^3)$

05 주어진 부분을 x축을 회전축으로 하여 1회전시키면 오른쪽 그림과 같다.
$y=ax$에 $x=2$, $x=-2$를 대입하면 $y=2a$, $y=-2a$이므로 반지름의 길이가 $2a$이고 높이가 2인 원뿔 2개가 생긴다.



$\therefore V_1=\left\{\dfrac{1}{3}\pi\times(2a)^2\times2\right\}\times2=\dfrac{16a^2}{3}\pi$

주어진 부분을 y축을 회전축으로 하여 1회전시키면 오른쪽 그림과 같다.
$y=ax$에 $y=2a$, $y=-2a$를 대입하면 $x=2$, $x=-2$이므로 반지름의 길이가 2이고 높이가 $2a$인 원뿔 2개가 생긴다.



$\therefore V_2=\left\{\dfrac{1}{3}\pi\times2^2\times2a\right\}\times2=\dfrac{16a}{3}\pi$

즉, $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\dfrac{16a^2}{3}\pi}{\dfrac{16a}{3}\pi}=a$이므로

$6-a=a$, $2a=6$ $\quad\therefore a=3$

06 원뿔의 전개도에서 부채꼴의 중심각의 크기를 $x°$라 하고 용암이 B, C, D지점에 도착하는 시간을 각각 t_b분, t_c분, t_d분이라 하자.
이때 용암은 섬 윗부분부터 균일하게 덮으며 내려오고, 용암으로 덮인 섬의 넓이는 시간에 정비례하여 증가하므로

$\left(\pi\times1^2\times\dfrac{x}{360}\right):25=\left(\pi\times2^2\times\dfrac{x}{360}\right):t_b$

$\therefore t_b=100$

$\left(\pi\times1^2\times\dfrac{x}{360}\right):25=\left(\pi\times3^2\times\dfrac{x}{360}\right):t_c$

$\therefore t_c=225$

$\left(\pi\times1^2\times\dfrac{x}{360}\right):25=\left(\pi\times4^2\times\dfrac{x}{360}\right):t_d$

$\therefore t_d=400$

$\therefore p:q:r=\dfrac{1}{100-25}:\dfrac{1}{225-100}:\dfrac{1}{400-225}$

$=\dfrac{1}{75}:\dfrac{1}{125}:\dfrac{1}{175}$

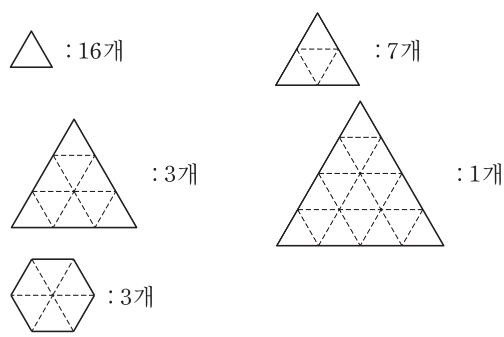
$=35:21:15$

퍼펙트 단원 마무리 P.91~93

01 9개 **02** 30개 **03** 120° **04** 7개 **05** 105°
06 60° **07** 1 : 15 **08** 4바퀴
09 $a=3$, $b=5$, $c=2$, $d=8$ **10** ②, ⑤
11 $(528-12\pi)\,\text{cm}^3$ **12** $(80\pi-160)\,\text{cm}^3$
13 1 : 5 **14** ⑤ **15** $(4\pi-8)\,\text{cm}^2$ **16** $60\pi\,\text{cm}^3$
17 $76\pi\,\text{cm}^2$

01 점의 개수가 n개인 완전그래프는 한 점에서 선을 $(n-1)$개 그을 수 있고 2개씩 서로 중복되므로 선의 총 개수는 $\dfrac{n(n-1)}{2}$개이다.
이때 선의 개수가 총 36개인 완전그래프의 점의 개수는
$\dfrac{n(n-1)}{2}=36$, $n(n-1)=72=9\times8$ $\quad\therefore n=9$
따라서 선의 개수가 총 36개인 완전그래프의 점의 개수는 9개이다.

02 찾을 수 있는 정다각형은 정삼각형과 정육각형이며 그 개수는 다음과 같다.

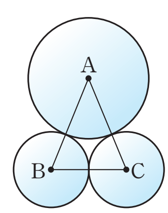


따라서 정삼각형은 $16+7+3+1=27$(개), 정육각형은 3개이므로 찾을 수 있는 정다각형을 모두 구하면
$27+3=30$(개)이다.

