개념과 유형이 하나로

개념 PLUS 유형

수학Ⅱ

정답과 해설

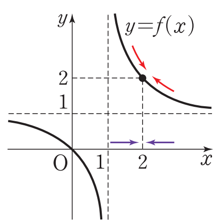
Ⅰ-1. 함수의 극한과 연속

01 함수의 극한

1 유제 & 문제 p.10~11

유제 01 답 (1) **2** (2) **3** (3) $\mathbf{2\sqrt{2}}$ (4) $\mathbf{-\infty}$

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

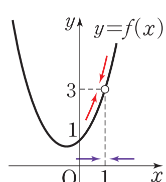


즉, x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-1}=2$

(2) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$이라 하면 $x\neq 1$일 때

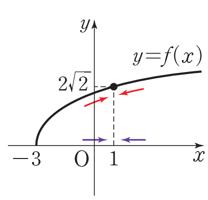
$$f(x)=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$
$$=x^2+x+1$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$

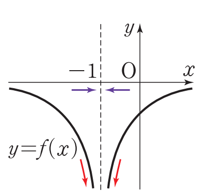
(3) $f(x)=\sqrt{2x+6}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $2\sqrt{2}$에 한없이 가까워지므로

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\sqrt{2x+6}=2\sqrt{2}$

(4) $f(x)=-\dfrac{1}{|x+1|}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

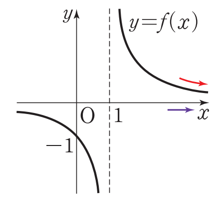


즉, x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\displaystyle\lim_{x\to -1}\left(-\frac{1}{|x+1|}\right)=-\infty$

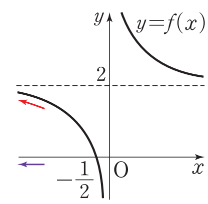
유제 02 답 (1) **0** (2) **2** (3) $\mathbf{-\infty}$ (4) $\mathbf{\infty}$

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0$

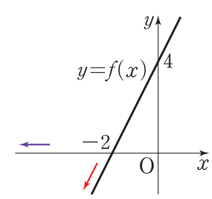
(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x}+2\right)=2$

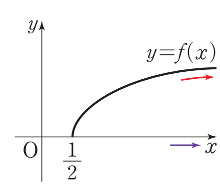
(3) $f(x)=2x+4$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}(2x+4)=-\infty$

(4) $f(x)=\sqrt{2x-1}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{2x-1}=\infty$

2 개념 CHECK p.13

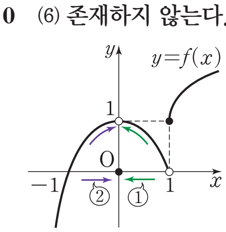
1. 답 (1) **1** (2) **1** (3) **1** (4) **1** (5) **0** (6) **존재하지 않는다.**

(1) 오른쪽 그림의 ①에서

$\displaystyle\lim_{x\to 0+}f(x)=1$

(2) 오른쪽 그림의 ②에서

$\displaystyle\lim_{x\to 0-}f(x)=1$

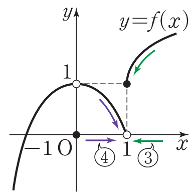


(3) (1), (2)에서

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=1$

(4) 오른쪽 그림의 ③에서

$\lim_{x\to1+}f(x)=1$



(5) 오른쪽 그림의 ④에서

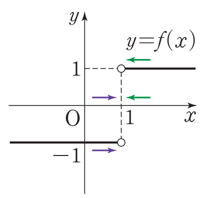
$\lim_{x\to1-}f(x)=0$

(6) (4), (5)에서

$\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)$는 존재하지 않는다.

2. 답 **존재하지 않는다.**

$f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



$x\longrightarrow1+$일 때, $\lim_{x\to1+}\dfrac{|x-1|}{x-1}=1$

$x\longrightarrow1-$일 때, $\lim_{x\to1-}\dfrac{|x-1|}{x-1}=-1$

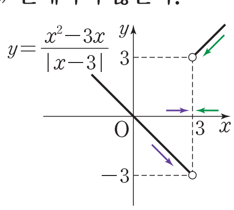
따라서 $\lim_{x\to1+}\dfrac{|x-1|}{x-1}\neq\lim_{x\to1-}\dfrac{|x-1|}{x-1}$이므로 $\lim_{x\to1}\dfrac{|x-1|}{x-1}$은 존재하지 않는다.

2 유제 & 문제

p.15

유제 03 답 (1) **존재하지 않는다.** (2) **존재하지 않는다.**

(1) $x=3$에서 우극한을 구하면



$x\longrightarrow3+$일 때, $x>3$이므로

$\dfrac{x^2-3x}{|x-3|}=\dfrac{x(x-3)}{x-3}=x$

$\therefore \lim_{x\to3+}\dfrac{x^2-3x}{|x-3|}=\lim_{x\to3+}x$

$=3$ …… ㉠

$x=3$에서 좌극한을 구하면 $x\longrightarrow3-$일 때, $x<3$이므로

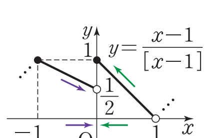
$\dfrac{x^2-3x}{|x-3|}=\dfrac{x(x-3)}{-(x-3)}=-x$

$\therefore \lim_{x\to3-}\dfrac{x^2-3x}{|x-3|}=\lim_{x\to3-}(-x)=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to3+}\dfrac{x^2-3x}{|x-3|}\neq\lim_{x\to3-}\dfrac{x^2-3x}{|x-3|}$이므로

$\lim_{x\to3}\dfrac{x^2-3x}{|x-3|}$는 존재하지 않는다.

(2) $x=0$에서 우극한을 구하면



$x\longrightarrow0+$일 때

$0\le x<1$에서

$-1\le x-1<0$이므로

$\dfrac{x-1}{[x-1]}=\dfrac{x-1}{-1}=-x+1$

$\therefore \lim_{x\to0+}\dfrac{x-1}{[x-1]}=\lim_{x\to0+}(-x+1)=1$ …… ㉠

$x=0$에서 좌극한을 구하면

$x\longrightarrow0-$일 때, $-1\le x<0$에서

$-2\le x-1<-1$이므로 $\dfrac{x-1}{[x-1]}=\dfrac{x-1}{-2}$

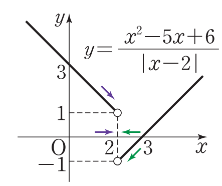
$\therefore \lim_{x\to0-}\dfrac{x-1}{[x-1]}=\lim_{x\to0-}\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to0+}\dfrac{x-1}{[x-1]}\neq\lim_{x\to0-}\dfrac{x-1}{[x-1]}$이므로

$\lim_{x\to0}\dfrac{x-1}{[x-1]}$은 존재하지 않는다.

문제 03-1 답 **0**

$x\longrightarrow2+$일 때, $x>2$이므로



$f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|x-2|}$

$=\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2}=x-3$

$\therefore \lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(x-3)=-1$

$\therefore a=-1$

$x\longrightarrow2-$일 때, $x<2$이므로

$f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|x-2|}$

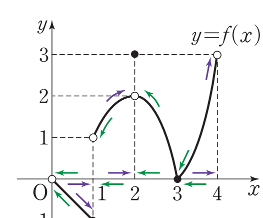
$=\dfrac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)}=-x+3$

$\therefore \lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(-x+3)=1$

$\therefore b=1$ $\therefore a+b=-1+1=0$

문제 03-2 답 ②

① $x=0$에서 함수 $f(x)$의 우극한은 $\lim_{x\to0+}f(x)=0$



② $x=1$에서 함수 $f(x)$의 우극한과 좌극한은

$\lim_{x\to1+}f(x)=1$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=-1$

즉, $\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)$는 존재하지 않는다.

③ $x=2$에서 함수 $f(x)$의 우극한과 좌극한은

$\lim_{x\to2+}f(x)=2$, $\lim_{x\to2-}f(x)=2$

$\therefore \lim_{x\to2}f(x)=2$

④ $x=3$에서 함수 $f(x)$의 우극한은 $\lim_{x\to3+}f(x)=0$

⑤ $x=4$에서 함수 $f(x)$의 좌극한은 $\lim_{x\to4-}f(x)=3$

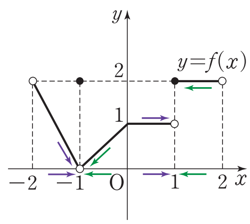
따라서 극한값이 존재하지 않는 것은 ②이다.

문제 03-3 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $\lim_{x\to-1+} f(x)=0$,

$\lim_{x\to-1-} f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to-1} f(x)=0$



ㄴ. $x \longrightarrow 1-$일 때, $f(x)=1$ 이므로

$\lim_{x\to1-} f(f(x))=f(1)=2$

ㄷ. $x \longrightarrow 1+$일 때, $f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to1+} f(f(x))=f(2)$

그런데 $x=2$에서 함수 $f(x)$가 정의되지 않았으므로 $f(2)$는 존재하지 않는다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

3 개념 CHECK

p.16

1. 답 (1) **10** (2) **−1**

(1) $\lim_{x\to1}(x+1)(3x+2)=\lim_{x\to1}(x+1)\times\lim_{x\to1}(3x+2)$

$=2\times5=10$

(2) $\lim_{x\to-2}\dfrac{3x+1}{x^2+1}=\dfrac{3\lim_{x\to-2}x+\lim_{x\to-2}1}{\lim_{x\to-2}x^2+\lim_{x\to-2}1}$

$=\dfrac{-6+1}{4+1}=-1$

2. 답 (1) **−1** (2) **5**

(1) $\lim_{x\to2}\{f(x)-2g(x)\}=\lim_{x\to2}f(x)-2\lim_{x\to2}g(x)$

$=5-6=-1$

(2) $\lim_{x\to2}\dfrac{3f(x)}{g(x)}=\dfrac{3\lim_{x\to2}f(x)}{\lim_{x\to2}g(x)}=\dfrac{15}{3}=5$

3 유제 & 문제

p.17~21

유제 04 답 **18**

$f(x)-2g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=\dfrac{f(x)-h(x)}{2}$이고

$\lim_{x\to2}h(x)=8$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{3f(x)-4g(x)}{2f(x)+g(x)}=\lim_{x\to2}\frac{3f(x)-4\left\{\dfrac{f(x)-h(x)}{2}\right\}}{2f(x)+\left\{\dfrac{f(x)-h(x)}{2}\right\}}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2f(x)+4h(x)}{5f(x)-h(x)}$$

$$=\frac{2\lim_{x\to2}f(x)+4\lim_{x\to2}h(x)}{5\lim_{x\to2}f(x)-\lim_{x\to2}h(x)}$$

$$=\frac{4+32}{10-8}=18$$

문제 04-1 답 **−4**

주어진 식의 분모, 분자를 x로 각각 나누면

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^2+4f(x)}{2x^2-f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{3x+\dfrac{4f(x)}{x}}{2x-\dfrac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to0}3x+4\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}}{\lim_{x\to0}2x-\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{0+4}{0-1}\left(\because \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1\right)$$

$$=-4$$

문제 04-2 답 **−1**

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x-1)}{x-1}=2$에서 $x-1=t$라 하면

$x=t+1$이고, $x \longrightarrow 1$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$\lim_{t\to0}\dfrac{f(t)}{t}=2$

$\therefore \lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=2$ …… ㉠

$\lim_{x\to0}\dfrac{x-2f(x)}{x+f(x)}$의 분모, 분자를 x로 각각 나누면

$$\lim_{x\to0}\frac{x-2f(x)}{x+f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{2f(x)}{x}}{1+\dfrac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to0}1-2\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}}{\lim_{x\to0}1+\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{1-4}{1+2}\ (\because ㉠)$$

$$=-1$$

유제 05 답 (1) **−2** (2) **2**

(1) 분모, 분자를 인수분해하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}(x-1)=-2$$

(2) 분모를 유리화하면

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}(1+\sqrt{1-x^2})=2$$

문제 05-1 답 **12**

분모를 유리화하면

$$\lim_{x\to-8}\frac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2}$$
$$=\lim_{x\to-8}\frac{(x+8)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}$$
$$=\lim_{x\to-8}\frac{(x+8)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{x+8}$$
$$=\lim_{x\to-8}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)=12$$

유제 06 답 (1) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (2) $\mathbf{0}$ (3) ∞ (4) $\mathbf{-\frac{2}{5}}$

(1) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 x^2으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)(x-1)}{2x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)}{2+\frac{3}{x^2}}$$
$$=\frac{(1+0)(1-0)}{2+0}=\frac{1}{2}$$

(2) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 x^2으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{2x^2+x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{0+0}{2+0+0}=0$$

(3) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 x로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\frac{1}{x}}=\infty$$

(4) $x=-t$라 하면 $t=-x$이고, $x\longrightarrow-\infty$일 때

$t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}-4x}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{t^2+1}+4t}$$

분모, 분자를 분모의 최고차항인 t로 각각 나누면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{t^2+1}+4t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}+4}=\frac{-2}{\sqrt{1+0}+4}=-\frac{2}{5}$$

유제 07 답 (1) **2** (2) **1**

(1) 분모를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-x+1}}{(x-\sqrt{x^2-x+1})(x+\sqrt{x^2-x+1})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1+1}{1+0}=2$$

(2) $x=-t$라 하면 $t=-x$이고, $x\longrightarrow-\infty$일 때

$t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x+2}+x)$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+2t+2}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+2t+2}-t)(\sqrt{t^2+2t+2}+t)}{\sqrt{t^2+2t+2}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t+2}{\sqrt{t^2+2t+2}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2+\frac{2}{t}}{\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}}+1}=\frac{2}{1+1}=1$$

문제 07-1 답 **4**

분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax})}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}=\frac{2a}{1+1}=a$$

$\therefore a=4$

유제 08 답 (1) $\mathbf{-\frac{1}{4}}$ (2) $\mathbf{-1}$

(1) $\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{4}$을 통분하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{4}\right\}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{-x(x+4)}{4(x+2)^2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-x-4}{4(x+2)^2}$$
$$=\frac{-4}{4\times4}=-\frac{1}{4}$$

(2) $1-\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$를 통분한 후 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}x\left(1-\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(x\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{x\times\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+\sqrt{x^2+2x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}=\frac{-2}{1+1}=-1$$

문제 08-1 답 $\dfrac{7}{18}$

$f(x)$에서 $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$을 통분하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{3-x}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\times\frac{x}{3-\sqrt{3x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{3-\sqrt{3x}}=\frac{1}{3}$$

$g(x)$에서 $x=-t$라 하면 $t=-x$이고, $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{t\to\infty}g(-t),\ g(-t)=t^2\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{\sqrt{9t^2+3}}\right)$$

$\dfrac{1}{3}-\dfrac{t}{\sqrt{9t^2+3}}$를 통분한 후 분자를 유리화하면

$$\lim_{t\to\infty}t^2\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{\sqrt{9t^2+3}}\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(t^2\times\frac{\sqrt{9t^2+3}-3t}{3\sqrt{9t^2+3}}\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2}{3(9t^2+3+3t\sqrt{9t^2+3})}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{9t^2+3+\sqrt{81t^4+27t^2}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{9+\frac{3}{t^2}+\sqrt{81+\frac{27}{t^2}}}$$

$$=\frac{1}{9+9}=\frac{1}{18}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to0}f(x)+\lim_{x\to-\infty}g(x)=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}=\frac{7}{18}$$

4 유제 & 문제 p.23~25

유제 09 답 (1) $a=4,\ b=3$ (2) $a=2,\ b=-\dfrac{1}{4}$

(1) $x\longrightarrow-1$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\longrightarrow0$ ➡ $\displaystyle\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)=0$

$1-a+b=0$ $\quad\therefore\ b=a-1$ ······ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하고 분자를 인수분해하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+a-1}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}(x+a-1)$$

$$=a-2$$

즉, $a-2=2$에서 $a=4$

이를 ㉠에 대입하면 $b=3$

(2) $x\longrightarrow1$일 때 (분자)$\longrightarrow0$이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모)$\longrightarrow0$ ➡ $\displaystyle\lim_{x\to1}(\sqrt{a-x}-\sqrt{x})=0$

$\sqrt{a-1}-1=0,\ a-1=1$ $\quad\therefore\ a=2$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하고 분모, 분자를 각각 유리화하면

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{2-x}-\sqrt{x})(\sqrt{2-x}+\sqrt{x})(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x})}{2(1-x)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2-x}+\sqrt{x}}{-2(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\frac{1+1}{-2(2+2)}=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ b=-\frac{1}{4}$$

문제 09-1 답 -6

$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x-3}{f(x)}=\frac{1}{12}$에서 $x\longrightarrow3$일 때 (분자)$\longrightarrow0$이고,

0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모)$\longrightarrow0$ ➡ $\displaystyle\lim_{x\to3}f(x)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to3}(x^3+ax^2+bx)=0,\ 27+9a+3b=0$

$\therefore\ b=-3a-9$ ······ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하고 분모를 인수분해하면

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^3+ax^2-(3a+9)x}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x(x-3)(x+a+3)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{x(x+a+3)}$$

$$=\frac{1}{3(6+a)}$$

즉, $\dfrac{1}{3(6+a)}=\dfrac{1}{12}$에서

$a+6=4$ $\quad\therefore\ a=-2$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-3$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2-3x$이므로 $f(2)=-6$

유제 10 답 14

(가)에서 $x\longrightarrow\infty$일 때, 극한값이 1이므로 $f(x)-2x^3$은 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 이차함수이다.

즉, $f(x)-2x^3=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)이므로

$\therefore\ f(x)=2x^3+x^2+ax+b$ ······ ㉠

㉠을 ㈏에 대입하면

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^3+x^2+ax+b}{x}=-3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow 0$ ➡ $\lim_{x \to 0}(2x^3+x^2+ax+b)=0$

$\therefore\ b=0$

이를 ㉡에 대입하면

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^3+x^2+ax}{x}=\lim_{x \to 0}(2x^2+x+a)=a$$

$\therefore\ a=-3$

따라서 $f(x)=2x^3+x^2-3x$이므로 $f(2)=14$

문제 10-1 답 -3

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}=3$에서 $x \longrightarrow \infty$일 때, 극한값이 3이므로

$f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 x에 대한 이차함수이다.

$\therefore f(x)=3x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)

$\lim_{x \to 4} \frac{f(x)}{g(x)}=2$에 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 식을 대입하면

$$\lim_{x \to 4} \frac{3x^2+ax+b}{x^2-3x-4}=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x \longrightarrow 4$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow 0$ ➡ $\lim_{x \to 4}(3x^2+ax+b)=0$

$48+4a+b=0$

$\therefore\ b=-4a-48 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x \to 4} \frac{3x^2+ax-4a-48}{x^2-3x-4}$$

$$=\lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(3x+a+12)}{(x-4)(x+1)}$$

$$=\lim_{x \to 4} \frac{3x+a+12}{x+1}$$

$$=\frac{a+24}{5}$$

즉, $\frac{a+24}{5}=2$에서 $a=-14$

이를 ㉡에 대입하면 $b=8$

따라서 $f(x)=3x^2-14x+8$이므로

$f(1)=-3$

유제 11 답 (1) -2 (2) $\frac{1}{3}$

(1) $\lim_{x \to 2}(3x-8)=-2$, $\lim_{x \to 2}(x^2-x-4)=-2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의해

$$\lim_{x \to 2} f(x)=-2$$

(2) $\lim_{x \to \infty} \frac{x+2}{3x+1}=\frac{1}{3}$, $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+4x+5}{3x^2+6x+4}=\frac{1}{3}$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의해

$$\lim_{x \to \infty} f(x)=\frac{1}{3}$$

문제 11-1 답 9

$3x+1<f(x)<3x+4$의 각 변을 제곱하면

$(3x+1)^2<\{f(x)\}^2<(3x+4)^2$

$x^2+1>0$이므로 각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{(3x+1)^2}{x^2+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}<\frac{(3x+4)^2}{x^2+1}$$

이때 $\lim_{x \to \infty} \frac{(3x+1)^2}{x^2+1}=9$, $\lim_{x \to \infty} \frac{(3x+4)^2}{x^2+1}=9$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의해

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}=9$$

기본 연습문제 p.26~28

1 ②	**2** 17	**3** ㄴ	**4** ㄴ, ㄷ	**5** 2
6 ㄱ, ㄷ	**7** ②	**8** 2	**9** ④	**10** -80
11 5	**12** ⑤			

1 각 함수 $f(x)$에 대하여 $x=0$에서 우극한과 좌극한을 구하면

ㄱ. $\lim_{x \to 0+} f(x)=\lim_{x \to 0+} x^2=0$, $\lim_{x \to 0-} f(x)=\lim_{x \to 0-} x^2=0$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)=0$

ㄴ. $\lim_{x \to 0+} f(x)=\lim_{x \to 0+}[x]=0$, $\lim_{x \to 0-} f(x)=\lim_{x \to 0-}[x]=-1$

즉, $\lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x)$이므로 $\lim_{x \to 0} f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x \to 0+} f(x)=\lim_{x \to 0+}|x|=\lim_{x \to 0+} x=0$,

$\lim_{x \to 0-} f(x)=\lim_{x \to 0-}|x|=\lim_{x \to 0-}(-x)=0$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)=0$

ㄹ. $\lim_{x \to 0+} f(x)=\lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x}=\lim_{x \to 0+} \frac{x}{x}=1$

$\lim_{x \to 0-} f(x)=\lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x}=\lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x}=-1$

즉, $\lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x)$이므로 $\lim_{x \to 0} f(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 $x=0$에서 극한값이 존재하는 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

2 $x=0$에서 함수 $f(x)$의 우극한과 좌극한을 구하면

$\lim_{x\to0+}(ax+b)=b$, $\lim_{x\to0-}(-x^2-1)=-1$

$\lim_{x\to0}f(x)$가 존재하므로 $b=-1$

$x=1$에서 함수 $f(x)$의 우극한과 좌극한을 구하면

$\lim_{x\to1+}(2x+1)=3$, $\lim_{x\to1-}(ax+b)=a+b$

$\lim_{x\to1}f(x)$가 존재하므로 $a+b=3$ …… ㉠

$b=-1$을 ㉠에 대입하면 $a=4$

$\therefore\ a^2+b^2=4^2+(-1)^2=17$

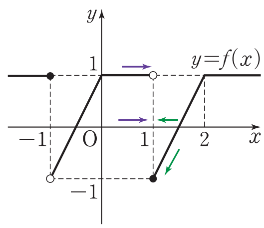
3 ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)=-1$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=1$, 즉

$\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

이므로 $\lim_{x\to1}f(x)$는

존재하지 않는다.



ㄴ. $x\longrightarrow1-$일 때, $f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1-}f(f(x))=f(1)=-1$

ㄷ. $f(x)=t$라 하면 $x\longrightarrow1+$일 때, $t\longrightarrow-1+$이므로

$\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{t\to-1+}f(t)=-1$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

4 ㄱ. $x=2$에서 함수 $f(x)+g(x)$의 우극한과 좌극한을 구하면

$\lim_{x\to2+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to2+}f(x)+\lim_{x\to2+}g(x)$

$=0+3=3$

$\lim_{x\to2-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to2-}f(x)+\lim_{x\to2-}g(x)$

$=0-3=-3$

즉, $\lim_{x\to2+}\{f(x)+g(x)\}\neq\lim_{x\to2-}\{f(x)+g(x)\}$이므로

$\lim_{x\to2}\{f(x)+g(x)\}$는 존재하지 않는다.

ㄴ. $x=2$에서 함수 $f(x)g(x)$의 우극한과 좌극한을 구하면

$\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to2+}f(x)\times\lim_{x\to2+}g(x)$

$=0\times3=0$

$\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}f(x)\times\lim_{x\to2-}g(x)$

$=0\times(-3)=0$

즉, $\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=0$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)g(x)=0$

ㄷ. $x=2$에서 함수 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$의 우극한과 좌극한을 구하면

$\lim_{x\to2+}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]$

$=\lim_{x\to2+}\{f(x)\}^2+\lim_{x\to2+}\{g(x)\}^2$

$=0+3^2=9$

$\lim_{x\to2-}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]$

$=\lim_{x\to2-}\{f(x)\}^2+\lim_{x\to2-}\{g(x)\}^2$

$=0+(-3)^2=9$

즉, $\lim_{x\to2+}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]$

$=\lim_{x\to2-}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]=9$

이므로 $\lim_{x\to2}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]=9$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

5 $x-1=t$라 하면 $x=t+1$이고, $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to0}\dfrac{f(t)}{t}=4$

$\therefore\ \lim_{x\to1}\dfrac{f(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x-1)}{x-1}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\lim_{t\to0}\dfrac{f(t)}{t}=\dfrac{1}{2}\times4=2$

6 ㄱ. $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}[\{f(x)+g(x)\}-f(x)]=\beta-\alpha$

ㄴ. [반례] $f(x)=x$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$이라 하면

$\lim_{x\to0}f(x)=0$, $\lim_{x\to0}f(x)g(x)=1$이지만 $\lim_{x\to0}g(x)$가 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{g(x)\times\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}=\alpha\beta$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

7 ① $\lim_{x\to-2}\dfrac{x^3-2x+4}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-2}\dfrac{(x+2)(x^2-2x+2)}{(x+1)(x+2)}$

$=\lim_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$

$=\dfrac{4+4+2}{-1}=-10$

② $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$=\dfrac{2}{1+1}=1$

③ $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}$

$=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$

④ $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2}+2}{2x-\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\frac{2}{x}}{2-\sqrt{1}}=1$

⑤ $x=-t$라 하면 $t=-x$이고, $x \longrightarrow -\infty$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-2x}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+t}+2t}{-t-\sqrt{t^2+1}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{t}}+2}{-1-\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}$

$=\frac{1+2}{-1-1}=-\frac{3}{2}$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

8 $x=-t$라 하면 $t=-x$이고, $x \longrightarrow -\infty$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-ax+3}-\sqrt{x^2+2x-3})$

$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+at+3}-\sqrt{t^2-2t-3})$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+at+3}-\sqrt{t^2-2t-3})(\sqrt{t^2+at+3}+\sqrt{t^2-2t-3})}{\sqrt{t^2+at+3}+\sqrt{t^2-2t-3}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(a+2)t+6}{\sqrt{t^2+at+3}+\sqrt{t^2-2t-3}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{a+2+\frac{6}{t}}{\sqrt{1+\frac{a}{t}+\frac{3}{t^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{t}-\frac{3}{t^2}}}$

$=\frac{a+2}{1+1}=\frac{a+2}{2}=2$

$\therefore a=2$

9 $\left[\frac{x}{3}\right]=\frac{x}{3}-h\ (0\le h<1)$라 하면

$\lim_{x\to\infty}\frac{12}{x}\left[\frac{x}{3}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{x}\left(\frac{x}{3}-h\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\left(4-\frac{12h}{x}\right)=4$

10 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=6$에서 $x \longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow 0$ ➡ $\lim_{x\to2}f(x)=0$

즉, $f(2)=0$이므로 $f(x)$는 $x-2$를 인수로 가진다.

따라서 $f(x)$는 $x-1$, $x-2$를 인수로 가지므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-\alpha)$ (α는 상수)라 하면

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)(x-\alpha)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x-1)(x-\alpha)=2-\alpha$

즉, $2-\alpha=6$에서 $\alpha=-4$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x+4)=x^3+x^2-10x+8$

따라서 $a=1$, $b=-10$, $c=8$이므로 $abc=-80$

11 (가)에서 $x \longrightarrow \infty$일 때, 극한값이 1이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 x에 대한 이차함수이다.

$\therefore f(x)=2x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수) …… ㉠

㉠을 (나)에 대입하면

$\lim_{x\to2}\frac{2x^2+ax+b}{x^2-x-2}=1$ …… ㉡

$x \longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow 0$ ➡ $\lim_{x\to2}(2x^2+ax+b)=0$

$8+2a+b=0$ $\therefore b=-2a-8$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\lim_{x\to2}\frac{2x^2+ax-2a-8}{x^2-x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x+a+4)}{(x-2)(x+1)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{2x+a+4}{x+1}=\frac{a+8}{3}$

즉, $\frac{a+8}{3}=1$에서 $a=-5$

이를 ㉢에 대입하면 $b=2$

따라서 $f(x)=2x^2-5x+2$이므로 $f(3)=5$

12 $3x^2-5\le(x^2+2)f(x)\le 3x^2+11$에서 $x^2+2>0$이므로 각 변을 x^2+2로 나누면

$\frac{3x^2-5}{x^2+2}\le f(x)\le\frac{3x^2+11}{x^2+2}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5}{x^2+2}=3$, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+11}{x^2+2}=3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의해

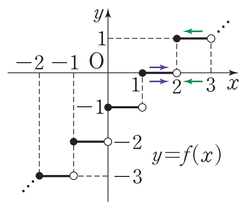
$\lim_{x\to\infty}f(x)=3$

실전 연습문제 p.29

1 ③ **2** 2 **3** -1 **4** 1

1 ㄱ. $f(x)=[x]-1$이라 하면

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)$

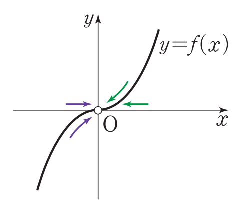
$=\lim\limits_{x\to 2+}([x]-1)=1$

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}([x]-1)=0$

즉, $\lim\limits_{x\to 2+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2-}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(x)=\dfrac{x^3}{|x|}$이라 하면

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x^3}{|x|}$

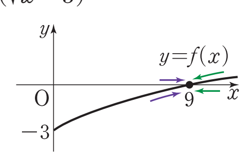
$=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}x^2=0$

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x^3}{|x|}$

$=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x^3}{-x}=\lim\limits_{x\to 0-}(-x^2)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

ㄷ. $f(x)=\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{(x-9)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}=\sqrt{x}-3$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim\limits_{x\to 9+}f(x)=\lim\limits_{x\to 9+}(\sqrt{x}-3)$

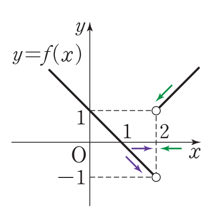
$=0$

$\lim\limits_{x\to 9-}f(x)=\lim\limits_{x\to 9-}(\sqrt{x}-3)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 9}f(x)=0$

ㄹ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{|x-2|}$라 하면

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)$

$=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2+}(x-1)=1$

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)$

$=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{(x-1)(x-2)}{-(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2-}(-x+1)=-1$

즉, $\lim\limits_{x\to 2+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2-}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

2 $f(x)-g(x)=h(x)$라 하면

$g(x)=f(x)-h(x)$이고 $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+\{f(x)-h(x)\}}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-h(x)}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{h(x)}{f(x)}}{1}$$

$$=2\ \left(\because \lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0\right)$$

3 $x=-t$라 하면 $t=-x$이고, $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+ax}+bx)$

$=\lim\limits_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-at}-bt)$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{(\sqrt{t^2-at}-bt)(\sqrt{t^2-at}+bt)}{\sqrt{t^2-at}+bt}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{(1-b^2)t^2-at}{\sqrt{t^2-at}+bt}=1$ …… ㉠

이때 ㉠이 성립하려면 분모와 분자의 차수가 같아야 하므로

$1-b^2=0,\ -a\neq0$ $\quad\therefore a\neq0,\ b=1\ (\because b>0)$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{(1-b^2)t^2-at}{\sqrt{t^2-at}+bt}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-at}{\sqrt{t^2-at}+t}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-a}{\sqrt{1-\dfrac{a}{t}}+1}$

$=\dfrac{-a}{1+1}=-\dfrac{a}{2}=1$

$\therefore a=-2 \qquad \therefore a+b=-2+1=-1$

4 $g\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)<f(x)<g\left(2-\dfrac{x}{1+x}\right)$에서

$\dfrac{x}{1+x}=1-\dfrac{1}{1+x}$이므로

$g\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)<f(x)<g\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)$

$1-\dfrac{1}{1+x}=t$라 하면 $x\longrightarrow\infty$일 때, $t\longrightarrow 1-$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}g\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)=\lim\limits_{t\to 1-}g(t)=1$

$1+\dfrac{1}{1+x}=k$라 하면 $x\longrightarrow\infty$일 때, $k\longrightarrow 1+$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}g\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)=\lim\limits_{k\to 1+}g(k)=1$

즉, $\lim\limits_{x\to\infty}g\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}g\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)=1$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$

02 함수의 연속

1 개념 CHECK p.30

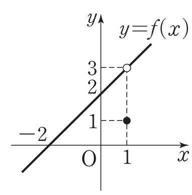
1. 답 (1) **정의되어 있다.**
(2) **존재한다.**
(3) **성립한다.**
(4) **연속이다.**

1 유제 & 문제 p.31~32

유제 01 답 (1) **불연속** (2) **연속** (3) **불연속** (4) **불연속**

(1) $x=1$에서 함숫값은 $f(1)=1$
$x \longrightarrow 1$일 때, 극한값은

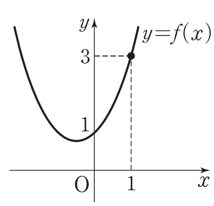
$\lim_{x\to1} f(x)$
$=\lim_{x\to1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$
$=\lim_{x\to1} \dfrac{(x+2)(x-1)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1} (x+2)$
$=3$



$\lim_{x\to1} f(x) \neq f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

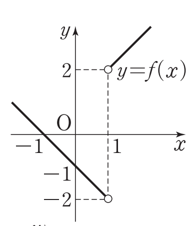
(2) $x=1$에서 함숫값은 $f(1)=3$
$x \longrightarrow 1$일 때, 극한값은

$\lim_{x\to1} f(x)$
$=\lim_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$
$=\lim_{x\to1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1} (x^2+x+1)$
$=3$

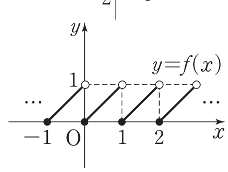


$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(3) $x=1$일 때, $f(x)$의 분모가 0이 되므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 정의되지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.



(4) $x=1$에서 함숫값은
$f(1)=1-[1]=0$
$x \longrightarrow 1$일 때
극한값은



$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+} (x-[x])$
$=\lim_{x\to1+} (x-1)=0$
$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-} (x-[x])$
$=\lim_{x\to1-} x=1$

즉, $\lim_{x\to1+} f(x) \neq \lim_{x\to1-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to1} f(x)$는 존재하지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

유제 02 답 ④

ㄱ. $x \longrightarrow 1$일 때, 극한값은
$\lim_{x\to1+} f(x)=1$, $\lim_{x\to1-} f(x)=1$
$\therefore \lim_{x\to1} f(x)=1$

ㄴ. $x \longrightarrow 2$일 때, 극한값은
$\lim_{x\to2+} f(x)=2$, $\lim_{x\to2-} f(x)=1$
즉, $\lim_{x\to2+} f(x) \neq \lim_{x\to2-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to2} f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄷ. (ⅰ) $x=1$에서 함숫값은 $f(1)=0$
$\lim_{x\to1} f(x) \neq f(1)$($\because$ ㄱ)이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.
(ⅱ) $x=2$에서 극한값이 존재하지 않으므로($\because$ ㄴ) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.
(ⅲ) $x=3$에서 함숫값은 $f(3)=1$
$x \longrightarrow 3$일 때, 극한값은
$\lim_{x\to3+} f(x)=1$, $\lim_{x\to3-} f(x)=1$
$\therefore \lim_{x\to3} f(x)=1$
$\lim_{x\to3} f(x)=f(3)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 불연속인 x의 값은 2개이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2 개념 CHECK p.34

1. 답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $[-2, \infty)$

(2) $x+2 \geq 0$에서 $x \geq -2$
따라서 정의역은 $\{x \mid x \geq -2\}$이므로 구간의 기호로 나타내면 $[-2, \infty)$

2 유제 & 문제 p.35~37

유제 03 답 (1) $(-\infty,\ \infty)$ (2) $(-\infty,\ -1),\ (-1,\ \infty)$

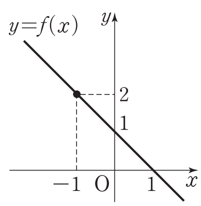
(1) $x\neq-1$일 때

$$f(x)=\frac{(1+x)(1-x)}{x+1}=1-x$$

$x=-1$일 때

$f(-1)=2$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 모든 점에서 끊어지지 않고 이어져 있으므로 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이다.



따라서 연속인 구간은 $(-\infty,\ \infty)$이다.

(2) $x>-1$일 때

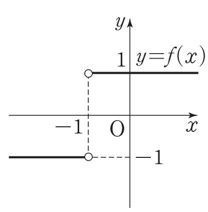
$$f(x)=\frac{x+1}{x+1}=1$$

$x<-1$일 때

$$f(x)=\frac{-(x+1)}{x+1}=-1$$

$x=-1$일 때, $f(x)$의 분모가 0이 되므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 정의되지 않는다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=-1$에서 끊어져 있으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.



따라서 연속인 구간은 $(-\infty,\ -1),\ (-1,\ \infty)$이다.

유제 04 답 1

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이면

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2+x+a}{x-1}=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$ ➡ $\lim\limits_{x\to1}(x^2+x+a)=0$

$1+1+a=0 \qquad \therefore a=-2$

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+2)=3$$

$\therefore b=3$

$\therefore a+b=-2+3=1$

문제 04-1 답 $\frac{1}{6}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+8}+a}{x^2-1}=f(1) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$ ➡ $\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x^2+8}+a)=0$

$3+a=0 \qquad \therefore a=-3$

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x^2+8}-3)(\sqrt{x^2+8}+3)}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\frac{1}{6}$$

$\therefore f(1)=\frac{1}{6}$

문제 04-2 답 4

$x\neq3$일 때, 주어진 식의 양변을 $x-3$으로 나누면

$$f(x)=\frac{x^2+ax-6}{x-3}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=3$에서도 연속이므로 $\lim\limits_{x\to3} f(x)=f(3)$

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{x^2+ax-6}{x-3}=f(3) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow3$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$ ➡ $\lim\limits_{x\to3}(x^2+ax-6)=0$

$9+3a-6=0 \qquad \therefore a=-1$

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x+2)(x-3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}(x+2)=5$$

$\therefore f(3)=5$

$\therefore a+f(3)=-1+5=4$

유제 05 답 ㄱ, ㄴ

두 함수 $f(x)=x^2-5x,\ g(x)=x^2-3$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄱ. $f(x),\ 2g(x)$는 연속함수의 성질에 의해 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)+2g(x)$도 연속함수의 성질에 의해 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. $\{f(x)\}^2=f(x)\times f(x)$이므로 연속함수의 성질에 의해 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{x^2-3}{x^2-5x}=\dfrac{x^2-3}{x(x-5)}$

이 함수는 $x=0$, $x=5$에서 정의되지 않으므로 $x=0$, $x=5$에서 불연속이다.

ㄹ. $\dfrac{1}{f(x)-g(x)}=\dfrac{1}{(x^2-5x)-(x^2-3)}=\dfrac{1}{-5x+3}$

이 함수는 $x=\dfrac{3}{5}$에서 정의되지 않으므로 $x=\dfrac{3}{5}$에서 불연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

문제 **05-1** 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $3f(x)$, $5g(x)$는 연속함수의 성질에 의해 $x=a$에서 연속이므로 함수 $3f(x)-5g(x)$도 연속함수의 성질에 의해 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $15f(x)g(x)$는 연속함수의 성질에 의해 $x=a$에서 연속이다.

ㄷ. $\{g(x)\}^2=g(x)\times g(x)$이므로 연속함수의 성질에 의해 $x=a$에서 연속이다.

ㄹ. $f(a)=0$이면 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $3f(x)+\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=a$에서 항상 연속이 아니다.

따라서 $x=a$에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

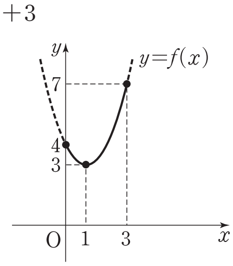
3 개념 CHECK p.38

1. 답 (1) **최댓값: 7, 최솟값: 3**

(2) **최댓값: 3, 최솟값: $\dfrac{3}{2}$**

(1) $f(x)=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$

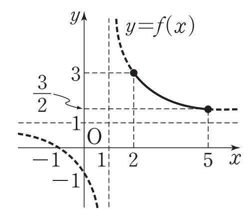
닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이다.



따라서 함수 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 갖고, $f(0)=4$, $f(1)=3$, $f(3)=7$이므로 최댓값은 7, 최솟값은 3이다.

(2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$

닫힌구간 $[2, 5]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[2, 5]$에서 연속이다.



따라서 함수 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 갖고, $f(2)=3$, $f(5)=\dfrac{3}{2}$이므로 최댓값은 3, 최솟값은 $\dfrac{3}{2}$이다.

3 유제 & 문제 p.39

유제 **06** 답 **풀이 참조**

$f(x)=x^3-3x^2+5x+6$이라 하면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

이때 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 연속이고 $f(-1)=-3<0$, $f(0)=6>0$이므로 사잇값의 정리에 의해 $f(c)=0$을 만족하는 c가 열린구간 $(-1, 0)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3-3x^2+5x+6=0$은 열린구간 $(-1, 0)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

문제 **06-1** 답 $-4<a<2$

$f(x)=x^2-3x+a$라 하면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

이때 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고

$f(-1)=1+3+a=a+4$

$f(1)=1-3+a=a-2$

$f(-1)f(1)<0$이면 사잇값의 정리에 의해 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재하므로

$f(-1)f(1)=(a+4)(a-2)<0 \qquad \therefore -4<a<2$

문제 **06-2** 답 **3**

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고

$f(0)f\left(\dfrac{1}{3}\right)<0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)f\left(\dfrac{2}{3}\right)<0$, $f\left(\dfrac{2}{3}\right)f\left(\dfrac{3}{4}\right)<0$

이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right)$, $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

기본 연습문제 p.40~41

1 ④	2 3	3 ㄴ, ㄷ	4 ㄱ	5 5
6 3	7 $0<a<3$		8 ㄱ, ㄴ	9 2

1 ① $x=0$에서 함숫값은 $f(0)=1$

$x \longrightarrow 0$일 때, 극한값은

$$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0-}\frac{x}{-x}=-1$$

즉, $\lim\limits_{x\to0+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to0-} f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

② $x=0$일 때, $f(x)$의 분모가 0이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 정의되지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

③ $x=0$일 때, $f(x)$의 분모가 0이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 정의되지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

④ $x=0$에서 함숫값은 $f(0)=1$

$x \longrightarrow 0$일 때, 극한값은

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0} f(x)\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

⑤ $x=0$에서 함숫값은 $f(0)=0$

$x \longrightarrow 0$일 때, 극한값은

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0+} f(x)&=\lim_{x\to0+}(x+[x])\\
&=\lim_{x\to0+} x=0\\
\lim_{x\to0-} f(x)&=\lim_{x\to0-}(x+[x])\\
&=\lim_{x\to0-}(x-1)=-1
\end{aligned}$$

즉, $\lim\limits_{x\to0+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to0-} f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 $x=0$에서 연속인 함수는 ④이다.

2 $f(x)=1-\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}$

$$\begin{aligned}
&=1-\frac{x}{x^2-1}\\
&=\frac{x^2-x-1}{x^2-1}
\end{aligned}$$

이때 $x=0$, $x^2-1=0$인 x의 값에서 $f(x)$가 정의되지 않으므로 불연속인 x의 값은

$x=0$ 또는 $x^2-1=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 3개이다.

3 ㄱ. $x \longrightarrow 1$일 때, 극한값은

$\lim\limits_{x\to1+} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to1-} f(x)=1$

즉, $\lim\limits_{x\to1+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to1-} f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $1<x<3$에서 연속이므로 $1<a<3$인 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$이다.

ㄷ. (ⅰ) $x=0$에서 함숫값은 $f(0)=1$

$x \longrightarrow 0$일 때, 극한값은

$\lim\limits_{x\to0+} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0-} f(x)=0$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)\neq f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(ⅱ) $x=1$에서 극한값이 존재하지 않으므로 ($\because$ ㄱ)

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(ⅲ) $x=2$에서 함숫값은 $f(2)=0$

$x \longrightarrow 2$일 때, 극한값은

$\lim\limits_{x\to2+} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to2-} f(x)=0$

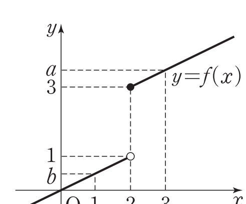
$\therefore$ $\lim\limits_{x\to2} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to2} f(x)=f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 불연속인 x의 값은 2개이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

4 $f(3)=a$, $f(1)=b$라 하면



ㄱ. $f(f(2))=f(3)=a$이므로 $f(f(2))$의 값은 존재한다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to2+} f(f(x))$에서

$f(x)=t$라 하면

$x \longrightarrow 2+$일 때, $t \longrightarrow 3+$이므로

$\lim\limits_{x\to2+} f(f(x))=\lim\limits_{t\to3+} f(t)=a$

$\lim_{x \to 2-} f(f(x))$에서 $f(x)=t$라 하면

$x \longrightarrow 2-$일 때, $t \longrightarrow 1-$이므로

$\lim_{x \to 2-} f(f(x))=\lim_{x \to 1-} f(t)=b$

즉, $\lim_{x \to 2+} f(f(x)) \neq \lim_{x \to 2-} f(f(x))$이므로

$\lim_{x \to 2} f(f(x))$는 존재하지 않는다.

ㄷ. $x=2$에서 극한값이 존재하지 않으므로 ($\because$ ㄴ)

함수 $f(f(x))$는 $x=2$에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

5 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=a$에서도 연속이므로

$\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$

$\therefore \lim_{x \to a} \frac{2x^2+ax-b}{x-a}=b$ ······ ㉠

$x \longrightarrow a$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow 0$ ➡ $\lim_{x \to a} (2x^2+ax-b)=0$

$2a^2+a^2-b=0$ $\quad \therefore b=3a^2$

이를 ㉠에 대입하면

$\lim_{x \to a} \frac{2x^2+ax-3a^2}{x-a}$

$=\lim_{x \to a} \frac{(x-a)(2x+3a)}{x-a}$

$=\lim_{x \to a} (2x+3a)=5a$ $\quad \therefore b=5a$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{5a}{a}=5$

6 $x \neq 2$일 때, 주어진 식의 양변을 $x-2$로 나누면

$f(x)=\frac{x^2-ax+b}{x-2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서도 연속이므로

$\lim_{x \to 2} f(x)=f(2)$

$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{x^2-ax+b}{x-2}=f(2)$ ······ ㉠

$x \longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow 0$ ➡ $\lim_{x \to 2} (x^2-ax+b)=0$

$4-2a+b=0$ $\quad \therefore 2a-b=4$ ······ ㉡

이때 $f(3)=4$이므로

$(3-2)f(3)=9-3a+b$, $9-3a+b=4$

$\therefore 3a-b=5$ ······ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$

이를 ㉠에 대입하면

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x \to 2} (x+1)=3$

$\therefore f(2)=3$

7 함수 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에서 연속이면 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=x^2-2ax+3a \neq 0$이다.

즉, 이차방정식 $x^2-2ax+3a=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-3a<0$, $a(a-3)<0$

$\therefore 0<a<3$

8 ㄱ. 임의의 실수 a에 대하여 $g(a)=b$라 하면

$g(x)$가 연속함수이므로 $\lim_{x \to a} g(x)=b$

$x=a$에서 함숫값은 $f(g(a))=f(b)$

$x \longrightarrow a$일 때, 극한값은

$g(x)=t$라 하면 $x \longrightarrow a$일 때, $t \longrightarrow b$이므로

$\lim_{x \to a} f(g(x))=\lim_{t \to b} f(t)=f(b)$

$\lim_{x \to a} f(g(x))=f(g(a))$이므로 함수 $f(g(x))$는 $x=a$에서 연속이다.

즉, $f(g(x))$는 연속함수이다.

ㄴ. $f(x)+g(x)=h(x)$라 하면

$g(x)=h(x)-f(x)$

이때 $f(x)$와 $h(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

ㄷ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$이라 하면

$f(x)g(x)=0$이므로 $f(x)$, $f(x)g(x)$는 연속함수이지만 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

9 $g(x)=f(x)-x^2$이라 하면 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

$g(0)=f(0)-0^2=1-0=1$

$g(1)=f(1)-1^2=a^2-a-5-1=a^2-a-6$

$g(2)=f(2)-2^2=5-4=1$

$g(0)g(1)<0$이라 하면 $a^2-a-6<0$

$g(1)g(2)<0$이라 하면 $a^2-a-6<0$

즉, 사잇값의 정리에 의해 $a^2-a-6<0$이면 방정식 $g(x)=0$이 열린구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 가지므로

$a^2-a-6<0$에서 $(a+2)(a-3)<0$

$\therefore -2<a<3$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$-1+0+1+2=2$

실전 연습문제 p.42

1 ㄴ, ㄷ **2** 2 **3** ㄱ, ㄷ

1 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서만 불연속이고, 주어진 **보기**에서 함수 $g(x)$는 연속함수이므로 함수 $y=g(f(x))$가 $x=1$에서 연속이면 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이다.

이때 함수 $g(f(x))$가 $x=1$에서 연속이면

$\lim_{x\to1} g(f(x))=g(f(1))$

따라서 극한값 $\lim_{x\to1} g(f(x))$가 존재해야 하므로

$\lim_{x\to1+} g(f(x))=\lim_{x\to1-} g(f(x))=g(f(1))$

이때 $f(x)=t$라 하면

$x \longrightarrow 1+$일 때, $t \longrightarrow -1-$이므로

$\lim_{x\to1+} g(f(x))=\lim_{t\to-1-} g(t)$

$x \longrightarrow 1-$일 때, $t \longrightarrow 1-$이므로

$\lim_{x\to1-} g(f(x))=\lim_{t\to1-} g(t)$

$g(f(1))=g(0)$이므로

$\lim_{x\to-1-} g(x)=\lim_{x\to1-} g(x)=g(0)$

주어진 **보기**에서 $g(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x\to-1-} g(x)=g(-1)$, $\lim_{x\to1-} g(x)=g(1)$이 성립한다.

즉, $g(-1)=g(1)=g(0)$이면 $g(f(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄱ. $g(-1)=1,\ g(1)=1,\ g(0)=0$

➡ $g(-1)=g(1)\neq g(0)$

ㄴ. $g(-1)=-1,\ g(1)=-1,\ g(0)=-1$

➡ $g(-1)=g(1)=g(0)$

ㄷ. $g(-1)=0,\ g(1)=0,\ g(0)=0$

➡ $g(-1)=g(1)=g(0)$

따라서 $y=g(f(x))$가 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이 되는 함수 $y=g(x)$의 그래프는 ㄴ, ㄷ이다.

2 함수 $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{|x|} & (x\neq0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$에 대하여

$f(x^2-1)=\begin{cases} -\dfrac{x^2-1}{|x^2-1|} & (x^2-1\neq0) \\ 0 & (x^2-1=0) \end{cases}$

(i) $x^2>1$, 즉 $x<-1$ 또는 $x>1$일 때

$f(x^2-1)=-\dfrac{x^2-1}{x^2-1}=-1$

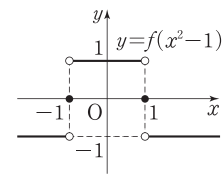
(ii) $x^2<1$, 즉 $-1<x<1$일 때

$f(x^2-1)=-\dfrac{x^2-1}{-(x^2-1)}=1$

(iii) $x^2-1=0$, 즉 $x=-1$ 또는 $x=1$일 때

$f(x^2-1)=0$

(i), (ii), (iii)에 의해 함수 $y=f(x^2-1)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $x=-1$, $x=1$에서 그래프가 끊어져 있으므로 함수 $f(x^2-1)$은 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이다.

따라서 불연속인 x의 값은 2개이다.

3 ㄱ. $x \longrightarrow 0$일 때, 극한값은

$f(x)=t$라 하면

$x \longrightarrow 0+$일 때, $t \longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to0+} h(x)=\lim_{x\to0+} g(f(x))=\lim_{t\to0+} g(t)=0$

$x \longrightarrow 0-$일 때, $t \longrightarrow 0-$이므로

$\lim_{x\to0-} h(x)=\lim_{x\to0-} g(f(x))=\lim_{t\to0-} g(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to0} h(x)=0$

ㄴ. $x=0$에서 함수 $f(x)$는 불연속이지만

$\lim_{x\to0} h(x)=0$ ($\because$ ㄱ)이고

$h(0)=g(f(0))=g(1)=0$이므로

$\lim_{x\to0} h(x)=h(0)$

즉, 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

한편 주어진 함수 $g(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이고 함수 $f(x)$는 $x\neq0$인 모든 실수에 대하여 연속이므로 $f(x)=-1$, $f(x)=1$일 때 함수 $g(f(x))$는 불연속이다.

따라서 $f(x)=-1$, $f(x)=1$을 만족하는 x의 값은 각각 $x=-1$, $x=1$이므로 함수 $h(x)=g(f(x))$의 불연속인 x의 값은 2개이다.

ㄷ. 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이므로 ($\because$ ㄴ)

닫힌구간 $\left[-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right]$에서 연속이다.

$h\left(-\dfrac{1}{2}\right)<0$, $h\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$이므로 사잇값의 정리에 의해

방정식 $h(x)=0$은 열린 구간 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

01 미분계수와 도함수

1 개념 CHECK p.45

1. 답 (1) **10** (2) **12**

(1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(5)-f(1)}{5-1}=\dfrac{45-5}{4}=10$

(2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(10)-f(-2)}{10-(-2)}=\dfrac{140-(-4)}{12}=12$

2. 답 (1) **-4** (2) **7**

(1) $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{-4(2+\Delta x)+1\}-(-4\times2+1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-4\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-4)=-4$

(2) $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{(2+\Delta x)^2+3(2+\Delta x)\}-(2^2+3\times2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2+7\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+7)=7$

다른 풀이

(1) $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(-4x+1)-(-4\times2+1)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-4(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(-4)=-4$

(2) $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2+3x)-(2^2+3\times2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+5)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+5)=7$

1 유제 & 문제 p.46~49

유제 01 답 **2**

함수 $f(x)=x^2+x+1$에 대하여 x의 값이 a에서 b까지 변할 때 평균변화율은

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{(b^2+b+1)-(a^2+a+1)}{b-a}$

$=\dfrac{(b^2-a^2)+(b-a)}{b-a}=\dfrac{(b-a)(b+a+1)}{b-a}$

$=a+b+1$ ...... ㉠

함수 $f(x)$의 $x=1$에서 미분계수 $f'(1)$은

$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)+1\}-(1+1+1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2+3\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+3)=3$ ...... ㉡

㉠=㉡이므로 $a+b+1=3$ $\therefore a+b=2$

문제 01-1 답 **2**

함수 $f(x)=x^2-5x+4$에 대하여 x의 값이 1부터 3까지 변할 때 평균변화율은

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{-2-0}{2}=-1$ ...... ㉠

함수 $f(x)$의 $x=c$에서 미분계수 $f'(c)$는

$f'(c)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{(c+\Delta x)^2-5(c+\Delta x)+4\}-(c^2-5c+4)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2+(2c-5)\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2c-5)$

$=2c-5$ ...... ㉡

㉠=㉡이므로 $-1=2c-5$ $\therefore c=2$

문제 01-2 답 **6**

함수 $f(x)=x^2-1$에 대하여 x의 값이 -1에서 5까지 변할 때 평균변화율은

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(5)-f(-1)}{5-(-1)}=\dfrac{24-0}{6}=4$ ...... ㉠

x의 값이 1에서 a까지 변할 때 평균변화율은

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a)-f(1)}{a-1}=\dfrac{(a^2-1)-0}{a-1}$

$=\dfrac{(a+1)(a-1)}{a-1}=a+1$ ...... ㉡

㉠=㉡이므로 $4=a+1$ $\therefore a=3$

따라서 함수 $f(x)$의 $x=3$에서 미분계수 $f'(3)$은

$f'(3)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{(3+\Delta x)^2-1\}-(9-1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2+6\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+6)=6$

유제 02 답 (1) **3** (2) **10**

(1) 분모, 분자에 각각 $\dfrac{3}{2}$을 곱하면

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times\dfrac{3}{2}$

$=\dfrac{3}{2}f'(a)=\dfrac{3}{2}\times2=3$

개념편

(2) 분자에서 $f(a)$를 빼고 더하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)+f(a)-f(a-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times 3-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\times(-2)$$
$$=3f'(a)+2f'(a)$$
$$=5f'(a)=5\times 2=10$$

문제 02-1 답 **16**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1+h)}{2h}=4\text{에서}$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1+h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)+f(1)-f(1+h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times\frac{3}{2}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{2}f'(1)-\frac{1}{2}f'(1)=f'(1)=4 \quad\cdots\cdots ㉠$$
$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h^2)-f(1-4h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h^2)-f(1)+f(1)-f(1-4h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h^2)-f(1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-4h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h^2)-f(1)}{h^2}\times h-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-4h)-f(1)}{-4h}\times(-4)$$
$$=f'(1)\times 0+4f'(1)$$
$$=4f'(1)=4\times 4=16\ (\because ㉠)$$

유제 03 답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) **3** (3) **−8**

(1) $$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}$$
$$=f'(2)\times\frac{1}{4}=1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

(2) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{f(x)-f(2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+1)}}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+1}}$$
$$=\frac{1}{\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}}$$
$$=\frac{1}{f'(2)\times\frac{1}{3}}=\frac{3}{f'(2)}=\frac{3}{1}=3$$

(3) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2f(2)-4f(x)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2f(2)-4f(2)+4f(2)-4f(x)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)f(2)-4\{f(x)-f(2)\}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)f(2)}{x-2}-4\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x+2)f(2)-4\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=4f(2)-4f'(2)$$
$$=4\times(-1)-4\times 1=-8$$

문제 03-1 답 **1**

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}\times\frac{\sqrt{f(x)}+1}{\sqrt{f(x)}+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-1}{x-1}\times\frac{1}{\sqrt{f(x)}+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{f(x)}+1}\ (\because\ f(1)=1)$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{\sqrt{f(1)}+1}$$
$$=2\times\frac{1}{\sqrt{1}+1}=1$$

유제 04 답 **−4**

$f(a+b)=f(a)+f(b)-3ab$의 양변에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$

미분계수의 정의에 의해 $f'(0)$은

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=2 \quad\cdots\cdots ㉠$$

미분계수의 정의에 의해 $f'(2)$는

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{f(2)+f(\Delta x)-6\Delta x\}-f(2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-6\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}-6$$
$$=2-6=-4\ (\because ㉠)$$

$\therefore\ f(0)+f'(2)=0+(-4)=-4$

문제 04-1 답 **−1**

미분계수의 정의에 의해 $f'(1)$은

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{f(1)+f(\Delta x)+2\Delta x-1\}-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}+2$$

이때 $f'(1)=1$이므로 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}+2=1$

$\therefore\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=-1$ …… ㉠

미분계수의 정의에 의해 $f'(0)$은

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{f(0)+f(\Delta x)-1\}-f(0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=-1\ (\because ㉠)$$

2 개념 CHECK p.50

1. 답 (1) **−4** (2) **4**

(1) $f(x)=x^2-2x+5$라 하면 구하는 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=-1$에서 미분계수와 같으므로

$$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(-1+\Delta x)^2-2(-1+\Delta x)+5\}-8}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2-4\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x-4)=-4$$

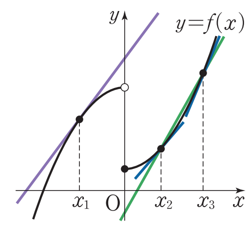
(2) $f(x)=x^3+x$라 하면 구하는 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=1$에서 미분계수와 같으므로

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^3+(1+\Delta x)\}-2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3+3(\Delta x)^2+4\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\{(\Delta x)^2+3\Delta x+4\}=4$$

2 유제 & 문제 p.51

유제 05 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$는 두 점 $(x_2,\ f(x_2))$, $(x_3,\ f(x_3))$을 지나는 직선의 기울기이므로 오른쪽 그림에서 그 기울기는 0보다 크다.



$\therefore\ \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}>0$

ㄴ. 미분계수의 정의에 의해

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}=f'(x_1)$$

$f'(x_1)$은 점 $(x_1,\ f(x_1))$에서의 접선의 기울기이므로 위의 그림에서 그 기울기는 0보다 크다.

$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}>0$

ㄷ. $f'(x_2)$는 점 $(x_2,\ f(x_2))$에서의 접선의 기울기이고, $f'(x_3)$은 점 $(x_3,\ f(x_3))$에서의 접선의 기울기이므로 위의 그림에서

$f'(x_2)<f'(x_3)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

3 유제 & 문제 p.53

유제 06 답 (1) **$x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.**
(2) **$x=0$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.**

(1) (i) $x=0$에서의 함숫값은 $f(0)=0$ …… ㉠

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(x+|x|)=\lim_{x\to 0+}2x=0$

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(x+|x|)=\lim_{x\to 0-}0=0$

즉, $\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h+|h|}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{2h}{h}=2$

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{h+|h|}{h}=\lim_{h\to 0-}0=0$

즉, $\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\neq\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

이므로 $f'(0)$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에 의해 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

개념편

(2) $x=0$에서의 함숫값은 $f(0)=0$ ⋯⋯ ㉠

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x-1)=-1 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to0} f(x)\neq f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

4 개념 CHECK

p.55

1. 답 (1) $\boldsymbol{f'(x)=2x+1}$ (2) $\boldsymbol{f'(x)=2x+1}$

(1) 도함수의 정의에 의해

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^2+(x+h)\}-(x^2+x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2+2xh+h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(h+2x+1)=2x+1$$

(2) 미분법의 공식에 의해

$f'(x)=(x^2+x)'=(x^2)'+(x)'=2x+1$

4 유제 & 문제

p.56~59

유제 07 답 (1) $\boldsymbol{y'=-12x^2+4x}$ (2) $\boldsymbol{y'=24x-16}$
(3) $\boldsymbol{y'=9x^2-8x+4}$ (4) $\boldsymbol{y'=18x^2+26x}$
(5) $\boldsymbol{y'=10(3x+1)(3x^2+2x+1)^4}$
(6) $\boldsymbol{y'=(7x-3)(x-1)(x+1)^4}$

(1) $y'=-4(x^3)'+2(x^2)'-(1)'$
$=-4\times3x^2+2\times2x-0=-12x^2+4x$

(2) $y'=12(x^2)'-16(x)'+(8)'$
$=12\times2x-16\times1+0=24x-16$

(3) $y'=(3x-1)'(x^2-x+1)+(3x-1)(x^2-x+1)'$
$=3(x^2-x+1)+(3x-1)(2x-1)$
$=3x^2-3x+3+6x^2-5x+1$
$=9x^2-8x+4$

(4) $y'=(x+2)'(2x-1)(3x+2)$
$+(x+2)(2x-1)'(3x+2)$
$+(x+2)(2x-1)(3x+2)'$
$=(2x-1)(3x+2)+(x+2)\times2\times(3x+2)$
$+(x+2)(2x-1)\times3$
$=6x^2+x-2+6x^2+16x+8+6x^2+9x-6$
$=18x^2+26x$

(5) $y'=5(3x^2+2x+1)^4(3x^2+2x+1)'$
$=5(3x^2+2x+1)^4(6x+2)$
$=10(3x+1)(3x^2+2x+1)^4$

(6) $y'=\{(x+1)^3\}'(x^2-1)^2+(x+1)^3\{(x^2-1)^2\}'$
$=\{3(x+1)^2(x+1)'\}(x^2-1)^2$
$+(x+1)^3\{2(x^2-1)(x^2-1)'\}$
$=\{3(x+1)^2\times1\}(x^2-1)^2$
$+(x+1)^3\{2(x^2-1)\times2x\}$
$=3(x+1)^2(x^2-1)^2+4x(x+1)^3(x^2-1)$
$=(7x^2+4x-3)(x+1)^2(x^2-1)$
$=(7x-3)(x-1)(x+1)^4$

문제 07-1 답 $\boldsymbol{-4}$

$f'(x)=(x^2+1)'(x-4)^2+(x^2+1)\{(x-4)^2\}'$
$=2x(x-4)^2+(x^2+1)\times2(x-4)$
$=2x(x-4)^2+2(x^2+1)(x-4)$
$\therefore f'(2)=4\times(-2)^2+2\times5\times(-2)=-4$

문제 07-2 답 $\boldsymbol{-1}$

함수 $f(x)=ax^2+bx+c$를 미분하면
$f'(x)=2ax+b$
$f'(-1)=4$, $f'(1)=0$이므로
$f'(-1)=-2a+b=4$ ⋯⋯ ㉠
$f'(1)=2a+b=0$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-1$, $b=2$
$f(x)=-x^2+2x+c$에서 $f(1)=0$이므로
$1+c=0$
$\therefore c=-1$
따라서 $f(x)=-x^2+2x-1$이므로
$f(2)=-4+4-1=-1$

유제 08 답 (1) **10** (2) **40**

(1) 함수 $f(x)=x^3+2x-1$을 미분하면
$f'(x)=3x^2+2$ ⋯⋯ ㉠
$f(1)=1+2\times1-1=2$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{(x-1)(x+1)}\times(x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\lim_{x\to1}(x+1)$$
$$=2f'(1)$$
$$=2(3\times1+2)\ (\because ㉠)$$
$$=10$$

(2) $f(x)=x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6$이라 하면

$f(1)=1+1+1+1+1=5$

함수 $f(x)$를 미분하면

$f'(x)=10x^9+9x^8+8x^7+7x^6+6x^5$ ...... ㉠

$x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6-5=f(x)-f(1)$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6-5}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$=f'(1)=10+9+8+7+6=40$ ($\because$ ㉠)

문제 **08-1** 답 $a=2,\ b=-3$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=5$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to1}f(x)=0$

즉, $f(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=5$$

이때 $f(x)=x^3+ax+b$를 미분하면

$f'(x)=3x^2+a$

$f'(1)=5$에서 $3+a=5$ $\quad\therefore\ a=2$

$f(x)=x^3+2x+b$에서 $f(1)=0$이므로

$3+b=0$ $\quad\therefore\ b=-3$

문제 **08-2** 답 6

$f(x)=x^n+x^2+x$라 하면 $f(1)=1+1+1=3$

함수 $f(x)$를 미분하면 $f'(x)=nx^{n-1}+2x+1$

$x^n+x^2+x-3=f(x)-f(1)$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n+x^2+x-3}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+2}$$

$$=f'(1)\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}(n+3)=3$$

$\therefore\ n=6$

유제 **09** 답 9

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이고 미분계수 $f'(1)$이 존재한다.

(i) $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$에서

$b+1=1+a$ $\quad\therefore\ a=b$ ...... ㉠

(ii) 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{\{(1+h)^3+a(1+h)^2\}-(1+a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{(3+2a)h+(3+a)h^2+h^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\{3+2a+(3+a)h+h^2\}=3+2a$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{\{b(1+h)+1\}-(b+1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{bh}{h}=b$$

$\therefore\ 3+2a=b$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=-3$ $\quad\therefore\ ab=9$

다른 풀이

$g(x)=x^3+ax^2,\ h(x)=bx+1$이라 하면

$g'(x)=3x^2+2ax,\ \ h'(x)=b$

(i) $x=1$에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$에서

$1+a=b+1$ $\quad\therefore\ a=b$ ...... ㉠

(ii) $x=1$에서 미분계수가 존재하므로 $g'(1)=h'(1)$에서

$3+2a=b$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=-3$ $\quad\therefore\ ab=9$

문제 **09-1** 답 4

$x\neq1$일 때, $f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x-1}$ ...... ㉠

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=1$에서도 미분가능하다.

(i) $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$에서

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x+a}{x-1}=f(1)$$

$x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to1}(x^2+2x+a)=0$

$1+2+a=0$ $\quad\therefore\ a=-3$

이를 ㉠에 대입하면

$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}$$

$=x+3$ ...... ㉡

(ii) 미분계수 $f'(1)$이 존재한다. ㉡에서

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(1+h+3)-4}{h}=1$$

즉, $f'(1)=1$이므로 $b=1$

(i), (ii)에 의해 $b-a=1-(-3)=4$

유제 10 답 199

다항식 $x^{100}+ax+b$가 $(x+1)^2$을 인수로 가지므로

$x^{100}+ax+b=(x+1)^2Q(x)$ (단, $Q(x)$는 다항식) …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-a+b=0$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$100x^{99}+a=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$

이 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-100+a=0 \quad \therefore a=100$

이를 ㉡에 대입하면 $1-100+b=0 \quad \therefore b=99$

$\therefore a+b=100+99=199$

문제 10-1 답 $7x-4$

다항식 x^8-x+3을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^8-x+3=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-1+3=a+b \quad \therefore a+b=3$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$8x^7-1=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$8-1=a \quad \therefore a=7$

이를 ㉡에 대입하면 $7+b=3 \quad \therefore b=-4$

따라서 구하는 나머지는 $7x-4$이다.

문제 10-2 답 3

다항식 x^5+ax^3+b를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $-4x+1$이므로

$x^5+ax^3+b=(x-1)^2Q(x)-4x+1$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b=-4+1 \quad \therefore a+b=-4$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5x^4+3ax^2=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)-4$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$5+3a=-4 \quad \therefore a=-3$

이를 ㉡에 대입하면 $-3+b=-4 \quad \therefore b=-1$

$\therefore ab=(-3)\times(-1)=3$

기본 연습문제

p.60~61

1 $-\frac{1}{3}$	2 9	3 1	4 $\frac{1}{2}$	5 ㄱ
6 ④	7 3	8 6	9 99	10 -1

1 함수 $g(x)$에 대하여 x의 값이 -1에서 2까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{g(2)-g(-1)}{2-(-1)}=\frac{g(2)-g(-1)}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$이고, 주어진 그래프에서 $f(-1)=0$, $f(0)=1$, $f(2)=-1$이므로

$g(2)=f(f(2))=f(-1)=0$

$g(-1)=f(f(-1))=f(0)=1$

이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{g(2)-g(-1)}{3}=\frac{0-1}{3}=-\frac{1}{3}$$

2

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)-g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a-h)-g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times2-\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\times(-1)-\lim_{h\to0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$$
$$=2f'(a)+f'(a)-g'(0)$$
$$=3f'(a)-g'(0)$$
$$=3\times3-g'(0)=0$$

$\therefore g'(0)=9$

3

$$\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x^2-3x+2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-2f(2)+2f(2)-xf(2)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2\{f(x)-f(2)\}}{(x-1)(x-2)}-\lim_{x\to2}\frac{(x-2)f(2)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2}{x-1}\times\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to2}\frac{f(2)}{x-1}$$
$$=2f'(2)-f(2)$$
$$=2\times2-3=1$$

4

$$f'(1)=\lim_{a\to0}\frac{f(1+a)-f(1)}{a}=\lim_{a\to0}\frac{\sqrt{a+1}-1}{a}$$
$$=\lim_{a\to0}\frac{(\sqrt{a+1}-1)(\sqrt{a+1}+1)}{a(\sqrt{a+1}+1)}$$
$$=\lim_{a\to0}\frac{1}{\sqrt{a+1}+1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

5 ㄱ. $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{(h-1)^2-(-1)^2}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{h^2-2h}{h}$

$=\lim_{h\to0}(h-2)=-2$

즉, $f'(0)$이 존재하므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. $\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=-1$

$\therefore \lim_{x\to0+}g(x)\neq\lim_{x\to0-}g(x)$

즉, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{x\to0+}h(x)=\lim_{x\to0+}[x+1]=1$

$\lim_{x\to0-}h(x)=\lim_{x\to0-}[x+1]=0$

$\therefore \lim_{x\to0+}h(x)\neq\lim_{x\to0-}h(x)$

즉, 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

따라서 $x=0$에서 미분가능한 함수는 ㄱ이다.

6 ① $f'\left(\frac{1}{2}\right)$은 점 $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$에서의 접선의 기울기와 같으므로 $f'\left(\frac{1}{2}\right)>0$

② $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)$의 값이 존재한다.

③ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=3$, $x=5$에서 불연속이므로 불연속인 x의 값은 2개이다.

④ $f'(x)=0$인 점은 미분가능하면서 접선의 기울기가 0인 점이므로 $x=1$일 때이다.

즉, $f'(x)=0$인 점은 1개이다.

⑤ $x=3$, $x=5$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

또 $x=2$에서 연속이지만 그래프가 꺾이는 모양이므로 미분가능하지 않다.

즉, 미분가능하지 않은 x의 값은 3개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

7 함수 $f(x)$를 미분하면

$f'(x)=(x^2-3x)'(-2x+k)+(x^2-3x)(-2x+k)'$

$=(2x-3)(-2x+k)+(x^2-3x)\times(-2)$

$=-6x^2+2kx+12x-3k$

이때 $f'(1)=3$이므로

$f'(1)=-6+2k+12-3k=3$

$\therefore k=3$

8 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x-3}=1$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 이차식이다.

$\therefore f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

함수 $f(x)$를 미분하면 $f'(x)=2x+a$ ...... ㉠

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}=1$에서

$\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=1$

$\frac{1}{2}f'(1)=1$ $\therefore f'(1)=2$

㉠에서 $f'(1)=2+a=2$ $\therefore a=0$

이를 ㉠에 대입하면 $f'(x)=2x$

$\therefore f'(3)=6$

9 $f(x)=x^{100}-x^{99}+x^{98}$이라 하면 $f(1)=1-1+1=1$

함수 $f(x)$를 미분하면 $f'(x)=100x^{99}-99x^{98}+98x^{97}$

$x^{100}-x^{99}+x^{98}-1=f(x)-f(1)$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{x^{100}-x^{99}+x^{98}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)$

$=100-99+98=99$

10 $g(x)=ax+b$, $h(x)=ax^2-2x+1$이라 하면

$g'(x)=a$, $h'(x)=2ax-2$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$에서도 미분가능하다.

(i) $x=0$에서 연속이므로

$g(0)=h(0)$ $\therefore b=1$

(ii) $x=0$에서 미분계수가 존재하므로

$g'(0)=h'(0)$ $\therefore a=-2$

(i), (ii)에 의해 $a+b=-2+1=-1$

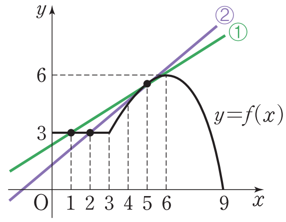
실전 연습문제 p.62

1 ㄴ, ㄷ **2** 40 **3** 10 **4** -5

1 $g(a, b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$이므로 이는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

ㄱ. $g(1, 5)$ ➡ 두 점 $(1, f(1))$, $(5, f(5))$를 지나는 직선의 기울기

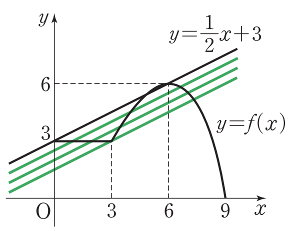
$g(2, 5)$ ➡ 두 점 $(2, f(2))$, $(5, f(5))$를 지나는 직선의 기울기



즉, 위의 그림에서 직선 ①의 기울기 $g(1,\ 5)$가 직선 ②의 기울기 $g(2,\ 5)$보다 작으므로

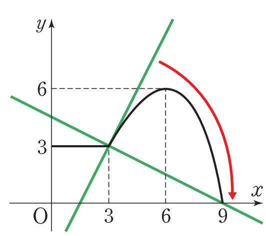
$g(1,\ 5)<g(2,\ 5)$

ㄴ. $g(a,\ b)=\frac{1}{2}$은 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$임을 의미한다.



위의 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점을 지나며 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$에 평행한 직선을 무수히 많이 그을 수 있으므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 무수히 많다.

ㄷ. $g(3,\ b)$는 두 점 $(3,\ f(3))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기를 의미한다.



위의 그림과 같이 $b=9$일 때, 즉 두 점 $(3,\ f(3))$, $(9,\ f(9))$를 지나는 직선의 기울기가 최소이므로 $g(3,\ b)$는 $b=9$일 때, 최소이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

2 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=\frac{8}{b}$ …… ㉠

한편 $\frac{1}{t}=h$라 하면 $t=\frac{1}{h}$이고, $t\longrightarrow\infty$일 때 $h\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{t\to\infty}t\left\{f\left(a+\frac{3b}{t}\right)-f\left(a-\frac{2b}{t}\right)\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3bh)-f(a-2bh)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3bh)-f(a)+f(a)-f(a-2bh)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3bh)-f(a)}{3bh}\times 3b-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2bh)-f(a)}{-2bh}\times(-2b)$$

$$=3bf'(a)+2bf'(a)=5bf'(a)=5b\times\frac{8}{b}\ (\because ㉠)$$

$=40$

3 $F(x)=\begin{cases}x+2 & (x\le -1)\\ ax^2+bx+c & (-1<x<1)\\ -x+2 & (x\ge 1)\end{cases}$ 라 하자.

이때 $p(x)=x+2$, $q(x)=ax^2+bx+c$, $r(x)=-x+2$라 하면

$p'(x)=1$, $q'(x)=2ax+b$, $r'(x)=-1$

함수 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하려면 $x=-1$과 $x=1$에서도 각각 미분가능해야 한다.

(i) $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$p(-1)=q(-1)$ $\quad\therefore 1=a-b+c$ …… ㉠

$x=1$에서 연속이어야 하므로

$q(1)=r(1)$ $\quad\therefore a+b+c=1$ …… ㉡

(ii) $x=-1$에서 미분계수가 존재해야 하므로

$p'(-1)=q'(-1)$ $\quad\therefore 1=-2a+b$ …… ㉢

$x=1$에서 미분계수가 존재해야 하므로

$q'(1)=r'(1)$ $\quad\therefore 2a+b=-1$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}$, $b=0$

이를 ㉠ 또는 ㉡에 대입하면 $c=\frac{3}{2}$

$\therefore 4(a^2+b^2+c^2)=4\left(\frac{1}{4}+0+\frac{9}{4}\right)=10$

4 다항식 $x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $2^n(x-2)$이므로

$x^n(x^2+ax+b)=(x-2)^2Q(x)+2^n(x-2)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^n(4+2a+b)=0$

$\therefore 4+2a+b=0\ (\because 2^n>0)$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$nx^{n-1}(x^2+ax+b)+x^n(2x+a)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+2^n$$

이 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$n\times 2^{n-1}(4+2a+b)+2^n(4+a)=2^n$

위의 식에 ㉡을 대입하면

$2^n(4+a)=2^n$, $4+a=1\ (\because 2^n>0)$

$\therefore a=-3$

이를 ㉡에 대입하면 $b=2$

$\therefore a-b=-3-2=-5$

01 접선의 방정식과 평균값 정리

1 개념 CHECK p.64

1. 답 (1) -1 (2) 8

(1) $f(x)=x^2-3x+8$이라 하면 $f'(x)=2x-3$
점 $(1,\ 6)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=2\times1-3=-1$

(2) $f(x)=x^3-2x^2+x$라 하면 $f'(x)=3x^2-4x+1$
점 $(-1,\ -4)$에서의 접선의 기울기는
$f'(-1)=3\times(-1)^2-4\times(-1)+1=8$

1 유제 & 문제 p.65~69

유제 01 답 (1) $y=6x-4$ (2) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

(1) $f(x)=x^2+4x-3$이라 하면 $f'(x)=2x+4$
점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=2\times1+4=6$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-2=6(x-1)$ $\quad\therefore y=6x-4$

(2) $f(x)=x^3-x+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-1$
점 $(1,\ 1)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는
$-\frac{1}{f'(1)}=-\frac{1}{3\times1-1}=-\frac{1}{2}$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

문제 01-1 답 -2

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax+b$라 하면 $f'(x)=x^2+a$
점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로
$f'(-1)=1+a=-2$ $\quad\therefore a=-3$
곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-3x+b$가 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로
$3=-\frac{1}{3}+3+b$ $\quad\therefore b=\frac{1}{3}$
$\therefore a+3b=-3+3\times\frac{1}{3}=-2$

문제 01-2 답 2

$f(x)=x^2-3x+k$라 하면 $f'(x)=2x-3$
점 $(0,\ k)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는
$-\frac{1}{f'(0)}=-\frac{1}{2\times0-3}=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore m=\frac{1}{3}$
점 $(0,\ k)$에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은
$y-k=\frac{1}{3}(x-0)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{3}x+k$
이 직선이 $y=mx+6$과 같으므로 $k=6$
$\therefore mk=\frac{1}{3}\times6=2$

유제 02 답 $\sqrt{2}$

$f(x)=x^3-2x+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-2$
점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=3\times1-2=1$
즉, 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은
$y-1=x-1$ $\quad\therefore y=x$
접선 $y=x$가 y축과 만나는 점 B의 좌표는 $(0,\ 0)$
곡선 $y=x^3-2x+2$와 접선 $y=x$의 교점의 x좌표는
$x^3-2x+2=x$에서 $x^3-3x+2=0$
$(x+2)(x-1)^2=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=1$
따라서 교점의 좌표는 $(-2,\ -2)$, $(1,\ 1)$이고, $(1,\ 1)$은 접점이므로 점 C의 좌표는 $(-2,\ -2)$
$\therefore \overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

문제 02-1 답 0

$f(x)=x^3-3x^2+2$라 하면
$f'(x)=3x^2-6x=3(x-1)^2-3$
따라서 $f'(x)$는 $x=1$일 때, 최솟값이 -3이므로 기울기가 최소인 접선의 기울기는 -3이고, $f(1)=0$이므로 접점의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.
점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 방정식은
$y=-3(x-1)$ $\quad\therefore y=-3x+3$
따라서 $m=-3$, $n=3$이므로 $m+n=0$

문제 02-2 답 $y=\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$

점 $(3,\ a)$가 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점이므로 점 $(a,\ 3)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이다.
즉, $f(a)=3$이므로
$a^3+2a=3$, $a^3+2a-3=0$
$(a-1)(a^2+a+3)=0$ $\quad\therefore a=1$ ($\because a$는 실수)
$f'(x)=3x^2+2$이므로 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=3\times1+2=5$
즉, 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은
$y-3=5(x-1)$ $\quad\therefore y=5x-2$
이때 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점 $(3,\ a)$에서의 접선은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ 3)$에서의 접선 $y=5x-2$와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
$x=5y-2$ $\quad\therefore y=\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$

유제 **03** 답 (1) $\boldsymbol{y=7x-13}$ **또는** $\boldsymbol{y=7x+19}$
(2) $\boldsymbol{y=4x-14}$

(1) $f(x)=x^3-5x+3$이라 하면 $f'(x)=3x^2-5$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3-5t+3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 7이므로
$f'(t)=3t^2-5=7$, $t^2=4$ $\quad\therefore t=\pm 2$
따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 1)$, $(-2,\ 5)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-1=7(x-2)$ 또는 $y-5=7(x+2)$
$\therefore y=7x-13$ 또는 $y=7x+19$

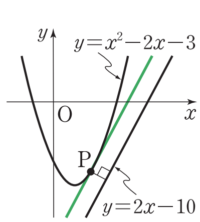
(2) $x+4y-4=0$에서 $y=-\dfrac{1}{4}x+1$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 4이다.
$f(x)=x^2-4x+2$라 하면 $f'(x)=2x-4$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2-4t+2)$라 하면 접선의 기울기가 4이므로
$f'(t)=2t-4=4$ $\quad\therefore t=4$
따라서 접점의 좌표는 $(4,\ 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-2=4(x-4)$ $\quad\therefore y=4x-14$

문제 **03-1** 답 $\boldsymbol{-21}$

$f(x)=x^3-3x^2-8x$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x-8$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2-8t)$라 하면 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$인 접선의 기울기는
$\tan 45°=1$이므로
$f'(t)=3t^2-6t-8=1$, $(t+1)(t-3)=0$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$
따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 4)$, $(3,\ -24)$이므로 접선의 방정식은
$y-4=x+1$ 또는 $y+24=x-3$
$\therefore y=x+5$ 또는 $y=x-27$
따라서 $a=1$, $b=5$, $c=-27$ 또는 $a=1$, $b=-27$, $c=5$이므로
$a+b+c=-21$

문제 **03-2** 답 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{5}}{5}}$

곡선 $y=x^2-2x-3$에 접하고 직선 $y=2x-10$과 기울기가 같은 접선의 접점의 좌표를 $\mathrm{P}(t,\ t^2-2t-3)$이라 하면 구하는 거리의 최솟값은 점 P와 직선 $y=2x-10$ 사이의 거리와 같다.



$f(x)=x^2-2x-3$이라 하면 $f'(x)=2x-2$
점 P에서의 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=2t-2=2$ $\quad\therefore t=2$
따라서 점 P의 좌표는 $(2,\ -3)$이므로 점 P와 직선 $2x-y-10=0$ 사이의 거리는
$$\frac{|2\times2-1\times(-3)-10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

유제 **04** 답 (1) $\boldsymbol{y=2x+1}$ **또는** $\boldsymbol{y=-2x+9}$
(2) $\boldsymbol{y=3x+2}$

(1) $f(x)=-x^2+4x$라 하면 $f'(x)=-2x+4$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+4t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+4$
점 $(t,\ -t^2+4t)$에서의 접선의 방정식은
$y-(-t^2+4t)=(-2t+4)(x-t)$
$\therefore y=(-2t+4)x+t^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
이 직선이 점 $(2,\ 5)$를 지나므로
$5=(-2t+4)\times2+t^2$, $t^2-4t+3=0$
$(t-1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=3$
이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면
$y=2x+1$ 또는 $y=-2x+9$

(2) $f(x)=x^3+4$라 하면 $f'(x)=3x^2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$
점 $(t,\ t^3+4)$에서의 접선의 방정식은
$y-(t^3+4)=3t^2(x-t)$
$\therefore y=3t^2x-2t^3+4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
이 직선이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로
$2=-2t^3+4$, $t^3-1=0$, $(t-1)(t^2+t+1)=0$
$\therefore t=1$ ($\because$ t는 실수)
이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면
$y=3x+2$

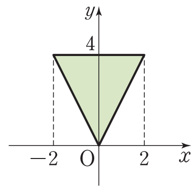
문제 **04-1** 답 **8**

$f(x)=x^4-x^2+2$라 하면 $f'(x)=4x^3-2x$
접점의 좌표를 $(t,\ t^4-t^2+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3-2t$
즉, 접선의 방정식은
$y-(t^4-t^2+2)=(4t^3-2t)(x-t)$
$\therefore y=(4t^3-2t)x-3t^4+t^2+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
이 직선이 원점을 지나므로
$3t^4-t^2-2=0$, $(3t^2+2)(t+1)(t-1)=0$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$($\because$ t는 실수)
이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면
$y=-2x$ 또는 $y=2x$

두 접선이 직선 $y=4$와 만나는 점은 $(-2,\ 4)$, $(2,\ 4)$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times4=8$



문제 04-2 답 $\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+k$라 하면 $f'(x)=x$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{2}t^2+k\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=t$ ...... ㉠

즉, 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{2}t^2+k\right)=t(x-t)$ $\quad\therefore\ y=tx-\frac{1}{2}t^2+k$

이 직선이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$0=2t-\frac{1}{2}t^2+k$ $\quad\therefore\ t^2-4t-2k=0$ ...... ㉡

이차방정식 ㉡의 두 근을 α, β라 하면 $t=\alpha$, $t=\beta$에서의 접선의 기울기는 각각

$f'(\alpha)=\alpha$, $f'(\beta)=\beta$ ($\because$ ㉠)

이때 두 접선이 서로 수직으로 만나므로 $\alpha\beta=-1$

이차방정식 ㉡에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha\beta=-2k=-1$ $\quad\therefore\ k=\frac{1}{2}$

유제 05 답 -5

$f(x)=x^3+ax$, $g(x)=bx^2+cx+4$라 하면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2bx+c$

(i) 두 곡선이 점 $(-1,\ 6)$을 지나므로

$f(-1)=-1-a=6$ $\quad\therefore\ a=-7$ ...... ㉠

$g(-1)=b-c+4=6$ ...... ㉡

(ii) 점 $(-1,\ 6)$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(-1)=g'(-1)$

$\therefore\ 3+a=-2b+c$

㉠에서 $a=-7$이므로

$2b-c=4$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $b=2$, $c=0$

$\therefore\ a+b+c=-7+2+0=-5$

문제 05-1 답 $y=-x+4$

$f(x)=x^3-4x+2$, $g(x)=-2x^2-5x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-4$, $g'(x)=-4x-5$

(i) $x=t$인 점에서 두 곡선이 만나므로

$f(t)=g(t)$

$t^3-4t+2=-2t^2-5t+2$, $t^3+2t^2+t=0$

$t(t+1)^2=0$ $\quad\therefore\ t=-1$ 또는 $t=0$

(ii) $x=t$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(t)=g'(t)$

$3t^2-4=-4t-5$, $3t^2+4t+1=0$

$(t+1)(3t+1)=0$ $\quad\therefore\ t=-1$ 또는 $t=-\frac{1}{3}$

(i), (ii)에 의해 $t=-1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 5)$이고, 접선의 기울기는 -1이므로 접선의 방정식은

$y-5=-(x+1)$ $\quad\therefore\ y=-x+4$

문제 05-2 답 -1

$f(x)=x^3+ax+3$, $g(x)=x^2+2$라 하면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면

(i) $x=t$인 점에서 두 곡선이 만나므로

$f(t)=g(t)$

$\therefore\ t^3+at+3=t^2+2$ ...... ㉠

(ii) $x=t$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(t)=g'(t)$

$3t^2+a=2t$

$\therefore\ a=2t-3t^2$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$t^3+(2t-3t^2)t+3=t^2+2$

$2t^3-t^2-1=0$, $(t-1)(2t^2+t+1)=0$

$\therefore\ t=1$ ($\because$ t는 실수)

이를 ㉡에 대입하면

$a=2-3=-1$

2 유제 & 문제

p.72~73

유제 06 답 0

함수 $f(x)=(x-1)(x+2)^2$은 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 1)$에서 미분가능하다.

$f(-2)=-3\times0=0$, $f(1)=0\times9=0$이므로

$f(-2)=f(1)=0$

따라서 롤의 정리에 의해 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=(x+2)^2+2(x-1)(x+2)=3x^2+6x$이므로

$f'(c)=3c^2+6c=0$, $3c(c+2)=0$

$\therefore\ c=0$ ($\because$ $-2<c<1$)

문제 **06**-1 답 $a=2, c=1$

함수 $f(x)=-x^2+ax$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하다. 이때 롤의 정리를 만족하면 $f(0)=f(2)$이므로

$0=-4+2a \qquad \therefore a=2$

롤의 정리에 의해 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=-x^2+2x$에서 $f'(x)=-2x+2$이므로

$f'(c)=-2c+2=0 \qquad \therefore c=1$

문제 **06**-2 답 6

함수 $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-36x+1$은 닫힌구간 $[-6, a]$에서 연속이고 열린구간 $(-6, a)$에서 미분가능하다. 이때 롤의 정리를 만족하려면 $f(-6)=f(a)$이어야 하므로

$55=a^3+\frac{3}{2}a^2-36a+1$, $2a^3+3a^2-72a-108=0$

$(a+6)(2a+3)(a-6)=0$

$\therefore a=-\frac{3}{2}$ 또는 $a=6$ $(\because a>-6)$ …… ㉠

롤의 정리에 의해 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-6, a)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2+3x-36$이므로

$f'(c)=3c^2+3c-36=0$, $c^2+c-12=0$

$(c+4)(c-3)=0$

$\therefore c=-4$ 또는 $c=3$

열린구간 $(-6, a)$에 속하는 상수 c가 2개이려면 $a>3$이어야 하므로 ㉠에서 $a=6$

유제 **07** 답 $\sqrt{3}$

함수 $f(x)=x^3-4x$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해

$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{15-0}{3}=5$이고

$f'(x)=3x^2-4$에서 $f'(c)=3c^2-4$이므로

$5=3c^2-4$, $c^2=3 \qquad \therefore c=\sqrt{3}$ $(\because 0<c<3)$

문제 **07**-1 답 -1

함수 $f(x)=x^2-3x+4$는 닫힌구간 $[a, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(a, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해

$\frac{f(2)-f(a)}{2-a}=f'\left(\frac{1}{2}\right)$

이때 $f'(x)=2x-3$에서 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-2$이므로

$\frac{2-(a^2-3a+4)}{2-a}=-2$, $-a^2+3a-2=-4+2a$

$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ $\left(\because a<\frac{1}{2}\right)$

문제 **07**-2 답 12

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 모든 실수에 대하여 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[x-3, x+3]$에서 연속이고 열린구간 $(x-3, x+3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해

$\frac{f(x+3)-f(x-3)}{(x+3)-(x-3)}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(x-3, x+3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x-3<c<x+3$에서 $x \rightarrow \infty$이면 $c \rightarrow \infty$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\{f(x+3)-f(x-3)\}&=6\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+3)-f(x-3)}{(x+3)-(x-3)}\\&=6\lim_{c\to\infty}f'(c)\\&=6\times2 \ (\because \lim_{x\to\infty}f'(x)=2)\\&=12\end{aligned}$$

기본 연습문제

p.74~75

1 $(3, -18)$ **2** $y=4x+7$ **3** 3 **4** 3

5 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **6** $3\sqrt{2}$ **7** $-\frac{1}{11}$ **8** 0

9 연속, 미분가능, $h'(c)$, 상수함수

1 $f(x)=x^3-3x^2-6x+8$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-6$

점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-9$이므로 접선의 방정식은

$y=-9(x-1) \qquad \therefore y=-9x+9$ …… ㉠

점 $(4, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(4)=18$이므로 접선의 방정식은

$y=18(x-4) \qquad \therefore y=18x-72$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=3, y=-18$

따라서 두 접선의 교점의 좌표는 $(3, -18)$이다.