03 현준이의 나이를 x세라 하고 나이 차를 y세라 하면 지헌이의 나이는 $(x+y)$세, 경록이의 나이는 $(x-y)$세이다.
따라서 피자 한 판의 중심각의 크기는 360°이므로 현준이의 피자 조각의 중심각의 크기는

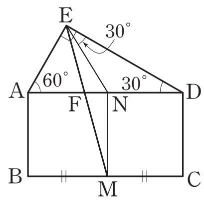
$360°\times\dfrac{x}{(x-y)+x+(x+y)}=360°\times\dfrac{1}{3}=120°$

04 두 공이 서로 접하면 두 공의 중심 사이의 거리는 반지름의 길이의 합과 같으므로 큰 공 A와 크기가 다른 작은 공 B, C를 오른쪽 그림과 같이 놓으면 △ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이 된다. 이때 세 공 A, B, C의 크



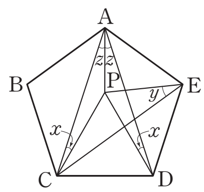
기가 모두 같다면 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$인 정삼각형이 되고, $\angle A=60^\circ$이므로 $60^\circ\times6=360^\circ$이다.
따라서 큰 공과 여러 개의 작은 공을 서로 접하게 놓으려면 작은 공의 개수는 6개보다 많아야 하므로 작은 공은 최소 7개 이상 놓아야 한다.

05 $\overline{AD}$ 위에 $\angle DEN=30^\circ$가 되도록 점 N을 잡으면



$\overline{DN}=\overline{EN}$ …… ㉠
$\angle AEN=90^\circ-30^\circ=60^\circ$이므로
$\triangle EAN$은 정삼각형이다.
$\therefore \overline{AE}=\overline{AN}=\overline{EN}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $\overline{AN}=\overline{DN}$이므로
$\angle ANM=90^\circ$, $\overline{EN}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\overline{AB}=\overline{NM}$
이때 $\angle ENM=60^\circ+90^\circ=150^\circ$이므로
$\angle NEM=\frac{1}{2}\times(180^\circ-150^\circ)=15^\circ$
따라서 $\triangle EFN$에서
$\angle EFD=180^\circ-(15^\circ+60^\circ)=105^\circ$

06 $\overline{AD}$를 그으면



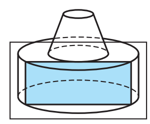
$\triangle APC$와 $\triangle APD$에서
$\overline{AC}=\overline{AD}$, $\overline{AP}$는 공통,
$\overline{PC}=\overline{PD}$이므로
$\triangle APC\equiv\triangle APD$(SSS 합동)
$\therefore\ \angle PDA=\angle PCA=\angle x$,
$\angle PAD=\angle PAC=\angle z$
이때
$\angle CPD=\angle CAD+\angle ACP+\angle ADP$
$=2\angle z+\angle x+\angle x$
$=2(\angle x+\angle z)=60^\circ$
$\therefore\ \angle x+\angle z=30^\circ$
정오각형의 한 내각의 크기는 108°이므로
$\angle PDE=108^\circ-60^\circ=48^\circ$
$\triangle PDE$에서 $\overline{PD}=\overline{ED}$이므로
$\angle PED=\frac{1}{2}\times(180^\circ-48^\circ)=66^\circ$
$\triangle CED$에서 $\overline{CD}=\overline{ED}$이므로
$\angle CED=\frac{1}{2}\times(180^\circ-108^\circ)=36^\circ$
$\therefore\ \angle y=\angle PED-\angle CED=66^\circ-36^\circ=30^\circ$
$\therefore\ \angle x+\angle y+\angle z=(\angle x+\angle z)+\angle y=30^\circ+30^\circ=60^\circ$

07 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면
정오각형에서 $\widehat{BEF}=\frac{2}{5}\times2\pi r=\frac{4}{5}\pi r$
정삼각형에서 $\widehat{BEC}=\frac{1}{3}\times2\pi r=\frac{2}{3}\pi r$
$\widehat{CF}=\widehat{BEF}-\widehat{BEC}=\frac{4}{5}\pi r-\frac{2}{3}\pi r=\frac{2}{15}\pi r$
$\therefore$ ($\widehat{CF}$의 길이) : (원 O의 둘레의 길이)$=\frac{2}{15}\pi r : 2\pi r$
$=1:15$

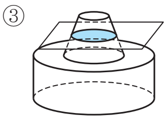
08 x분 후에 처음으로 다시 점 P에서 만날 때까지 A는 a바퀴, B는 b바퀴 돈다고 하면
$3x=2\pi\times r\times a$에서 $x=\frac{2}{3}ar\pi$ …… ㉠
$4x=2\pi\times3r\times b$에서 $x=\frac{3}{2}br\pi$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $\frac{2}{3}ar\pi=\frac{3}{2}br\pi$ $\quad\therefore\ 4a=9b$
따라서 A는 9바퀴, B는 4바퀴 돌 때 처음으로 다시 점 P에서 만난다.