2 $y=x^3+ax^2+(2a+1)x+a+5$를 a에 대하여 정리하면

$a(x+1)^2+(x^3+x+5-y)=0$

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하면

$x+1=0$, $x^3+x+5-y=0$

$\therefore x=-1, y=3$

$\therefore P(-1, 3)$

$f(x)=x^3+ax^2+(2a+1)x+a+5$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+2a+1$

점 P$(-1, 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3-2a+2a+1=4$이므로 접선의 방정식은

$y-3=4(x+1)$ $\therefore y=4x+7$

3 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=2$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to1}\{f(x)-1\}=0$

$\lim_{x\to1}f(x)=1$ $\therefore f(1)=1$ ◀ 접점의 좌표: $(1,\ 1)$

이때 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$이므로

$f'(1)=2$

즉, 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=2(x-1)$ $\therefore y=2x-1$

따라서 $a=2$, $b=-1$이므로 $a-b=3$

4 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2$이라 하면 $f'(x)=x^2-2ax$

접선의 기울기가 2이므로

$x^2-2ax=2$ $\therefore x^2-2ax-2=0$ …… ㉠

이때 두 접선의 접점의 x좌표가 각각 α, β이므로 α, β는 이차방정식 ㉠의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=-2$

이때 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=40$이므로

$4a^2+4=40$, $a^2=9$ $\therefore a=3$ ($\because a>0$)

5 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+1$이라 하면 $f'(x)=-x^2$

접점의 좌표를 $\left(t,\ -\frac{1}{3}t^3+1\right)$이라 하면 직선 $y=-x+2$에 평행한 접선의 기울기는 -1이므로

$f'(t)=-t^2=-1$, $t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $\left(-1,\ \frac{4}{3}\right)$, $\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{4}{3}=-(x+1)$ 또는 $y-\frac{2}{3}=-(x-1)$

$\therefore 3x+3y-1=0$ 또는 $3x+3y-5=0$

두 접선 사이의 거리는 직선 $3x+3y-1=0$ 위의 점 $\left(0,\ \frac{1}{3}\right)$과 직선 $3x+3y-5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{\left|0+3\times\frac{1}{3}-5\right|}{\sqrt{3^2+3^2}}=\frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

6 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+3$이라 하면 $f'(x)=x^3$

접점 P의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{4}t^4+3\right)$ $(t>0)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=t^3$

즉, 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{4}t^4+3\right)=t^3(x-t)$ $\therefore y=t^3x-\frac{3}{4}t^4+3$

이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=-\frac{3}{4}t^4+3$, $t^4=4$

$(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})(t^2+2)=0$

$\therefore t=\sqrt{2}$ ($\because t>0$)

따라서 접점 P의 좌표는 $(\sqrt{2},\ 4)$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+4^2}=3\sqrt{2}$

7 $f(x)=x^2-3$, $g(x)=ax^2$이라 하면

$f'(x)=2x$, $g'(x)=2ax$

두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하면 $x=t$인 점에서 두 곡선이 만나므로

$f(t)=g(t)$ $\therefore t^2-3=at^2$ …… ㉠

또 $x=t$인 점에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$f'(t)g'(t)=-1$

$2t\times2at=-1$ $\therefore at^2=-\frac{1}{4}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$t^2-3=-\frac{1}{4}$ $\therefore t^2=\frac{11}{4}$

이를 ㉡에 대입하면

$a\times\frac{11}{4}=-\frac{1}{4}$ $\therefore a=-\frac{1}{11}$

8 함수 $f(x)=x^4-10x^2+4$는 닫힌구간 $[-3,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-3,\ 3)$에서 미분가능하다.

$f(-3)=f(3)=-5$

이므로 롤의 정리에 의해 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-3,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=4x^3-20x$이므로

$f'(c)=4c^3-20c=0$, $4c(c+\sqrt{5})(c-\sqrt{5})=0$

$\therefore c=-\sqrt{5}$ 또는 $c=0$ 또는 $c=\sqrt{5}$

따라서 모든 c의 값의 합은

$-\sqrt{5}+0+\sqrt{5}=0$

9 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 주어진 구간에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속이고 미분가능하므로 함수 $h(x)$도 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 (가) 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 (나) 미분가능하다.

따라서 $a<x<b$인 임의의 실수 x에 대하여 닫힌구간 $[a, x]$에서 평균값 정리에 의해

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\boxed{\text{(다) } h'(c)}$$

인 c가 열린구간 (a, x)에 적어도 하나 존재한다.

이때 $h'(c)=f'(c)-g'(c)=0$이므로

$h(x)-h(a)=0 \qquad \therefore\ h(x)=h(a)$

따라서 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 $\boxed{\text{(라) 상수함수}}$ 이므로

$h(x)=f(x)-g(x)=k$ (단, k는 상수)

$\therefore\ f(x)=g(x)+k$

실전 연습문제 p.76

1 $\frac{1}{6}$ **2** ④ **3** $-\frac{1}{2}$ **4** $2\sqrt{3}$

1 $f(x)=x^3+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2$

점 $\mathrm{P}(t,\ t^3+1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+1)=3t^2(x-t)$

$\therefore\ y=3t^2x-2t^3+1$

이 접선이 y축과 만나는 점 Q의 좌표는

$(0,\ -2t^3+1)$

또 점 $\mathrm{P}(t,\ t^3+1)$을 지나는 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3t^2}$이므로 직선의 방정식은

$$y-(t^3+1)=-\frac{1}{3t^2}(x-t)$$

$$\therefore\ y=-\frac{1}{3t^2}x+\frac{1}{3t}+t^3+1$$

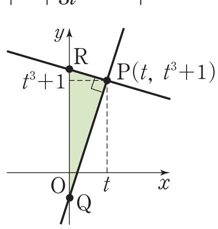
이 직선이 y축과 만나는 점 R의 좌표는

$$\left(0,\ \frac{1}{3t}+t^3+1\right)$$

선분 QR의 길이를 구하면

$$\overline{\mathrm{QR}}=\left|\left(\frac{1}{3t}+t^3+1\right)-(-2t^3+1)\right|=\left|\frac{1}{3t}+3t^3\right|$$

따라서 △PQR의 넓이 $S(t)$는



$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QR}}\times|t|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{3t}+3t^3\right|\times|t|$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+3t^4\right)$$

$$\therefore\ \lim_{t\to0}S(t)=\lim_{t\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+3t^4\right)=\frac{1}{6}$$

2 $f(x)=x^4$이라 하면 $f'(x)=4x^3$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4$이므로 접선의 방정식은

$y-1=4(x-1) \qquad \therefore\ y=4x-3$

이 접선과 x축의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{3}{4},\ 0\right) \qquad \therefore\ a_1=\frac{3}{4}$$

또 점 $(a_n,\ a_n^4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(a_n)=4a_n^3$이므로 접선의 방정식은

$y-a_n^4=4a_n^3(x-a_n) \qquad \therefore\ y=4a_n^3x-3a_n^4$

이 접선과 x축의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{3}{4}a_n,\ 0\right) \qquad \therefore\ a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{3}{4}$, 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이므로

$$a_n=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{4}\right)^n \qquad \therefore\ a_{10}=\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

3 $f(x)=x^3-3x+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-3$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t+2)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t+2)=(3t^2-3)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-3)x-2t^3+2$

이 직선이 점 $(1,\ k)$를 지나므로

$k=3t^2-3-2t^3+2$

$\therefore\ 2t^3-3t^2+k+1=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근이 등차수열을 이루므로 세 실근을 $a-d,\ a,\ a+d$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

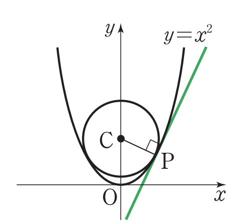
$$(a-d)+a+(a+d)=\frac{3}{2} \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}$$

따라서 $t=\frac{1}{2}$이 방정식 ㉠의 근이므로

$$\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+k+1=0 \qquad \therefore\ k=-\frac{1}{2}$$

4 $f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$

원의 중심을 $\mathrm{C}(0,\ a)$, 접점을 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이고, 직선 CP의 기울기는



$$\frac{t^2-a}{t-0}=\frac{t^2-a}{t}$$

이때 접선과 직선 CP는 서로 수직이므로

$$2t\times\frac{t^2-a}{t}=-1 \qquad \therefore\ a=t^2+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \mathrm{C}\left(0,\ t^2+\frac{1}{2}\right)$$

원의 반지름의 길이 1은 두 점 $C\left(0,\ t^2+\frac{1}{2}\right)$, $P(t,\ t^2)$ 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{(t-0)^2+\left(t^2-t^2-\frac{1}{2}\right)^2}=1,\ t^2+\frac{1}{4}=1$

$t^2=\frac{3}{4}\qquad \therefore\ t=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

두 접점에서의 접선의 기울기는

$f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3},\ f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}$

따라서 두 접점에서의 접선의 기울기의 차는

$\sqrt{3}-(-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

02 함수의 증가, 감소와 극대, 극소

1 개념 CHECK p.78

1. 답 (1) <, <, 증가 (2) >, >, 감소

1 유제 & 문제 p.79~80

유제 01 답 (1) 구간 $(-\infty,\ -1]$, $[1,\ \infty)$에서 증가
구간 $[-1,\ 1]$에서 감소
(2) 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가

(1) $f(x)=x^3-3x+1$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1]$, $[1,\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-1,\ 1]$에서 감소한다.

(2) $f(x)=x^3-6x^2+12x-1$에서

$f'(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가한다.

문제 01-1 답 12

$f(x)=x^3-6x^2+ax+7$에서

$f'(x)=3x^2-12x+a$

이때 함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가 $1\le x\le b$이므로 $x=1$, $x=b$는 이차방정식 $3x^2-12x+a=0$의 두 근이다.

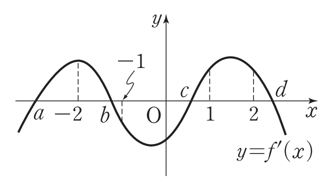
따라서 근과 계수의 관계에 의해

$1+b=4,\ 1\times b=\frac{a}{3}$

$\therefore\ b=3,\ a=9\qquad \therefore\ a+b=12$

문제 01-2 답 ④

다음 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 차례로 $a,\ b,\ c,\ d$라 하자.



① 구간 $(-\infty,\ a]$에서 $f(x)$는 감소한다.
② 구간 $(-2,\ b]$에서 $f(x)$는 증가한다.
③ 구간 $[c,\ 1)$에서 $f(x)$는 증가한다.
④ 구간 $(1,\ 2)$에서 $f(x)$는 증가한다.
⑤ 구간 $(2,\ d]$에서 $f(x)$는 증가한다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

유제 02 답 (1) $0\le a\le\frac{9}{4}$ (2) $a\ge3$

$f(x)=-x^3+2ax^2-3ax+5$에서

$f'(x)=-3x^2+4ax-3a$

(1) 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이어야 한다.

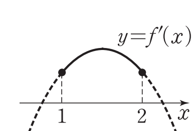
$\therefore\ -3x^2+4ax-3a\le0$

이차방정식 $-3x^2+4ax-3a=0$, 즉 $3x^2-4ax+3a=0$의 판별식 $D\le0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-3\times3a\le0,\ 4a^2-9a\le0$

$a(4a-9)\le0\qquad \therefore\ 0\le a\le\frac{9}{4}$

(2) 함수 $f(x)$가 구간 $[1,\ 2]$에서 증가하려면 $1\le x\le2$에서 $f'(x)\ge0$이어야 한다.



$\therefore\ f'(1)\ge0,\ f'(2)\ge0$

$f'(1)=-3+4a-3a\ge0$에서 $a\ge3$ ...... ㉠

$f'(2)=-12+8a-3a\ge0$에서 $a\ge\frac{12}{5}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$a\ge3$

문제 02-1 답 $k\ge\frac{3}{2}$

$f(x)=2x^3+3x^2+kx+3$에서

$f'(x)=6x^2+6x+k$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)\ge0$ 또는 $f'(x)\le0$

그런데 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f'(x)\ge0$이어야 한다.

$\therefore$ $6x^2+6x+k\ge0$

이차방정식 $6x^2+6x+k=0$의 판별식 $D\le0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=9-6k\le0$

$\therefore$ $k\ge\frac{3}{2}$

2 개념 CHECK

p.82

1. 답 **극댓값: 2, 극솟값: -2**

2 유제 & 문제

p.83~85

유제 03 답 (1) **극댓값: -2, 극솟값: -34** (2) **극솟값: 5**

(1) $f(x)=x^3-6x^2-2$에서

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	-2 극대	↘	-34 극소	↗

$\therefore$ 극댓값: $f(0)=-2$, 극솟값: $f(4)=-34$

(2) $f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3+2x^2+5$에서

$f'(x)=4x^3-8x^2+4x=4x(x-1)^2$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	+
$f(x)$	↘	5 극소	↗	$\frac{16}{3}$	↗

$\therefore$ 극솟값: $f(0)=5$

문제 03-1 답 **1**

$f(x)=-2x^3+9x^2-12x-1$에서

$f'(x)=-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	-6 극소	↗	-5 극대	↘

극댓값은 $f(2)=-5$, 극솟값은 $f(1)=-6$이므로 그 차는

$-5-(-6)=1$

유제 04 답 **6**

$f(x)=-2x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=-6x^2+2ax+b$

$x=-1$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=-6-2a+b=0$ …… ㉠

$f'(1)=-6+2a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=6$

따라서 $f(x)=-2x^3+6x+c$이므로

$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	$c-4$ 극소	↗	$c+4$ 극대	↘

$x=-1$에서 극솟값이 $c-4$이므로

$c-4=-2$ $\therefore$ $c=2$

$x=1$에서 극댓값은

$c+4=2+4=6$

문제 04-1 답 **7**

$f(x)=-2x^3-6x^2+a$에서

$f'(x)=-6x^2-12x=-6x(x+2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	$a-8$ 극소	↗	a 극대	↘

$x=-2$에서 극솟값은 $a-8$이므로 $b=-2$

$a-8=1$ $\therefore$ $a=9$

$\therefore$ $a+b=9+(-2)=7$

문제 04-2 답 1

$f(x)=x^3-3kx^2-9k^2x$에서

$f'(x)=3x^2-6kx-9k^2=3(x^2-2kx-3k^2)$

$\quad=3(x+k)(x-3k)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-k$ 또는 $x=3k$

이때 $k>0$이므로 $-k<3k$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-k$	$\cdots$	$3k$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$5k^3$ 극대	↘	$-27k^3$ 극소	↗

극댓값은 $f(-k)=5k^3$, 극솟값은 $f(3k)=-27k^3$이고, 그 차가 32이므로

$5k^3-(-27k^3)=32$, $32k^3=32$

$k^3-1=0$, $(k-1)(k^2+k+1)=0$

$\therefore k=1$ ($\because k>0$)

유제 05 답 -1

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$x=b$, $x=c$, $x=0$, $x=d$, $x=e$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	0	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$	f
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$		↘		↘	극소	↗		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=d$에서 극대이고, $x=c$, $x=e$에서 극소이므로

$\alpha=1$, $\beta=2$ $\quad\therefore \alpha-\beta=-1$

문제 05-1 답 ⑤

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$x=0$, $x=2$, $x=4$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	

① 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=4$에서 극대이다.

② 함수 $f(x)$는 $0<x<2$에서 $f'(x)<0$이므로 감소한다.

③ 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 5]$에서 $x=0$, $x=4$에서 극대, $x=2$에서 극소이므로 극값은 3개이다.

④ 함수 $f(x)$는 $3<x<4$에서 $f'(x)>0$이므로 증가하고, $x>4$에서 $f'(x)<0$이므로 감소한다.

⑤ 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

3 유제 & 문제

p.88~91

유제 06 답 풀이 참조

(1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$에서

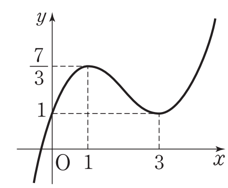
$f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{7}{3}$ 극대	↘	1 극소	↗

즉, 극댓값은 $f(1)=\frac{7}{3}$, 극솟값은 $f(3)=1$이고 y축과의 교점의 좌표는 $(0, 1)$이다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=-x^3+3x+1$에서

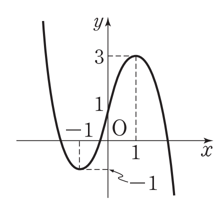
$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1 극소	↗	3 극대	↘

즉, 극댓값은 $f(1)=3$, 극솟값은 $f(-1)=-1$이고 y축과의 교점의 좌표는 $(0, 1)$이다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) $f(x)=x^4-2x^2+3$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)$

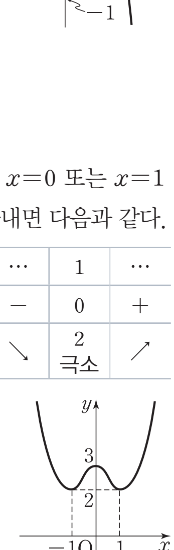
$\quad=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2 극소	↗	3 극대	↘	2 극소	↗

즉, 극댓값은 $f(0)=3$, 극솟값은 $f(-1)=2$, $f(1)=2$이다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(4) $f(x)=-3x^4+4x^3-1$에서

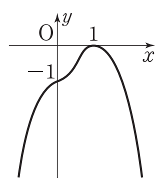
$f'(x)=-12x^3+12x^2=-12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-1	↗	0 극대	↘

즉, 극댓값은 $f(1)=0$이고 y축과 의 교점의 좌표는 $(0,\ -1)$이다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



유제 07 답 (1) $a<-3$ 또는 $a>3$ (2) $-4\le a\le 2$

(1) $f(x)=x^3+ax^2+3x+4$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+3$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식 $D>0$에서

$\frac{D}{4}=a^2-9>0,\ (a+3)(a-3)>0$

$\therefore\ a<-3$ 또는 $a>3$

(2) $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+ax^2+(2a-8)x+2$에서

$f'(x)=-x^2+2ax+2a-8$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식 $D\le 0$에서

$\frac{D}{4}=a^2+(2a-8)\le 0,\ (a+4)(a-2)\le 0$

$\therefore\ -4\le a\le 2$

문제 07-1 답 2

$f(x)=x^3-ax^2+(a^2-2a)x$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+a^2-2a$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식 $D>0$에서

$\frac{D}{4}=a^2-3(a^2-2a)>0,\ -2a^2+6a>0,\ a^2-3a<0$

$a(a-3)<0\qquad \therefore\ 0<a<3$

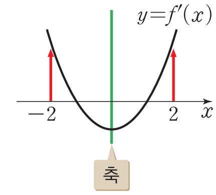
따라서 자연수 a는 1, 2의 2개이다.

유제 08 답 $-\frac{7}{4}<a<-\sqrt{3}$ 또는 $\sqrt{3}<a<\frac{7}{4}$

$f(x)=x^3-3ax^2+9x-1$에서

$f'(x)=3x^2-6ax+9$

함수 $f(x)$가 $-2<x<2$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 -2와 2 사이에 있어야 하므로



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 $D>0$에서

$\frac{D}{4}=9a^2-27>0,\ (a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})>0$

$\therefore\ a<-\sqrt{3}$ 또는 $a>\sqrt{3}$ $\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $f'(-2)>0$에서

$12+12a+9>0\qquad \therefore\ a>-\frac{7}{4}$ $\cdots\cdots$ ㉡

(iii) $f'(2)>0$에서

$12-12a+9>0\qquad \therefore\ a<\frac{7}{4}$ $\cdots\cdots$ ㉢

(iv) $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=a$이므로

$-2<a<2$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉠~㉣을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

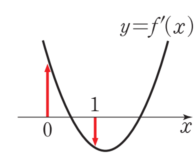
$-\frac{7}{4}<a<-\sqrt{3}$ 또는 $\sqrt{3}<a<\frac{7}{4}$

문제 08-1 답 $\frac{2}{3}<a<1$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(3a-2)x-\frac{1}{2}$에서

$f'(x)=x^2-2ax+3a-2$

함수 $f(x)$가 $0<x<1$에서 극댓값을, $x>1$에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근 중 한 근은 0과 1 사이에 있고, 다른 한 근은 1보다 커야 하므로



(i) $f'(0)>0$에서

$3a-2>0\qquad \therefore\ a>\frac{2}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $f'(1)<0$에서

$1-2a+3a-2<0\qquad \therefore\ a<1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$\frac{2}{3}<a<1$

유제 09 답 (1) $-1<a<0$ 또는 $a>0$

(2) $a=0$ 또는 $a\ge\frac{9}{4}$

(1) $f(x)=3x^4+8x^3-6ax^2$에서

$f'(x)=12x^3+24x^2-12ax=12x(x^2+2x-a)$

함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $12x(x^2+2x-a)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+2x-a=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(ⅰ) $x=0$이 이차방정식 $x^2+2x-a=0$의 근이 아니어야 하므로 $a\neq0$ …… ㉠

(ⅱ) 이차방정식 $x^2+2x-a=0$의 판별식 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1+a>0 \qquad \therefore a>-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$-1<a<0$ 또는 $a>0$

(2) $f(x)=x^4-4x^3+2ax^2+1$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+4ax=4x(x^2-3x+a)$

함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖거나 허근을 가져야 한다.

(ⅰ) $4x(x^2-3x+a)=0$이 중근을 갖는 경우

ⓘ 이차방정식 $x^2-3x+a=0$의 한 근이 $x=0$인 경우

$a=0$

ⓘⓘ 이차방정식 $x^2-3x+a=0$이 중근을 갖는 경우

$D=9-4a=0 \qquad \therefore a=\frac{9}{4}$

(ⅱ) $4x(x^2-3x+a)=0$이 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-3x+a=0$이 허근을 가져야 하므로

$D=9-4a<0 \qquad \therefore a>\frac{9}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해

$a=0$ 또는 $a\geq\frac{9}{4}$

4 유제 & 문제

p.93~96

유제 10 답 (1) **최댓값: 20, 최솟값: 0**

(2) **최댓값: $\frac{5}{4}$, 최솟값: $-\frac{27}{4}$**

(1) $f(x)=-x^3+3x^2$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	20	↘	0 극소	↗	4 극대	↘	0

$\therefore$ 최댓값: $f(-2)=20$, 최솟값: $f(0)=f(3)=0$

(2) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3$에서

$f'(x)=x^3-3x^2=x^2(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=3$

구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$-$	0
$f(x)$	$\frac{5}{4}$	↘	0	↘	$-\frac{27}{4}$

$\therefore$ 최댓값: $f(-1)=\frac{5}{4}$, 최솟값: $f(3)=-\frac{27}{4}$

문제 10-1 답 **최댓값: 없다., 최솟값: -2**

$f(x)=3x^4-4x^3-1$에서

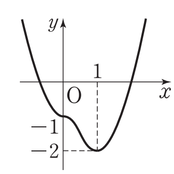
$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↘	-2 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 최댓값: 없다.

최솟값: $f(1)=-2$

문제 10-2 답 **최댓값: 1, 최솟값: -3**

$x^2-2x+3=t$라 하면

$t=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

$0\leq x\leq2$에서 t의 값의 범위는 $2\leq t\leq3$

$g(t)=t^3-3t^2+1$이라 하면

$g'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$g'(t)=0$인 t의 값은 $t=2$ ($\because 2\leq t\leq3$)

구간 $[2,\ 3]$에서 함수 $g(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

t	2	$\cdots$	3
$g'(t)$	0	$+$	$+$
$g(t)$	-3	↗	1

$\therefore$ 최댓값: $g(3)=1$,

최솟값: $g(2)=-3$

유제 11 답 **3**

$f(x)=ax^4-4ax^3+b$에서

$f'(x)=4ax^3-12ax^2=4ax^2(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=3$ ($\because 1\leq x\leq4$)

$a>0$이므로 구간 $[1,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-3a+b$	↘	$-27a+b$ 극소	↗	b

이때 $a>0$이므로 $-27a+b<-3a+b<b$

즉, 함수 $f(x)$의 최댓값은 b, 최솟값은 $-27a+b$이므로

$b=9$, $-27a+b=0$

$\therefore a=\frac{1}{3}$, $b=9$ $\quad\therefore ab=3$

문제 11-1 답 **1**

$f(x)=-ax^3+3ax^2$에서

$f'(x)=-3ax^2+6ax=-3ax(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

$a>0$이므로 구간 $[-1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$4a$	↘	0 극소	↗	$4a$ 극대	↘	$-16a$

이때 $a>0$이므로 $-16a<0<4a$

즉, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-16a$이므로

$-16a=-4$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$

함수 $f(x)$의 최댓값은 $4a$이므로 $4a=4\times\frac{1}{4}=1$

문제 11-2 답 **2**

$f(x)=x^3+ax^2+bx+2$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값이 -2이므로

$f(2)=8+4a+2b+2=-2$ ······ ㉠

$f'(2)=12+4a+b=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=0$

$f(x)=x^3-3x^2+2$이므로

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	2	↘	-2 극소	↗	2

$\therefore$ 최댓값: $f(0)=f(3)=2$

문제 12-1 답 **11**

점 P의 x좌표를 a라 하면 $\mathrm{P}(a,\ a^2+1)$

$\overline{\mathrm{AP}}^2=a^2+(a^2-1)^2=a^4-a^2+1$

$\overline{\mathrm{BP}}^2=(a-4)^2+a^4=a^4+a^2-8a+16$

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=l(a)$라 하면

$l(a)=2a^4-8a+17$

$\therefore l'(a)=8a^3-8=8(a-1)(a^2+a+1)$

$l'(a)=0$인 a의 값은 $a=1$ ($\because$ a는 실수)

함수 $l(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	1	$\cdots$
$l'(a)$	$-$	0	$+$
$l(a)$	↘	11 극소	↗

따라서 $l(a)=\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값은 $l(1)=11$이다.

문제 12-2 답 **8**

점 P의 x좌표를 a라 하면

$\mathrm{P}(a,\ a(a-4)^2)$ (단, $0<a<4$)

두 변 OH, HP의 길이는

$\overline{\mathrm{OH}}=a$, $\overline{\mathrm{HP}}=a(a-4)^2$

$\triangle$OHP의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}\times a\times a(a-4)^2=\frac{1}{2}a^4-4a^3+8a^2$

$\therefore S'(a)=2a^3-12a^2+16a$

$\qquad\quad =2a(a-2)(a-4)$

$S'(a)=0$인 a의 값은 $a=2$ ($\because 0<a<4$)

$0<a<4$에서 함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	8 극대	↘	

따라서 넓이 $S(a)$의 최댓값은 $S(2)=8$이다.

문제 13-1 답 $\mathbf{\frac{20\sqrt{5}}{9}}$ $\mathbf{cm^3}$

직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 x cm, 높이를 y cm라 하면 상자를 만드는 데 드는 비용은

$(x^2+4xy)\times10+x^2\times20=30x^2+40xy$(원)

즉, $30x^2+40xy=200$이므로 $y=\frac{20-3x^2}{4x}$

이때 $x>0$, $y=\frac{20-3x^2}{4x}>0$이어야 하므로

$0<x<\frac{2\sqrt{15}}{3}$

상자의 부피를 $V(x)\,\mathrm{cm}^3$라 하면

$V(x)=x^2y=x^2\times\frac{20-3x^2}{4x}=-\frac{3}{4}x^3+5x$

$\therefore V'(x)=-\frac{9}{4}x^2+5=-\frac{9}{4}\left(x^2-\frac{20}{9}\right)$

$\qquad\qquad =-\frac{9}{4}\left(x+\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)\left(x-\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$

$V'(x)=0$인 x의 값은

$x=\frac{2\sqrt{5}}{3}$ $\left(\because 0<x<\frac{2\sqrt{15}}{3}\right)$

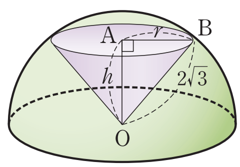
$0<x<\frac{2\sqrt{15}}{3}$에서 함수 $V(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{5}}{3}$	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{15}}{3}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	$\frac{20\sqrt{5}}{9}$ 극대	↘	

따라서 상자의 부피 $V(x)$의 최댓값은

$V\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{20\sqrt{5}}{9}\,(\mathrm{cm}^3)$

문제 **13**-2 답 $\frac{16}{3}\pi$



오른쪽 그림과 같이 원뿔의 밑면인 원의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면 $\triangle$AOB는 직각삼각형이므로

$h^2+r^2=(2\sqrt{3})^2$

$\therefore r^2=12-h^2$

이때 $h>0$, $r^2=12-h^2>0$이므로 $0<h<2\sqrt{3}$

원뿔의 부피를 $V(h)$라 하면

$V(h)=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(12-h^2)h=\frac{1}{3}\pi(12h-h^3)$

$\therefore V'(h)=\frac{1}{3}\pi(12-3h^2)=-\pi(h^2-4)$

$=-\pi(h+2)(h-2)$

$V'(h)=0$인 h의 값은 $h=2$ ($\because 0<h<2\sqrt{3}$)

$0<h<2\sqrt{3}$에서 함수 $V(h)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{3}$
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$		↗	$\frac{16}{3}\pi$ 극대	↘	

따라서 원뿔의 부피 $V(h)$의 최댓값은

$V(2)=\frac{16}{3}\pi$

기본 연습문제 p.97~99

1 ① **2** ㄴ **3** ② **4** 6
5 $-4<k<0$ **6** $\frac{3}{2}$ **7** ㄱ, ㄷ, ㄹ
8 ④ **9** 4 **10** $-\frac{5}{4}<a<-1$ **11** 15
12 5 **13** $32\,\mathrm{cm}^3$

1 $f(x)=-2x^3+3x^2+12x+3$에서

$f'(x)=-6x^2+6x+12$

$=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4	↗	23	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 2]$에서 증가하므로

$a=-1$, $b=2$

$\therefore b-a=3$

2 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)>f(x_2)$이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$을 만족하는 것을 찾는다.

ㄱ. $f'(x)=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.

ㄴ. $f'(x)=-x^2+2x-1=-(x-1)^2\le 0$

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이다.

ㄷ. $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

즉, $0\le x\le 2$인 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이다.

ㄹ. $f'(x)=-8x^3+8x=-8x(x+1)(x-1)$

즉, $-1\le x\le 0$ 또는 $x\ge 1$인 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이다.

따라서 주어진 조건을 만족하는 함수는 ㄴ이다.

3 $f(x)=x^4-4ax^3+2x^2+1$에서

$f'(x)=4x^3-12ax^2+4x$

$=4x(x^2-3ax+1)$

(ⅰ) $x\le 0$에서 감소하므로 $f'(x)\le 0$

즉, $x\le 0$이고 $4x(x^2-3ax+1)\le 0$이려면

$x^2-3ax+1\ge 0$

(ⅱ) $x\ge 0$에서 증가하므로 $f'(x)\ge 0$

즉, $x\ge 0$이고 $4x(x^2-3ax+1)\ge 0$이려면

$x^2-3ax+1\ge 0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 실수 x에 대하여

$x^2-3ax+1\ge 0$

이차방정식 $x^2-3ax+1=0$의 판별식 $D\le 0$이어야 하므로

$D=9a^2-4\le 0$

$(3a+2)(3a-2)\le 0$

$\therefore -\frac{2}{3}\le a\le \frac{2}{3}$

4 $f(x)=x^3+3x^2-3x+1$에서 $f'(x)=3x^2+6x-3$

$x=\alpha$에서 극댓값을 갖고 $x=\beta$에서 극솟값을 가지므로

$f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$

즉, α, β는 이차방정식 $3x^2+6x-3=0$의 두 근이므로

근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\times(-1)=6$

5 $f(x)=x^3-6x^2+9x+k$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$k+4$ 극대	↘	k 극소	↗

따라서 극댓값은 $f(1)=k+4$, 극솟값은 $f(3)=k$이고

극댓값과 극솟값의 부호가 서로 다르므로

$k(k+4)<0\qquad\therefore\ -4<k<0$

6 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c\,(a,\ b,\ c$는 상수$)$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$x=0$에서 극솟값을 가지므로 $f'(0)=b=0$

$x=-1$에서 극댓값이 2이므로

$f'(-1)=3-2a+b=0\qquad\therefore\ a=\dfrac{3}{2}$

$f(-1)=-1+a-b+c=2\qquad\therefore\ c=\dfrac{3}{2}$

따라서 $f(x)=x^3+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}$에서 극솟값은 $f(0)=\dfrac{3}{2}$

7 ㄱ. $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f(1)=-2$이므로

$f(1)=1+a+b+c=-2\qquad\therefore\ a+b+c=-3$

ㄴ. $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$\cdots\cdots$ ㉠

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0]$에서 증가한다.

ㄷ. ㉠에서 함수 $f(x)$가 극값을 가지는 점은 $x=0$, $x=2$의 2개이다.

ㄹ. $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b\qquad\cdots\cdots$ ㉡

한편 주어진 $y=f'(x)$의 그래프는 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 2이므로

$f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x\qquad\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $a=-3$, $b=0$

$f(x)=x^3-3x^2+c$이고 $f(1)=-2$이므로

$f(1)=1-3+c=-2\qquad\therefore\ c=0$

$\therefore\ f(x)=x^3-3x^2$

㉠에서 극솟값은 $f(2)$이므로 $f(2)=-4$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

8 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$x=a$, $x=b$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다.

9 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+(a-1)x+1$에서

$f'(x)=3x^2+2(a-1)x+a-1$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 $D\le0$에서

$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2-3(a-1)\le0$, $a^2-5a+4\le0$

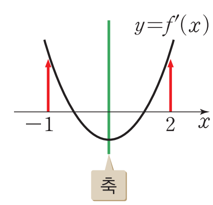
$(a-1)(a-4)\le0\qquad\therefore\ 1\le a\le4$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

10 $f(x)=x^3+3ax^2+3x$에서

$f'(x)=3x^2+6ax+3$

함수 $f(x)$가 $-1<x<2$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 -1과 2 사이에 있어야 하므로



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 $D>0$에서

$\dfrac{D}{4}=9a^2-9>0$, $(a+1)(a-1)>0$

$\therefore\ a<-1$ 또는 $a>1\qquad\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $f'(-1)>0$에서

$3-6a+3>0\qquad\therefore\ a<1\qquad\cdots\cdots$ ㉡

(iii) $f'(2)>0$에서

$12+12a+3>0\qquad\therefore\ a>-\dfrac{5}{4}\qquad\cdots\cdots$ ㉢

(iv) $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-a$이므로

$-1<-a<2\qquad\therefore\ -2<a<1\qquad\cdots\cdots$ ㉣

㉠~㉣을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$-\dfrac{5}{4}<a<-1$

11 $x^2-x+y-6=0$에서 $y=-x^2+x+6$

$y\geq4$이므로 $-x^2+x+6\geq4$

$x^2-x-2\leq0$, $(x+1)(x-2)\leq0$

$\therefore\ -1\leq x\leq2$

그런데 $x\geq0$이므로 $0\leq x\leq2$

$f(x)=xy-5x+8$이라 하면

$f(x)=xy-5x+8=x(-x^2+x+6)-5x+8$

$\quad=-x^3+x^2+x+8$

$\therefore\ f'(x)=-3x^2+2x+1=-(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because\ 0\leq x\leq2$)

$0\leq x\leq2$에서 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	8	$\nearrow$	9 극대	$\searrow$	6

따라서 $f(x)=xy-5x+8$의 최댓값은 $f(1)=9$, 최솟값은 $f(2)=6$이므로 그 합은 $9+6=15$

12 $f(x)=x^3-3x^2-9x+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

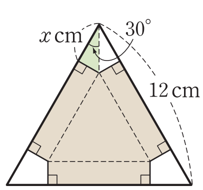
구간 $[-2,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$a-2$	$\nearrow$	$a+5$ 극대	$\searrow$	$a-27$ 극소	$\nearrow$	$a-20$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-1)=a+5$, 최솟값은 $f(3)=a-27$이고, 최댓값과 최솟값의 합이 -12이므로

$(a+5)+(a-27)=-12$, $2a=10$ $\qquad\therefore\ a=5$

13 오른쪽 그림과 같이 잘라 낼 사각형에서 긴 변의 길이를 $x$cm라 하면 상자의 밑면인 정삼각형의 한 변의 길이는



$(12-2x)$cm

이때 $x>0$, $12-2x>0$이어야 하므로

$0<x<6$

또 삼각기둥의 높이를 $h$cm라 하면

$h=x\tan30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

삼각기둥의 부피를 $V(x)$cm^{3}라 하면

$V(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2h=\sqrt{3}(6-x)^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

$\quad=x(x-6)^2=x^3-12x^2+36x$

$\therefore\ V'(x)=3x^2-24x+36$

$\quad=3(x-2)(x-6)$

$V'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ ($\because\ 0<x<6$)

$0<x<6$에서 함수 $V(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	32 극대	$\searrow$	

따라서 부피 $V(x)$의 최댓값은 $V(2)=32\,(\text{cm}^3)$이다.

실전 연습문제
p.100

1 7 **2** ⑤ **3** 1 **4** $\dfrac{8}{3}\pi$

1 임의의 실수 k에 대하여 곡선 $y=x^3+ax^2+3x-4$와 직선 $y=k$가 오직 한 점에서만 만나려면 함수 $f(x)=x^3+ax^2+3x-4$가 실수 전체의 집합에서 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다.

$f(x)=x^3+ax^2+3x-4$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+3$

그런데 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 한다.

$\therefore\ 3x^2+2ax+3\geq0$

이차방정식 $3x^2+2ax+3=0$의 판별식 $D\leq0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=a^2-9\leq0$, $(a+3)(a-3)\leq0$

$\therefore\ -3\leq a\leq3$

따라서 정수 a는 $-3,\ -2,\ \cdots,\ 3$의 7개이다.

2 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=1$에서 $x\longrightarrow a$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\longrightarrow0$ ➡ $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$

$\therefore\ f(a)=0$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=1$이므로

$f'(a)=1$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

또 $\displaystyle\lim_{x\to b}\frac{f(x)-1}{x-b}=2$에서 $x\longrightarrow b$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\longrightarrow0$ ➡ $\displaystyle\lim_{x\to b}\{f(x)-1\}=0$

$\therefore\ f(b)=1$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉢

이때 $\lim_{x \to b} \frac{f(x)-1}{x-b} = \lim_{x \to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = 2$이므로

$f'(b)=2$ …… ㉣

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 ㉠, ㉢에 의해 두 점 $(a,\ 0)$, $(b,\ 1)$을 지나고 ㉡, ㉣에 의해

$f'(b)>f'(a)>0$이므로 $x=a$, $x=b$에서의 접선의 기울기는 0보다 크다.

따라서 이를 만족하는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

3 $f(x)=-\frac{1}{2}x^4-(k-1)x^2+2kx$에서

$f'(x)=-2x^3-2(k-1)x+2k$

$\quad\ =-2(x-1)(x^2+x+k)$

함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $-2(x-1)(x^2+x+k)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+x+k=0$은 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $x=1$이 이차방정식 $x^2+x+k=0$의 근이 아니어야 하므로

$1+1+k \neq 0 \qquad \therefore k \neq -2$ …… ㉠

(ii) 이차방정식 $x^2+x+k=0$의 판별식 $D>0$이어야 하므로

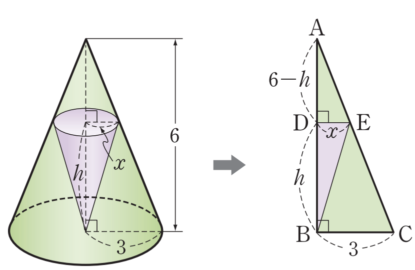
$D=1-4k>0 \qquad \therefore k<\frac{1}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 k의 값의 범위는

$k<-2$ 또는 $-2<k<\frac{1}{4}$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=-2$, $\gamma=\frac{1}{4}$이므로 $\alpha\beta\gamma=1$

4 다음 그림과 같이 내접하는 작은 원뿔의 반지름의 길이를 x, 높이를 h라 하자.



$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$이므로

$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{DE}$

$6 : 3 = (6-h) : x$

$3(6-h)=6x \qquad \therefore h=6-2x$

이때 $x>0$, $6-2x>0$이어야 하므로 $0<x<3$

작은 원뿔의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\frac{1}{3}\pi x^2 h=\frac{1}{3}\pi x^2(6-2x)=\frac{2}{3}\pi(3x^2-x^3)$

$\therefore V'(x)=\frac{2}{3}\pi(6x-3x^2)=2\pi x(2-x)$

$V'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ ($\because 0<x<3$)

$0<x<3$에서 함수 $V(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	2	…	3
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	$\frac{8}{3}\pi$ 극대	↘	

따라서 작은 원뿔의 부피 $V(x)$의 최댓값은

$V(2)=\frac{8}{3}\pi$

03 방정식과 부등식, 속도와 가속도

1 유제 & 문제

p.102~104

유제 01 답 (1) **3** (2) **2** (3) **1**

(1) $f(x)=x^3-3x+1$이라 하면

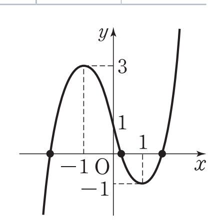
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	−1	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	3 극대	↘	−1 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



다른 풀이

위의 표에서 극댓값은 $f(-1)=3$, 극솟값은 $f(1)=-1$이므로 $f(-1)f(1)=3\times(-1)=-3<0$

따라서 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 가지므로 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(2) $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$라 하면

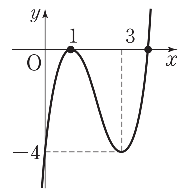
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



다른 풀이

위의 표에서 극댓값은 $f(1)=0$, 극솟값은 $f(3)=-4$이므로 $f(1)f(3)=0\times(-4)=0$

따라서 주어진 방정식은 중근과 다른 한 실근을 가지므로 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(3) $f(x)=x^3-3x^2+5$라 하면

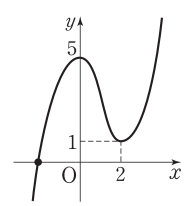
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	1 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



다른 풀이

위의 표에서 극댓값은 $f(0)=5$, 극솟값은 $f(2)=1$이므로 $f(0)f(2)=5\times1=5>0$

따라서 주어진 방정식은 한 실근과 두 허근을 가지므로 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

문제 01-1 답 (1) **4** (2) **0**

(1) $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+3$이라 하면

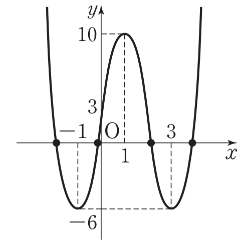
$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$
$=4x^2(x-3)-4(x-3)$
$=4(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-6 극소	$\nearrow$	10 극대	$\searrow$	-6 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그 그래프가 x축과 서로 다른 네 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



(2) $f(x)=2x^4-4x^2+3$이라 하면

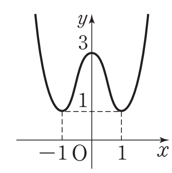
$f'(x)=8x^3-8x=8x(x^2-1)=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1 극소	$\nearrow$	3 극대	$\searrow$	1 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그 그래프가 x축과 만나지 않으므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 0이다.



유제 02 답 **$0<a<5$**

주어진 방정식에서 $3x^4+4x^3-12x^2=-a$이므로 이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=3x^4+4x^3-12x^2$의 그래프와 직선 $y=-a$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2$이라 하면

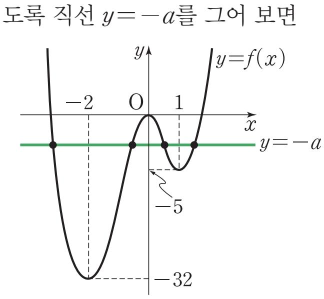
$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x^2+x-2)$
$=12x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-32 극소	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$	-5 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 교점이 4개가 되도록 직선 $y=-a$를 그어 보면



따라서 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 a의 값의 범위는

$-5<-a<0 \qquad \therefore 0<a<5$

문제 02-1 답 **0, 1**

두 곡선 $y=x^3-5x^2+4x$, $y=x^2-5x+4a$가 서로 다른 두 점에서 만나면 방정식 $x^3-5x^2+4x=x^2-5x+4a$, 즉 $x^3-6x^2+9x-4a=0$이 중근과 다른 한 실근을 가진다.

$f(x)=x^3-6x^2+9x-4a$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면

(극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이어야 하므로

$f(1)f(3)=(4-4a)\times(-4a)=0$

$\therefore$ $a=0$ 또는 $a=1$

유제 03 답 (1) $\boldsymbol{a=-1}$ **또는** $\boldsymbol{a>0}$ (2) $\boldsymbol{-1<a<0}$

주어진 방정식에서 $x^4-2x^2=a$이므로 이 방정식의 실근은 함수 $y=x^4-2x^2$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.

$f(x)=x^4-2x^2$이라 하면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

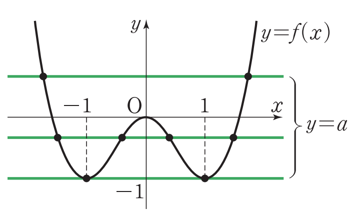
$f'(x)=0$인 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1 극소	↗	0 극대	↘	-1 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 직선 $y=a$와의 교점을 살펴보면



(1) $a=-1$ 또는 $a>0$

(2) $-1<a<0$

2 유제 & 문제

p.106~107

유제 04 답 $\boldsymbol{a\le0}$

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2-a$라 하면

$f'(x)=x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-a$ 극소	↗	$\frac{1}{4}-a$ 극대	↘	$-a$ 극소	↗

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge0$이 성립하려면

$(f(x)$의 최솟값$)\ge0$ ➡ $f(0)=f(2)=-a\ge0$

$\therefore$ $a\le0$

문제 04-1 답 **풀이 참조**

$f(x)=x^4-4x+3$이라 하면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because$ x는 실수)

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge0$이다.

$\therefore$ $x^4-4x+3\ge0$

문제 04-2 답 $\boldsymbol{a<-6}$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)>0$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^4+2x^2-5x-(-x^2-15x+a)$

$\quad=x^4+3x^2+10x-a$

$\therefore$ $h'(x)=4x^3+6x+10$

$\quad=2(x+1)(2x^2-2x+5)$

$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ ($\because$ x는 실수)

함수 $h(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$-6-a$ 극소	↗

따라서 모든 실수 x에 대하여 $h(x)=f(x)-g(x)>0$이 성립하려면

$(h(x)$의 최솟값$)>0$ ➡ $h(-1)=-6-a>0$

$\therefore$ $a<-6$

유제 05 답 (1) $\boldsymbol{a\ge4}$ (2) $\boldsymbol{k\le-16}$

(1) $f(x)=x^3-3x^2+a$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ ($\because$ $x\ge1$)

$x\geq1$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$a-2$	↘	$a-4$ 극소	↗

따라서 $x\geq1$일 때, $f(x)\geq0$이 성립하려면

($f(x)$의 최솟값)≥0 ➡ $f(2)=a-4\geq0$

$\therefore a\geq4$

(2) $x^3+x^2-4x<x^2+8x-k$에서 $x^3-12x+k<0$

$f(x)=x^3-12x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$2<x<4$에서 $f'(x)=0$인 x의 값이 없으므로 함수 $f(x)$는 최댓값이 없다.

$2<x<4$일 때, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $2<x<4$에서 증가한다.

따라서 $2<x<4$일 때, $f(x)<0$이 성립하려면 $f(4)\leq0$이어야 하므로

$f(4)=64-48+k\leq0$ $\quad\therefore k\leq-16$

문제 05-1 답 $a<1$

구간 $[0, 2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있으려면 $f(x)<g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)<0$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=-2x^2+2x+a-(x^3-2x^2-x+3)$

$\quad=-x^3+3x+a-3$

$\therefore h'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because 0\leq x\leq2$)

구간 $[0, 2]$에서 함수 $h(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$h'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$h(x)$	$a-3$	↗	$a-1$ 극대	↘	$a-5$

따라서 구간 $[0, 2]$에서 $f(x)<g(x)$, 즉 $h(x)<0$이 성립하려면

($h(x)$의 최댓값)<0 ➡ $h(1)=a-1<0$ $\quad\therefore a<1$

3 유제 & 문제

p.109~113

유제 06 답 (1) **27, 9, −6** (2) **32**

시각 t에서 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-3t^2+12t$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-6t+12$

(1) $t=3$일 때

점 P의 위치는 $x=-3^3+6\times3^2=27$

점 P의 속도는 $v=-3\times3^2+12\times3=9$

점 P의 가속도는 $a=-6\times3+12=-6$

(2) 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$-3t^2+12t=0$, $-3t(t-4)=0$

$\therefore t=4$ ($\because t>0$)

따라서 $t=4$일 때 점 P의 위치는

$x=-4^3+6\times4^2=32$

문제 06-1 답 **3**

시각 t에서 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2+a$

$t=2$일 때, $v=15$이므로

$3\times2^2+a=15$ $\quad\therefore a=3$

문제 06-2 답 **27**

시각 t에서 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=6t^2-42t+60$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$6t^2-42t+60=0$, $6(t-2)(t-5)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=5$

$t=2$일 때 점 P의 위치가 x_A이므로

$x_A=2\times2^3-21\times2^2+60\times2=52$

$t=5$일 때 점 P의 위치가 x_B이므로

$x_B=2\times5^3-21\times5^2+60\times5=25$

따라서 두 점 사이의 거리는

$|x_A-x_B|=|52-25|=27$

유제 07 답 ㄱ

ㄱ. $1<t<2$에서 $v(t)=2$이므로 가속도 a는

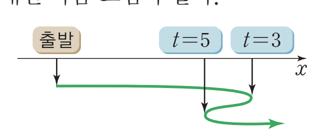
$a=v'(t)=0$

ㄴ. $3<t\leq4$일 때 속도는 감소하고, $4\leq t<5$일 때 속도는 증가한다.

ㄷ. $v(t)=0$이고 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 운동 방향이 바뀌는 시각은

$t=3$ 또는 $t=5$

시각 t에서 위치를 x라 할 때, 시각 t에서 점 P의 위치를 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 점 P는 $t=3$일 때 처음 운동 방향을 바꾼 후, $t=5$일 때 출발 지점에서 가장 가깝다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

문제 07-1 답 b

점 P의 시각 t에서 속도를 $v(t)$라 하면 $v(t)=0$이고 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀐다.

이때 $v(t)=f'(t)$이므로 위치 $x=f(t)$의 그래프에서 속도는 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

따라서 접선의 기울기가 0이고 좌우에서 접선의 기울기의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 $t=b$일 때 점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾼다.

◀ $t=d$일 때 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.

유제 08 답 (1) $45\,\mathrm{m}$ (2) $-30\,\mathrm{m/s}$

물 로켓의 t초 후의 속도를 $v\,\mathrm{m/s}$라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=20-10t$

(1) 물 로켓이 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$20-10t=0 \qquad \therefore\ t=2$

따라서 $t=2$일 때 물 로켓의 높이는

$x=25+20\times2-5\times2^2=45\,(\mathrm{m})$

(2) 물 로켓이 다시 지면에 떨어질 때 높이는 0이므로

$25+20t-5t^2=0$

$t^2-4t-5=0,\ (t+1)(t-5)=0$

$\therefore\ t=5\ (\because\ t>0)$

따라서 $t=5$일 때 물 로켓의 속도는

$v=20-10\times5=-30\,(\mathrm{m/s})$

문제 08-1 답 $350\,\mathrm{m}$

브레이크를 밟은 지 t초 후의 자동차의 속도를 $v\,\mathrm{m/s}$라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=28-1.12t$

자동차가 정지할 때 속도는 0이므로

$28-1.12t=0 \qquad \therefore\ t=25$

따라서 제동 거리는 정지할 때 자동차의 위치와 같으므로 $t=25$일 때 위치는

$x=28\times25-0.56\times25^2=350\,(\mathrm{m})$

문제 08-2 답 $26\,\mathrm{m/s}$, 3초

놀이 기구의 t초 후의 속도를 $v(t)\,\mathrm{m/s}$라 하면

$v(t)=f'(t)=t^3-3t^2-9t+1$

$\therefore\ v'(t)=3t^2-6t-9=3(t+1)(t-3)$

$v'(t)=0$인 t의 값은 $t=3\ (\because\ 1\le t\le4)$

$1\le t\le4$에서 함수 $v(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$v'(t)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$v(t)$	-10	↘	-26 극소	↗	-19

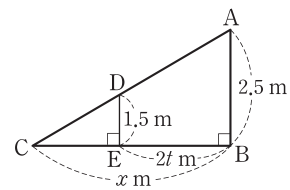
이때 속력은 $|v(t)|\,\mathrm{m/s}$이고, $1\le t\le4$에서 $v(t)<0$이므로 $v(t)$가 최소일 때 속력 $|v(t)|$가 최대이다.

함수 $v(t)$의 최솟값은 $v(3)$이므로 놀이 기구의 최대 속력은 $|v(3)|=26\,\mathrm{m/s}$이고, 그때의 시각은 3초이다.

유제 09 답 (1) $5\,\mathrm{m/s}$ (2) $3\,\mathrm{m/s}$

학생이 $2\,\mathrm{m/s}$의 속도로 움직이므로 t초 동안 움직이는 거리는 $2t\,\mathrm{m}$

그림자 끝이 t초 동안 움직이는 거리를 $x\,\mathrm{m}$라 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{DEC}$이므로

$2.5 : x=1.5 : (x-2t)$

$1.5x=2.5x-5t$

$\therefore\ x=5t$

(1) 그림자 끝이 움직이는 속도를 $v\,\mathrm{m/s}$라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=5\,(\mathrm{m/s})$

(2) 그림자의 길이를 $l\,\mathrm{m}$라 하면 $l=\overline{\mathrm{CE}}$이므로

$l=\overline{\mathrm{CB}}-\overline{\mathrm{EB}}=x-2t$

$=5t-2t=3t$

따라서 그림자의 길이의 변화율은

$\dfrac{dl}{dt}=3\,(\mathrm{m/s})$

문제 09-1 답 $2\sqrt{2}$

t초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(4t,\ 0)$, $(0,\ 4t)$이므로 선분 AB의 중점의 좌표는 $\mathrm{C}(2t,\ 2t)$

$\overline{\mathrm{OC}}=l$이라 하면

$l=\sqrt{(2t)^2+(2t)^2}=2\sqrt{2}t\ (\because\ t>0)$

따라서 $\overline{\mathrm{OC}}$의 길이의 변화율은

$\dfrac{dl}{dt}=2\sqrt{2}$

유제 10 답 (1) $32\pi\,\mathrm{cm^2/s}$ (2) $26\pi\,\mathrm{cm^3/s}$

t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $(10+t)\,\mathrm{cm}$, 높이는 $(20-2t)\,\mathrm{cm}$이다. (단, $0<t<10$)

(1) t초 후의 원기둥의 겉넓이를 $S\,\mathrm{cm^2}$라 하면

$S=2\pi(10+t)^2+2\pi(10+t)(20-2t)$

$=2\pi(10+t)(30-t)$

시각 t에 대한 겉넓이 S의 변화율은

$\dfrac{dS}{dt}=2\pi(30-t)+2\pi(10+t)\times(-1)$

$=4\pi(10-t)$

밑면의 반지름의 길이가 $12\,\mathrm{cm}$가 되는 것은 2초 후이므로 $t=2$에서 원기둥의 겉넓이의 변화율은

$4\pi(10-2)=32\pi\,(\mathrm{cm^2/s})$

(2) t초 후의 원기둥의 부피를 $V\,\mathrm{cm}^3$라 하면

$V=\pi(10+t)^2(20-2t)$

$=2\pi(10+t)^2(10-t)$

시각 t에 대한 부피 V의 변화율은

$\dfrac{dV}{dt}=2\pi\times2(10+t)(10-t)+2\pi(10+t)^2\times(-1)$

$=2\pi(10+t)(10-3t)$

높이가 14cm가 되는 것은 3초 후이므로 $t=3$에서 원기둥의 부피의 변화율은

$2\pi(10+3)(10-3\times3)=26\pi\,(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$

문제 **10**-1 답 **$180\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$**

t초 후의 정사각형의 한 변의 길이는

$(15+3t)\,\mathrm{cm}$

t초 후의 정사각형의 넓이를 $S\,\mathrm{cm}^2$라 하면

$S=(15+3t)^2$

정사각형의 넓이가 $900\,\mathrm{cm}^2$이면

$(15+3t)^2=900,\ t^2+10t-75=0$

$(t+15)(t-5)=0\qquad\therefore t=5\ (\because\ t>0)$

시각 t에 대한 넓이 S의 변화율은

$\dfrac{dS}{dt}=2(15+3t)\times3=18t+90$

따라서 $t=5$에서 정사각형의 넓이의 변화율은

$18\times5+90=180\,(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$

기본 연습문제 p.114~115

1 12 **2** ⑤ **3** $1<k<8$ **4** 11
5 5 **6** $1<a<3$ **7** $1<t<6$
8 ⑤ **9** 405m

1 $f(x)=2x^3+5x^2-4x+a$라 하면

$f'(x)=6x^2+10x-4=2(x+2)(3x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 (극댓값)$\times$(극솟값)<0이어야 하므로

$f(-2)f\left(\dfrac{1}{3}\right)=(a+12)\left(a-\dfrac{19}{27}\right)<0$

$\therefore -12<a<\dfrac{19}{27}$

따라서 정수 a는 $-11,\ -10,\ \cdots,\ -1,\ 0$의 12개이다.

2 두 곡선 $y=x^4+4x^3+a,\ y=2x^3+2x^2+2$의 교점이 3개이려면 방정식 $x^4+4x^3+a=2x^3+2x^2+2$, 즉 $x^4+2x^3-2x^2=2-a$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^4+2x^3-2x^2$이라 하면

$f'(x)=4x^3+6x^2-4x=2x(x+2)(2x-1)$

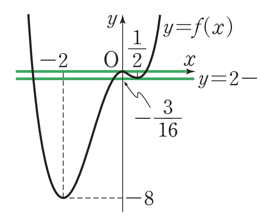
$f'(x)=0$인 x의 값은

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-8 극소	↗	0 극대	↘	$-\frac{3}{16}$ 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=2-a$와 서로 다른 세 점에서 만나려면



$2-a=0$ 또는 $2-a=-\dfrac{3}{16}$

$\therefore a=2$ 또는 $a=\dfrac{35}{16}$

따라서 두 곡선의 교점이 3개가 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은

$2\times\dfrac{35}{16}=\dfrac{35}{8}$

3 주어진 방정식에서

$2x^3-3x^2-12x=k-1$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하면

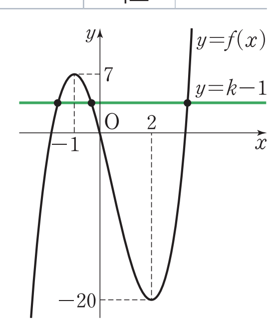
$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7 극대	↘	-20 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k-1$과 교점의 x좌표가 두 개는 음수, 하나는 양수가 되도록 하는 k의 값의 범위는



$0<k-1<7$

$\therefore 1<k<8$

4 $x^4+6x^3-x^2-9x \geq 2x^3-x^2+7x-a$에서
$x^4+4x^3-16x+a \geq 0$
$f(x)=x^4+4x^3-16x+a$라 하면
$f'(x)=4x^3+12x^2-16=4(x+2)^2(x-1)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a+16$	↘	$a-11$ 극소	↗

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이 성립하려면
$(f(x)$의 최솟값$) \geq 0$ ➡ $f(1)=a-11 \geq 0$
$\therefore\ a \geq 11$
따라서 a의 최솟값은 11이다.

5 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+k$라 하면
$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=2$
$1 \leq x \leq 3$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$k+5$	↘	$k+4$ 극소	↗	$k+9$

따라서 $1 \leq x \leq 3$일 때, $0 \leq f(x) \leq 9$가 성립하려면
$(f(x)$의 최솟값$) \geq 0$, $(f(x)$의 최댓값$) \leq 9$
➡ $f(2)=k+4 \geq 0$, $f(3)=k+9 \leq 9$
$\therefore\ -4 \leq k \leq 0$
따라서 정수 k는 -4, -3, -2, -1, 0의 5개이다.

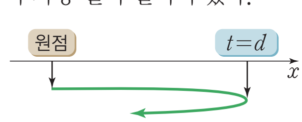
6 $x \geq 0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있으려면 $f(x)>g(x)$, 즉
$f(x)-g(x)>0$이어야 한다.
$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(x)=(x^3-3x^2+6ax-a)-(-x^3+3ax^2-3)$
$\quad =2x^3-3(a+1)x^2+6ax-a+3$
$\therefore\ h'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a$
$\quad =6(x-1)(x-a)$
$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=a$
이때 $a>1$이므로 $x \geq 0$에서 함수 $h(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	a	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-a+3$	↗	$2a+2$ 극대	↘	$-a^3+3a^2-a+3$ 극소	↗

$x \geq 0$에서 $h(x)=f(x)-g(x)>0$이 성립하려면
$(h(x)$의 최솟값$)>0$
함숫값 $h(0)$, $h(a)$ 중 하나가 최솟값이므로
$h(0)=-a+3>0$에서 $a<3$ …… ㉠
$h(a)=-a^3+3a^2-a+3>0$에서
$a^3-3a^2+a-3<0$
$(a^2+1)(a-3)<0$, $a-3<0\ (\because\ a^2+1>0)$
$\therefore\ a<3$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $a<3$
그런데 조건에서 $a>1$이므로
$1<a<3$

7 두 점 A, B의 시각 t에서 속도를 v_A, v_B라 하면
$v_A=\dfrac{dx_A}{dt}=3t^2+3t-6$
$v_B=\dfrac{dx_B}{dt}=\dfrac{1}{2}t^2-3t$
두 점 A, B가 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호가 서로 다르므로 $v_Av_B<0$에서
$(3t^2+3t-6)\left(\dfrac{1}{2}t^2-3t\right)<0$
$t(t+2)(t-1)(t-6)<0$
이때 $t>0$에서 $t>0$, $t+2>0$이므로
$(t-1)(t-6)<0$
$\therefore\ 1<t<6$

8 시각 t에서 가속도를 a라 하면 $a=v'(t)$이므로 가속도 a는 시각 t에 따른 속도 $v(t)$의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.
① $t=b$에서 접선의 기울기가 0이므로 가속도는 0이다.
② $t=c$에서 (접선의 기울기)<0이므로 가속도는 음의 값이다.
③ $v(t)=0$이고 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 $0<t<i$에서 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t=d$ 또는 $t=h$
즉, 운동 방향은 두 번 바뀐다.
④ $t=0$에서 $t=d$까지 양의 방향으로 움직이다가 $t=d$에서 $t=h$까지 음의 방향으로 움직이므로 $t=d$일 때 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있다.



⑤ $t=d$에서부터 다시 원점 방향으로 움직이지만 원점과 가장 가까워지는 위치는 알 수 없다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

9 전기를 끊은 지 t초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$v=\dfrac{ds}{dt}=27-0.9t$

물체가 정지할 때의 속도는 0이므로

$27-0.9t=0$　　$\therefore\ t=30$

즉, 30초 후 물체가 정지하므로 30초 동안 물체가 움직이는 거리는

$27\times30-0.45\times30^2=405\,(\mathrm{m})$

따라서 목적지로부터 전방 405 m 지점에서 전기를 끊으면 된다.

실전 연습문제 p.116

1 $-4<k<4$　　**2** -6　　**3** ④　　**4** ①

1 $f(x)=-x^3+2x$라 하면 $f'(x)=-3x^2+2$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+2t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-3t^2+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^3+2t)=(-3t^2+2)(x-t)$

$\therefore\ y=(-3t^2+2)x+2t^3$

이 직선이 점 $(-2,\ k)$를 지나므로

$k=(-3t^2+2)\times(-2)+2t^3$

$\therefore\ 2t^3+6t^2-4-k=0$　　…… ㉠

점 $(-2,\ k)$에서 주어진 곡선에 서로 다른 세 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$g(t)=2t^3+6t^2-4-k$라 하면

$g'(t)=6t^2+12t=6t(t+2)$

$g'(t)=0$인 t의 값은 $t=-2$ 또는 $t=0$

삼차방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $g(t)$의 (극댓값)×(극솟값)<0이어야 하므로

$g(-2)g(0)=(4-k)(-4-k)<0$

$(k+4)(k-4)<0$

$\therefore\ -4<k<4$

2 $t=1$일 때 점 P의 위치가 -3이므로 $f(1)=-3$

$-1+a+b+1=-3$

$\therefore\ a+b=-3$　　…… ㉠

시각 t에서 점 P의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=-3t^2+2at+b$

$t=1$일 때 점 P가 운동 방향을 바꾸므로 $v(1)=0$

$-3+2a+b=0$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=-9$

$\therefore\ v(t)=-3t^2+12t-9$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$-3t^2+12t-9=0,\ t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=3$

따라서 점 P가 $t=1$ 이외에 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=3$이다.

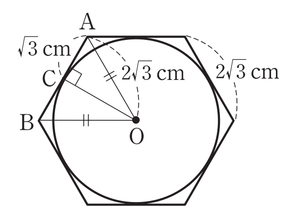
이때 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=v'(t)=-6t+12$

$t=3$일 때 점 P의 가속도는

$-6\times3+12=-6$

3 오른쪽 그림에서 △OAB는 정삼각형이므로



$\overline{OC}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}$

$\quad=3(\mathrm{cm})$

한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ cm인 정육각형에 내접하는 원의 반지름의 길이는 3 cm이고, 매초 2 cm의 속도로 반지름의 길이가 늘어나므로 t초 후의 반지름의 길이는

$(3+2t)$ cm

t초 후의 원의 넓이를 $S\,\mathrm{cm}^2$라 하면

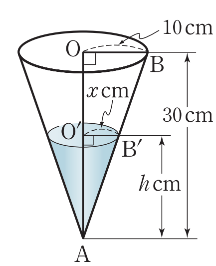
$S=\pi(3+2t)^2$

$\therefore\ \dfrac{dS}{dt}=2\pi(3+2t)\times2=4\pi(3+2t)$

따라서 $t=4$에서 원의 넓이의 변화율은

$4\pi(3+2\times4)=44\pi\,(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$

4 오른쪽 그림과 같이 t초 후의 수면의 높이를 h cm, 반지름의 길이를 x cm라 하면 매초 1 cm의 속도로 수면의 높이가 상승하므로



$h=t$

△OAB∽△O′AB′이므로

$30:10=t:x$

$10t=30x$　　$\therefore\ x=\dfrac{t}{3}$

원뿔 모양의 물의 부피를 $V\,\mathrm{cm}^3$라 하면

$V=\dfrac{1}{3}\pi x^2h=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{t}{3}\right)^2\times t=\dfrac{1}{27}\pi t^3$

$\therefore\ \dfrac{dV}{dt}=\dfrac{1}{9}\pi t^2$

따라서 $t=6$에서 물의 부피의 변화율은

$\dfrac{1}{9}\pi\times6^2=4\pi\,(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$

Ⅲ-1. 부정적분과 정적분

01 부정적분

1 개념 CHECK p.119

1. 답 (1) $2x+C$ (2) x^4+C (3) $\frac{1}{2}x^2+2x+C$

(4) x^3+x^2+C

2. 답 (1) $f(x)=2x+1$ (2) $f(x)=20x^4-6x$

3. 답 (1) x^4-2x^3+C (2) x^4-2x^3

1 유제 & 문제 p.120~121

유제 01 답 6

$(2x^3-6x^2+1)'=(x-2)f(x)$이므로

$(x-2)f(x)=(2x^3-6x^2+1)'$

$=6x^2-12x=6x(x-2)$

따라서 $f(x)=6x$이므로

$f(1)=6$

문제 01-1 답 9

$(bx^3+2x^2-cx+2)'=6x^2+ax-3$이므로

$6x^2+ax-3=3bx^2+4x-c$

따라서 $a=4$, $b=2$, $c=3$이므로

$a+b+c=9$

문제 01-2 답 -1

$f(x)=F'(x)=(x^3+ax^2+bx)'$

$=3x^2+2ax+b$

$f(0)=-3$이므로 $b=-3$

따라서 $f(x)=3x^2+2ax-3$이므로

$f'(x)=6x+2a$

$f'(0)=4$이므로 $2a=4$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore a+b=-1$

문제 01-3 답 -12

$\{f(x)g(x)\}'=F(x)$이므로

$F(x)=\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$=2x(4x-1)+(x^2-3)\times 4$

$=12x^2-2x-12$

따라서 함수 $F(x)$의 상수항은 -12이다.

유제 02 답 (1) 0 (2) 3

(1) $F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^3-3x^2\right)\right\}dx$

$=\frac{1}{2}x^3-3x^2+C$

$F(1)=1$이므로

$F(1)=\frac{1}{2}-3+C=1$ $\quad\therefore C=\frac{7}{2}$

따라서 $F(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{7}{2}$이므로

$F(-1)=-\frac{1}{2}-3+\frac{7}{2}=0$

(2) $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)$이므로

$f(x)=5x^3-2x^2$ $\quad\therefore f(1)=5-2=3$

문제 02-1 답 2

$\frac{d}{dx}\left(\int x^3\,dx\right)=x^3$이므로 주어진 식은

$\log_x x^3=x^2+x-3$

$3=x^2+x-3$, $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

이때 로그의 밑, 진수의 조건에 의해 $x>0$, $x\neq1$이어야 하므로 $x=2$

문제 02-2 답 6

$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-4x)\right\}dx$

$=x^2-4x+C=(x-2)^2+C-4$

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 5이므로

$C-4=5$ $\quad\therefore C=9$

따라서 $f(x)=x^2-4x+9$이므로

$f(3)=9-12+9=6$

2 개념 CHECK p.122

1. 답 (1) $\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x+C$

(2) $\frac{1}{4}x^4+x^2-x+C$

(1) $\int(2x^2-3x+4)\,dx=2\int x^2\,dx-3\int x\,dx+4\int dx$

$=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x+C$

(2) $\int(x^3+2x-1)\,dx=\int x^3\,dx+2\int x\,dx-\int dx$

$=\frac{1}{4}x^4+x^2-x+C$

유제 03 답 (1) $\frac{3}{2}x^4+x^3-\frac{9}{2}x^2+C$

(2) $y+\frac{1}{2}xy^2+x^2y^3+C$

(3) $\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+y+C$

(4) x^2+8x+C

(1) $\int 3x(x-1)(2x+3)\,dx$

$=\int (6x^3+3x^2-9x)\,dx$

$=6\int x^3\,dx+3\int x^2\,dx-9\int x\,dx$

$=\frac{3}{2}x^4+x^3-\frac{9}{2}x^2+C$

(2) 적분변수가 y이므로 x를 상수로 보고 y에 대하여 적분하면

$\int (1+xy+3x^2y^2)\,dy$

$=\int dy+x\int y\,dy+3x^2\int y^2\,dy$

$=y+\frac{1}{2}xy^2+x^2y^3+C$

(3) $\int \frac{y^4+y^2+1}{y^2+y+1}dy=\int \frac{(y^2+y+1)(y^2-y+1)}{y^2+y+1}dy$

$=\int (y^2-y+1)\,dy$

$=\int y^2\,dy-\int y\,dy+\int dy$

$=\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+y+C$

(4) $\int (2+\sqrt{x})^2\,dx+\int (2-\sqrt{x})^2\,dx$

$=\int \{(2+\sqrt{x})^2+(2-\sqrt{x})^2\}\,dx$

$=\int (2x+8)\,dx=2\int x\,dx+8\int dx$

$=x^2+8x+C$

유제 04 답 (1) 1 (2) 3

(1) $f(x)=\int f'(x)\,dx$이므로

$f(x)=\int (3x^2+8x+1)\,dx$

$=x^3+4x^2+x+C$

$f(1)=5$이므로

$f(1)=6+C=5 \qquad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=x^3+4x^2+x-1$이므로

$f(-1)=-1+4-1-1=1$

(2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x+1$이므로 $f'(x)=3x+1$

이때 $f(x)=\int f'(x)\,dx$이므로

$f(x)=\int (3x+1)\,dx=\frac{3}{2}x^2+x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$f(0)=C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$이므로

$f(1)=\frac{3}{2}+1+\frac{1}{2}=3$

문제 04-1 답 -15

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $-9x+k$이므로 $f'(x)=-9x+k$

이때 $f(x)=\int f'(x)\,dx$이므로

$f(x)=\int (-9x+k)\,dx=-\frac{9}{2}x^2+kx+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ -3)$을 지나므로

$f(0)=C=-3$

$\therefore\ f(x)=-\frac{9}{2}x^2+kx-3$

방정식 $f(x)=-\frac{9}{2}x^2+kx-3=0$의 모든 근의 합이 $\frac{2}{3}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$-\frac{k}{-\frac{9}{2}}=\frac{2}{3} \qquad \therefore k=3$

따라서 $f(x)=-\frac{9}{2}x^2+3x-3$이므로

$f(2)=-18+6-3=-15$

문제 04-2 답 3

$f(x)=\int f'(x)\,dx$이므로

(i) $x\ge1$일 때, $f(x)=\int (2x+1)\,dx=x^2+x+C_1$

(ii) $x<1$일 때, $f(x)=\int 3x^2\,dx=x^3+C_2$

(i), (ii)에 의해 함수 $f(x)$는

$f(x)=\begin{cases} x^2+x+C_1 & (x\ge1) \\ x^3+C_2 & (x<1)\end{cases}$

$f(0)=-2$이므로 $f(0)=C_2=-2$ …… ㉠

이때 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)$에서

$2+C_1=1+C_2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2+C_1=1-2 \quad \therefore C_1=-3$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^2+x-3 & (x\ge 1) \\ x^3-2 & (x<1) \end{cases}$이므로

$f(2)=4+2-3=3$

유제 05 답 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-8x-6$

이차함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$

$xf(x)-F(x)=x^3-4x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-f(x)=3x^2-8x$

$xf'(x)=x(3x-8)$

$\therefore f'(x)=3x-8$

이때 $f(x)=\int f'(x)\,dx$이므로

$f(x)=\int (3x-8)\,dx=\frac{3}{2}x^2-8x+C$

$f(1)=-\frac{25}{2}$이므로

$f(1)=\frac{3}{2}-8+C=-\frac{25}{2} \quad \therefore C=-6$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}x^2-8x-6$

문제 05-1 답 -6

$\int f(x)\,dx=(x+1)f(x)-3x^4-4x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+1)f'(x)-12x^3-12x^2$

$(x+1)f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$

$\therefore f'(x)=12x^2$

이때 $f(x)=\int f'(x)\,dx$이므로

$f(x)=\int 12x^2\,dx=4x^3+C$

$f(1)=2$이므로

$f(1)=4+C=2 \quad \therefore C=-2$

따라서 $f(x)=4x^3-2$이므로

$f(-1)=-4-2=-6$

기본 연습문제

p.126~127

1 5 **2** ④ **3** ③ **4** 60
5 $f(x)=2x^4-15x^2+2$ **6** ①
7 $-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C$ **8** 1 **9** 10
10 ④

1 $\int f(x)\,dx=F(x)$에서 $F'(x)=f(x)$

$F'(x)=x^2+a$이므로 $f(x)=x^2+a$

$f(1)=2$이므로 $f(1)=1+a=2 \quad \therefore a=1$

따라서 $f(x)=x^2+1$이므로

$f(2)=4+1=5$

2 $\int g(x)\,dx=x^4f(x)+a$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=4x^3f(x)+x^4f'(x)$이므로

$g(1)=4f(1)+f'(1)$

이때 $f(1)=-1$, $f'(1)=5$이므로

$g(1)=-4+5=1$

3 $\frac{d}{dx}\left\{\int (ax^3-2x^2+3)\,dx\right\}=5x^3+bx^2+c$에서

$ax^3-2x^2+3=5x^3+bx^2+c$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=5,\ b=-2,\ c=3 \quad \therefore a+b+c=6$

4 $F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$

$\therefore F(x)=10x^{10}+9x^9+\cdots+2x^2+x+C$

$F(0)=5$이므로 $F(0)=C=5$

따라서 $F(x)=10x^{10}+9x^9+\cdots+2x^2+x+5$이므로

$F(1)=10+9+\cdots+2+1+5=60$

5 $\int\left\{\frac{d}{dx}(2x^4-ax^2)\right\}dx=2x^4-ax^2+C$이므로

$f(x)=2x^4-ax^2+C$

$f(0)=2$이므로 $C=2$

즉, $f(x)=2x^4-ax^2+2$이므로

$f'(x)=8x^3-2ax$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=4$

따라서 $f'(2)=64-4a=4$이므로 $a=15$

$\therefore f(x)=2x^4-15x^2+2$

6 $f(x)=\int\frac{2x^2}{x+2}dx+\int\frac{x}{x+2}dx-\int\frac{6}{x+2}dx$

$=\int\frac{2x^2+x-6}{x+2}dx$

$=\int\frac{(x+2)(2x-3)}{x+2}dx$

$=\int(2x-3)dx=x^2-3x+C$

$f(0)=-5$이므로 $f(0)=C=-5$

따라서 $f(x)=x^2-3x-5$이므로 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 -5이다.

7 $f'(x)=-3x^2+4x-1$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-3x^2+4x-1)dx$

$=-x^3+2x^2-x+C$

$f(1)=0$이므로

$f(1)=-1+2-1+C=0$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=-x^3+2x^2-x$이므로 $f(x)$를 적분하면

$\int(-x^3+2x^2-x)dx=-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C$

8 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=-x+1$에 접하므로 직선 $y=-x+1$은 곡선 $y=f(x)$의 접선이다.

직선 $y=-x+1$과 곡선 $y=f(x)$의 접점의 좌표를 (a, b)라 하면 $f'(a)=-1$이므로

$f'(a)=6a^2+12a+5=-1$

$6(a+1)^2=0$ $\therefore a=-1$

또 $b=-a+1$이므로 $b=2$

$f(x)=\int f'(x)dx$이므로

$f(x)=\int(6x^2+12x+5)dx$

$=2x^3+6x^2+5x+C$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$f(-1)=2$

$f(-1)=-2+6-5+C=2$ $\therefore C=3$

따라서 $f(x)=2x^3+6x^2+5x+3$이므로

$f(-2)=-16+24-10+3=1$

9 $f'(x)=x+|x-1|$을 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값 $x=1$을 기준으로 구간을 나누어 나타내면

(i) $x\le1$일 때, $f'(x)=x-(x-1)=1$

(ii) $x>1$일 때, $f'(x)=x+(x-1)=2x-1$

(i), (ii)에 의해 $f'(x)$는

$f'(x)=\begin{cases}1 & (x\le1)\\ 2x-1 & (x>1)\end{cases}$

$f(x)=\int f'(x)dx$이므로

(iii) $x\le1$일 때, $f(x)=\int dx=x+C_1$

(iv) $x>1$일 때, $f(x)=\int(2x-1)dx=x^2-x+C_2$

(iii), (iv)에 의해 함수 $f(x)$는

$f(x)=\begin{cases}x+C_1 & (x\le1)\\ x^2-x+C_2 & (x>1)\end{cases}$

$f(-1)=2$이므로

$f(-1)=-1+C_1=2$ $\therefore C_1=3$ …… ㉠

이때 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

$f(1)=\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$에서

$C_2=1+C_1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $C_2=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x+3 & (x\le1)\\ x^2-x+4 & (x>1)\end{cases}$이므로

$f(3)=9-3+4=10$

10 $\int xf(x)dx=x^2f(x)-4x^3+x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-12x^2+2x$

$-xf(x)=x^2f'(x)-12x^2+2x$

$\therefore f(x)=-xf'(x)+12x-2$ …… ㉠

$f(x)$가 일차함수이므로 $f(x)=ax+b\,(a\ne0)$라 하면

$f'(x)=a$이므로 ㉠에서

$ax+b=-ax+12x-2$

$ax+b=(-a+12)x-2$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=-a+12,\ b=-2$ $\therefore a=6,\ b=-2$

따라서 $f(x)=6x-2$이므로

$f(k)=28$에서 $6k-2=28$

$6k=30$ $\therefore k=5$

실전 연습문제 p.128

1 2 **2** ② **3** 6 **4** 18

1 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2$에서 양변을 x에 대하여 적분하면

$f(x)+g(x)=\int 2dx=2x+C_1$ …… ㉠

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=2x-5$에서 양변을 x에 대하여 적분하면

$f(x)-g(x)=\int (2x-5)dx=x^2-5x+C_2$ …… ㉡

이때 $f(0)=-1$, $g(0)=-4$이므로

$f(0)+g(0)=C_1=-5$, $f(0)-g(0)=C_2=3$

$\therefore\ C_1=-5,\ C_2=3$

$C_1=-5$, $C_2=3$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$\begin{cases} f(x)+g(x)=2x-5 & \cdots\cdots ㉢ \\ f(x)-g(x)=x^2-5x+3 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢+㉣을 하면

$2f(x)=x^2-3x-2$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x-1$

㉢−㉣을 하면

$2g(x)=-x^2+7x-8$

$\therefore\ g(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{7}{2}x-4$

$\therefore\ f(-1)-g(1)$

$=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}-1\right)-\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{2}-4\right)=2$

2 $f'(x)=\begin{cases} 2 & (x<-1) \\ 2x & (-1<x<1) \\ -2 & (x>1) \end{cases}$이므로

(i) $x<-1$일 때, $f(x)=\int 2dx=2x+C_1$

(ii) $-1<x<1$일 때, $f(x)=\int 2x\,dx=x^2+C_2$

(iii) $x>1$일 때, $f(x)=\int -2dx=-2x+C_3$

$\therefore\ f(x)=\begin{cases} 2x+C_1 & (x<-1) \\ x^2+C_2 & (-1<x<1) \\ -2x+C_3 & (x>1) \end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=0+C_2=0$ $\quad\therefore\ C_2=0$

이때 $f(x)$는 연속함수이므로 $x=-1$, $x=1$에서도 연속이다.

$f(-1)=\lim\limits_{x\to -1+} x^2=\lim\limits_{x\to -1-}(2x+C_1)$

$1=-2+C_1$ $\quad\therefore\ C_1=3$

$f(1)=\lim\limits_{x\to 1+}(-2x+C_3)=\lim\limits_{x\to 1-}x^2$

$-2+C_3=1$ $\quad\therefore\ C_3=3$

$\therefore\ f(x)=\begin{cases} 2x+3 & (x<-1) \\ x^2 & (-1\le x<1) \\ -2x+3 & (x\ge 1) \end{cases}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프로 옳은 것은 ②이다.

다른 풀이

$-1<x<1$일 때, $f(x)=\int 2x\,dx=x^2+C_1$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 있는 것은 ②, ③이다.

또 $x<-1$일 때, $f(x)=\int 2dx=2x+C_2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 ②와 같다.

3 $f(a+b)=f(a)+f(b)-ab$에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0$

$\therefore\ f(0)=0$ …… ㉠

미분계수의 정의에 의해 $f'(1)$의 값을 구하면

$f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1)+f(h)-h-f(1)}{h}$

$(\because\ f(1+h)=f(1)+f(h)-h)$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-h}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}-1=3$ $(\because\ f'(1)=3)$

$\therefore\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=4$ …… ㉡

또 도함수의 정의에 의해 $f'(x)$를 구하면

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)+f(h)-xh-f(x)}{h}$

$(\because\ f(x+h)=f(x)+f(h)-xh)$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-xh}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}-x=4-x$ ($\because$ ㉡)

$\therefore\ f'(x)=-x+4$

이때 $f(x)=\int f'(x)dx$이므로

$f(x)=\int(-x+4)dx=-\dfrac{1}{2}x^2+4x+C$ …… ㉢

㉠에서 $f(0)=0$이므로 $f(0)=C=0$

$C=0$을 ㉢에 대입하면

$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+4x$

$\therefore\ f(2)=-2+8=6$

4 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 위로 볼록하고, x축과의 교점의 x좌표가 $x=-1$, $x=3$이므로

$f'(x)=a(x+1)(x-3)$ $(a<0)$이라 하면

주어진 그래프에서 $f'(0)=6$이므로

$f'(0)=-3a=6$ $\quad\therefore a=-2$

$\therefore f'(x)=-2(x+1)(x-3)=-2x^2+4x+6$

$f(x)=\int f'(x)\,dx$이므로

$$f(x)=\int(-2x^2+4x+6)\,dx$$
$$=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x+C$$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=C=0$

$\therefore f(x)=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x$

이때 주어진 도함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$이므로 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극대이므로 극댓값은

$f(3)=-18+18+18=18$

02 정적분

1 유제 & 문제

p.131~134

유제 01 답 (1) **34** (2) **16** (3) $-\frac{88}{3}$ (4) $\frac{47}{6}$

(1) $\int_0^2(2x^3+3x^2+4x+5)\,dx$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4+x^3+2x^2+5x\right]_0^2$$
$$=(8+8+8+10)-0=34$$

(2) $\int_{-2}^2 y(y^2+3y+4)\,dy=\int_{-2}^2(y^3+3y^2+4y)\,dy$

$$=\left[\frac{1}{4}y^4+y^3+2y^2\right]_{-2}^2$$
$$=(4+8+8)-(4-8+8)$$
$$=16$$

(3) $\int_3^{-1}(x+1)(x+2)\,dx$

$$=-\int_{-1}^3(x^2+3x+2)\,dx \quad \blacktriangleleft \int_3^{-1}f(x)\,dx=-\int_{-1}^3 f(x)\,dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^3$$
$$=-\left\{\left(9+\frac{27}{2}+6\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2\right)\right\}=-\frac{88}{3}$$

(4) $\int_2^3\frac{x^3+27}{x+3}\,dx$

$$=\int_2^3\frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3}\,dx$$
$$=\int_2^3(x^2-3x+9)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x\right]_2^3$$
$$=\left(9-\frac{27}{2}+27\right)-\left(\frac{8}{3}-6+18\right)=\frac{47}{6}$$

문제 01-1 답 **2**

$$\int_0^k(2x-1)\,dx=\left[x^2-x\right]_0^k=k^2-k$$

즉, $k^2-k=2$이므로

$k^2-k-2=0$, $(k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=2$ $(\because k>0)$

유제 02 답 (1) **9** (2) **11**

(1) $\int_{-1}^2(x+1)^2\,dx-\int_{-1}^2(2x-1)\,dx$

$$=\int_{-1}^2\{(x+1)^2-(2x-1)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^2(x^2+2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_{-1}^2$$
$$=\left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}-2\right)=9$$

(2) $\int_2^3\frac{2x^2}{x-1}\,dx-\int_3^2\frac{4y-6}{y-1}\,dy$

$$=\int_2^3\frac{2x^2}{x-1}\,dx-\int_3^2\frac{4x-6}{x-1}\,dx$$
$$=\int_2^3\frac{2x^2}{x-1}\,dx+\int_2^3\frac{4x-6}{x-1}\,dx$$
$$=\int_2^3\left(\frac{2x^2}{x-1}+\frac{4x-6}{x-1}\right)dx$$
$$=\int_2^3\frac{2(x-1)(x+3)}{x-1}\,dx$$
$$=\int_2^3(2x+6)\,dx=\left[x^2+6x\right]_2^3$$
$$=(9+18)-(4+12)=11$$

문제 **02**-1 답 $\mathbf{\frac{1}{4}}$

$$\int_1^3 (2x+k)^2 dx - \int_1^3 (2x-k)^2 dx$$
$$= \int_1^3 \{(2x+k)^2-(2x-k)^2\} dx$$
$$= \int_1^3 8kx\,dx = \Big[4kx^2\Big]_1^3 = 32k$$

즉, $32k=8$이므로 $k=\frac{1}{4}$

유제 **03** 답 (1) **12** (2) $\mathbf{\frac{2}{3}}$

(1) $\int_{-1}^1 (3x^2+2x)\,dx - \int_2^1 (3t^2+2t)\,dt$
$$= \int_{-1}^1 (3x^2+2x)\,dx - \int_2^1 (3x^2+2x)\,dx$$
$$= \int_{-1}^1 (3x^2+2x)\,dx + \int_1^2 (3x^2+2x)\,dx$$
$$= \int_{-1}^2 (3x^2+2x)\,dx$$
$$= \Big[x^3+x^2\Big]_{-1}^2$$
$$= (8+4)-(-1+1) = 12$$

(2) $\int_2^4 (x^2-2x)\,dx - \int_3^4 (x^2-2x)\,dx + \int_1^2 (x^2-2x)\,dx$
$$= \int_1^2 (x^2-2x)dx + \int_2^4 (x^2-2x)dx - \int_3^4 (x^2-2x)dx$$
$$= \int_1^4 (x^2-2x)\,dx - \int_3^4 (x^2-2x)\,dx$$
$$= \int_1^4 (x^2-2x)\,dx + \int_4^3 (x^2-2x)\,dx$$
$$= \int_1^3 (x^2-2x)\,dx$$
$$= \Big[\frac{1}{3}x^3-x^2\Big]_1^3$$
$$= (9-9)-\left(\frac{1}{3}-1\right) = \frac{2}{3}$$

문제 **03**-1 답 **2700**

$$\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \cdots + \int_9^{10} f(x)\,dx$$
$$= \int_0^{10} f(x)\,dx$$

$f(x)=x^3+4x$이므로

$$\int_0^{10} (x^3+4x)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4+2x^2\Big]_0^{10}$$
$$= 2500+200 = 2700$$

유제 **04** 답 $\mathbf{-\frac{1}{3}}$

적분구간 $[0,\ 3]$을 $x=1$을 기준으로 나누면

$$\int_0^3 f(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^3 (2x-x^2)\,dx$$
$$= \Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 + \Big[x^2-\frac{1}{3}x^3\Big]_1^3$$
$$= \frac{1}{3} + \left\{(9-9)-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right\}$$
$$= -\frac{1}{3}$$

문제 **04**-1 답 -8

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$x\le 0$일 때, $f(x)=6$

$x\ge 0$일 때, $f(x)=\frac{0-6}{2-0}(x-2)=-3x+6$

즉, $f(x)=\begin{cases} 6 & (x\le 0) \\ -3x+6 & (x\ge 0) \end{cases}$이므로

$$xf(x)=\begin{cases} 6x & (x\le 0) \\ -3x^2+6x & (x\ge 0) \end{cases}$$

$\therefore \int_{-2}^2 xf(x)\,dx$
$$= \int_{-2}^0 xf(x)\,dx + \int_0^2 xf(x)\,dx$$
$$= \int_{-2}^0 6x\,dx + \int_0^2 (-3x^2+6x)\,dx$$
$$= \Big[3x^2\Big]_{-2}^0 + \Big[-x^3+3x^2\Big]_0^2$$
$$= -12+(-8+12)$$
$$= -8$$

문제 **04**-2 답 (1) $\mathbf{\frac{5}{2}}$ (2) $\mathbf{\frac{34}{3}}$ (3) **1** (4) $\mathbf{\frac{19}{3}}$

(1) $|x+2|=\begin{cases} -x-2 & (x\le -2) \\ x+2 & (x\ge -2) \end{cases}$이므로

$$\int_{-3}^0 |x+2|\,dx$$
$$= \int_{-3}^{-2} |x+2|\,dx + \int_{-2}^0 |x+2|\,dx$$
$$= \int_{-3}^{-2} (-x-2)\,dx + \int_{-2}^0 (x+2)\,dx$$
$$= \Big[-\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_{-3}^{-2} + \Big[\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_{-2}^0$$

$=\left\{(-2+4)-\left(-\frac{9}{2}+6\right)\right\}-(2-4)$

$=\frac{5}{2}$

(2) $x|4-x|=\begin{cases}-x^2+4x & (x\le 4)\\ x^2-4x & (x\ge 4)\end{cases}$이므로

$\int_1^5 x|4-x|\,dx$

$=\int_1^4 x|4-x|\,dx+\int_4^5 x|4-x|\,dx$

$=\int_1^4 (-x^2+4x)\,dx+\int_4^5 (x^2-4x)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_1^4+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_4^5$

$=\left\{\left(-\frac{64}{3}+32\right)-\left(-\frac{1}{3}+2\right)\right\}$

$+\left\{\left(\frac{125}{3}-50\right)-\left(\frac{64}{3}-32\right)\right\}$

$=\frac{34}{3}$

(3) $|x^2-3x+2|=\begin{cases}x^2-3x+2 & (x\le 1 \text{ 또는 } x\ge 2)\\ -x^2+3x-2 & (1\le x\le 2)\end{cases}$

이므로

$\int_0^2 |x^2-3x+2|\,dx$

$=\int_0^1 |x^2-3x+2|\,dx+\int_1^2 |x^2-3x+2|\,dx$

$=\int_0^1 (x^2-3x+2)\,dx+\int_1^2 (-x^2+3x-2)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)+\left\{\left(-\frac{8}{3}+6-4\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2\right)\right\}$

$=1$

(4) $(|x|+x+1)^2=\begin{cases}1 & (x\le 0)\\ (2x+1)^2 & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

$\int_{-2}^1 (|x|+x+1)^2 dx$

$=\int_{-2}^0 (|x|+x+1)^2 dx+\int_0^1 (|x|+x+1)^2 dx$

$=\int_{-2}^0 dx+\int_0^1 (2x+1)^2 dx$

$=\int_{-2}^0 dx+\int_0^1 (4x^2+4x+1)\,dx$

$=\left[x\right]_{-2}^0+\left[\frac{4}{3}x^3+2x^2+x\right]_0^1$

$=2+\left(\frac{4}{3}+2+1\right)$

$=\frac{19}{3}$

2 유제 & 문제

p.136~139

유제 05 답 (1) 4 (2) $\frac{91}{6}$

(1) $\int_0^2 f(t)\,dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

라 하면

$f(x)=3x^2-2x+k$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$k=\int_0^2 (3t^2-2t+k)\,dt$

$=\left[t^3-t^2+kt\right]_0^2=4+2k$

$\therefore k=-4$

따라서 $f(x)=3x^2-2x-4$이므로

$f(2)=12-4-4=4$

(2) $\int_0^1 tf(t)\,dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

라 하면

$f(x)=x^2+4x+k$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$k=\int_0^1 t(t^2+4t+k)\,dt$

$=\int_0^1 (t^3+4t^2+kt)\,dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{4}{3}t^3+\frac{1}{2}kt^2\right]_0^1$

$=\frac{19}{12}+\frac{1}{2}k$

$\therefore k=\frac{19}{6}$

따라서 $f(x)=x^2+4x+\frac{19}{6}$이므로

$f(2)=4+8+\frac{19}{6}=\frac{91}{6}$

문제 05-1 답 4

$\int_0^1 f'(t)\,dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

라 하면

$f(x)=x^3+x+k$ ...... ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+1$ ...... ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$k=\int_0^1 (3t^2+1)\,dt=\left[t^3+t\right]_0^1$

$=1+1=2$

따라서 $f(x)=x^3+x+2$이므로

$f(1)=1+1+2=4$

문제 05-2 답 $f(x)=3x^2-4x$

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$, $\int_0^2 f(t)\,dt=l$ (k, l은 상수)

라 하면

$f(x)=3x^2+4kx+l$ ······ ㉠

㉠을 $\int_0^1 f(t)\,dt=k$에 대입하면

$k=\int_0^1 (3t^2+4kt+l)\,dt=\Big[t^3+2kt^2+lt\Big]_0^1=1+2k+l$

$\therefore\ k+l=-1$ ······ ㉡

또 ㉠을 $\int_0^2 f(t)\,dt=l$에 대입하면

$l=\int_0^2 (3t^2+4kt+l)\,dt=\Big[t^3+2kt^2+lt\Big]_0^2=8+8k+2l$

$\therefore\ 8k+l=-8$ ······ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $k=-1$, $l=0$

$\therefore\ f(x)=3x^2-4x$

유제 06 답 2

$\int_3^x f(t)\,dt=x^3-ax+3$ ······ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_3^x f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(x^3-ax+3)$

$\therefore\ f(x)=3x^2-a$

또 ㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$0=27-3a+3$ $\quad\therefore\ a=10$

따라서 $f(x)=3x^2-10$이므로

$f(2)=12-10=2$

문제 06-1 답 14

$\int_a^x f(t)\,dt=3x^3+5x^2-2x$ ······ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(3x^3+5x^2-2x)$

$\therefore\ f(x)=9x^2+10x-2$

또 ㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=3a^3+5a^2-2a$, $a(3a^2+5a-2)=0$

$a(a+2)(3a-1)=0$

이때 a는 0이 아닌 정수이므로 $a=-2$

$\therefore\ f(a)=f(-2)=36-20-2=14$

문제 06-2 답 $f(x)=6x-4$

$\int_1^x (x-t)f(t)\,dt=x^3-ax^2+bx$ ······ ㉠

㉠의 좌변을 전개하면

$x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt=x^3-ax^2+bx$ ······ ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-2ax+b$

$\therefore\ \int_1^x f(t)dt=3x^2-2ax+b$ ······ ㉢

㉢의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-2a$ ······ ㉣

한편 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-a+b$ $\quad\therefore\ a-b=1$ ······ ㉤

또 ㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=3-2a+b$ $\quad\therefore\ 2a-b=3$ ······ ㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$a=2$를 ㉣에 대입하면 $f(x)=6x-4$

유제 07 답 극댓값: $\frac{1}{4}$, 극솟값: $-\frac{1}{4}$

$f(x)=\int_x^{x+1}(t^3-t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+1)^3-(x+1)\}-(x^3-x)$

$\quad=3x^2+3x=3x(x+1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=0$에서 극소이므로 극댓값 $f(-1)$, 극솟값 $f(0)$을 구하면

$f(-1)=\int_{-1}^0 (t^3-t)\,dt=\Big[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\Big]_{-1}^0=\frac{1}{4}$

$f(0)=\int_0^1 (t^3-t)\,dt=\Big[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1=-\frac{1}{4}$

$\therefore$ (극댓값)$=\frac{1}{4}$, (극솟값)$=-\frac{1}{4}$

문제 07-1 답 -7

$f(x)=\int_0^x (t^2+at+b)\,dt$ ······ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+ax+b$ ······ ㉡

이때 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 $\frac{4}{3}$를 가지므로

$f'(1)=0$, $f(1)=\frac{4}{3}$

$x=1$을 ㉡에 대입하면 $f'(1)=0$이므로

$f'(1)=1+a+b=0 \qquad \therefore\ a+b=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $f(1)=\frac{4}{3}$이므로

$f(1)=\int_0^1 (t^2+at+b)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}at^2+bt\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}a+b=\frac{4}{3}$

$\therefore\ a+2b=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-4,\ b=3$

$\therefore\ a-b=-4-3=-7$

문제 07-2 답 (1) **최댓값: $\frac{7}{6}$, 최솟값: $-\frac{2}{3}$**

(2) 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{2}$

(1) $f(x)=\int_0^x (-t^2-t+2)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-x^2-x+2=-(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because\ 0\le x\le 2$)

구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	↗	↗	극대	↘	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 $f(1)$의 값을 구하면

$f(1)=\int_0^1 (-t^2-t+2)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^1=\frac{7}{6}$

또 $x=0,\ x=2$에서의 함숫값을 각각 구하면

$f(0)=\int_0^0 (-t^2-t+2)\,dt=0$

$f(2)=\int_0^2 (-t^2-t+2)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^2=-\frac{2}{3}$

따라서 구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{7}{6}$,

최솟값은 $-\frac{2}{3}$이다.