09 마주 보는 면은 $(1,\ d)$, $(a,\ 6)$, $(b,\ 4)$, $(7,\ c)$의 4쌍이고, 그 합은 각각
$(1+2+3+4+5+6+7+8)\times\frac{1}{4}=9$
이므로 $1+d=9$, $a+6=9$, $b+4=9$, $7+c=9$
$\therefore\ a=3,\ b=5,\ c=2,\ d=8$

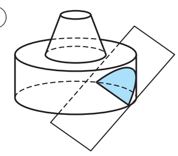
10 ①



③

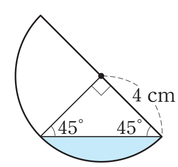


④



11 뚫린 사각기둥과 원기둥이 교차하는 부분은 밑면의 반지름의 길이가 1 cm이고 높이가 6 cm인 원기둥이다.
$\therefore$ (입체도형의 부피)
=(직육면체의 부피)−(사각기둥의 부피)
−(원기둥의 부피)$\times3$
+(교차하는 원기둥의 부피)$\times3$
$=8\times10\times12-6\times6\times12$
$-(\pi\times1^2\times10)\times3+(\pi\times1^2\times6)\times3$
$=960-432-30\pi+18\pi$
$=528-12\pi\ (\text{cm}^3)$

12 45°만큼 기울였을 때 밑면의 모양은 오른쪽 그림과 같으므로



(밑넓이)
$=\pi\times4^2\times\frac{90}{360}-\frac{1}{2}\times4\times4$
$=4\pi-8\ (\text{cm}^2)$
$\therefore$ (남은 물의 양)$=(4\pi-8)\times20=80\pi-160\ (\text{cm}^3)$

13 물통 A에는 쇠구슬이 들어 있으므로 쇠구슬의 지름의 길이(높이)까지는 물이 빨리 차고, 그 후로는 물통 B와 같은 속력으로 물의 높이가 올라간다.
쇠구슬의 부피는
(2초 후 물통 A에 물이 채워진 높이까지의 부피)
−(2초 후 물통 B에 물이 채워진 높이까지의 부피)
이다.

이때 물통 B의 그래프의 함수의 식은 $h=\frac{20}{10}t=2t$이므로 2초 후 물의 높이는 $4\,\text{cm}$이고, 물통의 밑면의 반지름의 길이를 $r\,\text{cm}$라 하면

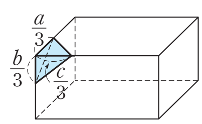
(쇠구슬의 부피)$=\pi\times r^2\times 8-\pi\times r^2\times 4=4\pi r^2\,(\text{cm}^3)$

따라서 물통의 부피는 $\pi r^2\times 20=20\pi r^2\,(\text{cm}^3)$이므로

쇠구슬과 물통의 부피의 비는

$4\pi r^2 : 20\pi r^2=1:5$

14 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 $a\,\text{cm}$, $b\,\text{cm}$, $c\,\text{cm}$라 하면 직육면체의 부피 $abc=243\,\text{cm}^3$



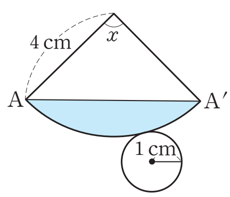
또 이 직육면체에서 한 꼭짓점과 한 꼭짓점에 모이는 세 모서리의 삼등분점 중 그 꼭짓점에 가까운 점을 각각 꼭짓점으로 하는 삼각뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{a}{3}\times\frac{b}{3}\right)\times\frac{c}{3}=\frac{abc}{162}=\frac{243}{162}=\frac{3}{2}\,(\text{cm}^3)$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$243-8\times\frac{3}{2}=231\,(\text{cm}^3)$

15 입체도형의 전개도는 오른쪽 그림과 같고 $\overline{\text{AA}'}$이 가장 짧은 선이다.