(2) $f(x)=\int_{-1}^x (1-|t|)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=1-|x|=\begin{cases}1+x & (x\le 0)\\ 1-x & (x\ge 0)\end{cases}$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because\ 0\le x\le 2$)

구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	↗	↗	극대	↘	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 $f(1)$의 값을 구하면

$f(1)=\int_{-1}^1 (1-|t|)\,dt$

$=\int_{-1}^0 (1+t)\,dt+\int_0^1 (1-t)\,dt$

$=\left[t+\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^0+\left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=1$

또 $x=0,\ x=2$에서의 함숫값을 각각 구하면

$f(0)=\int_{-1}^0 (1-|t|)\,dt=\int_{-1}^0 (1+t)\,dt$

$=\left[t+\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^0=\frac{1}{2}$

$f(2)=\int_{-1}^2 (1-|t|)\,dt$

$=\int_{-1}^0 (1+t)\,dt+\int_0^2 (1-t)\,dt$

$=\left[t+\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^0+\left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=\frac{1}{2}$

따라서 구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 1,

최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

유제 08 답 (1) **6** (2) **3**

(1) $f(t)=3t^2+2t+1$이라 하고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^{x^2}(3t^2+2t+1)\,dt$

$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^{x^2} f(t)\,dt=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\Big[F(t)\Big]_1^{x^2}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}$

$=F'(1)=f(1)=3+2+1=6$

(2) $f(x)=x^4-x^3-x^2-1$이라 하고, 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^2 (x^4-x^3-x^2-1)\,dx$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^2 f(x)\,dx=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{2-h}^2$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(2)-F(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(2-h)-F(2)}{-h}$

$=F'(2)=f(2)=16-8-4-1=3$

문제 08-1 답 (1) **12** (2) **114**

(1) $f(t)=2t^3-t^2+3t$라 하고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^3}(2t^3-t^2+3t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^3}f(t)\,dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_1^{x^3}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^3)-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x^3)-F(1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\times(x^2+x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^3)-F(1)}{x^3-1}\times\lim_{x\to1}(x^2+x+1)$$
$$=3F'(1)=3f(1)=3\times(2-1+3)=12$$

(2) $f(x)=3x^5-2x^4-4x+1$이라 하고, 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+h}(3x^5-2x^4-4x+1)\,dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+h}f(x)\,dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{2-h}^{2+h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(2+h)-F(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(2+h)-F(2)+F(2)-F(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(2+h)-F(2)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{F(2-h)-F(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(2+h)-F(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{F(2-h)-F(2)}{-h}$$
$$=F'(2)+F'(2)=2F'(2)=2f(2)$$
$$=2\times(96-32-8+1)=114$$

문제 08-2 답 **5**

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+3h}f(x)\,dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{1-h}^{1+3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+3h)-F(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+3h)-F(1)+F(1)-F(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+3h)-F(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{F(1-h)-F(1)}{h}$$
$$=3\lim_{h\to0}\frac{F(1+3h)-F(1)}{3h}+\lim_{h\to0}\frac{F(1-h)-F(1)}{-h}$$
$$=3F'(1)+F'(1)=4F'(1)=4f(1)$$
$$=4\times(2-5+a)=-12+4a$$

이때 $-12+4a=8$이므로 $4a=20$

$\therefore a=5$

기본 연습문제

p.140～141

1 36	**2** -2	**3** ⑤	**4** 4	**5** $\frac{8}{3}$
6 ②	**7** 0	**8** ㄴ, ㄷ	**9** 6	**10** $\frac{9}{4}$

1 $\displaystyle\int_1^{-2}4(x+3)(x-1)\,dx+\int_3^3(3y-1)(2y+5)\,dy$

$$=\int_1^{-2}(4x^2+8x-12)\,dx+0=\left[\frac{4}{3}x^3+4x^2-12x\right]_1^{-2}$$
$$=\left(-\frac{32}{3}+16+24\right)-\left(\frac{4}{3}+4-12\right)=36$$

2 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(3x^2+2ax)\,dx$

$$=\Big[x^3+ax^2\Big]_0^1=1+a$$

이때 $f(1)=3+2a$이므로

$3+2a=1+a \qquad \therefore a=-2$

3 $\displaystyle\int_1^3(x-k)^2dx-\int_3^1(2x^2+3)\,dx$

$$=\int_1^3(x-k)^2dx+\int_1^3(2x^2+3)\,dx$$
$$=\int_1^3\{(x-k)^2+(2x^2+3)\}\,dx$$
$$=\int_1^3(3x^2-2kx+k^2+3)\,dx$$
$$=\Big[x^3-kx^2+k^2x+3x\Big]_1^3$$
$$=(27-9k+3k^2+9)-(1-k+k^2+3)$$
$$=2k^2-8k+32$$

$\therefore f(k)=2k^2-8k+32=2(k-2)^2+24$

따라서 $f(k)$는 $k=2$일 때 최솟값 24를 가지므로

$a=2,\ b=24$

$\therefore a+b=2+24=26$

4 $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx=3$ …… ㉠

$\displaystyle\int_5^0 f(x)\,dx=-5$ …… ㉡

$\displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx=7$ …… ㉢

㉠+㉢을 하면

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx+\int_1^5 f(x)\,dx=10$$

$\therefore \displaystyle\int_{-1}^5 f(x)\,dx=10$ …… ㉣

ㄹ+ㄴ을 하면

$$\int_{-1}^{5} f(x)\,dx+\int_{5}^{0} f(x)\,dx=5$$

$$\therefore \int_{-1}^{0} f(x)\,dx=5$$

$$\therefore \int_{-1}^{0} \{f(x)-3x^2\}\,dx=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx-\int_{-1}^{0} 3x^2\,dx$$

$$=5-\Big[x^3\Big]_{-1}^{0}=5-1=4$$

5 $f(x)=|x-2|$, $g(x)=x^2+1$이므로

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+1)=|x^2-1|$ …… ㄱ

$|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -x^2+1 & (-1\le x\le 1)\end{cases}$이므로

$$\int_{-2}^{1} (f\circ g)(x)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{-1} |x^2-1|\,dx+\int_{-1}^{1} |x^2-1|\,dx$$

$$=\int_{-2}^{-1} (x^2-1)\,dx+\int_{-1}^{1} (-x^2+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left\{\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(-\frac{8}{3}+2\right)\right\}+\left\{\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right\}$$

$$=\frac{8}{3}$$

6 $\int_{0}^{1} g(t)\,dt=k$ (k는 상수) …… ㄱ

$\int_{0}^{1} f(t)\,dt=l$ (l은 상수) …… ㄴ

라 하면 $f(x)=x^2+k$, $g(x)=lx$

이를 각각 ㄱ, ㄴ에 대입하면

$$k=\int_{0}^{1} g(t)\,dt=\int_{0}^{1} lt\,dt=\left[\frac{1}{2}lt^2\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}l$$

$\therefore l=2k$ …… ㄷ

$$l=\int_{0}^{1} f(t)\,dt=\int_{0}^{1} (t^2+k)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3+kt\right]_{0}^{1}=\frac{1}{3}+k$$

$\therefore k-l=-\frac{1}{3}$ …… ㄹ

ㄷ, ㄹ을 연립하여 풀면 $k=\frac{1}{3}$, $l=\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=x^2+\frac{1}{3}$, $g(x)=\frac{2}{3}x$이므로

$$f(1)+g(1)=\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}=2$$

7 $f(x)+x^2+\int_{2}^{x} f(t)\,dt$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)+x^2+\int_{2}^{x} f(t)\,dt=(x-2)^2Q(x)$ …… ㄱ

ㄱ의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$f(2)+4+\int_{2}^{2} f(t)\,dt=0$$

$\therefore f(2)=-4$ …… ㄴ

ㄱ의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)+2x+f(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)$$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(2)+4+f(2)=0$

$\therefore f'(2)=0$ ($\because$ ㄴ)

따라서 $f'(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 0이다.

8 $f(x)=x-\int_{0}^{x} (t-x)t^2\,dt$에서

$f(x)=x-\int_{0}^{x} t^3\,dt+x\int_{0}^{x} t^2\,dt$ …… ㄱ

ㄱ. ㄱ의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=1-x^3+\int_{0}^{x} t^2\,dt+x^3$$

$=1+\int_{0}^{x} t^2\,dt$ …… ㄴ

$$\therefore f'(0)=1+\int_{0}^{0} t^2\,dt=1$$

ㄴ. ㄴ에서

$$f'(x)=1+\int_{0}^{x} t^2\,dt=1+\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{0}^{x}$$

$$=1+\frac{1}{3}x^3>0\ (\because x>0)$$

따라서 $x>0$일 때, 함수 $f(x)$는 증가한다.

ㄷ. ㄴ에서 함수 $f(x)$는 $x>0$일 때 증가하므로 구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(3)$이다.

$$\therefore f(3)=3-\int_{0}^{3} (t-3)t^2\,dt$$

$$=3-\int_{0}^{3} (t^3-3t^2)\,dt$$

$$=3-\left[\frac{1}{4}t^4-t^3\right]_{0}^{3}=\frac{39}{4}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

9 $f(x)=\int_{x}^{x+a} (t^2-2t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+a)^2-2(x+a)\}-(x^2-2x)$

$=2ax+a^2-2a$ …… ㄱ

이때 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극솟값을 가지므로

$f'(-2)=0$

$x=-2$를 ㄱ에 대입하면 $f'(-2)=0$이므로

$-4a+a^2-2a=0$, $a^2-6a=0$

$a(a-6)=0$

$\therefore a=6$ ($\because a>0$)

10 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\Big[f(t)\Big]_2^x$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)=\frac{1}{4}\times(12-4+1)=\frac{9}{4}$$

실전 연습문제

p.142

1 $\frac{17}{12}$ **2** 1 **3** ② **4** ④

1 함수 $f(x)=2ax+b$이고 $\int_0^1 f(x)\,dx=1$이므로

$$\int_0^1 (2ax+b)\,dx=\Big[ax^2+bx\Big]_0^1=a+b=1$$

$\therefore\ b=1-a$ ...... ㉠

$$\therefore\ \int_0^1[\{f(x)\}^2-ax^2]\,dx$$
$$=\int_0^1\{(2ax+b)^2-ax^2\}\,dx$$
$$=\int_0^1\{(4a^2-a)x^2+4abx+b^2\}\,dx$$
$$=\left[\frac{4a^2-a}{3}x^3+2abx^2+b^2x\right]_0^1$$
$$=\frac{4a^2-a}{3}+2ab+b^2$$
$$=\frac{4}{3}a^2-\frac{1}{3}a+2a(1-a)+(1-a)^2\ (\because\ ㉠)$$
$$=\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{3}a+1=\frac{1}{3}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{12}$$

따라서 주어진 정적분은 $a=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $\frac{11}{12}$을 가지므로

$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\frac{11}{12}\qquad\therefore\ \alpha+\beta=\frac{17}{12}$

2 $\int_a^x f(t)\,dt=(x-1)|x-a|$를 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값 $x=a$를 기준으로 구간을 나누어 나타내면

(ⅰ) $x\ge a$일 때

$$\int_a^x f(t)\,dt=(x-1)(x-a)=x^2-(a+1)x+a$$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-(a+1)=2x-a-1$

(ⅱ) $x\le a$일 때

$$\int_a^x f(t)\,dt=-(x-1)(x-a)$$
$$=-x^2+(a+1)x-a$$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-2x+a+1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해

$$f(x)=\begin{cases}2x-a-1 & (x\ge a)\\ -2x+a+1 & (x\le a)\end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 $x=a$에서도 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)$

$\lim_{x\to a+}(2x-a-1)=\lim_{x\to a-}(-2x+a+1)$

$2a-a-1=-2a+a+1$

$\therefore\ a=1$

3 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=-1$과 $x=1$에서 각각 극솟값과 극댓값을 가지므로

$f'(x)=a(x+1)(x-1)=ax^2-a\ (a<0)$라 하면

$f(x)=\int f'(x)\,dx$이므로

$f(x)=\int(ax^2-a)\,dx=\frac{1}{3}ax^3-ax+C$ ...... ㉠

이때 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1이므로

$\frac{1}{3}a=-1\qquad\therefore\ a=-3$ ...... ㉡

또 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(0)=0$이므로 $x=0$을 ㉠에 대입하면

$f(0)=C=0$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$f(x)=-x^3+3x$

$\therefore\ F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x(-t^3+3t)\,dt$ ...... ㉣

㉣의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=-x^3+3x=-x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$F'(x)=0$인 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}\ (\because\ -1\le x\le 2)$

구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $F(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	2
$F'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$F(x)$	$\searrow$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	$\searrow$

따라서 함수 $F(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 극솟값 $F(0)$은

$$F(0)=\int_0^0(-t^3+3t)\,dt=0$$

이때 $F(2)$의 값은

$$F(2)=\int_0^2(-t^3+3t)\,dt=\left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2\right]_0^2$$
$$=-4+6=2$$

이고, $x<0$에서 $F(x)$는 감소하므로 $F(-1)>F(0)$이다.
따라서 $F(x)$의 최솟값은 $F(0)=0$이다.

4 $$\lim_{b\to a}\frac{\int_{a^2}^{b^2}f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$=\lim_{b\to a}\frac{\frac{1}{b^2-a^2}\int_{a^2}^{b^2}f(x)\,dx}{\frac{1}{b^2-a^2}\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$=\lim_{b\to a}\left\{\frac{\frac{1}{b^2-a^2}\int_{a^2}^{b^2}f(x)\,dx}{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}\times(a+b)\right\}$$

$$=\frac{\lim_{b\to a}\frac{1}{b^2-a^2}\int_{a^2}^{b^2}f(x)\,dx}{\lim_{b\to a}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}\times\lim_{b\to a}(a+b) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

(i) $\lim_{b\to a}\frac{1}{b^2-a^2}\int_{a^2}^{b^2}f(x)\,dx$에서

$$\lim_{b\to a}\frac{1}{b^2-a^2}\int_{a^2}^{b^2}f(x)\,dx=\lim_{b\to a}\frac{1}{b^2-a^2}\Big[F(x)\Big]_{a^2}^{b^2}$$
$$=\lim_{b\to a}\frac{F(b^2)-F(a^2)}{b^2-a^2}$$
$$=F'(a^2)=f(a^2) \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

(ii) $\lim_{b\to a}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$에서

$$\lim_{b\to a}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{b\to a}\frac{1}{b-a}\Big[F(x)\Big]_a^b$$
$$=\lim_{b\to a}\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$
$$=F'(a)=f(a) \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

(iii) $\lim_{b\to a}(a+b)=2a \quad \cdots\cdots$ ㉣

㉡, ㉢, ㉣을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{b\to a}\frac{\int_{a^2}^{b^2}f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}=\frac{f(a^2)}{f(a)}\times 2a=\frac{2af(a^2)}{f(a)}$$

01 넓이, 속도와 거리

1 개념 CHECK p.145

1. 답 (1) $S_1=\int_1^3(x-1)\,dx$ (2) $S_2=-\int_0^1(x-1)\,dx$

(1) $S_1=\frac{1}{2}\times(3-1)\times 2=2$

$$\int_1^3(x-1)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^3$$
$$=\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=2$$

$\therefore\ S_1=\int_1^3(x-1)\,dx$

(2) $S_2=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$

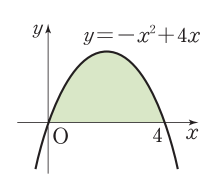
$$\int_0^1(x-1)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

$\therefore\ S_2=-\int_0^1(x-1)\,dx$

1 유제 & 문제 p.146~147

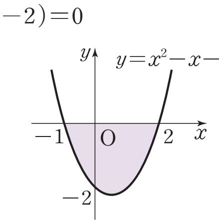
유제 01 답 (1) $\frac{32}{3}$ (2) $\frac{9}{2}$ (3) $\frac{37}{12}$ (4) $\frac{253}{12}$

(1) 곡선 $y=-x^2+4x$와 x축의 교점의 x좌표는
$-x^2+4x=0$에서 $x(x-4)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=4$
구간 $[0,\ 4]$에서 $y\geq 0$이므로
구하는 넓이를 S라 하면



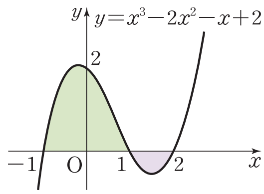
$$S=\int_0^4(-x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

(2) 곡선 $y=x^2-x-2$와 x축의 교점의 x좌표는
$x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$
구간 $[-1,\ 2]$에서 $y\leq 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=-\int_{-1}^2(x^2-x-2)\,dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-1}^2=\frac{9}{2}$$

(3) 곡선 $y=x^3-2x^2-x+2$와 x축의 교점의 x좌표는



$x^3-2x^2-x+2=0$에서

$(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

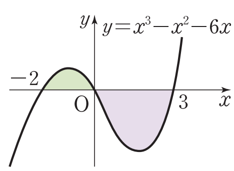
구간 $[-1,\ 1]$에서 $y\ge0$, 구간 $[1,\ 2]$에서 $y\le0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2-x+2)\,dx-\int_{1}^{2}(x^3-2x^2-x+2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{1}-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{1}^{2}$$

$$=\frac{37}{12}$$

(4) 곡선 $y=x^3-x^2-6x$와 x축의 교점의 x좌표는



$x^3-x^2-6x=0$에서

$x(x+2)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

구간 $[-2,\ 0]$에서 $y\ge0$이고, 구간 $[0,\ 3]$에서 $y\le0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

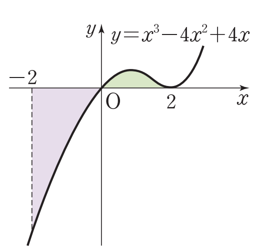
$$S=\int_{-2}^{0}(x^3-x^2-6x)\,dx-\int_{0}^{3}(x^3-x^2-6x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-3x^2\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-3x^2\right]_{0}^{3}$$

$$=\frac{253}{12}$$

문제 01-1 답 **24**

곡선 $y=x^3-4x^2+4x$와 x축의 교점의 x좌표는



$x^3-4x^2+4x=0$에서

$x(x-2)^2=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$ (중근)

구간 $[-2,\ 0]$에서 $y\le0$, 구간 $[0,\ 2]$에서 $y\ge0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=-\int_{-2}^{0}(x^3-4x^2+4x)dx+\int_{0}^{2}(x^3-4x^2+4x)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=24$$

유제 02 답 (1) $-\frac{4}{3}$ (2) -48

(1) $\int_{-1}^{1}x(1-x)^2dx$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2+x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3+x)\,dx+\int_{-1}^{1}(-2x^2)\,dx$$

$$=0-4\int_{0}^{1}x^2dx$$

$$=-4\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}=-\frac{4}{3}$$

(2) $\int_{-3}^{1}(4x^3-3x^2+2x+1)\,dx-\int_{3}^{1}(4t^3-3t^2+2t+1)\,dt$

$$=\int_{-3}^{1}(4x^3-3x^2+2x+1)\,dx+\int_{1}^{3}(4x^3-3x^2+2x+1)\,dx$$

$$=\int_{-3}^{3}(4x^3-3x^2+2x+1)\,dx$$

$$=\int_{-3}^{3}(4x^3+2x)\,dx+\int_{-3}^{3}(-3x^2+1)\,dx$$

$$=0+2\int_{0}^{3}(-3x^2+1)\,dx$$

$$=2\left[-x^3+x\right]_{0}^{3}=-48$$

문제 02-1 답 **6**

$$\int_{-4}^{4}\{f(x)+g(x)\}\,dx=\int_{-4}^{4}f(x)\,dx+\int_{-4}^{4}g(x)\,dx$$

$$=2\int_{0}^{4}f(x)\,dx+0$$

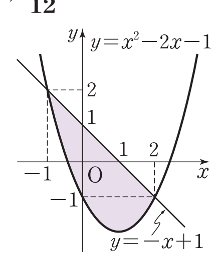
$$=2\times3=6$$

2 유제 & 문제

p.150~153

유제 03 답 (1) $\frac{9}{2}$ (2) **9** (3) $\frac{253}{12}$ (4) $\frac{37}{12}$

(1) 곡선 $y=x^2-2x-1$과 직선 $y=-x+1$의 교점의 x좌표는



$x^2-2x-1=-x+1$에서

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=2$

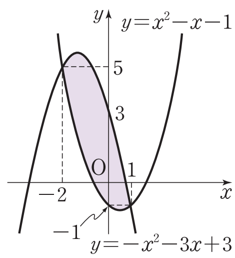
구간 $[-1,\ 2]$에서

$-x+1\ge x^2-2x-1$

이므로 구하는 넓이를 S라 하면

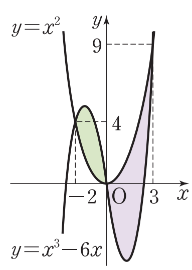
$$S=\int_{-1}^{2}\{(-x+1)-(x^2-2x-1)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

(2) 두 곡선 $y=x^2-x-1$과 $y=-x^2-3x+3$의 교점의 x좌표는
$x^2-x-1=-x^2-3x+3$
에서 $(x+2)(x-1)=0$
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$
구간 $[-2,\ 1]$에서
$-x^2-3x+3\ge x^2-x-1$
이므로 구하는 넓이를 S라 하면



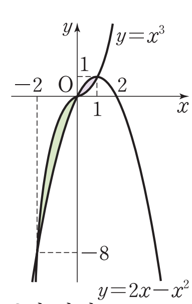
$$S=\int_{-2}^{1}\{(-x^2-3x+3)-(x^2-x-1)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}=9$$

(3) 두 곡선 $y=x^3-6x$와 $y=x^2$의 교점의 x좌표는 $x^3-6x=x^2$에서
$x(x+2)(x-3)=0$
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=0$
또는 $x=3$
구간 $[-2,\ 0]$에서
$x^3-6x\ge x^2$이고, 구간 $[0,\ 3]$에서 $x^2\ge x^3-6x$
이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{-2}^{0}\{(x^3-6x)-x^2\}\,dx+\int_{0}^{3}\{x^2-(x^3-6x)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^3-x^2-6x)\,dx+\int_{0}^{3}(-x^3+x^2+6x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-3x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_{0}^{3}$$
$$=\frac{253}{12}$$

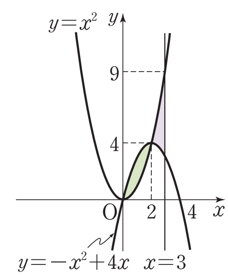
(4) 두 곡선 $y=x^3$과 $y=2x-x^2$의 교점의 x좌표는 $x^3=2x-x^2$에서
$x(x+2)(x-1)=0$
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=0$
또는 $x=1$
구간 $[-2,\ 0]$에서 $x^3\ge 2x-x^2$
이고, 구간 $[0,\ 1]$에서
$2x-x^2\ge x^3$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{-2}^{0}\{x^3-(2x-x^2)\}\,dx+\int_{0}^{1}\{(2x-x^2)-x^3\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{37}{12}$$

문제 03-1 답 $\frac{16}{3}$

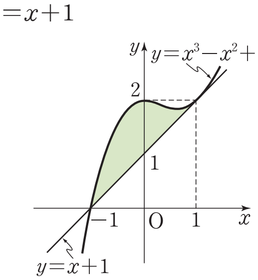
두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+4x$의 교점의 x좌표는
$x^2=-x^2+4x$에서 $x(x-2)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$
구간 $[0,\ 2]$에서 $-x^2+4x\ge x^2$
이고, 구간 $[2,\ 3]$에서
$x^2\ge -x^2+4x$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{0}^{2}\{(-x^2+4x)-x^2\}\,dx$$
$$+\int_{2}^{3}\{x^2-(-x^2+4x)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{2}(-2x^2+4x)\,dx+\int_{2}^{3}(2x^2-4x)\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{2}+\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2\right]_{2}^{3}=\frac{16}{3}$$

유제 04 답 $\frac{4}{3}$

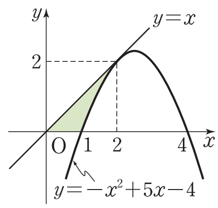
$f(x)=x^3-x^2+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-2x$
점 $(1,\ 2)$에서 그은 접선의 기울기는
$f'(1)=3-2=1$
이므로 점 $(1,\ 2)$에서 그은 접선의 방정식은
$y-2=1\times(x-1)\qquad\therefore\ y=x+1$
곡선 $y=x^3-x^2+2$와 직선 $y=x+1$의 교점의 x좌표는
$x^3-x^2+2=x+1$에서
$x^3-x^2-x+1=0$
$(x+1)(x-1)^2=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$ (중근)
구간 $[-1,\ 1]$에서
$x^3-x^2+2\ge x+1$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{-1}^{1}\{(x^3-x^2+2)-(x+1)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)\,dx=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}=\frac{4}{3}$$

문제 **04-1** 답 $\frac{5}{6}$

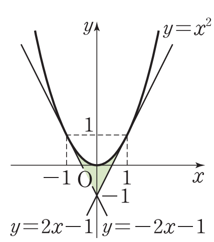
$f(x)=-x^2+5x-4$라 하면 $f'(x)=-2x+5$
점 $(2,\ 2)$에서 그은 접선의 기울기는
$f'(2)=-4+5=1$
이므로 점 $(2,\ 2)$에서 그은 접선의 방정식은
$y-2=1\times(x-2)$
$\therefore\ y=x$
구간 $[0,\ 1]$에서 $x\geq 0$이고, 구간 $[1,\ 2]$에서 $x\geq -x^2+5x-4$
이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2\{x-(-x^2+5x-4)\}\,dx$$
$$=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2(x^2-4x+4)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_1^2$$
$$=\frac{5}{6}$$

문제 **04-2** 답 **5**

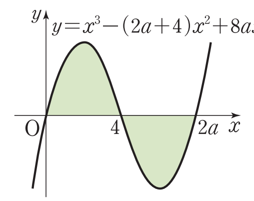
$f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 이 점에서 그은 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은
$y-t^2=2t(x-t)$
$\therefore\ y=2tx-t^2$ …… ㉠
직선 ㉠이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로
$-1=-t^2,\ t^2-1=0$
$(t+1)(t-1)=0$
$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$



(i) $t=-1$일 때, ㉠에서 $y=-2x-1$
(ii) $t=1$일 때, ㉠에서 $y=2x-1$
이때 두 접선과 곡선으로 둘러싸인 도형이 y축에 대하여 대칭이고, 구간 $[0,\ 1]$에서 $x^2\geq 2x-1$이므로 구하는 넓이를 S라 하면
$$S=2\int_0^1\{x^2-(2x-1)\}\,dx$$
$$=2\int_0^1(x^2-2x+1)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}$$
즉, $\frac{2}{3}=\frac{a}{b}$이므로 $a=2,\ b=3$
$\therefore\ a+b=5$

유제 **05** 답 **4**

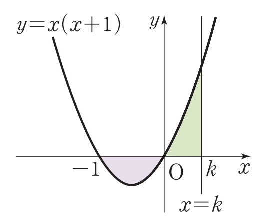
곡선
$y=x^3-(2a+4)x^2+8ax$
와 x축의 교점의 x좌표는
$x^3-(2a+4)x^2+8ax=0$
에서
$x(x-4)(x-2a)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=4$ 또는 $x=2a$



곡선과 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로
$$\int_0^{2a}\{x^3-(2a+4)x^2+8ax\}\,dx=0$$
$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(2a+4)x^3+4ax^2\right]_0^{2a}=0$$
$$4a^4-\frac{8}{3}(2a+4)a^3+16a^3=0$$
$$-\frac{4}{3}a^4+\frac{16}{3}a^3=0,\ a^3(a-4)=0$$
$\therefore\ a=4\ (\because\ a>2)$

문제 **05-1** 답 $\frac{1}{2}$

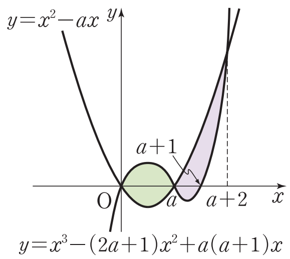
곡선 $y=x(x+1)$과 x축의 교점의 x좌표는
$x(x+1)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=0$
곡선과 x축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_{-1}^{k}x(x+1)\,dx=0$$
$$\int_{-1}^{k}(x^2+x)\,dx=0,\ \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{k}=0$$
$$\left(\frac{1}{3}k^3+\frac{1}{2}k^2\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=0$$
$$2k^3+3k^2-1=0,\ (k+1)^2(2k-1)=0$$
$\therefore\ k=\frac{1}{2}\ (\because\ k>0)$

문제 **05-2** 답 **2**

두 곡선 $y=x^3-(2a+1)x^2+a(a+1)x,\ y=x^2-ax$의 교점의 x좌표는
$x^3-(2a+1)x^2+a(a+1)x=x^2-ax$
$x^3-2(a+1)x^2+a(a+2)x=0$
$x(x-a)\{x-(a+2)\}=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=a$ 또는 $x=a+2$



이때 주어진 조건에서 두 곡선으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$\int_0^{a+2}[\{x^3-(2a+1)x^2+a(a+1)x\}-(x^2-ax)]\,dx=0$

$\int_0^{a+2}\{x^3-2(a+1)x^2+a(a+2)x\}\,dx=0$

$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}(a+1)x^3+\frac{1}{2}a(a+2)x^2\right]_0^{a+2}=0$

$\frac{1}{4}(a+2)^4-\frac{2}{3}(a+1)(a+2)^3+\frac{1}{2}a(a+2)^3=0$

$(a+2)^3(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because\ a>0)$

유제 06 답 $\mathbf{2(\sqrt[3]{4}-2)}$

곡선 $y=x^2-4x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는

$x^2-4x=ax,\ x\{x-(a+4)\}=0$

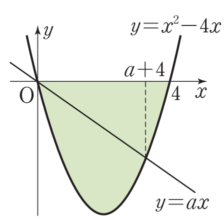
$\therefore x=0$ 또는 $x=a+4$

곡선 $y=x^2-4x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-4x=0,\ x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

구간 $[0,\ 4]$에서 $x^2-4x\le 0$이므로 곡선 $y=x^2-4x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$S_1=-\int_0^4(x^2-4x)\,dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$

구간 $[0,\ a+4]$에서 $ax\ge x^2-4x$이므로 곡선 $y=x^2-4x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\int_0^{a+4}\{ax-(x^2-4x)\}\,dx$

$=\int_0^{a+4}\{-x^2+(a+4)x\}\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+4}{2}x^2\right]_0^{a+4}=\frac{(a+4)^3}{6}$

주어진 조건에서 $S_1=2S_2$이므로

$\frac{32}{3}=2\times\frac{(a+4)^3}{6},\ a+4=\sqrt[3]{32}$

$\therefore\ a=2(\sqrt[3]{4}-2)$

문제 06-1 답 $\mathbf{1-\sqrt{2}}$

두 곡선 $y=x^2-2x,\ y=ax^2$의 교점의 x좌표는

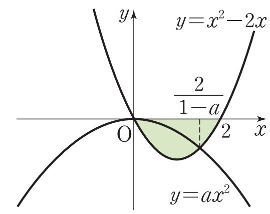
$x^2-2x=ax^2$에서 $x\{(1-a)x-2\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{2}{1-a}$

곡선 $y=x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-2x=0$에서 $x(x-2)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[0,\ 2]$에서 $x^2-2x\le 0$이므로 곡선 $y=x^2-2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$S_1=-\int_0^2(x^2-2x)\,dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$

구간 $\left[0,\ \frac{2}{1-a}\right]$에서 $ax^2\ge x^2-2x$이므로 두 곡선 $y=x^2-2x,\ y=ax^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\int_0^{\frac{2}{1-a}}\{ax^2-(x^2-2x)\}\,dx$

$=\int_0^{\frac{2}{1-a}}\{(a-1)x^2+2x\}\,dx$

$=\left[\frac{a-1}{3}x^3+x^2\right]_0^{\frac{2}{1-a}}=\frac{4}{3(a-1)^2}$

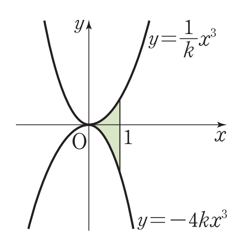
주어진 조건에서 $S_1=2S_2$이므로

$\frac{4}{3}=2\times\frac{4}{3(a-1)^2}$

$(a-1)^2=2,\ a-1=\pm\sqrt{2}$ $\qquad\therefore a=1-\sqrt{2}\ (\because\ a<0)$

문제 06-2 답 $\mathbf{1}$

두 곡선 $y=\frac{1}{k}x^3,\ y=-4kx^3$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\int_0^1\left\{\frac{1}{k}x^3-(-4kx^3)\right\}dx$

$=\left(4k+\frac{1}{k}\right)\int_0^1 x^3\,dx$

$=\left(4k+\frac{1}{k}\right)\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{4}\left(4k+\frac{1}{k}\right)$

이때 $4k>0,\ \frac{1}{k}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$\frac{1}{4}\left(4k+\frac{1}{k}\right)\ge\frac{1}{4}\times 2\sqrt{4k\times\frac{1}{k}}=1$

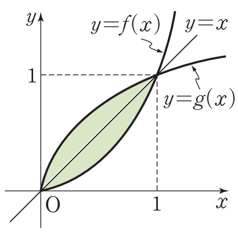
(단, 등호는 $k=\frac{1}{2}$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 1이다.

3 유제 & 문제 p.156

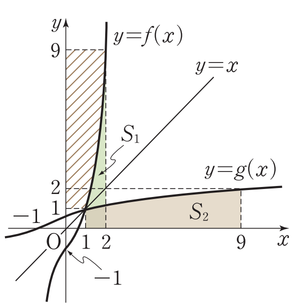
유제 07 답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) 17

(1) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는
$x^2=x$에서 $x(x-1)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=1$
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 구간 $[0,\ 1]$에서 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

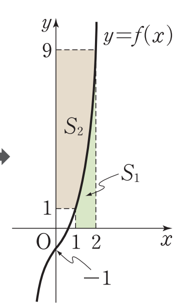


구간 $[0,\ 1]$에서 $x\ge x^2$이므로 구하는 넓이를 S라 하면
$$S=2\int_0^1 (x-x^2)\,dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

(2) $f(x)=x^3+x-1$에서 $f'(x)=3x^2+1>0$이므로 $y=f(x)$는 증가함수이고, 그 그래프는 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 9)$를 지난다.
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 [그림 1]과 같다.
$\int_1^2 f(x)\,dx=S_1$, $\int_1^9 g(x)\,dx=S_2$라 하면 빗금 친 부분의 넓이는 S_2와 같으므로 구하는 값은 [그림 2]의 색칠한 부분의 넓이와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

$$\therefore \int_1^2 f(x)\,dx+\int_1^9 g(x)\,dx=S_1+S_2$$
$$=2\times9-1\times1=17$$

4 개념 CHECK p.157

1. 답 (1) 6 (2) 2 (3) $\frac{5}{2}$

(1) $0+\int_0^3 (-2t+5)\,dt=\left[-t^2+5t\right]_0^3=6$

(2) $\int_1^3 (-2t+5)\,dt=\left[-t^2+5t\right]_1^3=2$

(3) $1\le t\le\frac{5}{2}$에서 $v(t)\ge0$, $\frac{5}{2}\le t\le3$에서 $v(t)\le0$이므로 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는
$$\int_1^{\frac{5}{2}}(-2t+5)\,dt+\int_{\frac{5}{2}}^3(2t-5)\,dt$$
$$=\left[-t^2+5t\right]_1^{\frac{5}{2}}+\left[t^2-5t\right]_{\frac{5}{2}}^3=\frac{5}{2}$$

4 유제 & 문제 p.158~161

유제 08 답 (1) $\frac{11}{2}$ (2) $\frac{9}{2}$초 (3) 9

(1) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도 $v(t)$는 0이므로
$v(t)=3t-t^2=0$, $t(3-t)=0$
$\therefore t=0$ 또는 $t=3$
따라서 좌표가 1인 점을 출발한 지 3초 후에 처음으로 운동 방향을 바꾸므로 3초 후의 점 P의 위치는
$$1+\int_0^3(3t-t^2)\,dt=1+\left[\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^3=\frac{11}{2}$$

(2) 점 P가 좌표가 1인 점을 출발하여 다시 좌표가 1인 점으로 돌아오는 데 걸리는 시간을 a초라 하면 출발한 지 a초 후의 점 P의 위치의 변화량은 0이므로
$$\int_0^a(3t-t^2)\,dt=0,\ \left[\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^a=0$$
$$\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{3}a^3=0,\ a^2\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}a\right)=0$$
$$\therefore a=\frac{9}{2}\ (\because a>0)$$
따라서 점 P가 좌표가 1인 점으로 다시 돌아오는 데 걸리는 시간은 $\frac{9}{2}$초이다.

(3) $\int_0^{\frac{9}{2}}|3t-t^2|\,dt$
$$=\int_0^3(3t-t^2)\,dt+\int_3^{\frac{9}{2}}(-3t+t^2)\,dt$$
$$=\left[\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^3+\left[-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3\right]_3^{\frac{9}{2}}$$
$$=9$$

문제 08-1 답 $\frac{31}{6}$

$t=3$에서 점 P의 위치는
$$0+\int_0^3 v(t)\,dt=\int_0^1(t^2-t)\,dt+\int_1^3(-t^2+6t-5)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+3t^2-5t\right]_1^3=\frac{31}{6}$$

문제 08-2 답 **300 m**

이 열차가 정지할 때 속도 $v(t)$는 0이므로

$v(t)=30-\frac{3}{2}t=0 \qquad \therefore\ t=20$

따라서 제동을 건 후 20초 후에 열차가 정지하므로 열차가 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^{20}\left|30-\frac{3}{2}t\right|dt=\int_0^{20}\left(30-\frac{3}{2}t\right)dt$$
$$=\left[30t-\frac{3}{4}t^2\right]_0^{20}$$
$$=300\,(\mathrm{m})$$

문제 08-3 답 **2 km**

$v(t)=\frac{1}{2}t^2(3-t)=\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}t^3$을 t에 대하여 미분하면

$v'(t)=3t-\frac{3}{2}t^2=\frac{3}{2}t(2-t)$

$v'(t)=0$인 t의 값은 $t=2$ ($\because\ t>0$)

$t>0$에서 속도 $v(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$v'(t)$		+	0	−
$v(t)$		↗	극대	↘

따라서 속도 $v(t)$는 $t=2$일 때 극대이면서 최대이므로 $t=2$에서 전동차의 위치는

$$\int_0^2\left(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}t^3\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{8}t^4\right]_0^2=2$$

따라서 속도가 최대일 때 전동차는 P역으로부터 2 km 떨어진 지점에 있다.

유제 09 답 (1) **40 m** (2) **45 m** (3) **65 m**

(1) 물체를 쏘아 올린 후 t초가 지났을 때 물체의 지면으로부터의 높이를 $x(t)$라 하면 $t=2$일 때 물체의 높이는

$$x(2)=0+\int_0^2(30-10t)\,dt$$
$$=\left[30t-5t^2\right]_0^2$$
$$=40\,(\mathrm{m})$$

(2) 물체가 최고 지점에 도달할 때의 속도는 0이므로

$v(t)=30-10t=0 \qquad \therefore\ t=3$

따라서 $t=3$일 때 최고 지점에 도달하게 되므로 최고 높이는

$$0+\int_0^3(30-10t)\,dt=\left[30t-5t^2\right]_0^3$$
$$=45\,(\mathrm{m})$$

(3) 물체의 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t=3$이므로

$$\int_0^5|30-10t|\,dt$$
$$=\int_0^3(30-10t)\,dt+\int_3^5(-30+10t)\,dt$$
$$=\left[30t-5t^2\right]_0^3+\left[-30t+5t^2\right]_3^5$$
$$=65\,(\mathrm{m})$$

문제 09-1 답 **8초**

a초 후에 물체가 땅에 떨어진다고 하면 그 때의 물체의 위치가 0이므로

$$320+\int_0^a(-10t)\,dt=0$$

$$320+\left[-5t^2\right]_0^a=0$$

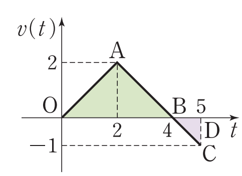
$320-5a^2=0$

$a^2=64 \qquad \therefore\ a=8\ (\because\ a>0)$

따라서 물체가 땅에 떨어질 때까지 걸리는 시간은 8초이다.

유제 10 답 (1) $\mathbf{\frac{7}{2}}$ (2) **4**

(1) $\displaystyle\int_0^5 v(t)\,dt$



$$=\int_0^4 v(t)\,dt+\int_4^5 v(t)\,dt$$
$$=\triangle\mathrm{AOB}-\triangle\mathrm{BCD}$$
$$=\frac{1}{2}\times4\times2-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{7}{2}$$

(2) 점 P가 출발 후 $t=4$에서 처음으로 운동 방향을 바꾸므로 구하는 거리는

$$\int_0^4|v(t)|\,dt=\triangle\mathrm{AOB}$$
$$=\frac{1}{2}\times4\times2=4$$

다른 풀이

점 P의 속도 $v(t)$를 구하면

$$v(t)=\begin{cases} t & (0\le t\le 2) \\ -t+4 & (2\le t\le 5)\end{cases}$$

(1) $\displaystyle\int_0^5 v(t)\,dt=\int_0^2 t\,dt+\int_2^5(-t+4)\,dt$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^2+\left[-\frac{1}{2}t^2+4t\right]_2^5$$
$$=\frac{7}{2}$$

(2) $\displaystyle\int_0^4|v(t)|\,dt=\int_0^2 t\,dt+\int_2^4(-t+4)\,dt$

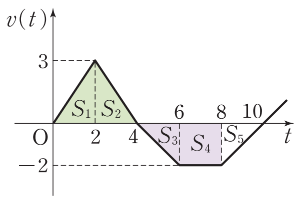
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^2+\left[-\frac{1}{2}t^2+4t\right]_2^4$$
$$=4$$

문제 10-1 답 8초

$t=a$일 때, 원점으로 다시 돌아온다고 하면 $\int_0^a v(t)dt=0$

이어야 한다.

오른쪽 그림에서 속도 $v(t)$의 그래프와 t축이 이루는 각 부분의 넓이를 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5라 하면



$S_1=3$, $S_2=3$, $S_3=2$, $S_4=4$, $S_5=2$

이때 $S_1+S_2=S_3+S_4$이므로 $t=8$, 즉 8초 후 물체가 원점으로 다시 돌아온다.

기본 연습문제 p.162~164

1 ③	**2** 0	**3** $-\frac{1}{2}$	**4** -18	**5** $\frac{20}{3}$
6 $\frac{1}{3}$	**7** $\frac{37}{24}$	**8** $\frac{8}{3}$	**9** 1	**10** 30
11 ③	**12** 2회	**13** ④		

1 $xf(x)=\int_0^x tf'(t)\,dt+\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=xf'(x)+x^2-2x-3$

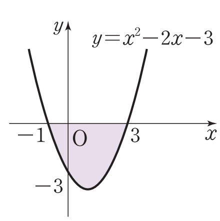
$\therefore f(x)=x^2-2x-3$

곡선 $y=x^2-2x-3$과 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

구간 $[-1, 3]$에서 $y\le 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$S=-\int_{-1}^3 (x^2-2x-3)\,dx$

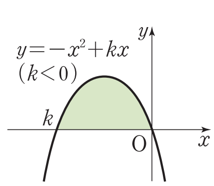
$=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-1}^3=\frac{32}{3}$

2 곡선 $y=-x^2+kx\,(k\ne 0)$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+kx=0$, $x(x-k)=0$ $\qquad\therefore x=0$ 또는 $x=k$

(i) $k<0$일 때

구간 $[k, 0]$에서 $y\ge 0$이므로



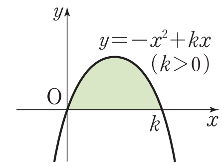
$\int_k^0 (-x^2+kx)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_k^0=-\frac{k^3}{6}$

즉, $-\frac{k^3}{6}=36$이므로 $k=-6$

(ii) $k>0$일 때

구간 $[0, k]$에서 $y\ge 0$이므로



$\int_0^k (-x^2+kx)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_0^k=\frac{k^3}{6}$

즉, $\frac{k^3}{6}=36$이므로 $k=6$

(i), (ii)에 의해 모든 k의 값의 합은 $-6+6=0$

3 $\int_{-a}^a (x^3+3x^2-4x+a)\,dx=2\int_0^a (3x^2+a)\,dx$

$=2\left[x^3+ax\right]_0^a$

$=2a^3+2a^2$

즉, $2a^3+2a^2=a^2$이므로

$2a^3+a^2=0$, $a^2(2a+1)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ ($\because a\ne 0$)

4 함수 $f(x)$가 $f(-x)=f(x)$를 만족하므로 $x^3f(x)$, $xf(x)$는 $f(-x)=-f(x)$를 만족하는 함수이다.

$\therefore \int_{-1}^1 (x^3+x+3)f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^1 x^3f(x)\,dx+\int_{-1}^1 xf(x)\,dx+\int_{-1}^1 3f(x)\,dx$

$=0+0+2\int_0^1 3f(x)\,dx=6\int_0^1 f(x)\,dx$

$=6\times(-3)=-18$

5 $y=|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x\ge 1) \\ -x+1 & (x\le 1)\end{cases}$이므로

(i) $x\ge 1$일 때, 곡선 $y=x^2-2x-1$과 직선 $y=x-1$의 교점의 x좌표는

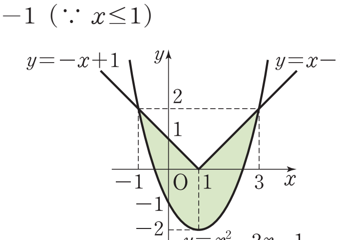
$x^2-2x-1=x-1$에서 $x(x-3)=0$

$\therefore x=3$ ($\because x\ge 1$)

(ii) $x\le 1$일 때, 곡선 $y=x^2-2x-1$과 직선 $y=-x+1$의 교점의 x좌표는

$x^2-2x-1=-x+1$에서 $(x+1)(x-2)=0$

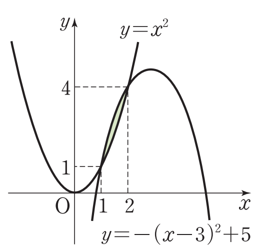
$\therefore x=-1$ ($\because x\le 1$)



구간 $[-1, 1]$에서 $-x+1\ge x^2-2x-1$이고, 구간 $[1, 3]$에서 $x-1\ge x^2-2x-1$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

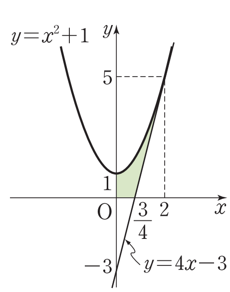
$$S=\int_{-1}^{1}\{(-x+1)-(x^2-2x-1)\}\,dx$$
$$+\int_{1}^{3}\{(x-1)-(x^2-2x-1)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-x^2+x+2)\,dx+\int_{1}^{3}(-x^2+3x)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+2)\,dx+\int_{1}^{3}(-x^2+3x)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_1^3$$
$$=\frac{20}{3}$$

6 곡선 $y=x^2$을 x축에 대하여 대칭이동하면 $y=-x^2$
이를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하면
$y=-(x-3)^2+5$
두 곡선 $y=x^2$, $y=-(x-3)^2+5$의 교점의 x좌표는
$x^2=-(x-3)^2+5$에서 $2x^2-6x+4=0$
$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$
$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=2$



구간 $[1,\ 2]$에서 $-(x-3)^2+5\geq x^2$이므로
구하는 넓이를 S라 하면
$$S=\int_{1}^{2}\{(-x^2+6x-4)-x^2\}\,dx$$
$$=\int_{1}^{2}(-2x^2+6x-4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{3}$$

7 $f(x)=x^2+1$이라 하면
$f'(x)=2x$
점 $(2,\ 5)$에서 그은 접선의 기울기는
$f'(2)=2\times2=4$
이므로 점 $(2,\ 5)$에서 그은 접선의 방정식은
$y-5=4(x-2)$ $\qquad\therefore$ $y=4x-3$

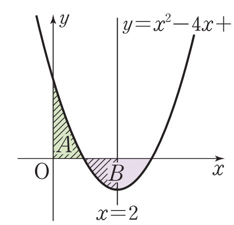


구간 $[0,\ 2]$에서 $x^2+1\geq0$이고, 구간 $\left[\frac{3}{4},\ 2\right]$에서 $4x-3\geq0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면
$$S=\int_{0}^{2}(x^2+1)\,dx-\int_{\frac{3}{4}}^{2}(4x-3)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^2-\left[2x^2-3x\right]_{\frac{3}{4}}^2=\frac{37}{24}$$

다른 풀이

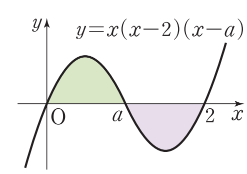
구간 $\left[0,\ \frac{3}{4}\right]$에서 $x^2+1\geq0$이고, 구간 $\left[\frac{3}{4},\ 2\right]$에서 $x^2+1\geq4x-3$이므로 구하는 넓이를 S라 하면
$$S=\int_{0}^{\frac{3}{4}}(x^2+1)\,dx+\int_{\frac{3}{4}}^{2}\{(x^2+1)-(4x-3)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{3}{4}}(x^2+1)\,dx+\int_{\frac{3}{4}}^{2}(x^2-4x+4)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^{\frac{3}{4}}+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{\frac{3}{4}}^2=\frac{37}{24}$$

8 $A:B=1:2$에서 $B=2A$
곡선 $y=x^2-4x+k$가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 도형은 넓이가 같고 정적분 값의 부호는 반대이다.



즉, $\int_{0}^{2}(x^2-4x+k)\,dx=0$이므로
$\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_0^2=0$, $-\frac{16}{3}+2k=0$ $\qquad\therefore$ $k=\frac{8}{3}$

9 $0<a<2$이므로 곡선 $y=x(x-2)(x-a)$는 오른쪽 그림과 같다. 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라 하면



$$S(a)=\int_{0}^{a}x(x-2)(x-a)\,dx$$
$$-\int_{a}^{2}x(x-2)(x-a)\,dx$$
$$=\int_{0}^{a}\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}\,dx$$
$$-\int_{a}^{2}\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_0^a$$
$$-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_a^2$$
$$=\left(-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3\right)-\left(\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{3}a^3+\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}\right)$$
$$=-\frac{1}{6}a^4+\frac{2}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}$$

$S'(a)=-\frac{2}{3}(a^3-3a^2+2)=-\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)$

$S'(a)=0$에서 $a=1$ ($\because 0<a<2$)

함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	극소	↗	

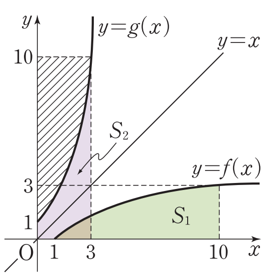
따라서 $0<a<2$에서 $S(a)$는 $a=1$일 때 극소이면서 최소이다.

10 함수 $f(x)=\sqrt{x-1}$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\int_1^{10} f(x)\,dx=S_1$,

$\int_0^3 g(x)\,dx=S_2$

라 하면 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 S_1과 같으므로



$\int_1^{10} f(x)\,dx+\int_0^3 g(x)\,dx$

$=S_1+S_2=3\times10=30$

11 a초 후에 점 P가 원점으로 다시 돌아온다고 하면 점 P의 위치의 변화량이 0이므로

$\int_0^a (-3t^2+4t+15)\,dt=0$

$\left[-t^3+2t^2+15t\right]_0^a=0$

$-a^3+2a^2+15a=0$, $a(a+3)(a-5)=0$

$\therefore a=5$ ($\because a>0$)

따라서 점 P가 원점으로 다시 돌아오는 데 걸리는 시간은 5초이다.

12 두 점 A, B의 출발점을 원점으로 하고 a초 후의 위치를 각각 $x_A(a)$, $x_B(a)$라 하면

$x_A(a)=0+\int_0^a (6t^2-6t+4)\,dt$

$=\left[2t^3-3t^2+4t\right]_0^a=2a^3-3a^2+4a$

$x_B(a)=0+\int_0^a (3t^2+2t+1)\,dt$

$=\left[t^3+t^2+t\right]_0^a=a^3+a^2+a$

이때 두 점 A, B가 서로 만날 때는 $x_A(a)=x_B(a)$인 경우이므로

$2a^3-3a^2+4a=a^3+a^2+a$

$a(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=1$ 또는 $a=3$

따라서 두 점 A, B는 출발 후 $a=1$, $a=3$일 때 다시 만나게 되므로 서로 만나는 횟수는 2회이다.

13 ㄱ. 속력은 속도의 크기, 즉 속도의 절댓값이므로 그래프에서 $t=c$일 때 속력이 최대이다.

ㄴ. $v(b)=0$이고 $t=b$의 좌우에서 속도 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=b$에서 점 P는 운동 방향을 처음 방향과 반대 방향으로 바꾼다.

ㄷ. t축을 기준으로 위, 아래의 색칠한 부분의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^b v(t)\,dt=-\int_b^c v(t)\,dt$ …… ㉠

시각 $t=c$일 때, 점 P의 위치는

$\int_0^c v(t)\,dt=\int_0^b v(t)\,dt+\int_b^c v(t)\,dt$

$=-\int_b^c v(t)\,dt+\int_b^c v(t)\,dt$ ($\because$ ㉠)

$=0$

즉, $t=c$일 때, 점 P는 원점에 있다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

실전 연습문제

p.165

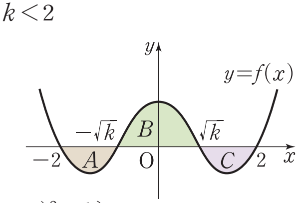
1 $\frac{4}{5}$ **2** ⑤ **3** 1 **4** 28 m

1 $f(x)=(x^2-4)(x^2-k)$에서

$f(x)=(x+2)(x-2)(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})$

이때 $0<k<4$이므로 $0<\sqrt{k}<2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



또 함수 $f(x)$는

$f(-x)=\{(-x)^2-4\}\{(-x)^2-k\}$

$=(x^2-4)(x^2-k)=f(x)$

이므로 $\int_{-2}^2 f(x)\,dx=2\int_0^2 f(x)\,dx$

주어진 조건에서 $A+C=B$이므로

$2\int_0^2 f(x)\,dx=0 \qquad \therefore \int_0^2 f(x)\,dx=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠에 $f(x)=(x^2-4)(x^2-k)$를 대입하면

$$\int_0^2 (x^2-4)(x^2-k)\,dx$$

$$=\int_0^2 \{x^4-(k+4)x^2+4k\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{k+4}{3}x^3+4kx\right]_0^2$$

$$=-\frac{64}{15}+\frac{16}{3}k=0$$

$\therefore k=\frac{4}{5}$

2 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$F(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

이때 $S_1=S_2$이므로

$$F(3)=\int_0^3 f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^3 f(t)\,dt$$

$=-S_1+S_2=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

주어진 그래프에서 $F'(x)=f(x)=0$인 x의 값은

$x=1$ 또는 $x=3$

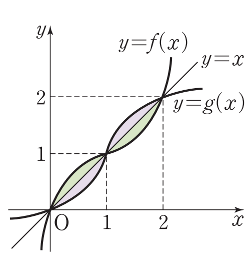
함수 $F(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $F(x)$는 $x=1$에서 극소, $x=3$에서 극대이고 ㉡, ㉢에서 $F(0)=0$, $F(3)=0$이므로 $y=F(x)$의 그래프의 모양으로 적당한 것은 ⑤이다.

3 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.



곡선 $y=x^3-3x^2+3x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^3-3x^2+3x=x$

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

이때 구간 $[0,\ 1]$에서 $x^3-3x^2+3x\geq x$이고, 구간 $[1,\ 2]$에서 $x\geq x^3-3x^2+3x$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=2\left[\int_0^1 \{(x^3-3x^2+3x)-x\}\,dx+\int_1^2 \{x-(x^3-3x^2+3x)\}\,dx\right]$$

$$=2\left\{\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)\,dx+\int_1^2 (-x^3+3x^2-2x)\,dx\right\}$$

$$=2\left\{\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2\right\}$$

$$=1$$

4 시각 t에서 엘리베이터의 속도를 $v(t)$라 하면

(ⅰ) $v(t)$는 처음 2초 동안은 $2\,\mathrm{m/s^2}$의 가속도로 증가하므로

$v(t)=2t\ (0\leq t\leq 2) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ⅱ) 다음 5초 동안은 등속운동이고, ㉠에서 $v(2)=4$이므로

$v(t)=4\ (2\leq t\leq 7) \qquad \cdots\cdots$ ㉡

(ⅲ) 마지막 2초 동안은 $-2\,\mathrm{m/s^2}$의 가속도로 감소하므로

$v(t)=-2t+a\ (7\leq t\leq 9$, a는 상수)

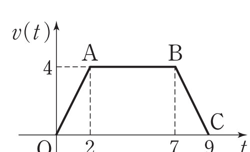
㉡에서 $v(7)=4$이므로

$4=-14+a \qquad \therefore a=18$

$\therefore v(t)=-2t+18\ (7\leq t\leq 9)$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해

$$v(t)=\begin{cases} 2t & (0\leq t\leq 2) \\ 4 & (2\leq t\leq 7) \\ -2t+18 & (7\leq t\leq 9) \end{cases}$$



따라서 건물의 높이를 hm라 하면 h는 엘리베이터가 이동한 거리와 같으므로

$$h=\int_0^9 |v(t)|\,dt=\square\mathrm{AOCB}$$

$$=\frac{1}{2}\times(5+9)\times 4$$

$$=28\,(\mathrm{m})$$

Ⅰ-1. 함수의 극한과 연속

01 함수의 극한

기초 문제 Training p.4

1 (1) **4** (2) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (3) **1** (4) $\boldsymbol{\infty}$

2 (1) **0** (2) **0** (3) $\boldsymbol{\infty}$ (4) $\boldsymbol{-\infty}$

3 (1) **1** (2) **−1** (3) **0** (4) **0**

4 (1) **14** (2) **2** (3) $\mathbf{\frac{2}{11}}$ (4) **−1**

5 (1) **3** (2) **5** (3) **−2** (4) **−3**

6 (1) **3** (2) **2**

핵심 유형 Training p.5~13

1 ④ **2** ② **3** ③ **4** ㄱ, ㄴ, ㄷ **5** −3
6 ③ **7** −1 **8** 6 **9** ㄷ **10** 8 **11** 0
12 ③ **13** ① **14** ④ **15** ㄴ, ㄹ **16** ②
17 −1 **18** ② **19** 1 **20** $\frac{5}{6}$ **21** −1
22 ㄴ, ㄷ **23** ㄱ, ㄴ **24** −10 **25** ②
26 6 **27** ③ **28** ㄴ, ㄷ **29** −2 **30** $\frac{3}{2}$
31 −1 **32** ② **33** −1 **34** ④ **35** ③ **36** ③
37 2 **38** $\frac{5}{8}$ **39** −4 **40** 8 **41** ① **42** 8
43 −4 **44** ① **45** ④ **46** 1 **47** 10 **48** −6
49 3 **50** ③ **51** ⑤ **52** ② **53** 2 **54** 9
55 2 **56** $\frac{1}{2}$ **57** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1 ① $\lim_{x\to1}(2x+3)=5$ ② $\lim_{x\to2}(x^2-1)=3$

③ $\lim_{x\to1}(x^2+2x-1)=2$ ④ $\lim_{x\to3}\frac{x+3}{x-2}=6$

⑤ $\lim_{x\to-1}\sqrt{-x+3}=2$

따라서 극한값이 가장 큰 것은 ④이다.

2 ㄱ. $\lim_{x\to0}(x-1)=-1$ ㄴ. $\lim_{x\to2}\left(-\frac{1}{|x-2|}\right)=-\infty$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{2x-3}=\infty$ ㄹ. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+5}=0$

따라서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

3 ① $\lim_{x\to0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to0-}f(x)=-\infty$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$는 존재하지 않는다.

② $\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$는 존재하지 않는다.

③ $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재한다.

④ $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=-\infty$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$는 존재하지 않는다.

⑤ $x=n$ (n은 정수)에 대하여 $\lim_{x\to n+}f(x)\neq\lim_{x\to n-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to n}f(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 임의의 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하는 것은 ③이다.

4 ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)=0$

ㄴ. $\lim_{x\to1-}f(x)=2$

ㄷ. $x=1$에서 함숫값은 $f(1)=1$

ㄹ. $\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 그 값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5 $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(x^2-4x+3)=-1$

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(x+k)=2+k$

$\lim_{x\to2}f(x)$의 값이 존재하므로

$-1=2+k$ $\quad\therefore k=-3$

6 ① $\lim_{x\to-1+}f(x)=-1$

② $\lim_{x\to0+}f(x)=0$

③ $\lim_{x\to2+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to2-}f(x)=-3$

$\lim_{x\to2+}f(x)\neq\lim_{x\to2-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)$는 존재하지 않는다.

④ $\lim_{x\to4+}f(x)=\lim_{x\to4-}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to4}f(x)=1$

⑤ $\lim_{x\to5-}f(x)=2$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

7 $\lim_{x\to 0} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)$

$=1+(-1)+(-1)=-1$

8 $\lim_{x\to 1+} f(x)=2$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=k+3$이므로

$k+3=2 \qquad \therefore k=-1$

$\therefore \lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to -1+} f(x)=2+(-k+3)$

$=-k+5=6$

9 ㄱ. $\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0+} \frac{x}{x}=1$

$\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x}=-1$

즉, $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$는 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to 1+} \frac{x^2-x}{|x-1|}=\lim_{x\to 1+} \frac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+} x=1$

$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2-x}{|x-1|}=\lim_{x\to 1-} \frac{x(x-1)}{-(x-1)}=\lim_{x\to 1-} (-x)=-1$

즉, $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{|x-1|}$는 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to 2+} \frac{(x-2)^2}{|x-2|}=\lim_{x\to 2+} \frac{(x-2)^2}{x-2}=\lim_{x\to 2+} (x-2)=0$,

$\lim_{x\to 2-} \frac{(x-2)^2}{|x-2|}=\lim_{x\to 2-} \frac{(x-2)^2}{-(x-2)}=\lim_{x\to 2-} (-x+2)=0$

$\therefore \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{|x-2|}=0$

ㄹ. $\lim_{x\to 1+} \frac{|x-1|}{x^2-1}=\lim_{x\to 1+} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 1-} \frac{|x-1|}{x^2-1}=\lim_{x\to 1-} \frac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to 1-} \frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}$

즉, $\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$은 존재하지 않는다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄷ이다.

10 $\lim_{x\to 1+} \frac{x^2+2x-3}{|x-1|}=\lim_{x\to 1+} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+} (x+3)=4$

$\lim_{x\to -3-} \frac{x^2+2x-3}{|x+3|}=\lim_{x\to -3-} \frac{(x+3)(x-1)}{-(x+3)}$

$=\lim_{x\to -3-} (-x+1)=4$

$\therefore a=4,\ b=4 \qquad \therefore a+b=8$

11 $\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to -2+} \frac{x|x+2|}{x+2}=\lim_{x\to -2+} \frac{x(x+2)}{x+2}$

$=\lim_{x\to -2+} x=-2$

$\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2-} \frac{x|x+2|}{x+2}=\lim_{x\to -2-} \frac{-x(x+2)}{x+2}$

$=\lim_{x\to -2-} (-x)=2$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} \frac{x|x+2|}{x+2}=\lim_{x\to 0} \frac{x(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to 0} x=0$

$\therefore \lim_{x\to -2+} f(x)+\lim_{x\to -2-} f(x)+\lim_{x\to 0} f(x)$

$=-2+2+0=0$

12 ① $\lim_{x\to 2-} \frac{x}{[x]}=\lim_{x\to 2-} \frac{x}{1}=2$

② $\lim_{x\to 1+} \frac{[x]}{x}=\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x}=1$

③ $\lim_{x\to 1-} (x-[x])=\lim_{x\to 1-} (x-0)=1$

④ $\lim_{x\to 1+} \frac{[x-2]}{x-2}=\lim_{x\to 1+} \frac{-1}{x-2}=1$

⑤ $x \longrightarrow 2+$일 때, $\{-(x-2)^2\} \longrightarrow 0-$이므로

$\lim_{x\to 2+} [-x^2+4x-4]=-1$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

13 $\lim_{x\to 2+} \frac{[x]^2+x}{[x]}+\lim_{x\to 2-} \frac{[x]^2-x}{[x]}$

$=\lim_{x\to 2+} \frac{2^2+x}{2}+\lim_{x\to 2-} \frac{1^2-x}{1}=3+(-1)=2$

14 $\lim_{x\to n+} \frac{[x]^2+3x}{[x]}=\frac{n^2+3n}{n}=n+3$

$\lim_{x\to n-} \frac{[x]^2+3x}{[x]}=\frac{(n-1)^2+3n}{n-1}=\frac{n^2+n+1}{n-1}$

극한값이 존재하므로 $n+3=\frac{n^2+n+1}{n-1}$

$(n+3)(n-1)=n^2+n+1$

$\therefore n=4$

$\lim_{x\to 4} \frac{[x]^2+3x}{[x]}=7$이므로 $k=7$

$\therefore n+k=4+7=11$

15 ㄱ. $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(x)=t$라 하면 $x \longrightarrow 1-$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to 1-} f(f(x))=\lim_{t\to 0+} f(t)=1$

ㄷ. $f(x)=t$라 하면 $x \longrightarrow 1+$일 때 $t=1$이므로

$\lim_{x\to 1+} f(f(x))=f(1)=1$

ㄹ. $f(x)=t$라 하면 $x \longrightarrow 3+$일 때 $t \longrightarrow 2-$이므로

$\lim_{x\to 3+} f(f(x))=\lim_{t\to 2-} f(t)=1$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

16 $x \longrightarrow 1-$일 때 $[x]=0$이므로

$\lim_{x\to 1-} g(f(x))=g(0)=1$

17 $f(x)=\begin{cases} 1 & (x>2) \\ 0 & (x=2) \\ -1 & (x<2) \end{cases}$이므로

$\lim_{x\to2+} f(f(x))=f(1)=-1$

$\lim_{x\to2-} f(f(x))=f(-1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to2} f(f(x))=-1$

18 $2f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=2f(x)-h(x)$이고

$\lim_{x\to2} h(x)=3$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{6f(x)-3g(x)}{-f(x)+4g(x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{6f(x)-3\{2f(x)-h(x)\}}{-f(x)+4\{2f(x)-h(x)\}}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{3h(x)}{7f(x)-4h(x)}=\frac{9}{7-12}=-\frac{9}{5}$$

19 $$\lim_{x\to0}\frac{x^2+3f(x)}{5x-2f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x+\frac{3f(x)}{x}}{5-\frac{2f(x)}{x}}=\frac{0+3}{5-2}=1$$

20 $\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x-1}=3$에서 $x-1=t$라 하면 $x \longrightarrow 1$일 때

$t \longrightarrow 0$이므로

$\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=3 \qquad \therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{x+3f(x)}{3x^2+4f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{3f(x)}{x}}{3x+\frac{4f(x)}{x}}=\frac{1+9}{0+12}=\frac{5}{6}$$

21 $f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=f(x)-h(x)$이고

$\lim_{x\to\infty} h(x)=3$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)-2g(x)}{-2f(x)+g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)-2\{f(x)-h(x)\}}{-2f(x)+\{f(x)-h(x)\}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2h(x)}{-f(x)-h(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2h(x)}{f(x)}}{-1-\frac{h(x)}{f(x)}}$$
$$=-1 \left(\because \lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0\right)$$

22 $\lim_{x\to1+} f(x)=2,\ \lim_{x\to1-} f(x)=-2$

$\lim_{x\to1+} g(x)=2,\ \lim_{x\to1-} g(x)=-2$

ㄱ. $\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1+} f(x)+\lim_{x\to1+} g(x)=4$

$\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1-} f(x)+\lim_{x\to1-} g(x)=-4$

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}$는 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to1+} f(x)\times\lim_{x\to1+} g(x)=4$

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-} f(x)\times\lim_{x\to1-} g(x)=4$

$\therefore \lim_{x\to1} f(x)g(x)=4$

ㄷ. $\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to1+} f(x)}{\lim_{x\to1+} g(x)}=1$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to1-} f(x)}{\lim_{x\to1-} g(x)}=1$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

23 ㄱ. $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$ (α, β는 실수)

라 하면

$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}[f(x)-\{f(x)-g(x)\}]=\alpha-\beta$

ㄴ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha,\ \lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$

(α, β는 실수)라 하면

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)+g(x)\}-\{f(x)-g(x)\}}{2}$$
$$=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ㄷ. [반례] $f(x)=\frac{1}{x-2}$, $g(x)=x+1$이라 하면

$\lim_{x\to1} f(x)=-1,\ \lim_{x\to1} g(x)=2$이지만

$\lim_{x\to1} f(g(x))$, 즉 $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}$은 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

24 $$\lim_{x\to-2}\frac{x^3-2x+4}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2-2x+2)}{(x+2)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-2x+2}{x+1}=-10$$

25 $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4-2x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{4-2x}-\sqrt{4+x})(\sqrt{4-2x}+\sqrt{4+x})(\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-x})}{(\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-x})(\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-x})(\sqrt{4-2x}+\sqrt{4+x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\{(4-2x)-(4+x)\}(\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-x})}{\{(3+2x)-(3-x)\}(\sqrt{4-2x}+\sqrt{4+x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{4-2x}+\sqrt{4+x}}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

26 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)f(x)}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)f(x)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)f(x)}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}f(1)$$

즉, $\frac{2}{3}f(1)=4$이므로 $f(1)=6$

27 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\{f(x)\}^2-2f(x)}{x^2f(x)-f(x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)\{f(x)-2\}}{(x^2-1)f(x)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}\times\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}$

$=3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

28 ㄱ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3}{x^2+2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=0$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5x^2-2x+4}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=-5$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x}{\sqrt{4x^2-x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{\sqrt{4-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}$

$=\dfrac{9}{2+1}=3$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

29 $x=-t$라 하면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}-3x}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\sqrt{t^2+2t}+3t}{-t-\sqrt{t^2+1}}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{t}}+3}{-1-\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}}$

$=\dfrac{1+3}{-1-1}=-2$

30 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+3x^2}{2x^2-f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x}\times\dfrac{1}{x}+3}{2-\dfrac{f(x)}{x}\times\dfrac{1}{x}}$

$=\dfrac{3}{2}\left(\because\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0\right)$

31 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x}\sqrt{x-2}-x)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}+1}$

$=\dfrac{-2}{1+1}=-1$

32 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+4x-1}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+4x-1}}{(x-\sqrt{x^2+4x-1})(x+\sqrt{x^2+4x-1})}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+4x-1}}{-4x+1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}{-4+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1+1}{-4}=-\dfrac{1}{2}$

33 $x=-t$라 하면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+2})$

$=\lim\limits_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t+2}-\sqrt{t^2+t+2})$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{(\sqrt{t^2-t+2}-\sqrt{t^2+t+2})(\sqrt{t^2-t+2}+\sqrt{t^2+t+2})}{\sqrt{t^2-t+2}+\sqrt{t^2+t+2}}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-2t}{\sqrt{t^2-t+2}+\sqrt{t^2+t+2}}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-2}{\sqrt{1-\dfrac{1}{t}+\dfrac{2}{t^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{t}+\dfrac{2}{t^2}}}=\dfrac{-2}{1+1}=-1$

34 $[x^2+2x]=x^2+2x-\alpha\ (0\le\alpha<1)$라 하면

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{[x^2+2x]}-x)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x-\alpha}-x)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+2x-\alpha}-x)(\sqrt{x^2+2x-\alpha}+x)}{\sqrt{x^2+2x-\alpha}+x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\alpha}{\sqrt{x^2+2x-\alpha}+x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{\alpha}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{\alpha}{x^2}}+1}=\dfrac{2}{1+1}=1$

35 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}\left\{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to1}\left\{\dfrac{1}{x-1}\times\dfrac{(x+1)^2-4}{4(x+1)^2}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to1}\left\{\dfrac{1}{x-1}\times\dfrac{(x+3)(x-1)}{4(x+1)^2}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+3}{4(x+1)^2}=\dfrac{4}{4\times4}=\dfrac{1}{4}$

36 $\lim\limits_{x\to9}(\sqrt{x}-3)\left(1-\dfrac{3}{x-9}\right)$

$=\lim\limits_{x\to9}\left\{(\sqrt{x}-3)\times\dfrac{x-12}{x-9}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to9}\dfrac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)(x-12)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to9}\dfrac{(x-9)(x-12)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x-12}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{-3}{3+3}=-\dfrac{1}{2}$

37 $\left[\frac{x}{2}\right]=\frac{x}{2}-\alpha\ (0\le\alpha<1)$라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}\left[\frac{x}{2}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}\left(\frac{x}{2}-\alpha\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{4\alpha}{x}\right)=2$$

38 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+3x}-2x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+3x}-2x)(\sqrt{4x^2+3x}+2x)}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2}$$

$$=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}$$

$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+4}}-\frac{1}{2}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{x}\times\frac{2-\sqrt{x+4}}{2\sqrt{x+4}}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2(2-\sqrt{x+4})(2+\sqrt{x+4})}{2x\sqrt{x+4}(2+\sqrt{x+4})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x}{x\sqrt{x+4}(2+\sqrt{x+4})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\sqrt{x+4}(2+\sqrt{x+4})}$$

$$=\frac{-1}{2(2+2)}=-\frac{1}{8}$$

$\therefore\ \lim_{x\to\infty}f(x)+\lim_{x\to0}g(x)=\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{8}$

39 $x\longrightarrow-1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to-1}(x^2+ax-2)=0$

$1-a-2=0\qquad\therefore\ a=-1$

$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax-2}{x+1}=b$에서

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax-2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}(x-2)=-3$$

$\therefore\ b=-3$

$\therefore\ a+b=-1+(-3)=-4$

40 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to2}(a\sqrt{x-1}+b)=0$

$a+b=0\qquad\therefore\ b=-a$ ...... ㉠

$\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}=1$에서

$$\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x-1}-a}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x-1}-1)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{a}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{a}{2}$$

즉, $\frac{a}{2}=1$에서 $a=2$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-2\qquad\therefore\ a^2+b^2=8$

41 $x\longrightarrow3$일 때 (분자) $\longrightarrow0$이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모) $\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to3}(ax+b)=0$

$3a+b=0\qquad\therefore\ b=-3a$ ...... ㉠

$\lim_{x\to3}\frac{3\sqrt{16+x^2}-5x}{ax+b}=-8$에서

$$\lim_{x\to3}\frac{3\sqrt{16+x^2}-5x}{ax+b}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{3\sqrt{16+x^2}-5x}{ax-3a}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(3\sqrt{16+x^2}-5x)(3\sqrt{16+x^2}+5x)}{a(x-3)(3\sqrt{16+x^2}+5x)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-16x^2+144}{a(x-3)(3\sqrt{16+x^2}+5x)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-16(x-3)(x+3)}{a(x-3)(3\sqrt{16+x^2}+5x)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-16(x+3)}{a(3\sqrt{16+x^2}+5x)}=\frac{-16\times6}{a(15+15)}=-\frac{16}{5a}$$

즉, $-\frac{16}{5a}=-8$에서 $a=\frac{2}{5}$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-\frac{6}{5}\qquad\therefore\ a+b=-\frac{4}{5}$

42 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to1}f(x)=0$

$\lim_{x\to1}(x^3+ax^2+bx)=0,\ 1+a+b=0$

$\therefore\ b=-a-1$ ...... ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax^2+(-a-1)x}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(x+a+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}x(x+a+1)=2+a$$

즉, $2+a=3$에서 $a=1$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-2x$이므로 $f(2)=8$

43 $\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{a}{x+1}-2\right)=\lim_{x\to2}\left\{\frac{1}{x-2}\times\frac{a-2(x+1)}{x+1}\right\}$

$=\lim_{x\to2}\frac{-2x+a-2}{(x-2)(x+1)}$ …… ㉠

$x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to2}(-2x+a-2)=0$

$-4+a-2=0$ $\quad\therefore a=6$

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{a}{x+1}-2\right)=\lim_{x\to2}\frac{-2x+6-2}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{-2(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{-2}{x+1}=-\frac{2}{3}$$

$\therefore b=-\frac{2}{3}$

$\therefore ab=6\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-4$

44 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-2x-3}=2$에서 $x\longrightarrow\infty$일 때 극한값이 2이므로

$a=2$

$\lim_{x\to-1}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+bx+c}{x^2-2x-3}=2$에서

$x\longrightarrow-1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to-1}(2x^2+bx+c)=0$

$2-b+c=0$ $\quad\therefore c=b-2$ …… ㉠

$\lim_{x\to-1}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-2x-3}=2$에서

$$\lim_{x\to-1}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+bx+b-2}{(x+1)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x+b-2)}{(x+1)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{2x+b-2}{x-3}=\frac{4-b}{4}$$

즉, $\frac{4-b}{4}=2$에서 $b=-4$

이를 ㉠에 대입하면 $c=-6$

$\therefore a+b+c=2+(-4)+(-6)=-8$

45 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-ax)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-ax)(\sqrt{x^2+x+1}+ax)}{\sqrt{x^2+x+1}+ax}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+ax}$ …… ㉠

극한값이 존재하면 분자와 분모의 차수는 같으므로

$1-a^2=0$ $\quad\therefore a=1$ ($\because a>0$)

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-ax)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

$\therefore b=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore a-b=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

46 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2+x+1}=1$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

$\therefore f(x)=2x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수) …… ㉠

㉠을 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=1$에 대입하면

$\lim_{x\to2}\frac{2x^2+ax+b}{x-2}=1$ …… ㉡

$x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to2}(2x^2+ax+b)=0$

$8+2a+b=0$ $\quad\therefore b=-2a-8$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2+ax+b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2x^2+ax-2a-8}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x+a+4)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(2x+a+4)=8+a$$

즉, $8+a=1$에서 $a=-7$

이를 ㉢에 대입하면 $b=6$

따라서 $f(x)=2x^2-7x+6$이므로 $f(1)=1$

47 ㈎에서 $x\longrightarrow\infty$일 때, 극한값이 2이므로 $f(x)-x^3$은 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

즉, $f(x)-x^3=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)이므로

$f(x)=x^3+2x^2+ax+b$ …… ㉠

㉠을 ㈏에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{x^3+2x^2+ax+b}{x}=-3$ …… ㉡

$x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to0}(x^3+2x^2+ax+b)=0$ $\quad\therefore b=0$

이를 ㉡에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3+2x^2+ax+b}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+2x^2+ax}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x^2+2x+a)=a$$

$\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-3x$이므로 $f(2)=10$

48 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{f(x)}=\frac{1}{2}$에서 $x\longrightarrow\infty$일 때, 극한값이 $\frac{1}{2}$이므로

$f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

$\therefore f(x)=2x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수) …… ㉠

㉠을 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=3$에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+ax+b}{x^2-1}=3$ …… ㉡

$x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to1}(2x^2+ax+b)=0$

$2+a+b=0$ $\therefore b=-a-2$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+ax+b}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+ax-(a+2)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+a+2)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2x+a+2}{x+1}=\frac{4+a}{2}$$

즉, $\frac{4+a}{2}=3$에서 $a=2$

이를 ㉢에 대입하면 $b=-4$

따라서 $f(x)=2x^2+2x-4$이므로

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{2(x+2)(x-1)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}2(x-1)=-6$$

49 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-2$에서 $x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to0}f(x)=0$ $\therefore f(0)=0$

$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=6$에서 $x\longrightarrow-2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to-2}f(x)=0$ $\therefore f(-2)=0$

$f(x)$는 삼차함수이고 $f(0)=0$, $f(-2)=0$이므로

$f(x)=x(x+2)(ax+b)$ (단, a, b는 상수) …… ㉠

이때 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-2$에서

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+2)(ax+b)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x+2)(ax+b)=2b$$

즉, $2b=-2$에서 $b=-1$

이를 ㉠에 대입하면 $f(x)=x(x+2)(ax-1)$ …… ㉡

이때 $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=6$에서

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x(x+2)(ax-1)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}x(ax-1)=4a+2$$

즉, $4a+2=6$이므로 $a=1$

이를 ㉡에 대입하면 $f(x)=x(x-1)(x+2)$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to1}x(x+2)=3$$

50 $f(x)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-3)^2Q(x)+ax+b$

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x^2-9}=4$에서 $x\longrightarrow3$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to3}f(x)=0$

$\lim_{x\to3}\{(x-3)^2Q(x)+ax+b\}=0$

$3a+b=0$ $\therefore b=-3a$ …… ㉠

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x^2-9}=4$에서

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)^2Q(x)+ax-3a}{x^2-9}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)^2Q(x)+a(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)Q(x)+a}{x+3}=\frac{a}{6}$$

즉, $\frac{a}{6}=4$에서 $a=24$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-72$ $\therefore a+b=-48$

51 주어진 조건에 의해 $f(1)=0$, $f(2)=0$이므로 다항함수 $Q(x)$에 대하여

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)$ …… ㉠

㉠을 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-2$에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)Q(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-2)Q(x)=-2$$

$\therefore Q(1)=2$ …… ㉡

㉠을 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=5$에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)Q(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x-1)Q(x)=5$$

$\therefore Q(2)=5$ …… ㉢

㉠에서 $Q(x)$의 차수가 낮을수록 $f(x)$의 차수도 낮고 ㉡, ㉢을 모두 만족하는 다항함수 $Q(x)$ 중 차수가 가장 낮은 것은 일차함수이므로 $Q(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$Q(1)=a+b=2$, $Q(2)=2a+b=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

따라서 $Q(x)=3x-1$이므로

$g(x)=(x-1)(x-2)(3x-1)$ $\therefore g(3)=16$

52 $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+3}=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+x+4}=\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{2}$

53 $x^2+3>0$이므로 각 변을 x^2+3으로 나누면

$$\frac{2x^2+1}{x^2+3}\le f(x)\le\frac{2x^2+4}{x^2+3}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+3}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4}{x^2+3}=2$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=2$

54 $3x+2<f(x)<3x+5$의 각 변을 제곱하면

$(3x+2)^2<\{f(x)\}^2<(3x+5)^2$ ($\because x>0$)

$x^2+1>0$이므로 각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{(3x+2)^2}{x^2+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}<\frac{(3x+5)^2}{x^2+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+2)^2}{x^2+1}=9$, $\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+5)^2}{x^2+1}=9$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}=9$

55 점 P의 좌표를 $(x, \sqrt{x-1})$이라 하면

$H(x, 0)$, $Q(x, 1)$

또 $A(2, 1)$이므로 $x>2$에서

$\overline{PQ}=\sqrt{x-1}-1$, $\overline{AQ}=x-2$

$$\therefore \lim_{x\to2+}\frac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}}=\lim_{x\to2+}\frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}$$

$$=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2+}(\sqrt{x-1}+1)=2$$

56 점 P의 좌표를 $(a, \sqrt{a})$, 원의 중심의 좌표를 $C(b, 0)$이라 하면

$\overline{CO}=\overline{CP}$에서 $\overline{CO}^2=\overline{CP}^2$

$b^2=(a-b)^2+a$, $a^2-2ab+a=0$

$\therefore b=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}$ ($\because a\ne0$)

원의 중심이 한없이 가까워지는 점의 x좌표는

$$\lim_{a\to0}b=\lim_{a\to0}\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

57 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은 $x^2+y^2=1$이므로 $\alpha^2+\beta^2=1$에서

$\beta^2=1-\alpha^2$ $\quad\therefore \beta=\pm\sqrt{1-\alpha^2}$

이때 점 $P(\alpha, \beta)$는 제2사분면 위의 점이므로

$\beta=\sqrt{1-\alpha^2}$ $\quad\therefore P(\alpha, \sqrt{1-\alpha^2})$

삼각형 OAP의 밑변을 $\overline{OA}$라 하면 높이는 $\sqrt{1-\alpha^2}$이므로

$$S(\alpha)=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{1-\alpha^2}=\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$$

$$\therefore \lim_{\alpha\to-1+}\frac{S(\alpha)}{\sqrt{1+\alpha}}=\lim_{\alpha\to-1+}\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{2\sqrt{1+\alpha}}$$

$$=\lim_{\alpha\to-1+}\frac{\sqrt{1-\alpha}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

02 함수의 연속

기초 문제 Training

p.14

1 (1) $\boldsymbol{x=0}$**에서 정의되어 있지 않다.**

(2) $\boldsymbol{\lim_{x\to0}f(x)}$**가 존재하지 않는다.**

(3) $\boldsymbol{\lim_{x\to0}f(x)\ne f(0)}$

2 (1) **연속** (2) **연속** (3) **불연속** (4) **연속**

3 (1) $\boldsymbol{(-\infty, \infty)}$ (2) $\boldsymbol{(-\infty, 4), (4, \infty)}$ (3) $\boldsymbol{[3, \infty)}$

4 **ㄱ, ㄴ, ㄷ**

5 (1) **최댓값: 5, 최솟값: -4** (2) **최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{2}$**

(3) **최댓값: -1, 최솟값: $-\sqrt{3}$**

핵심 유형 Training

p.15~18

1 ㄴ, ㄷ	**2** ③	**3** ②	**4** ③	**5** ㄱ, ㄴ, ㄷ
6 ㄱ, ㄷ	**7** ㄱ, ㄴ	**8** ③	**9** -2	**10** ③
11 ③	**12** ④	**13** 3	**14** ④	**15** -42
16 32	**17** 1	**18** ⑤	**19** ③	**20** ④
21 3	**22** ①			

1 ㄱ. $x=0$에서 함숫값은 $f(0)=0$

$x\to0$일 때, 극한값은

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0-}\frac{x}{-x}=-1$$

즉, $\lim_{x\to0+}f(x)\ne\lim_{x\to0-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$는 존재하지 않는다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $x=1$에서 함숫값은 $f(1)=-2$

$x\to1$일 때, 극한값은

$\lim_{x\to1+}f(x)=-2$, $\lim_{x\to1-}f(x)=-2$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=-2$

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $x=2$에서 함숫값은 $f(2)=4$

$x\to2$일 때, 극한값은

$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(x+2)=4$

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 연속인 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

2 ① 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 정의되지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.
② $x=-1$에서 함숫값은 $f(-1)=0$
$x \longrightarrow -1$일 때, 극한값은
$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} ([x]-x) = \lim_{x \to -1+} (-1-x) = 0$$
$$\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1-} ([x]-x) = \lim_{x \to -1-} (-2-x) = -1$$
즉, $\lim_{x \to -1+} f(x) \neq \lim_{x \to -1-} f(x)$이므로 $\lim_{x \to -1} f(x)$는 존재하지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.
③ $x=-1$에서 함숫값은 $f(-1)=-3$
$x \longrightarrow -1$일 때, 극한값은
$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^2-x-2}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x-2) = -3$$
$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.
④ $x=-1$에서 함숫값은 $f(-1)=2$
$x \longrightarrow -1$일 때, 극한값은
$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} \frac{x+1}{|x+1|} = \lim_{x \to -1+} \frac{x+1}{x+1} = 1$$
$$\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1-} \frac{x+1}{|x+1|} = \lim_{x \to -1-} \frac{x+1}{-(x+1)} = -1$$
즉, $\lim_{x \to -1+} f(x) \neq \lim_{x \to -1-} f(x)$이므로 $\lim_{x \to -1} f(x)$는 존재하지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.
⑤ $x=-1$에서 함숫값은 $f(-1)=0$
$x \longrightarrow -1$일 때, 극한값은
$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (-\sqrt{x+1}+3) = 3$$
$\lim_{x \to -1} f(x) \neq f(-1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.
따라서 $x=-1$에서 연속인 함수는 ③이다.

3 ㄱ. $x=0$에서 함숫값은 $f(0)=1$
ㄴ. $x \longrightarrow 0$일 때, 극한값은
$\lim_{x \to 0+} f(x)=2$, $\lim_{x \to 0-} f(x)=-1$
즉, $\lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x)$이므로 $\lim_{x \to 0} f(x)$는 존재하지 않는다.
ㄷ. $\lim_{x \to 0} f(x)$가 존재하지 않으므로($\because$ ㄴ) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

4 (i) $x=1$에서 함숫값은 $f(1)=0$
$x \longrightarrow 1$일 때, 극한값은
$\lim_{x \to 1+} f(x)=1$, $\lim_{x \to 1-} f(x)=-1$
즉, $\lim_{x \to 1+} f(x) \neq \lim_{x \to 1-} f(x)$이므로 $\lim_{x \to 1} f(x)$는 존재하지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.
(ii) $x=3$에서 함숫값은 $f(3)=1$
$x \longrightarrow 3$일 때, 극한값은
$\lim_{x \to 3+} f(x)=0$, $\lim_{x \to 3-} f(x)=1$
즉, $\lim_{x \to 3+} f(x) \neq \lim_{x \to 3-} f(x)$이므로 $\lim_{x \to 3} f(x)$는 존재하지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.
(iii) $x=4$에서 함숫값은 $f(4)=0$
$x \longrightarrow 4$일 때, 극한값은
$\lim_{x \to 4+} f(x)=1$, $\lim_{x \to 4-} f(x)=1$
$\therefore \lim_{x \to 4} f(x)=1$
$\lim_{x \to 4} f(x) \neq f(4)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 불연속이다.
(i), (ii), (iii)에 의해 함수 $f(x)$는 $x=1$ 또는 $x=3$에서 극한값이 존재하지 않으므로 $a=2$
또 함수 $f(x)$는 $x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$에서 불연속이므로 $b=3$
$\therefore a+b=5$

5 ㄱ. $x \longrightarrow 0$일 때, 극한값은
$\lim_{x \to 0+} f(x)=0$, $\lim_{x \to 0-} f(x)=0$
$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)=0$
ㄴ. (i) $x=-1$에서 함숫값은 $f(-1)=1$
$x \longrightarrow -1$일 때, 극한값은
$\lim_{x \to -1+} f(x)=1$, $\lim_{x \to -1-} f(x)=2$
즉, $\lim_{x \to -1+} f(x) \neq \lim_{x \to -1-} f(x)$이므로 $\lim_{x \to -1} f(x)$는 존재하지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.
(ii) $x=1$에서 함숫값은 $f(1)=1$
$x \longrightarrow 1$일 때, 극한값은
$\lim_{x \to 1+} f(x)=2$, $\lim_{x \to 1-} f(x)=1$
즉, $\lim_{x \to 1+} f(x) \neq \lim_{x \to 1-} f(x)$이므로 $\lim_{x \to 1} f(x)$는 존재하지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.
(i), (ii)에 의해 불연속인 x의 값은 2개이다.