$\overset{\frown}{\text{AA}'}$에 대한 중심각의 크기를 $\angle x$라 하면

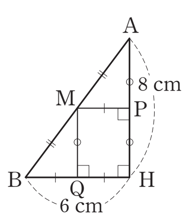
$2\pi\times 4\times\frac{x}{360}=2\pi\times 1$

$\therefore\ \angle x=90^\circ$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)$=\pi\times 4^2\times\frac{90}{360}-\frac{1}{2}\times 4\times 4$

$=4\pi-8\,(\text{cm}^2)$

16 원뿔의 밑면인 원의 중심을 H라 하고 점 M에서 $\overline{\text{AH}}$, $\overline{\text{BH}}$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하면



$\triangle$AMP와 $\triangle$MBQ에서

$\overline{\text{AM}}=\overline{\text{MB}}$,

$\angle$AMP$=\angle$MBQ(동위각),

$\angle$APM$=\angle$MQB$=90^\circ$이므로

$\triangle$AMP$\equiv\triangle$MBQ(RHA 합동)

$\therefore\ \overline{\text{MP}}=\overline{\text{BQ}}=\overline{\text{QH}}=3\,(\text{cm})$, $\overline{\text{MQ}}=\overline{\text{AP}}=\overline{\text{PH}}=4\,(\text{cm})$

$\therefore$ (입체도형의 부피)=(원뿔의 부피)−(원기둥의 부피)

$=\frac{1}{3}\times\pi\times 6^2\times 8-\pi\times 3^2\times 4$

$=96\pi-36\pi=60\pi\,(\text{cm}^3)$

17 큰 구의 반지름의 길이를 $r\,\text{cm}$, 작은 구의 반지름의 길이를 $r'\,\text{cm}$라 하면

$2\pi\times r\times\frac{90}{360}=4\pi\qquad\therefore\ r=8$

$2\pi\times r'\times\frac{90}{360}=2\pi\qquad\therefore\ r'=4$

$\therefore$ (입체도형의 겉넓이)

$=(4\pi\times 8^2+4\pi\times 4^2)\times\frac{1}{8}$

$\quad+\left(\pi\times 8^2\times\frac{90}{360}-\pi\times 4^2\times\frac{90}{360}\right)\times 3$

$=40\pi+36\pi$

$=76\pi\,(\text{cm}^2)$

특목 경시 대비 논술·구술 도전하기 P.94~95

1 (1) 정이십면체의 꼭짓점을 중심으로 오각뿔을 잘라내면 각 꼭짓점에 새로운 면이 생긴다. 따라서 정이십면체는 면이 20개, 꼭짓점에 생긴 면이 12개이므로 축구공의 면의 개수는 모두 32개이다.

또 정이십면체는 꼭짓점이 12개이고, 각 꼭짓점에 생긴 새로운 면의 꼭짓점이 5개씩이므로 축구공의 꼭짓점의 개수는 $12\times 5=60$(개)이다.

(2) |예시| 정오각형이 12개이므로 변의 개수는 5×12(개)이고, 정육각형이 20개이므로 변의 개수는 6×20(개)이다.

축구공의 모서리는 두 평면도형에서 두 변이 서로 겹쳐져 만들어지므로 모서리의 개수는 모두 $(5\times 12+6\times 20)\div 2=90$(개)이다.

2 |예시| (가)의 방법으로 사각뿔대의 부피를 구하는 경우

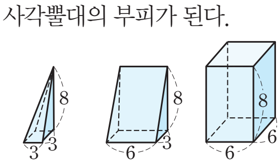
$\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$에 $a=6$, $b=12$, $h=8$을 대입하면

(부피)$=\frac{8}{3}\times(6^2+6\times 12+12^2)$

$=\frac{8}{3}\times 252=672$

(나)의 방법으로 사각뿔대의 부피를 구하는 경우

사각뿔대를 밑면에 수직인 평면으로 자르면 서로 부피가 같은 사각뿔이 4개, 서로 부피가 같은 삼각기둥이 4개, 사각기둥이 1개 만들어지므로 9개의 입체도형의 부피를 합하면 처음 사각뿔대의 부피가 된다.



(사각뿔의 부피)$=\frac{1}{3}\times 3\times 3\times 8=24$,

(삼각기둥의 부피)$=\frac{1}{2}\times 3\times 8\times 6=72$,

(사각기둥의 부피)$=6\times 6\times 8=288$

$\therefore$ (사각뿔대의 부피)$=24\times 4+72\times 4+288$

$=96+288+288$

$=672$

따라서 (가)와 (나)의 방법으로 구한 사각뿔대의 부피는 같다.