ㄷ. $x=1$에서 함숫값은 $f(0)=0$

$x-1=t$라 하면 $x \longrightarrow 1+$일 때 $t \longrightarrow 0+$이고,

$x \longrightarrow 1-$일 때 $t \longrightarrow 0-$이므로

$\lim_{x \to 1+} f(x-1)=\lim_{t \to 0+} f(t)=0$

$\lim_{x \to 1-} f(x-1)=\lim_{t \to 0-} f(t)=0$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x-1)=0$

$\lim_{x \to 1} f(x-1)=f(0)$이므로 함수 $f(x-1)$은 $x=1$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

6 ㄱ. $x \longrightarrow 1$일 때, 극한값은

$\lim_{x \to 1+} f(x)=0$, $\lim_{x \to 1-} f(x)=1$

즉, $\lim_{x \to 1+} f(x) \neq \lim_{x \to 1-} f(x)$이므로 $\lim_{x \to 1} f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(x)=t$라 하면 $x \longrightarrow 1+$일 때 $t \longrightarrow 0+$이고,

$x \longrightarrow 1-$일 때 $t=1$이므로

$\lim_{x \to 1+} f(f(x))=\lim_{t \to 0+} f(t)=1$

$\lim_{x \to 1-} f(f(x))=f(1)=0$

즉, $\lim_{x \to 1+} f(f(x)) \neq \lim_{x \to 1-} f(f(x))$이므로

$\lim_{x \to 1} f(f(x))$는 존재하지 않는다.

ㄷ. $x=0$에서 함숫값은

$f(f(0))=f(1)=0$

$f(x)=t$라 하면 $x \longrightarrow 0+$일 때 $t=1$이고,

$x \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow 0-$이므로

$\lim_{x \to 0+} f(f(x))=f(1)=0$,

$\lim_{x \to 0-} f(f(x))=\lim_{t \to 0-} f(t)=0$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(f(x))=0$

$\lim_{x \to 0} f(f(x))=f(f(0))$이므로 함수 $f(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

7 ㄱ. $x=0$에서 함숫값은

$f(0)g(0)=0$

$x \longrightarrow 0$일 때, 극한값은

$\lim_{x \to 0+} f(x)g(x)=0 \times 2=0$

$\lim_{x \to 0-} f(x)g(x)=0 \times (-2)=0$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)g(x)=0$

$\lim_{x \to 0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $x=0$에서의 함숫값은

$f(g(0))=f(0)=1$

$g(x)=t$라 하면 $x \longrightarrow 0+$일 때 $t \longrightarrow 2-$이고,

$x \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow -2+$이므로

$\lim_{x \to 0+} f(g(x))=\lim_{t \to 2-} f(t)=1$

$\lim_{x \to 0-} f(g(x))=\lim_{t \to -2+} f(t)=1$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(g(x))=1$

$\lim_{x \to 0} f(g(x))=f(g(0))$이므로 함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $x=0$에서 함숫값은

$g(f(0))=g(1)=1$

$f(x)=t$라 하면 $x \longrightarrow 0+$일 때 $t \longrightarrow 0+$이고,

$x \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x \to 0+} g(f(x))=\lim_{x \to 0-} g(f(x))=\lim_{t \to 0+} g(t)=2$

$\therefore \lim_{x \to 0} g(f(x))=2$

$\lim_{x \to 0} g(f(x)) \neq g(f(0))$이므로 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 $x=0$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

8 $f(x)=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{\dfrac{x^2-1}{x}}=\dfrac{x}{x^2-1}$

이때 $x=0$, $x^2-1=0$인 x의 값에서 함수 $f(x)$가 정의되지 않으므로 불연속인 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 모든 x의 값의 합은 0

9 $f(g(x))=f(x^2-1)$이므로

$$f(g(x))=\begin{cases} \dfrac{x^2-2}{|x^2-2|} & (x^2-1 \neq 1) \\ 0 & (x^2-1=1) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1 & (x^2-2>0) \\ 0 & (x^2-2=0) \\ -1 & (x^2-2<0) \end{cases}$$

즉, 함수 $f(g(x))$는 $x^2-2=0$인 x의 값에서 불연속이므로

$x^2=2 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{2}$

따라서 구하는 모든 x의 값의 곱은 -2

10 $0<x<2$에서 $0<x^2<4$이므로

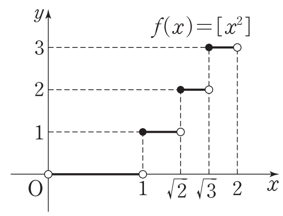
$0<x^2<1$, 즉 $0<x<1$일 때, $[x^2]=0$

$1 \le x^2<2$, 즉 $1 \le x<\sqrt{2}$일 때, $[x^2]=1$

$2 \le x^2<3$, 즉 $\sqrt{2} \le x<\sqrt{3}$일 때, $[x^2]=2$

$3 \le x^2<4$, 즉 $\sqrt{3} \le x<2$일 때, $[x^2]=3$

함수 $f(x)=[x^2]$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $0<x<2$에서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$의 3개이다.

11 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1} \dfrac{x^2+ax-1}{x-1}=b$ …… ㉠

$x\longrightarrow1$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to1}(x^2+ax-1)=0$

$1+a-1=0 \qquad \therefore a=0$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-1}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}(x+1)=2\end{aligned}$$

$\therefore b=2 \qquad \therefore a+b=0+2=2$

12 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}+a}{x-1}=f(1)$ …… ㉠

$x\longrightarrow1$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to1}(\sqrt{x+3}+a)=0$

$2+a=0 \qquad \therefore a=-2$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}+a}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$\therefore f(1)=\dfrac{1}{4}$

13 $f(0)=3$이므로 $a=3$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$, $x=2$에서도 연속이다.

(i) $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$에서

$\lim_{x\to1+} f(x)=1+b$, $\lim_{x\to1-} f(x)=-1+a$이므로

$1+b=-1+a$

이때 $a=3$이므로 $b=1$

(ii) $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$에서

$\lim_{x\to2+} f(x)=4+c$, $\lim_{x\to2-} f(x)=4+b$이므로

$4+c=4+b \qquad \therefore b=c$

$b=1$이므로 $c=1$

$\therefore a+b-c=3+1-1=3$

14 $x\neq1$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2+ax-3}{x-1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{x^2+ax-3}{x-1}=f(1)$ …… ㉠

$x\longrightarrow1$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to1}(x^2+ax-3)=0$

$1+a-3=0 \qquad \therefore a=2$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-3}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}(x+3)=4\end{aligned}$$

$\therefore f(1)=4$

15 $x\neq-3$, $x\neq2$일 때,

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{x^3+ax+b}{x^2+x-6}\\&=\frac{x^3+ax+b}{(x+3)(x-2)}\end{aligned}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-3$, $x=2$에서도 연속이다.

(i) $\lim_{x\to-3} f(x)=f(-3)$에서

$\lim_{x\to-3}\dfrac{x^3+ax+b}{(x+3)(x-2)}=f(-3)$

$x\longrightarrow-3$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to-3}(x^3+ax+b)=0$

$-27-3a+b=0$ …… ㉠

(ii) $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$에서

$\lim_{x\to2}\dfrac{x^3+ax+b}{(x+3)(x-2)}=f(2)$

$x\longrightarrow2$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to2}(x^3+ax+b)=0$

$8+2a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-7$, $b=6$

$\therefore ab=-42$

16 (가)에서 $x\neq1$일 때, $f(x)=\dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-1}$

함수 $f(x)$는 $x\geq0$에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2$ ($\because$ (나)) …… ㉠

$x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to1}(a\sqrt{x}+b)=0$

$a+b=0 \quad \therefore b=-a$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}-a}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x}+1}=\frac{a}{2}\end{aligned}$$

즉, $\dfrac{a}{2}=2$에서 $a=4$

이를 ㉡에 대입하면 $b=-4$

$\therefore a^2+b^2=4^2+(-4)^2=32$

17 $x\neq0$일 때, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

함수 $f(x)$가 $-1<x<1$에서 연속이면 $x=0$에서도 연속이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to0}f(x)&=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}=1\end{aligned}$$

$\therefore f(0)=1$

18 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

① 함수 $2g(x)$는 연속함수의 성질에 의해 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)+2g(x)$도 연속함수의 성질에 의해 모든 실수 x에서 연속이다.

② 함수 $f(x)g(x)$는 연속함수의 성질에 의해 모든 실수 x에서 연속이다.

③ $g(f(x))=x^2-4$이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

④ $f(g(x))=x^2-4$이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

⑤ $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x}{x^2-4}=\dfrac{x}{(x+2)(x-2)}$이므로

$x=-2$ 또는 $x=2$에서 불연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속인 함수가 아닌 것은 ⑤이다.

19 ㄱ. [반례] $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$이라 하면 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 연속이지만 함수

$f(g(x))=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-1}+1}=\dfrac{x-1}{x}$은 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. [반례] $f(x)=|x|$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\geq0)\\-1 & (x<0)\end{cases}$이라 하면

함수 $f(g(x))=1$은 $x=0$에서 연속이지만 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(x)=t$라 하면 $x\longrightarrow a$일 때 $t\longrightarrow f(a)$이므로

$\lim_{x\to a}g(f(x))=\lim_{t\to f(a)}g(t)=g(f(a))$

따라서 함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

20 $f(x)=x^3+2x-8$이라 하면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

$f(-2)=-20<0$, $f(-1)=-11<0$,

$f(0)=-8<0$, $f(1)=-5<0$,

$f(2)=4>0$, $f(3)=25>0$

따라서 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의해 주어진 방정식의 근이 존재하는 구간은 $(1, 2)$이다.

21 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이다.

$f(1)f(2)<0$, $f(2)f(3)<0$, $f(3)f(4)<0$

사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 $(1, 4)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

22 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-2x^2+x+k+2$

$h(1)=2+k$, $h(2)=4+k$이므로

$h(1)h(2)<0$이라 하면 $(k+2)(k+4)<0$

$\therefore -4<k<-2$

즉, $-4<k<-2$이면 방정식 $h(x)=0$이 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 정수 k는 -3이다.

유형편

Ⅱ-1. 미분계수와 도함수

01 미분계수와 도함수

기초 문제 Training p.20

1 (1) **4** (2) **4** (3) **−8** (4) **14**

2 (1) **−5** (2) **3** (3) **2** (4) **−3**

3 (1) **5** (2) **−6** (3) **−10** (4) **12**

4 (가) **연속** (나) **미분가능하지 않다**

5 (1) $f'(x)=-2x+3$ (2) $f'(x)=-2x+3$

6 (1) $y'=6x^5$ (2) $y'=0$
(3) $y'=-6x$ (4) $y'=15x^2$

핵심 유형 Training p.21~26

1 3	**2** ④	**3** ①	**4** −5	**5** 3	**6** 12
7 ④	**8** 1	**9** ③	**10** 4	**11** 1	**12** ⑤
13 ⑤	**14** 11	**15** 4	**16** ⑤	**17** ㄴ, ㄷ	
18 ㄱ, ㄷ		**19** 3	**20** 3	**21** ③	**22** ④
23 ⑤	**24** −21	**25** ③	**26** ②	**27** ⑤	**28** ④
29 ④	**30** ③	**31** ②	**32** ③	**33** 5	**34** 0
35 ⑤	**36** ⑤	**37** ①	**38** ⑤	**39** ⑤	**40** ④

1 함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 1에서 5까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{4-0}{4}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

함수 $f(x)$의 $x=a$에서 미분계수 $f'(a)$는

$$\begin{aligned} f'(a)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(a+\Delta x)^2-5(a+\Delta x)+4\}-(a^2-5a+4)}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x+2a-5)=2a-5 \quad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠=㉡이므로 $1=2a-5$ $\quad\therefore a=3$

2 함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 a에서 b까지 변할 때 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^2-a^2-3(b-a)}{b-a}\\ &=a+b-3 \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

함수 $f(x)$의 $x=2$에서 미분계수 $f'(2)$는

$$\begin{aligned} f'(2)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(2+\Delta x)^2-3(2+\Delta x)\}-(4-6)}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x+1)=1 \quad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠=㉡이므로 $a+b-3=1$ $\quad\therefore a+b=4$

3 함수 $f(x)$의 $x=2$에서 미분계수 $f'(2)$는 x의 값이 2에서 $2+a$까지 변할 때 평균변화율에 대하여 $a\longrightarrow0$일 때 평균변화율의 극한값과 같으므로

$$\begin{aligned} f'(2)&=\lim_{a\to0}\frac{\sqrt{a+1}-1}{a}\\ &=\lim_{a\to0}\frac{a}{a(\sqrt{a+1}+1)}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

4
$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(a+5h)-f(a)}{2h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+5h)-f(a)}{5h}\times\frac{5}{2}\\ &=\frac{5}{2}f'(a)=\frac{5}{2}\times(-2)=-5\end{aligned}$$

5
$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(a+kh)-f(a)}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+kh)-f(a)}{kh}\times k\\ &=kf'(a)=3k\end{aligned}$$

즉, $3k=9$에서 $k=3$

6
$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-4h)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-4h)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2\\ &\qquad-\lim_{h\to0}\frac{f(1-4h)-f(1)}{-4h}\times(-4)\\ &=2f'(1)+4f'(1)=6f'(1)=6\times2=12\end{aligned}$$

7 $\frac{1}{t}=h$라 하면 $t\longrightarrow\infty$일 때 $h\longrightarrow0$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}t\left\{f\left(a+\frac{b}{t}\right)-f\left(a-\frac{b}{t}\right)\right\}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(a+bh)-f(a-bh)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(a+bh)-f(a)+f(a)-f(a-bh)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(a+bh)-f(a)}{bh}\times b\\ &\qquad-\lim_{h\to0}\frac{f(a-bh)-f(a)}{-bh}\times(-b)\\ &=bf'(a)+bf'(a)=2bf'(a)=2b^2\end{aligned}$$

8 $\lim_{x\to2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^3-8}$

$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\times\frac{x^2-4}{x^3-8}\right\}$

$=\lim_{x\to2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\times\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

$=f'(4)\times\frac{4}{12}=3\times\frac{1}{3}=1$

9 $\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-x^2f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)+f(1)-x^2f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}-\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)f(1)}{x-1}$

$=2f'(1)-2f(1)=2\times2-2\times(-1)=6$

10 $\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{af(x)-af(a)+af(a)-xf(a)}{x-a}$

$=a\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f(a)}{x-a}$

$=af'(a)-f(a)=a-2$

즉, $a-2=2$에서 $a=4$

11 $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)}-2}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{f(x)}-2)(\sqrt{f(x)}+2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{f(x)}+2)}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-4}{x-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{f(x)}+2}\right\}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{f(x)}+2}$

$=f'(1)\times\frac{1+1}{\sqrt{f(1)}+2}=2\times\frac{1}{2}=1$

12 $f(a+b)=f(a)+f(b)+2ab+1$의 양변에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+1$ $\therefore f(0)=-1$ …… ㉠

미분계수의 정의에 의해 $f'(0)$은

$f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)+1}{\Delta x}$ ($\because$ ㉠)

이때 $f'(0)=2$이므로 $\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)+1}{\Delta x}=2$ …… ㉡

미분계수의 정의에 의해 $f'(1)$은

$f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1)+f(\Delta x)+2\Delta x+1-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)+1}{\Delta x}+2=2+2=4$ ($\because$ ㉡)

13 $f(a+b)=f(a)f(b)$의 양변에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)f(0)$ $\therefore f(0)=1$ ($\because f(0)>0$) …… ㉠

미분계수의 정의에 의해 $f'(0)$은

$f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}$ ($\because$ ㉠)

이때 $f'(0)=3$이므로 $\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=3$ …… ㉡

미분계수의 정의에 의해 $f'(3)$은

$f'(3)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(3)f(\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$

$=f(3)\times\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=3f(3)$ ($\because$ ㉡)

$\therefore \frac{f'(3)}{f(3)}=3$

14 미분계수의 정의에 의해 $f'(1)$은

$f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1)+f(\Delta x)+3\Delta x(1+\Delta x)-1-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to0}3(1+\Delta x)$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}+3$

이때 $f'(1)=2$이므로 $\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=-1$ …… ㉠

미분계수의 정의에 의해 $f'(2)$는

$f'(2)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(2)+f(\Delta x)+6\Delta x(2+\Delta x)-1-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to0}6(2+\Delta x)$

$=-1+12=11$ ($\because$ ㉠)

15 $f(1)=0$, $f'(1)=2$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2-2f(x)}{1-x}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)\{f(x)-2\}}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\{2-f(x)\}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\{2-f(x)\}$ ($\because f(1)=0$)

$=f'(1)\times\{2-f(1)\}=2\times2=4$

16 ㄱ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 $x=a$인 점에서 만나므로 $f(a)=g(a)$

ㄴ. $x=a$에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기와 직선 $y=g(x)$의 기울기가 같으므로 $f'(a)=g'(a)$

유형편

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)+g(a)-g(x)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
$$=f'(a)-g'(a)=0$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17 ㄱ. 원점과 점 $(a,\ f(a))$를 지나는 직선의 기울기가 원점과 점 $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기보다 크므로

$$\frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$$

ㄴ. 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기가 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기보다 크므로

$$f'(a)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ㄷ. 점 $(b,\ f(b))$에서의 접선의 기울기보다 두 점 $(a,\ 0)$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기가 크므로

$$f'(b)<\frac{f(b)}{b-a}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

18 ㄱ. $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h+h}{h}=2$$
$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{h-h}{h}=0$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2}{h}=0$$
$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h^2}{h}=0$$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0}k(x)=k(0)=0$이므로 함수 $k(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{-h(h-1)}{h}=1$$
$$\lim_{h\to 0-}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{h(h-1)}{h}=-1$$

이므로 함수 $k(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

19 $x=1$에서 불연속이므로 $m=1$

$x=0$ 또는 $x=1$에서 미분가능하지 않으므로 $n=2$

$\therefore\ m+n=3$

20 ① $\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)$이므로 $\lim_{x\to 2}f(x)$가 존재한다.

② 점 $(3,\ f(3))$에서의 접선의 기울기가 0보다 크므로 $f'(3)>0$이다.

③ $x=2$ 또는 $x=6$ ➡ 2개

④ $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=6$ ➡ 3개

⑤ 미분가능하면서 접선의 기울기가 0인 점이므로 $x=5$ ➡ 1개

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

21 $f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+10x^9$이므로

$f'(1)=1+2+3+\cdots+10=55$

$$\therefore\ \frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{55}{11}=5$$

22 $f'(x)=(x^2+1)'(x^3+x^2+x-1)+(x^2+1)(x^3+x^2+x-1)'$

$=2x(x^3+x^2+x-1)+(x^2+1)(3x^2+2x+1)$

$\therefore\ f'(1)=2\times2+2\times6=16$

23 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(1)=3+2a+b=2$ $\quad\therefore\ 2a+b=-1$ …… ㉠

$f'(-1)=3-2a+b=-2$ $\quad\therefore\ 2a-b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-3x+c$이므로

$f(2)-f(-2)=(6+c)-(2+c)=4$

24 곡선 $f(x)=x^3-ax^2-bx+2$가 점 $(1,\ -1)$을 지나므로

$f(1)=1-a-b+2=-1$ $\quad\therefore\ a+b=4$ …… ㉠

또 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1)=2$

$f'(x)=3x^2-2ax-b$이므로

$f'(1)=3-2a-b=2$ $\quad\therefore\ 2a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=7$

$\therefore\ ab=-21$

25 다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 4)$에서 직선 $y=x+2$와 접하므로

$f(2)=4$, $f'(2)=1$

$g(x)=(x^2+x+1)f(x)$에서

$g'(x)=(2x+1)f(x)+(x^2+x+1)f'(x)$

$\therefore\ g'(2)=5f(2)+7f'(2)=5\times4+7\times1=27$

26 $(x^2-1)f(x)=\{g(x)\}^2-5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+(x^2-1)f'(x)=2g(x)g'(x)$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2f(1)=2g(1)g'(1)=2\times5\times2=20$ $\quad\therefore f(1)=10$

27 $f(x)$를 n차함수라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차함수이다.

(가)에서 $n=1$이면 좌변은 상수함수이고, 우변은 일차함수가 되어 모순이다. 즉, $n\geq2$이다.

좌변의 차수는 $2(n-1)$, 우변의 차수는 n이므로

$2n-2=n$ $\quad\therefore n=2$

따라서 $f(x)=ax^2+bx+c$(a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면 $f'(x)=2ax+b$

$\{f'(x)\}^2=f(x)+1$에서 $(2ax+b)^2=ax^2+bx+c+1$

$\therefore 4a^2x^2+4abx+b^2=ax^2+bx+c+1$

위 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$4a^2=a$, $4ab=b$, $b^2=c+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\therefore a=\frac{1}{4}$ ($\because a\neq0$)

한편 (나)에서 $f'(0)=2$이므로 $b=2$

이를 ㉠에 대입하면 $c=3$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^2+2x+3$ $\quad\therefore f(2)=8$

28 $f(1)=g(1)=4$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-g(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)+g(1)-g(1-2h)}{h}$$
$$=3\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}+2\lim_{h\to0}\frac{g(1-2h)-g(1)}{-2h}$$
$$=3f'(1)+2g'(1)$$

이때 $f'(x)=4x^3+2x$, $g'(x)=3x^2+2$이므로

$3f'(1)+2g'(1)=3\times6+2\times5=28$

29 $\frac{1}{t}=h$라 하면 $t\longrightarrow\infty$일 때 $h\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{t\to\infty}t\left\{f\left(1+\frac{2}{t}\right)-f\left(1-\frac{1}{t}\right)\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$$
$$=2\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$$=2f'(1)+f'(1)=3f'(1)$$

이때 $f'(x)=3x^2-2x+1$이므로 $f'(1)=2$

$\therefore 3f'(1)=3\times2=6$

30 $f(x)=x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6$이라 하면 $f(1)=1$

$f'(x)=10x^9-9x^8+8x^7-7x^6+6x^5$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)=8$$

31 $f(x)=x^n+3x$라 하면 $f(1)=4$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n+3x-4}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)=5$$

$\therefore f'(1)=10$

이때 $f'(x)=nx^{n-1}+3$이므로 $f'(1)=n+3$

즉, $n+3=10$에서 $n=7$

32 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to1}f(x)=0$

$\therefore f(1)=0$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$$

이때 $f'(x)=4x^3+2ax$이므로

$f'(1)=2$에서 $4+2a=2$ $\quad\therefore a=-1$

또 $f(1)=0$에서 $a+b=-1$

$a=-1$을 대입하면 $b=0$ $\quad\therefore ab=0$

33 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-2}{x-3}=1$에서 $x\longrightarrow3$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to3}\{f(x)-2\}=0$

$\therefore f(3)=2$

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{f(x)-2}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=1$$

또 $\lim_{x\to3}\frac{g(x)-1}{x-3}=2$에서 $x\longrightarrow3$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to3}\{g(x)-1\}=0$ $\quad\therefore g(3)=1$

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{g(x)-1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=g'(3)=2$$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(3)=f'(3)g(3)+f(3)g'(3)=1\times1+2\times2=5$

34 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-2$에서 $x\longrightarrow0$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to0}f(x)=0$

$\therefore f(0)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=f'(0)=-2 \quad\cdots\cdots ㉡$$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}=-1$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고,

극한값이 존재하므로

유형편

(분자)$\longrightarrow 0$ ➡ $\lim_{x\to1}\{f(x)+2\}=0$

$\therefore f(1)=-2$ …… ㉢

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)=-1$ …… ㉣

$f(x)$가 삼차함수이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라 하면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

㉠에서 $f(0)=0$이므로 $d=0$

㉡에서 $f'(0)=-2$이므로 $c=-2$

㉢에서 $f(1)=-2$이므로 $a+b+c+d=-2$

이 식에 $c=-2$, $d=0$을 대입하면 $a+b=0$ …… ㉤

㉣에서 $f'(1)=-1$이므로 $3a+2b+c=-1$

이 식에 $c=-2$를 대입하면 $3a+2b=1$ …… ㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$

$\therefore f'(x)=3x^2-2x-2$

방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=\frac{2}{3}$, $\alpha\beta=-\frac{2}{3}$

$\therefore \alpha\beta+\alpha+\beta=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$

35 $g(x)=x^3+ax^2$, $h(x)=bx+2$라 하면

$g'(x)=3x^2+2ax$, $h'(x)=b$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면

(i) $x=1$에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$

$1+a=b+2$ $\quad\therefore a-b=1$ …… ㉠

(ii) $x=1$에서 미분계수가 존재하므로 $g'(1)=h'(1)$

$\therefore 3+2a=b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=-5$ $\quad\therefore ab=20$

36 $f(x)=|x+1|(x^2+ax+1)$에서

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)(x^2+ax+1) & (x\geq-1)\\ -(x+1)(x^2+ax+1) & (x<-1)\end{cases}$$

$g(x)=(x+1)(x^2+ax+1)$,

$h(x)=-(x+1)(x^2+ax+1)$이라 하면

$g'(x)=(x^2+ax+1)+(x+1)(2x+a)$

$h'(x)=-(x^2+ax+1)-(x+1)(2x+a)$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=-1$에서도 미분가능하다.

(i) $x=-1$에서 연속이므로

$g(-1)=h(-1)$ ➡ 항상 성립

(ii) $x=-1$에서 미분계수가 존재하므로 $g'(-1)=h'(-1)$

$2-a=a-2$ $\quad\therefore a=2$

(i), (ii)에 의해 $a=2$

37 $0\leq x<2$에서 $f(x)=\begin{cases}0 & (0\leq x<1)\\ x^2+ax+b & (1\leq x<2)\end{cases}$

$g(x)=0$, $h(x)=x^2+ax+b$라 하면

$g'(x)=0$, $h'(x)=2x+a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면

(i) $x=1$에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$

$0=1+a+b$ …… ㉠

(ii) $x=1$에서 미분계수가 존재하므로 $g'(1)=h'(1)$

$0=2+a$ $\quad\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore a-b=-2-1=-3$

38 다항식 $x^{10}-2x^9+ax+b$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 0이므로

$x^{10}-2x^9+ax+b=(x-1)^2Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $a+b-1=0$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9-18x^8+a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a-8=0$ $\quad\therefore a=8$

이를 ㉡에 대입하면 $b=-7$

$\therefore a-b=8-(-7)=15$

39 다항식 $x^{12}-x+1$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$x^{12}-x+1=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$3=-a+b$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$12x^{11}-1=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

이 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $-13=a$

이를 ㉡에 대입하면 $b=-10$

따라서 $R(x)=-13x-10$이므로 $R(-2)=16$

40 다항식 $x^{20}+ax^9+b$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $-2x+1$이므로

$x^{20}+ax^9+b=(x+1)^2Q(x)-2x+1$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $1-a+b=3$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$20x^{19}+9ax^8=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)-2$

이 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-20+9a=-2$ $\quad\therefore a=2$

이를 ㉡에 대입하면 $b=4$

따라서 다항식 $x^{20}+2x^9+4$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$1+2+4=7$

Ⅱ-2. 도함수의 활용

01 접선의 방정식과 평균값 정리

기초 문제 Training
p.28

1 (1) -7 (2) -2 (3) 3 (4) -30

2 (1) $y=-5x-1$ (2) $y=3x+2$
(3) $y=-7x+19$ (4) $y=4x-13$

3 (1) $(4, -1)$ (2) $y=5x-21$

4 16, 16, $4x^3$, $4c^3$, 0

5 4, $-4x+1$, $-4c+1$, -7, 2

핵심 유형 Training
p.29~33

1 ③	2 ②	3 ④	4 14	5 ③	6 ②
7 ③	8 ①	9 10	10 −4	11 ①	12 ⑤
13 ⑤	14 ②	15 ④	16 ③	17 ⑤	18 ②
19 ③	20 ②	21 ⑤	22 ⑤	23 ④	24 ①
25 ①	26 ②	27 ㄱ, ㄷ		28 ④	29 ④
30 ③	31 ⑤	32 12	33 ③	34 ③	35 ③

1 $f(x)=-x^3+2x+5$라 하면 $f'(x)=-3x^2+2$
점 $(-1, 4)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는
$-\dfrac{1}{f'(-1)}=1$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y-4=x+1$ $\therefore y=x+5$

2 $f(x)=x^3+ax+b$라 하면 $f'(x)=3x^2+a$
곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 1)$을 지나므로
$f(1)=1+a+b=1$ $\therefore a+b=0$ …… ㉠
또 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기가 2이므로
$f'(1)=3+a=2$ $\therefore a=-1$
이를 ㉠에 대입하면 $b=1$ $\therefore ab=-1$

3 $f(x)=x^3-2x^2+3x$라 하면 $f'(x)=3x^2-4x+3$
점 $(1, 2)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는
$-\dfrac{1}{f'(1)}=-\dfrac{1}{2}$
따라서 직선의 방정식은
$y-2=-\dfrac{1}{2}(x-1)$ $\therefore y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$
이때 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$의 x절편은 5, y절편은 $\dfrac{5}{2}$이므로 구하는 삼각형의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{5}{2}=\dfrac{25}{4}$

4 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$이라 하면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 6)$을 지나므로
$f(1)=1+a+b+1=6$
$\therefore a+b=4$ …… ㉠
또 점 $(1, 6)$에서의 접선의 기울기가 2이므로
$f'(1)=3+2a+b=2$
$\therefore 2a+b=-1$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=9$
$\therefore b-a=14$

5 곡선 $y=x^2-4x+3$이 x축과 만나는 두 점의 x좌표는
$x^2-4x+3=0$에서
$(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$
따라서 곡선이 x축과 만나는 두 점의 좌표는
$(1, 0)$, $(3, 0)$
$f(x)=x^2-4x+3$이라 하면 $f'(x)=2x-4$
점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-2$이므로 접선의 방정식은
$y=-2(x-1)$ $\therefore y=-2x+2$ …… ㉠
점 $(3, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=2$이므로 접선의 방정식은
$y=2(x-3)$ $\therefore y=2x-6$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-2$
$\therefore a=2$, $b=-2$ $\therefore a+b=0$

6 $f(x)=x^3-4x^2+x-1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-8x+1$
점 $(1, -3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-4$이므로
접선의 방정식은
$y+3=-4(x-1)$ $\therefore y=-4x+1$
곡선 $y=x^3-4x^2+x-1$과 접선 $y=-4x+1$의 교점의 x좌표는
$x^3-4x^2+x-1=-4x+1$에서
$x^3-4x^2+5x-2=0$
$(x-1)^2(x-2)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=2$
따라서 교점 중 접점이 아닌 점의 좌표는 $(2, -7)$이므로
$a=2$, $b=-7$
$\therefore 2a+b=4+(-7)=-3$

유형편

7 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\longrightarrow0$ ➡ $\lim_{x\to1}f(x)=0$ $\quad\therefore f(1)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$

즉, 점 $(1, 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=3(x-1)$ $\quad\therefore y=3x-3$

8 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로 $f(1)=2$, $f'(1)=-2$

곡선 $y=\{f(x)\}^2$ 위의 $x=1$인 점의 y좌표는

$\{f(1)\}^2=2^2=4$ $\quad\therefore k=4$

이때 $y=\{f(x)\}^2$에서 $y'=2f(x)f'(x)$이므로

점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기는

$2f(1)f'(1)=-8$

따라서 접선의 방정식은

$y-4=-8(x-1)$ $\quad\therefore y=-8x+12$

$\therefore a=-8, b=12$

$\therefore a-b+k=-8-12+4=-16$

9 $f(x)=-x^2+3x+1$이라 하면 $f'(x)=-2x+3$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+3t+1)$이라 하면 직선 $y=-x+4$에 평행한 접선의 기울기는 -1이므로

$f'(t)=-2t+3=-1$ $\quad\therefore t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 3)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=-(x-2)$ $\quad\therefore y=-x+5$

이 직선이 두 점 $(a, 0)$, $(0, b)$를 지나므로

$0=-a+5$, $b=5$

따라서 $a=5$, $b=5$이므로 $a+b=10$

10 $f(x)=x^3-x+3$이라 하면 $f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 (t, t^3-t+3)이라 하면 직선 $y=x+2$에 수직인 접선의 기울기는 -1이므로

$f'(t)=3t^2-1=-1$ $\quad\therefore t=0$

따라서 접점의 좌표는 $(0, 3)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=-x$ $\quad\therefore y=-x+3$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로 $a-b=-4$

11 $f(x)=x^2-3x+2$라 하면 $f'(x)=2x-3$

접점의 좌표를 (t, t^2-3t+2)라 하면 두 점 $(1, 0)$, $(3, 2)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{2-0}{3-1}=1$이므로

$f'(t)=2t-3=1$ $\quad\therefore t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 0)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=x-2$

12 $f(x)=x^3-6x$라 하면 $f'(x)=3x^2-6$

접점의 좌표를 (t, t^3-6t)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 3이므로

$f'(t)=3t^2-6=3$ $\quad\therefore t=\pm\sqrt{3}$

따라서 접점의 좌표는 $(\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$이므로 접선의 방정식은

$y+3\sqrt{3}=3(x-\sqrt{3})$ 또는 $y-3\sqrt{3}=3(x+\sqrt{3})$

$\therefore y=3x-6\sqrt{3}$ 또는 $y=3x+6\sqrt{3}$

이 접선의 방정식이 $y=3(x-m)$과 일치하므로

$-3m=-6\sqrt{3}$ 또는 $-3m=6\sqrt{3}$

$\therefore m=2\sqrt{3}\,(\because m>0)$

13 $f(x)=-x^3+3x^2+10x+1$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x+10$

접점의 좌표를 $(t, -t^3+3t^2+10t+1)$이라 하면 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$인 접선의 기울기는 $\tan45°=1$이므로

$f'(t)=-3t^2+6t+10=1$, $(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, -5)$, $(3, 31)$이므로 접선의 방정식은

$y+5=x+1$ 또는 $y-31=x-3$

$\therefore y=x-4$ 또는 $y=x+28$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $A(4, 0)$, $B(-28, 0)$ 또는 $A(-28, 0)$, $B(4, 0)$이므로

$\overline{AB}=4-(-28)=32$

14 곡선 $y=x^2+4x+5$에 접하고 직선 $y=2x-1$과 기울기가 같은 접선의 접점의 좌표를 $P(t, t^2+4t+5)$라 하면 구하는 거리의 최솟값은 점 P와 직선 $y=2x-1$ 사이의 거리와 같다.

$f(x)=x^2+4x+5$라 하면 $f'(x)=2x+4$

점 P에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=2t+4=2$ $\quad\therefore t=-1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 2)$이므로 점 P와 직선 $y=2x-1$ 사이의 거리는

$\frac{|2\times(-1)-2-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

15 $f(x)=x^3-3x^2-2x$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x-2$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2-2t)라 하면 직선 $2x+y+3=0$에 평행한 접선의 기울기는 -2이므로

$f'(t)=3t^2-6t-2=-2$, $3t(t-2)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(0, 0)$, $(2, -8)$이므로 접선의 방정식은

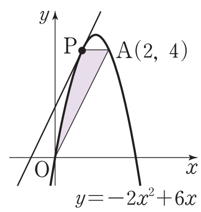
$y=-2x$ 또는 $y+8=-2(x-2)$

$\therefore 2x+y=0$ 또는 $2x+y+4=0$

따라서 두 접선 사이의 거리는 직선 $2x+y=0$ 위의 점 $(0, 0)$과 직선 $2x+y+4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

16 오른쪽 그림과 같이 △OAP의 넓이가 최대가 되는 것은 선분 OA의 기울기와 점 P에서의 접선의 기울기가 같을 때이다.



$f(x)=-2x^2+6x$라 하면

$f'(x)=-4x+6$

접점의 좌표를 $P(t, -2t^2+6t)$라 하면 선분 OA의 기울기가 2이므로

$f'(t)=-4t+6=2 \qquad \therefore t=1$

따라서 점 P의 좌표는 $(1, 4)$이므로 △OAP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times1\times4=2$

17 $f(x)=x^3$이라 하면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (t, t^3)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-t^3=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=-2t^3$, $t^3+1=0$, $(t+1)(t^2-t+1)=0$

$\therefore t=-1$ ($\because$ t는 실수)

이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$y=3x+2$

따라서 $a=3$, $b=2$이므로 $ab=6$

18 $f(x)=-x^2+2x-1$이라 하면 $f'(x)=-2x+2$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+2t-1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+2t-1)=(-2t+2)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+2)x+t^2-1$ …… ㉠

이 직선이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$0=2t-2+t^2-1$, $t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$

이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$y=8x+8$ 또는 $y=0$

이때 기울기가 양수이므로 $y=8x+8$

따라서 $a=8$, $b=8$이므로 $a-2b=-8$

19 $f(x)=x^4+4x^2+5$라 하면 $f'(x)=4x^3+8x$

접점의 좌표를 (t, t^4+4t^2+5)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3+8t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^4+4t^2+5)=(4t^3+8t)(x-t)$

$\therefore y=(4t^3+8t)x-3t^4-4t^2+5$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0, -2)$를 지나므로

$-2=-3t^4-4t^2+5$, $3t^4+4t^2-7=0$

$(t+1)(t-1)(3t^2+7)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$ ($\because$ t는 실수)

이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$y=-12x-2$ 또는 $y=12x-2$

따라서 $a=-12$, $b=12$ 또는 $a=12$, $b=-12$이므로

$a+b=0$

20 $f(x)=-x^2+2x+a$라 하면 $f'(x)=-2x+2$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+2t+a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+2$ …… ㉠

즉, 접선의 방정식은

$y-(-t^2+2t+a)=(-2t+2)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+2)x+t^2+a$

이 직선이 점 $(-2, 1)$을 지나므로

$1=4t-4+t^2+a$

$\therefore t^2+4t+a-5=0$ …… ㉡

이차방정식 ㉡의 두 근을 α, β라 하면

$t=\alpha$, $t=\beta$에서의 접선의 기울기는 각각

$f'(\alpha)=-2\alpha+2$, $f'(\beta)=-2\beta+2$ ($\because$ ㉠)

이때 두 접선이 서로 수직이므로

$(-2\alpha+2)(-2\beta+2)=-1$

$4\alpha\beta-4(\alpha+\beta)+4=-1$

이차방정식 ㉡에서 근과 계수의 관계에 의해

$4(a-5)+16+4=-1$

$4(a-5)=-21 \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{4}$

21 $f(x)=x^3+2x+2$라 하면 $f'(x)=3x^2+2$

접점 P의 좌표를 (t, t^3+2t+2) $(t>0)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2$

즉, 접선의 방정식은

$y-(t^3+2t+2)=(3t^2+2)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2)x-2t^3+2$

이 직선이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$2t^3-2=0$, $(t-1)(t^2+t+1)=0$

$\therefore t=1$

따라서 접점 P의 좌표는 $(1, 5)$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$

유형편

22 $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-6t^2+9t-4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-12t+9$

즉, 접선의 방정식은

$y-(t^3-6t^2+9t-4)=(3t^2-12t+9)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-12t+9)x-2t^3+6t^2-4$

이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$2t^3-6t^2+4=0$ …… ㉠

이때 $x_1,\ x_2,\ x_3$은 삼차방정식 ㉠의 세 실근이므로 근과 계수의 관계에 의해 $x_1+x_2+x_3=3$

23 $f(x)=x^4-2x^2+8$이라 하면 $f'(x)=4x^3-4x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^4-2t^2+8)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3-4t$

즉, 접선의 방정식은

$y-(t^4-2t^2+8)=(4t^3-4t)(x-t)$

$\therefore\ y=(4t^3-4t)x-3t^4+2t^2+8$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$3t^4-2t^2-8=0,\ (t^2-2)(3t^2+4)=0$

$\therefore\ t=-\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{2}$ ($\because$ t는 실수)

따라서 접점의 좌표는 $(\sqrt{2},\ 8),\ (-\sqrt{2},\ 8)$이므로 구하는 $\triangle$OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times8=8\sqrt{2}$

24 $f(x)=x^3+ax+1,\ g(x)=bx^2+c$라 하면

$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=2bx$

(i) 두 곡선이 점 $(1,\ 5)$를 지나므로

$f(1)=1+a+1=5\qquad\therefore\ a=3$ …… ㉠

$g(1)=b+c=5$ …… ㉡

(ii) 점 $(1,\ 5)$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$

$\therefore\ 3+a=2b$

㉠에서 $a=3$이므로 $b=3$

이를 ㉡에 대입하면 $c=2$

$\therefore\ a+b-c=3+3-2=4$

25 $f(x)=x^3+2,\ g(x)=3x^2-2$라 하면

$f'(x)=3x^2,\ g'(x)=6x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면

(i) $x=t$인 점에서 두 곡선이 만나므로

$f(t)=g(t)$

$t^3+2=3t^2-2,\ t^3-3t^2+4=0$

$(t+1)(t-2)^2=0\qquad\therefore\ t=-1$ 또는 $t=2$

(ii) $x=t$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(t)=g'(t)$

$3t^2=6t,\ 3t^2-6t=0$

$3t(t-2)=0\qquad\therefore\ t=0$ 또는 $t=2$

(i), (ii)를 동시에 만족하는 t의 값은 $t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 10)$이고, 접선의 기울기는 12이므로 접선의 방정식은

$y-10=12(x-2)\qquad\therefore\ y=12x-14$

따라서 $a=12,\ b=-14$이므로 $a+b=-2$

26 $f(x)=x^3+\frac{2}{3},\ g(x)=x^2+ax+\frac{1}{3}$이라 하면

$f'(x)=3x^2,\ g'(x)=2x+a$

두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하면

(i) $x=t$인 점에서 두 곡선이 만나므로

$f(t)=g(t)$

$t^3+\frac{2}{3}=t^2+at+\frac{1}{3}$

$\therefore\ t^3-t^2-at+\frac{1}{3}=0$ …… ㉠

(ii) $x=t$인 점에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$f'(t)g'(t)=-1$

$3t^2(2t+a)=-1$

$\therefore\ 6t^3+3at^2+1=0$ …… ㉡

㉠에서 $at=t^3-t^2+\frac{1}{3}$을 ㉡에 대입하면

$6t^3+3t\left(t^3-t^2+\frac{1}{3}\right)+1=0,\ (t+1)(3t^3+1)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ ($\because$ t는 실수)

이를 ㉡에 대입하면 $a=\frac{5}{3}$ 또는 $a=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

그런데 a는 유리수이므로 $a=\frac{5}{3}$

27 ㄱ. 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ a)$에서 미분가능하고 $f(0)=f(a)$이므로 롤의 정리가 성립한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 연속이고 $f(0)=f(a)$이지만, 열린구간 $(0,\ a)$에서 미분가능하지 않으므로 롤의 정리가 성립하지 않는다.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ a)$에서 미분가능하고 $f(0)=f(a)$이므로 롤의 정리가 성립한다.

ㄹ. 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ a)$에서 미분가능하지만, $f(0)\neq f(a)$이므로 롤의 정리가 성립하지 않는다.

따라서 롤의 정리가 성립하는 함수의 그래프는 ㄱ, ㄷ이다.

28 함수 $f(x)=x^2(x^2-2)$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$에서 미분가능하다.
$f(-2)=4(4-2)=8$, $f(2)=4(4-2)=8$이므로
$f(-2)=f(2)=8$
따라서 롤의 정리에 의해 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=4x^3-4x$이므로
$f'(c)=4c^3-4c=0$, $4c(c+1)(c-1)=0$
$\therefore c=-1$ 또는 $c=0$ 또는 $c=1$ $(\because -2<c<2)$
따라서 상수 c는 3개이다.

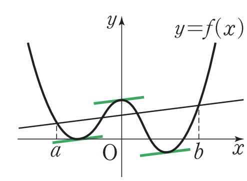
29 함수 $f(x)=x^3-ax^2+2$는 닫힌구간 $[0, a]$에서 연속이고 열린구간 $(0, a)$에서 미분가능하다.
$f(0)=2$, $f(a)=a^3-a^3+2=2$이므로
$f(0)=f(a)=2$
따라서 롤의 정리에 의해 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, a)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 롤의 정리를 만족하는 상수 c가 2이고,
$f'(x)=3x^2-2ax$이므로
$f'(2)=12-4a=0 \qquad \therefore a=3$

30 함수 $f(x)=x^3-3x+1$은 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해
$\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$
인 c가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2-3$에서 $f'(c)=3c^2-3$이므로
$\dfrac{19-1}{3}=3c^2-3$, $c^2=3 \qquad \therefore c=\sqrt{3}$ $(\because 0<c<3)$

31 함수 $f(x)=x^3-kx+1$은 닫힌구간 $[-k, k]$에서 연속이고 열린구간 $(-k, k)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해
$\dfrac{f(k)-f(-k)}{k-(-k)}=f'(c)$
인 c가 열린구간 $(-k, k)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=3x^2-k$에서 $f'(c)=3c^2-k$이므로
$\dfrac{(k^3-k^2+1)-(-k^3+k^2+1)}{2k}=3c^2-k$
$k^2-k=3c^2-k$, $c^2=\dfrac{k^2}{3}$
$\therefore c=-\dfrac{k}{\sqrt{3}}$ 또는 $c=\dfrac{k}{\sqrt{3}}$
이때 모든 상수 c의 값의 곱이 -3이므로
$-\dfrac{k^2}{3}=-3$, $k^2=9 \qquad \therefore k=3$ $(\because k>0)$

32 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 모든 실수에 대하여 연속이다.
따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[x-2, x+2]$에서 연속이고 열린구간 $(x-2, x+2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해
$\dfrac{f(x+2)-f(x-2)}{(x+2)-(x-2)}=f'(c)$
인 c가 열린구간 $(x-2, x+2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $x-2<c<x+2$에서 $x \longrightarrow \infty$이면 $c \longrightarrow \infty$이므로
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\{f(x+2)-f(x-2)\}&=4\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+2)-f(x-2)}{(x+2)-(x-2)}\\&=4\lim_{c\to\infty}f'(c)\\&=4\times3\ (\because \lim_{x\to\infty}f'(x)=3)\\&=12\end{aligned}$$

33 $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$에서
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기이고, $f'(c)$는 곡선 $y=f(x)$의 $x=c$에서의 접선의 기울기이다.
이때 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 3개 그을 수 있으므로 주어진 조건을 만족하는 상수 c는 3개이다.



34 함수 $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$은 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$
인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=3x^2-6x+3$에서 $f'(c)=3c^2-6c+3$이므로
$k=3c^2-6c+3=3(c-1)^2$
이때 $0<c<3$이므로 $0\le k<12$
따라서 정수 k는 0, 1, 2, $\cdots$, 11의 12개이다.

35 $f(x)=x^2-2x$에서 $f'(x)=2x-2$
$f(x+h)=f(x)+hf'(x+ah)$에서
$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+ah)$
$\dfrac{(x+h)^2-2(x+h)-(x^2-2x)}{h}=2(x+ah)-2$
$\dfrac{2xh+h^2-2h}{h}=2x+2ah-2$
$2x+h-2=2x+2ah-2 \qquad \therefore a=\dfrac{1}{2}$

유형편

02 함수의 증가, 감소와 극대, 극소

기초 문제 Training

p.34

1 (1) >, >, 감소 (2) <, <, 증가

2 (1) $[c, e]$ (2) $[a, c]$, $[e, f]$

3 극댓값: 3, 극솟값: 0

4 2, 2, -5, 0, -1, 2, -5

5 최댓값: 없다., 최솟값: -2

핵심 유형 Training

p.35～42

1 ③	2 ①	3 12	4 ④	5 ①	6 4
7 ②	8 0	9 $k\geq\frac{1}{6}$	10 6	11 1	12 31
13 32	14 ①	15 32	16 ①	17 ③	18 ⑤
19 ㄱ, ㄹ		20 ③	21 ④	22 ③	23 ③
24 ⑤	25 ①	26 ⑤	27 ⑤	28 ①	29 ②
30 ④	31 ②	32 ⑤	33 32	34 ③	35 3
36 ①	37 ①	38 ④	39 ④	40 ①	41 ②
42 16	43 ③	44 ④	45 1	46 2cm	
47 12π	48 ④				

1 $f(x)=-x^3+6x^2-9x+1$에서

$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-3	↗	1	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[1, 3]$에서 증가한다.

2 $f(x)=x^3-3x^2-24x+7$에서

$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	35	↘	-73	↗

따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가

$-2\leq x\leq 4$이므로

$a=-2$, $b=4$ $\therefore b-a=6$

3 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

이때 조건에 의해 $x=-1$, $x=3$은 이차방정식

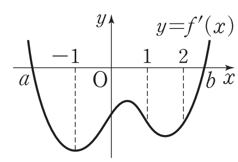
$6x^2+2ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의해

$(-1)+3=-\frac{2a}{6}$, $(-1)\times3=\frac{b}{6}$

$\therefore a=-6$, $b=-18$ $\therefore a-b=12$

4 다음 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 차례로 a, b라 하자.



① 구간 $(-\infty, a]$에서 $f(x)$는 증가한다.

② 구간 $(-1, 0)$에서 $f(x)$는 감소한다.

③ 구간 $(0, 1)$에서 $f(x)$는 감소한다.

⑤ 구간 $(2, b]$에서 $f(x)$는 감소한다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

5 $g(x)=xf(x)$라 하면 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$

ㄱ. 구간 $(0, 1)$에서 $x>0$, $f(x)<0$, $f'(x)<0$

즉, $g'(x)<0$이므로 $g(x)$는 감소한다.

ㄴ. 구간 $(1, 2)$에서 $x>0$, $f(x)<0$, $f'(x)>0$

즉, $g'(x)$의 부호를 알 수 없으므로 증가, 감소를 판정할 수 없다.

ㄷ. 구간 $(2, 3)$에서 $x>0$, $f(x)>0$, $f'(x)>0$

즉, $g'(x)>0$이므로 $g(x)$는 증가한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

6 $f(x)=x^3+ax^2+ax-1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 한다.

$\therefore 3x^2+2ax+a\geq0$

이차방정식 $3x^2+2ax+a=0$의 판별식을 $D\leq0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-3a\leq0$, $a(a-3)\leq0$

$\therefore 0\leq a\leq3$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

7 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+kx^2+(k-2)x+1$에서

$f'(x)=-x^2+2kx+(k-2)$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$\therefore\ -x^2+2kx+(k-2)\le 0$

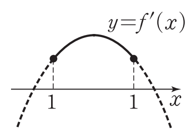
이차방정식 $-x^2+2kx+(k-2)=0$의 판별식 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2+(k-2)\le 0,\ (k+2)(k-1)\le 0$

$\therefore\ -2\le k\le 1$

따라서 $\alpha=-2,\ \beta=1$이므로 $\beta-\alpha=3$

8 $f(x)=-x^3+ax^2+5x-1$에서



$f'(x)=-3x^2+2ax+5$

함수 $f(x)$가 구간 $[-1, 1]$에서 증가하려면 $-1\le x\le 1$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 $f'(-1)\ge 0,\ f'(1)\ge 0$

$f'(-1)=-3-2a+5\ge 0$에서 $a\le 1$ …… ㉠

$f'(1)=-3+2a+5\ge 0$에서 $a\ge -1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는 $-1\le a\le 1$

따라서 정수 a는 $-1,\ 0,\ 1$이므로 구하는 합은 0이다.

9 $f(x)=2x^3+x^2+kx+1$에서

$f'(x)=6x^2+2x+k$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$ 또는 $f'(x)\le 0$

그런데 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$\therefore\ 6x^2+2x+k\ge 0$

이차방정식 $6x^2+2x+k=0$의 판별식 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1-6k\le 0 \qquad \therefore\ k\ge\frac{1}{6}$

10 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5 극대	↘	1 극소	↗

극댓값은 $f(1)=5$, 극솟값은 $f(3)=1$이므로 그 합은

$5+1=6$

11 $f(x)=-3x^4+4x^3+1$에서

$f'(x)=-12x^3+12x^2=-12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	1	↗	2 극대	↘

$x=0$에서 $f'(0)=0$이지만 극값을 갖지 않으므로 $b=0$

$x=1$에서는 극댓값을 가지므로 $a=1$

$\therefore\ a-b=1$

12 $f(x)=-x^3+3x^2+9x-27$에서

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-32 극소	↗	0 극대	↘

함수 $g(x)=|f(x)|$는 $x=-1$에서 극댓값이 32이므로

$a=-1,\ m=32 \qquad \therefore\ a+m=31$

13 $f(x)=x^4-8x^2+5$에서

$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-11 극소	↗	5 극대	↘	-11 극소	↗

즉, $\mathrm{A}(0,\ 5),\ \mathrm{B}(-2,\ -11),\ \mathrm{C}(2,\ -11)$ 또는 $\mathrm{A}(0,\ 5)$, $\mathrm{B}(2,\ -11),\ \mathrm{C}(-2,\ -11)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\times 16=32$

14 $f(x)=2x^3-3x^2+ax+b$에서

$f'(x)=6x^2-6x+a$

$x=-1$에서 극댓값이 5이므로

$f'(-1)=0,\ f(-1)=5$

$f'(-1)=a+12=0$ …… ㉠

$f(-1)=-a+b-5=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-12,\ b=-2$

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2-12x-2$이므로

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5 극대	↘	-22 극소	↗

따라서 극솟값은 $f(2)=-22$

15 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
$x=-3$, $x=1$에서 극값을 가지므로
$f'(-3)=27-6a+b=0$ …… ㉠
$f'(1)=3+2a+b=0$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-9$
따라서 $f(x)=x^3+3x^2-9x+c$이므로
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$27+c$ 극대	↘	$-5+c$ 극소	↗

극댓값은 $27+c$, 극솟값은 $-5+c$이므로 그 차는
$(27+c)-(-5+c)=32$

16 $f(x)=x^3+3kx^2-9k^2x+1$에서
$f'(x)=3x^2+6kx-9k^2=3(x+3k)(x-k)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3k$ 또는 $x=k$
이때 $k>0$이므로 $-3k<k$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-3k$	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$27k^3+1$ 극대	↘	$-5k^3+1$ 극소	↗

극댓값은 $f(-3k)=27k^3+1$, 극솟값은
$f(k)=-5k^3+1$이고, 그 합이 24이므로
$27k^3+1+(-5k^3+1)=24$, $22k^3+2=24$
$k^3-1=0$, $(k-1)(k^2+k+1)=0$
$\therefore k=1\ (\because k>0)$

17 $f(x)=-x^3+3ax^2-4a$에서
$f'(x)=-3x^2+6ax=-3x(x-2a)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2a$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2a$에서 극값을 갖는다.
이때 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로
$f(0)=0$ 또는 $f(2a)=0$
그런데 $f(0)=-4a\neq0$이므로 $f(2a)=0$이어야 한다.
$-(2a)^3+3a\times(2a)^2-4a=0$
$4a^3-4a=0$, $4a(a+1)(a-1)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=1\ (\because a\neq0)$
따라서 모든 상수 a의 값의 곱은 $(-1)\times1=-1$

18 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는
$x=0$, $x=2$, $x=4$, $x=6$, $x=8$
$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	6	$\cdots$	8	$\cdots$	9
$f'(x)$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$		↗		↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$, $x=8$에서 극댓값을 가지므로
구하는 모든 x의 값의 합은 $4+8=12$

19 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는
$x=-3$, $x=1$, $x=3$
$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $-1<x<1$에서 $f'(x)>0$이므로 증가한다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x>3$에서 $f'(x)<0$이므로 감소한다.
ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극대이다.
ㄹ. 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극소이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

20 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는
$x=-2$, $x=0$, $x=3$, $x=5$
$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 증가한다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극소이다.
ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극대이므로 구간 $[-1, 4]$에서 극댓값은 1개이다.
ㄹ. 함수 $f(x)$는 $4<x<5$에서 $f'(x)<0$이므로 감소하고, $x>5$에서 $f'(x)>0$이므로 증가한다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

21 ㄱ. $f(1)=0$에서

$-1+a+b+c=0 \qquad \therefore a+b+c=1$

ㄴ. $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$x=0$, $x=2$의 좌우에서 $y=f'(x)$의 부호가 바뀌므로 $x=0$, $x=2$에서 극값을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$가 극값을 가지는 점은 2개이다.

ㄷ. $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 그래프에서

$f'(x)=-3x(x-2)=-3x^2+6x \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠=㉡이므로 $a=3$, $b=0$

$f(1)=-1+3+0+c=0 \qquad \therefore c=-2$

$\therefore f(x)=-x^3+3x^2-2$

$x=2$일 때 $f(x)$는 극댓값 $f(2)$를 가지므로 ($\because$ ㄴ)

$f(2)=2$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

22 $f(x)=-3x^4+4x^3+30x^2+36x+15$에서

$f'(x)=-12x^3+12x^2+60x+36$

$\quad =-12(x+1)^2(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↗	258 극대	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ③이다.

23 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$x=a$, $x=b$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ③이다.

24 $f(x)=x^3+ax^2+(a^2-4a)x+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+a^2-4a$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$f'(x)=0$의 판별식 $D>0$에서

$\frac{D}{4}=a^2-3(a^2-4a)>0$, $a(a-6)<0$

$\therefore 0<a<6$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

25 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(5a-4)x+3$에서

$f'(x)=x^2+2ax+5a-4$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식 $D\le0$에서

$\frac{D}{4}=a^2-5a+4\le0$, $(a-1)(a-4)\le0$

$\therefore 1\le a\le4$

따라서 $M=4$, $m=1$이므로 $M-m=3$

26 $f(x)=x^3+3x^2-3(a^2-9)x+1$에서

$f'(x)=3x^2+6x-3(a^2-9)$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식 $D\le0$에서

$\frac{D}{4}=9+9(a^2-9)\le0$

$a^2\le8 \qquad \therefore -2\sqrt{2}\le a\le2\sqrt{2}$

따라서 $\alpha=-2\sqrt{2}$, $\beta=2\sqrt{2}$이므로 $\alpha+\beta=0$

27 $f(x)=x^3-3ax^2+3x+1$에서

$f'(x)=3x^2-6ax+3$

함수 $f(x)$가 $-2<x<2$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 -2와 2 사이에 있어야 하므로

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 $D>0$에서

$\frac{D}{4}=9a^2-9>0$, $(a+1)(a-1)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $f'(-2)>0$에서

$12+12a+3>0 \qquad \therefore a>-\frac{5}{4} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

(iii) $f'(2)>0$에서

$12-12a+3>0 \qquad \therefore a<\frac{5}{4} \qquad \cdots\cdots$ ㉢

(iv) $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=a$이므로

$-2<a<2 \qquad \cdots\cdots$ ㉣

유형편

㉠~㉣을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$-\frac{5}{4}<a<-1$ 또는 $1<a<\frac{5}{4}$

따라서 실수 a의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

28 $f(x)=x^3+3(a-1)x^2-3(a-3)x+5$에서

$f'(x)=3x^2+6(a-1)x-3(a-3)$

함수 $f(x)$가 $x>0$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 모두 양수이어야 하므로

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식 $D>0$에서

$\frac{D}{4}=9(a-1)^2+9(a-3)>0$, $a^2-a-2>0$

$(a+1)(a-2)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>2$ …… ㉠

(ii) (두 근의 합)$=-2(a-1)>0$에서

$a<1$ …… ㉡

(iii) (두 근의 곱)$=-(a-3)>0$에서

$a<3$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는 $a<-1$

따라서 정수 a의 최댓값은 -2이다.

29 $f(x)=-x^3-kx^2+(k+8)x+1$에서

$f'(x)=-3x^2-2kx+k+8$

함수 $f(x)$가 $x<1$에서 극솟값을, $x>1$에서 극댓값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근 중 한 근은 1보다 작고, 다른 한 근은 1보다 커야 하므로

$f'(1)>0$에서

$-k+5>0$ $\quad\therefore k<5$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

30 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^3+ax^2+1$에서

$f'(x)=2x^3-3x^2+2ax=x(2x^2-3x+2a)$

함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $2x^2-3x+2a=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $x=0$이 이차방정식 $2x^2-3x+2a=0$의 근이 아니어야 하므로 $a\neq0$ …… ㉠

(ii) 이차방정식 $2x^2-3x+2a=0$의 판별식 $D>0$이어야 하므로

$D=9-16a>0$ $\quad\therefore a<\frac{9}{16}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{16}$

$\therefore \alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=\frac{9}{16}$ $\quad\therefore \alpha+\beta+\gamma=\frac{9}{16}$

31 $f(x)=x^4-4x^3+3ax^2$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+6ax=2x(2x^2-6x+3a)$

함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖거나 허근을 가져야 한다.

(i) $2x(2x^2-6x+3a)=0$이 중근을 갖는 경우

ⓘ 이차방정식 $2x^2-6x+3a=0$의 한 근이 $x=0$인 경우

$a=0$

ⓘⓘ 이차방정식 $2x^2-6x+3a=0$이 중근을 갖는 경우

$\frac{D}{4}=9-6a=0$ $\quad\therefore a=\frac{3}{2}$

(ii) $2x(2x^2-6x+3a)=0$이 허근을 갖는 경우

이차방정식 $2x^2-6x+3a=0$이 허근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=9-6a<0$ $\quad\therefore a>\frac{3}{2}$

(i), (ii)에 의해 $a=0$ 또는 $a\geq\frac{3}{2}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 2이다.

32 $f(x)=-x^4+4(a-1)x^3-2(a^2-1)x^2$에서

$f'(x)=-4x^3+12(a-1)x^2-4(a^2-1)x$

$=-4x\{x^2-3(a-1)x+a^2-1\}$

함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖거나 허근을 가져야 한다.

(i) $-4x\{x^2-3(a-1)x+a^2-1\}=0$이 중근을 갖는 경우

ⓘ 이차방정식 $x^2-3(a-1)x+a^2-1=0$의 한 근이 $x=0$인 경우

$a^2-1=0$ $\quad\therefore a=\pm1$

ⓘⓘ 이차방정식 $x^2-3(a-1)x+a^2-1=0$이 중근을 갖는 경우

$D=9(a-1)^2-4(a^2-1)=0$

$5a^2-18a+13=0$

$(a-1)(5a-13)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=\frac{13}{5}$

(ii) $-4x\{x^2-3(a-1)x+a^2-1\}=0$이 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-3(a-1)x+a^2-1=0$이 허근을 가져야 하므로

$D=9(a-1)^2-4(a^2-1)<0$

$5a^2-18a+13<0$

$(a-1)(5a-13)<0$

$\therefore 1<a<\frac{13}{5}$

(i), (ii)에 의해 $a=-1$ 또는 $1\leq a\leq\frac{13}{5}$

따라서 정수 a는 -1, 1, 2이므로 그 합은

$-1+1+2=2$

33 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

구간 $[-2, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	-3	↗	4 극대	↘	-28 극소	↗	-21

따라서 최댓값은 $f(-1)=4$, 최솟값은 $f(3)=-28$이므로

$M=4$, $m=-28$

$\therefore M-m=32$

34 $f(x)=-x^4+6x^2-8x+5$에서

$f'(x)=-4x^3+12x-8=-4(x+2)(x-1)^2$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=1$

구간 $(-\infty, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	29 극대	↘	2	↘

따라서 $x=-2$에서 최댓값이 29이므로

$a=-2$, $M=29$

$\therefore a+M=27$

35 $x^2+y^2=1$에서

$y^2=1-x^2$

y는 실수이므로 $y^2=1-x^2\ge0$

$x^2-1\le0$, $(x+1)(x-1)\le0$

$\therefore -1\le x\le1$

$f(x)=x^4+2y^2$이라 하면

$f(x)=x^4+2y^2=x^4+2(1-x^2)$

$\quad\;\; =x^4-2x^2+2$

$\therefore f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	1	↗	2 극대	↘	1

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 2, 최솟값은 1이므로 그 합은 $2+1=3$

36 $g(x)=t$라 하면

$t=g(x)=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$

$\therefore t\le4$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3-3t^2+2$이므로

$f'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$f'(t)=0$인 t의 값은 $t=0$ 또는 $t=2$

$t\le4$에서 함수 $f(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(t)$	↗	2 극대	↘	-2 극소	↗	18

따라서 함수 $f(t)$는 $t=4$, 즉 $x=2$에서 최댓값이 18이므로

$a=2$, $b=18$

$\therefore a+b=20$

37 $f(x)=-ax^3+3x^2$에서

$f'(x)=-3ax^2+6x=-3x(ax-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=\frac{2}{a}$

구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{a}$	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{a^2}$ 극대	↘	$-8a+12$

이때 $a>\frac{3}{2}$이므로 $-8a+12<0<\frac{4}{a^2}$

즉, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-8a+12$이므로

$-8a+12=-4 \qquad \therefore a=2$

따라서 최댓값은 $\frac{4}{a^2}=\frac{4}{4}=1$

38 $f(x)=x^3-6x^2+9x+k$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

구간 $[-1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$k-16$	↗	$k+4$ 극대	↘	k 극소	↗	$k+4$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $k+4$, 최솟값은 $k-16$이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$k+4+k-16=10 \qquad \therefore k=11$

유형편

39 $f(x)=ax^3-3ax^2+b$에서

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-4a+b$	↗	b 극대	↘	$-4a+b$

이때 a, b는 양수이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 b, 최솟값은 $-4a+b$이다.

따라서 $b=5$, $-4a+b=-15$이므로

$a=5$, $b=5$

$\therefore a+b=10$

40 점 P의 좌표를 (a, a^2-1), 점 P와 점 $(0, 2)$ 사이의 거리를 l이라 하면

$l=\sqrt{a^2+(a^2-3)^2}=\sqrt{a^4-5a^2+9}$

$l^2=f(a)=a^4-5a^2+9$라 하면

$f'(a)=4a^3-10a=2a(2a^2-5)$

$f'(a)=0$인 a의 값은

$a=-\frac{\sqrt{10}}{2}$ 또는 $a=0$ 또는 $a=\frac{\sqrt{10}}{2}$

함수 $f(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(a)$	↘	$\frac{11}{4}$ 극소	↗	9 극대	↘	$\frac{11}{4}$ 극소	↗

따라서 $f(a)$의 최솟값은

$f\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=\frac{11}{4}$

따라서 구하는 거리의 최솟값은 $\frac{\sqrt{11}}{2}$이다.

41 $-x(x-3)=x$에서 $x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$ $\qquad\therefore x=0$ 또는 $x=2$

$\therefore$ O$(0, 0)$, A$(2, 2)$

점 P의 좌표를 $(a, -a^2+3a)$라 하면

$\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$

$=a^2+(-a^2+3a)^2+(a-2)^2+(-a^2+3a-2)^2$

$=2a^4-12a^3+24a^2-16a+8$

$l(a)=2a^4-12a^3+24a^2-16a+8$이라 하면

$l'(a)=8a^3-36a^2+48a-16=4(2a-1)(a-2)^2$

$l'(a)=0$인 a의 값은 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$

함수 $l(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$l'(a)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$l(a)$	↘	$\frac{37}{8}$ 극소	↗	8	↗

따라서 $l(a)=\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$의 최솟값은 $l\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{37}{8}$

42 원의 중심을 C$(6, 0)$, 점 P의 좌표를 $(x, -x^2+3)$이라 하면 원의 반지름의 길이가 1이므로 $\overline{PQ}\geq\overline{PC}-1$

이때 $\overline{PC}-1=l$이라 하면

$l=\sqrt{(x-6)^2+(-x^2+3)^2}-1$

$\ =\sqrt{x^4-5x^2-12x+45}-1$

$f(x)=x^4-5x^2-12x+45$라 하면

$f'(x)=4x^3-10x-12$

$\qquad=2(x-2)(2x^2+4x+3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$($\because$ x는 실수)

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

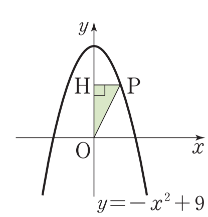
x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	17 극소	↗

따라서 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=17$이므로

$\overline{PQ}$의 최솟값은 $\sqrt{17}-1$

$\therefore a=17$, $b=-1$ $\qquad\therefore a+b=16$

43 점 P의 좌표를 $(a, -a^2+9)$ $(0<a<3)$라 하면



$\overline{OH}=-a^2+9$, $\overline{HP}=a$

$\triangle$OPH의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}(-a^2+9)a$

$\qquad=-\frac{1}{2}a^3+\frac{9}{2}a$

$\therefore S'(a)=-\frac{3}{2}a^2+\frac{9}{2}=-\frac{3}{2}(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})$

$S'(a)=0$인 a의 값은 $a=\sqrt{3}$($\because 0<a<3$)

$0<a<3$에서 함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$3\sqrt{3}$ 극대	↘	

따라서 넓이 $S(a)$의 최댓값은 $S(\sqrt{3})=3\sqrt{3}$

44 점 B의 좌표를 $(a,\ -a^2+6a)$ $(3<a<6)$라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\mathrm{H}(a,\ 0)$이므로
$\overline{\mathrm{OA}}=6,\ \overline{\mathrm{BC}}=2a-6,\ \overline{\mathrm{BH}}=-a^2+6a$
사다리꼴 OABC의 넓이를 $S(a)$라 하면
$S(a)=\frac{1}{2}(2a-6+6)(-a^2+6a)=-a^3+6a^2$
$\therefore\ S'(a)=-3a^2+12a=-3a(a-4)$
$S'(a)=0$인 a의 값은 $a=4\ (\because\ 3<a<6)$
$3<a<6$에서 함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	3	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	32 극대	↘	

따라서 넓이 $S(a)$의 최댓값은 $S(4)=32$

45 점 P의 좌표를 $(a,\ a(a-2)^2)$ $(0<a<2)$라 하면
$\overline{\mathrm{OH}}=a,\ \overline{\mathrm{PH}}=a(a-2)^2$
□OHPQ의 넓이를 $S(a)$라 하면
$S(a)=a\times a(a-2)^2=a^4-4a^3+4a^2$
$\therefore\ S'(a)=4a^3-12a^2+8a=4a(a-1)(a-2)$
$S'(a)=0$인 a의 값은 $a=1\ (\because\ 0<a<2)$
$0<a<2$에서 함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	1 극대	↘	

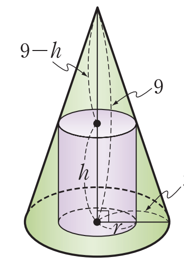
따라서 넓이 $S(a)$의 최댓값은 $S(1)=1$

46 잘라 낼 정사각형의 한 변의 길이를 $x$cm라 하면 상자의 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이는 $(12-2x)$cm
이때 $x>0,\ 12-2x>0$이어야 하므로 $0<x<6$
상자의 부피를 $V(x)\mathrm{cm}^3$라 하면
$V(x)=x(12-2x)^2=4x^3-48x^2+144x$
$\therefore\ V'(x)=12x^2-96x+144=12(x-2)(x-6)$
$V'(x)=0$인 x의 값은 $x=2\ (\because\ 0<x<6)$
$0<x<6$에서 함수 $V(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	128 극대	↘	

따라서 상자의 부피 $V(x)$가 최대일 때, 잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이는 2cm이다.

47 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면

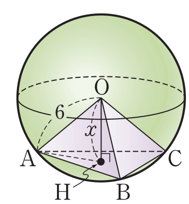


$3:9=r:(9-h)$
$9r=3(9-h)\qquad\therefore\ h=9-3r$
이때 $r>0,\ h=9-3r>0$이므로
$0<r<3$
원기둥의 부피를 $V(r)$라 하면
$V(r)=\pi r^2h=\pi r^2(9-3r)=-3\pi(r^3-3r^2)$
$\therefore\ V'(r)=-3\pi(3r^2-6r)=-9\pi r(r-2)$
$V'(r)=0$인 r의 값은 $r=2\ (\because\ 0<r<3)$
$0<r<3$에서 함수 $V(r)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$V'(r)$		+	0	−	
$V(r)$		↗	12π 극대	↘	

따라서 원기둥의 부피 $V(r)$의 최댓값은 $V(2)=12\pi$

48 오른쪽 그림과 같이 중심 O에서 △ABC에 내린 수선의 발을 H, $\overline{\mathrm{OH}}=x$라 하면



$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{36-x^2}$ (단, $0<x<6$)
H는 △ABC의 무게중심이므로
△ABC의 높이는 $\frac{3}{2}\overline{\mathrm{AH}}=\frac{3}{2}\sqrt{36-x^2}$
△ABC의 한 변의 길이를 a라 하면
$\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{3}{2}\sqrt{36-x^2}\qquad\therefore\ a=\sqrt{3(36-x^2)}$
따라서 삼각뿔 OABC의 부피를 $V(x)$라 하면
$$V(x)=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times x$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{12}\times3(36-x^2)x=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x^3-36x)$$
$$\therefore\ V'(x)=-\frac{\sqrt{3}}{4}(3x^2-36)$$
$$=-\frac{3\sqrt{3}}{4}(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})$$
$V'(x)=0$인 x의 값은 $x=2\sqrt{3}\ (\because\ 0<x<6)$
$0<x<6$에서 함수 $V(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$2\sqrt{3}$	$\cdots$	6
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	36 극대	↘	

따라서 삼각뿔 OABC의 부피 $V(x)$의 최댓값은
$V(2\sqrt{3})=36$

03 방정식과 부등식, 속도와 가속도

기초 문제 Training p.43

1 (1)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	14	$\searrow$	-13	$\nearrow$

(2) **3**

2 (1)

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	7	$\searrow$	-9	$\nearrow$

(2) **4**

3 (1) **3** (2) **2** (3) **1**

4 **-1, 0, 1, 1**

5 **0, 2, 0**

6 (1) **24** (2) **-4** (3) **-8**

핵심 유형 Training p.44~50

1 3 **2** ③ **3** 2 **4** $-2<a<2$ **5** ③
6 24 **7** 1 **8** ② **9** ① **10** ③ **11** ②
12 ② **13** ⑤ **14** ④ **15** $a\geq 24$ **16** 3
17 ③ **18** ① **19** ⑤ **20** ④ **21** ⑤ **22** ③
23 -3 **24** 22 **25** ① **26** -25 **27** 7 **28** -2
29 ③ **30** 4 **31** ④ **32** ④ **33** ③ **34** ⑤
35 ㄱ, ㄴ, ㄷ **36** 48m **37** ④ **38** 0.9m/s
39 34 **40** $2\pi\,\mathrm{m^2/s}$ **41** ⑤ **42** ① **43** ②
44 $192\,\mathrm{cm^3/s}$ **45** ④

1 $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+5$라 하면

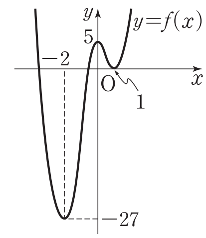
$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-27 극소	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



2 $f(x)=x^3+3x^2+1$이라 하면

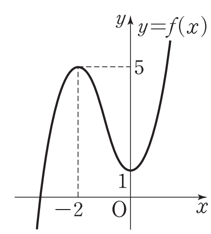
$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	1 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. $\therefore a=1$



$g(x)=2x^3-6x+1$이라 하면

$g'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

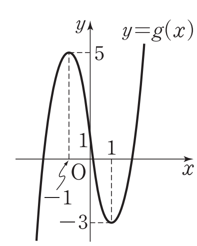
$g'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $g(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	-3 극소	$\nearrow$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. $\therefore b=3$

$\therefore a+b=4$



다른 풀이

위의 표에서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-2)=5$, 극솟값은 $f(0)=1$이므로 $f(-2)f(0)=5>0$

따라서 삼차방정식 $f(x)=0$은 한 실근과 두 허근을 가지므로 서로 다른 실근의 개수는 1이다. $\therefore a=1$

위의 표에서 함수 $g(x)$의 극댓값은 $g(-1)=5$, 극솟값은 $g(1)=-3$이므로 $g(-1)g(1)=-15<0$

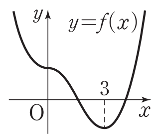
따라서 삼차방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가지므로 서로 다른 실근의 개수는 3이다. $\therefore b=3$

$\therefore a+b=4$

3 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는
$x=0$, $x=3$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$+$	$\searrow$	$-$ 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



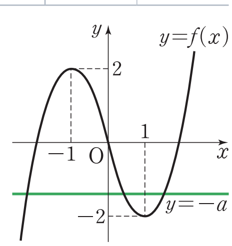
4 $f(x)=x^3-3x+a$라 하면
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$
삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면
(극댓값)$\times$(극솟값)<0이어야 하므로
$f(-1)f(1)=(a+2)(a-2)<0$ $\quad\therefore -2<a<2$

다른 풀이

$x^3-3x+a=0$에서 $x^3-3x=-a$
$f(x)=x^3-3x$라 하면
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2 극대	$\searrow$	-2 극소	$\nearrow$

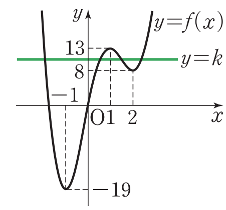
함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=-a$와 서로 다른 세 점에서 만나려면 $-2<-a<2$
$\therefore -2<a<2$



5 $3x^4-8x^3-6x^2+24x-k=0$에서
$3x^4-8x^3-6x^2+24x=k$
$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$라 하면
$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$
$\quad=12(x+1)(x-1)(x-2)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-19 극소	$\nearrow$	13 극대	$\searrow$	8 극소	$\nearrow$

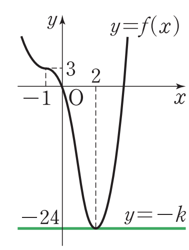
함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와 서로 다른 네 점에서 만나려면
$8<k<13$
따라서 정수 k는 9, 10, 11, 12의 4개이다.



6 $x^4-6x^2-8x+k=0$에서
$x^4-6x^2-8x=-k$
$f(x)=x^4-6x^2-8x$라 하면
$f'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	3	$\searrow$	-24 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와 한 점에서 만나려면
$-k=-24$
$\therefore k=24$



7 $y=x^3+1$에서 $y'=3x^2$
점 A$(1, a)$에서 이 곡선에 그은 접점의 좌표를 (t, t^3+1)이라 하면 접선의 방정식은
$y-(t^3+1)=3t^2(x-t)$
$\therefore y=3t^2x-2t^3+1$
이 접선이 점 A$(1, a)$를 지나므로
$a=3t^2-2t^3+1$
$\therefore 2t^3-3t^2+a-1=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
점 A에서 주어진 곡선에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
$f(t)=2t^3-3t^2+a-1$이라 하면
$f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$
$f'(t)=0$인 t의 값은 $t=0$ 또는 $t=1$
삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면
(극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이어야 하므로
$f(0)f(1)=(a-1)(a-2)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $a=2$
그런데 $a=2$이면 점 A$(1, 2)$는 곡선 위의 점이므로
$a=1$

8 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $-x^3+6x^2=9x+k$, 즉 $x^3-6x^2+9x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
$f(x)=x^3-6x^2+9x+k$라 하면
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$
삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면
(극댓값)$\times$(극솟값)<0이어야 하므로
$f(1)f(3)=(4+k)k<0 \qquad \therefore\ -4<k<0$

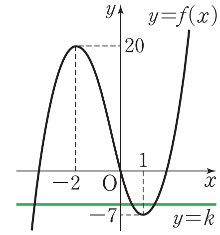
9 주어진 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $x^3-\frac{1}{2}x^2-3x+a=x^2-3x$, 즉 $x^3-\frac{3}{2}x^2+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+a$라 하면
$f'(x)=3x^2-3x=3x(x-1)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$
삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면
(극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이어야 하므로
$f(0)f(1)=a\left(a-\frac{1}{2}\right)=0$
$\therefore\ a=\frac{1}{2}\,(\because\ a>0)$

10 주어진 두 곡선이 한 점에서 만나려면 방정식
$-4x^3+x+15=12x^2+x+k$, 즉
$4x^3+12x^2+k-15=0$이 한 실근만을 가져야 한다.
$f(x)=4x^3+12x^2+k-15$라 하면
$f'(x)=12x^2+24x=12x(x+2)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$
삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근만을 가지려면
(극댓값)$\times$(극솟값)>0이어야 하므로
$f(-2)f(0)=(k+1)(k-15)>0$
$\therefore\ k<-1$ 또는 $k>15$
따라서 자연수 k의 최솟값은 16이다.

11 $2x^3+3x^2-12x-k=0$에서
$2x^3+3x^2-12x=k$
$f(x)=2x^3+3x^2-12x$라 하면
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20 극대	↘	-7 극소	↗

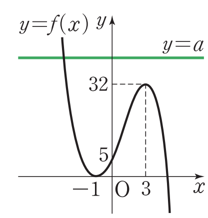
함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수인 k의 값의 범위는
$-7<k<0$



12 $2x^2+9x+5=x^3-x^2+a$에서
$-x^3+3x^2+9x+5=a$
$f(x)=-x^3+3x^2+9x+5$라 하면
$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0 극소	↗	32 극대	↘

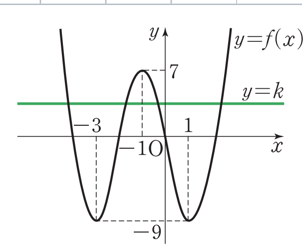
함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=a$와의 교점이 한 개이고 교점의 x좌표가 음수인 a의 값의 범위는
$a>32$
따라서 정수 a의 최솟값은 33이다.



13 $x^4+4x^3=2x^2+12x+k$에서
$x^4+4x^3-2x^2-12x=k$
$f(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x$라 하면
$f'(x)=4x^3+12x^2-4x-12$
$\qquad=4(x+3)(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$인 x의 값은
$x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-9 극소	↗	7 극대	↘	-9 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 세 개는 음수인 k의 값의 범위는
$0<k<7$
따라서 $\alpha=0$, $\beta=7$이므로
$\alpha+\beta=7$



14 $f(x)=x^4-4x-k^2+4k$라 하면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$($\because$ x는 실수)

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-k^2+4k-3$ 극소	$\nearrow$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이 성립하려면

$(f(x)$의 최솟값$)>0 \Rightarrow f(1)=-k^2+4k-3>0$

$k^2-4k+3<0$, $(k-1)(k-3)<0$

$\therefore$ $1<k<3$

15 $x^4-4x^2+a\ge 2x^2+8x$에서

$x^4-6x^2-8x+a\ge 0$

$f(x)=x^4-6x^2-8x+a$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$a+3$	$\searrow$	$a-24$ 극소	$\nearrow$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$(f(x)$의 최솟값$)\ge 0 \Rightarrow f(2)=a-24\ge 0$

$\therefore$ $a\ge 24$

16 $f(x)=x^4+2ax^2-4(a+1)x+a^2$이라 하면

$f'(x)=4x^3+4ax-4(a+1)$

$\qquad=4(x-1)(x^2+x+1+a)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$($\because$ $a>0$, x는 실수)

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	a^2-2a-3 극소	$\nearrow$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$(f(x)$의 최솟값$)\ge 0 \Rightarrow f(1)=a^2-2a-3\ge 0$

$(a+1)(a-3)\ge 0$ $\qquad\therefore$ $a\ge 3$($\because$ $a>0$)

따라서 양수 a의 최솟값은 3이다.

17 $4k^3x\le x^4+12$에서

$-x^4+4k^3x-12\le 0$

$f(x)=-x^4+4k^3x-12$라 하면

$f'(x)=-4x^3+4k^3=-4(x-k)(x^2+kx+k^2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=k$ ($\because$ x는 실수)

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$3k^4-12$ 극대	$\searrow$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le 0$이 성립하려면

$(f(x)$의 최댓값$)\le 0 \Rightarrow 3k^4-12\le 0$

$k^4-4\le 0$

$(k^2+2)(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})\le 0$

$(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})\le 0$($\because$ $k^2+2>0$)

$\therefore$ $-\sqrt{2}\le k\le\sqrt{2}$

따라서 정수 k는 -1, 0, 1의 3개이다.

18 $f(x)=x^3-6x^2+9x-4-k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$-k$ 극대	$\searrow$	$-4-k$ 극소	$\nearrow$

따라서 $x>0$일 때, $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$(f(x)$의 최솟값$)\ge 0 \Rightarrow f(3)=-4-k\ge 0$

$\therefore$ $k\le -4$

따라서 k의 최댓값은 -4이다.

19 $f(x)=4x^3-3x^2-6x+a$라 하면

$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$-1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$a-1$	$\nearrow$	$a+\frac{7}{4}$ 극대	$\searrow$	$a-5$ 극소	$\nearrow$	$a+8$

따라서 $-1\le x\le 2$일 때, $f(x)>0$이 성립하려면

$(f(x)$의 최솟값$)>0 \Rightarrow f(1)=a-5>0$

$\therefore$ $a>5$

20 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k$라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=0$($\because$ $-2\le x\le 0$)

유형편

$-2\le x\le 0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$k+32$	$\searrow$	$k-5$ 극소	$\nearrow$	k

따라서 $-2\le x\le 0$일 때, $0\le f(x)<40$이 성립하려면
$(f(x)$의 최솟값$)\ge 0$, $(f(x)$의 최댓값$)<40$
➡ $f(-1)=k-5\ge 0$, $f(-2)=k+32<40$
$\therefore 5\le k<8$
따라서 정수 k는 5, 6, 7이므로 그 합은
$5+6+7=18$

21 $f(x)=x^3+2x+k$라 하면 $f'(x)=3x^2+2$
모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x>-1$에서 증가한다.
따라서 $x>-1$일 때, $f(x)>0$이 성립하려면 $f(-1)\ge 0$이어야 하므로
$f(-1)=-3+k\ge 0 \qquad \therefore k\ge 3$

22 $2x^3-2x^2+x+3<k$에서 $2x^3-2x^2+x+3-k<0$
$f(x)=2x^3-2x^2+x+3-k$라 하면
$f'(x)=6x^2-4x+1$
모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x<3$에서 증가한다.
$x<3$일 때, $f(x)<0$이 성립하려면 $f(3)\le 0$이어야 하므로
$f(3)=42-k\le 0 \qquad \therefore k\ge 42$
따라서 k의 최솟값은 42이다.

23 $4x^3-6x<3x^2-3k$에서 $4x^3-3x^2-6x+3k<0$
$f(x)=4x^3-3x^2-6x+3k$라 하면
$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$
$1<x<2$일 때, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $1<x<2$에서 증가한다.
$1<x<2$일 때, $f(x)<0$이 성립하려면 $f(2)\le 0$이어야 하므로
$f(2)=8+3k\le 0 \qquad \therefore k\le -\frac{8}{3}$
따라서 정수 k의 최댓값은 -3이다.

24 $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$이라 하면
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
$0<x<2$일 때, $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 $0<x<2$에서 감소한다.
따라서 $0<x<2$일 때, $a<f(x)<b$가 성립하려면
$f(0)\le b$, $f(2)\ge a$이어야 하므로
$f(0)=1\le b$, $f(2)=-21\ge a \qquad \therefore a\le -21,\ b\ge 1$
따라서 $b-a$의 최솟값은 $1-(-21)=22$이다.

25 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)>0$이어야 한다.
$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(x)=3x^4-6x^2-8x-(-4x^3+4x+a)$
$=3x^4+4x^3-6x^2-12x-a$
$\therefore h'(x)=12x^3+12x^2-12x-12$
$=12(x+1)^2(x-1)$
$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $h(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$5-a$	$\searrow$	$-11-a$ 극소	$\nearrow$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $h(x)=f(x)-g(x)>0$이 성립하려면
$(h(x)$의 최솟값$)>0$ ➡ $h(1)=-11-a>0$
$\therefore a<-11$

26 구간 $[0, 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있으려면 $f(x)<g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)<0$이어야 한다.
$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(x)=-5x^3+7x^2+4-(-8x^2-k)$
$=-5x^3+15x^2+4+k$
$\therefore h'(x)=-15x^2+30x=-15x(x-2)$
$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=2\ (\because 0<x<3)$
구간 $[0, 3]$에서 함수 $h(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$h'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$h(x)$	$k+4$	$\nearrow$	$k+24$ 극대	$\searrow$	$k+4$

구간 $[0, 3]$에서 $h(x)=f(x)-g(x)<0$이 성립하려면
$(h(x)$의 최댓값$)<0$ ➡ $h(2)=k+24<0$
$\therefore k<-24$
따라서 정수 k의 최댓값은 -25이다.

27 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\le g(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$의 최댓값이 함수 $g(x)$의 최솟값보다 작거나 같아야 한다.
$f(x)=-x^2+4x-a=-(x-2)^2+4-a$이므로
함수 $f(x)$의 최댓값은 $4-a$이다.

$g(x)=x^4+x^2-6x+1$에서

$g'(x)=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3)$

$g'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because$ x는 실수)

함수 $g(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	-3 극소	$\nearrow$

함수 $g(x)$의 최솟값은 -3이다.

($f(x)$의 최댓값)$\le$($g(x)$의 최솟값)에서

$4-a\le-3$ $\quad\therefore a\ge7$

따라서 a의 최솟값은 7이다.

28 점 P가 원점을 지나면 $x=0$이므로

$t^3-5t^2+6t=0$, $t(t-2)(t-3)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=3$ ($\because$ $t>0$)

즉, 점 P가 출발한 후 처음으로 원점을 지날 때는 $t=2$일 때이다.

시각 t에서 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-10t+6$

따라서 $t=2$일 때, 점 P의 속도는

$3\times2^2-10\times2+6=-2$

29 시각 t에서 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=2t^2+2kt$, $a=\dfrac{dv}{dt}=4t+2k$

$t=2$일 때, $v=20$이므로

$2\times2^2+2k\times2=20$ $\quad\therefore k=3$

따라서 $t=2$일 때, 점 P의 가속도는

$4\times2+2\times3=14$

30 시각 t에서 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-3t^2+12t-9=-3(t-1)(t-3)$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$-3(t-1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$t=1$일 때, 점 P의 위치는

$x_A=-1^3+6\times1^2-9\times1+1=-3$

$t=3$일 때, 점 P의 위치는

$x_B=-3^3+6\times3^2-9\times3+1=1$

따라서 두 점 x_A, x_B 사이의 거리는

$|x_A-x_B|=|-3-1|=4$

31 시각 t에서 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=t^2-4t-5=(t-2)^2-9$

즉, $0\le t\le6$에서 최댓값이 7, 최솟값이 -9이므로

$-9\le v\le7$

이때 점 P의 속력은 $|v|$이므로

$0\le|v|\le9$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 9이다.

32 ㄱ. 가속도는 $v'(t)$이므로 속도 $v(t)$의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

주어진 그래프에서 $v'(t)=0$인 t의 값은

$t=a$ 또는 $t=c$ 또는 $t=e$

따라서 가속도가 0이 되는 순간이 세 번 있다.

ㄴ. $v(t)=0$이고 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 운동 방향이 바뀌는 시각은

$t=b$ 또는 $t=d$

따라서 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾼다.

ㄷ. $v(a)>0$, $v(c)<0$이므로 $t=a$일 때와 $t=c$일 때의 운동 방향은 서로 반대이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

33 주어진 그래프에서 점 P가 원점을 지나는 시각은

$t=b$ 또는 $t=d$

처음으로 원점을 지나는 순간은 $t=b$이고, 점 P의 속도는 $f'(t)$이므로 구하는 속도는 $f'(b)$이다.

34 물체의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=30-10t$

최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$30-10t=0$

$\therefore t=3$

따라서 $t=3$일 때 높이는

$h=25+30\times3-5\times3^2=70$(m)

35 물체의 t초 후의 속도를 v m/s, 가속도를 a m/s^{2}이라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=20-10t$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-10$

ㄱ. 가속도 a는 상수이므로 물체의 가속도는 일정하다.

ㄴ. 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$20-10t=0$ $\quad\therefore t=2$

ㄷ. 물체가 다시 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로

$20t-5t^2=0$, $-5t(t-4)=0$

$\therefore t=4$ ($\because$ $t>0$)

따라서 $t=4$일 때, 물체의 속도는

$20-10\times4=-20$(m/s)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

36 브레이크를 밟은 지 t초 후의 자동차의 속도를 vm/s라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=24-6t$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$24-6t=0 \qquad \therefore t=4$

따라서 4초 동안 자동차가 달린 거리는

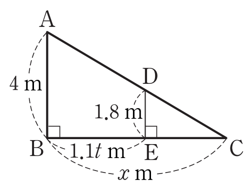
$24\times4-3\times4^2=48(\mathrm{m})$

37 $l=2t^2+3t+10$에서 $\dfrac{dl}{dt}=4t+3$

따라서 $t=1$일 때 고무줄의 길이의 변화율은

$4\times1+3=7(\mathrm{cm/s})$

38 사람이 1.1m/s의 속도로 움직이므로 t초 동안 움직이는 거리는 $1.1t$m



그림자 끝이 t초 동안 움직이는 거리를 xm라 하면 오른쪽 그림에서 $\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{DEC}$이므로

$4:x=1.8:(x-1.1t)$

$1.8x=4x-4.4t \qquad \therefore x=2t$

그림자의 길이를 lm라 하면 $l=\overline{\mathrm{EC}}$이므로

$l=2t-1.1t=0.9t$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 $\dfrac{dl}{dt}=0.9(\mathrm{m/s})$

39 t초 후의 점 P의 좌표는 $(t,\ 0)$, 점 Q의 좌표는 $(0,\ 2(t-2))\ (t\geq2)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=l$이라 하면

$l=t^2+4(t-2)^2=5t^2-16t+16 \qquad \therefore \dfrac{dl}{dt}=10t-16$

따라서 $t=5$에서 l의 변화율은 $10\times5-16=34$

40 t초 후의 원의 반지름의 길이는 $0.5t$m이므로 원의 넓이를 Sm^{2}라 하면

$S=\pi(0.5t)^2=0.25\pi t^2 \qquad \therefore \dfrac{dS}{dt}=0.5\pi t$

따라서 $t=4$에서 원의 넓이의 변화율은

$0.5\pi\times4=2\pi(\mathrm{m^2/s})$

41 t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는 $(1+2t)$cm이므로 정삼각형의 넓이를 Scm^{2}라 하면

$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(1+2t)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(4t^2+4t+1)$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(8t+4)=\sqrt{3}(2t+1)$

따라서 $t=5$에서 정삼각형의 넓이의 변화율은

$\sqrt{3}(2\times5+1)=11\sqrt{3}(\mathrm{cm^2/s})$

42 시각 t에서 직사각형의 한 변의 길이는 $10+t$, 다른 한 변의 길이는 $10-2t$이므로 $0<t<5$

시각 t에서 직사각형의 넓이를 S라 하면

$S=(10+t)(10-2t)=-2t^2-10t+100$

직사각형의 넓이가 28이면

$-2t^2-10t+100=28,\ t^2+5t-36=0$

$(t+9)(t-4)=0$

$\therefore t=4\ (\because\ 0<t<5)$

시각 t에 대한 넓이 S의 변화율은

$\dfrac{dS}{dt}=-4t-10$

따라서 $t=4$에서 직사각형의 넓이의 변화율은

$-4\times4-10=-26$

43 t초 후의 풍선의 반지름의 길이는 $(1+0.5t)$cm이므로 풍선의 부피를 Vcm^{3}라 하면

$V=\dfrac{4}{3}\pi(1+0.5t)^3$

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=\dfrac{4}{3}\pi\times3(1+0.5t)^2\times0.5=2\pi(1+0.5t)^2$

따라서 $t=6$에서 풍선의 부피의 변화율은

$2\pi(1+0.5\times6)^2=32\pi(\mathrm{cm^3/s})$

44 t초 후의 정육면체의 각 모서리의 길이는 $(5+t)$cm이므로 정육면체의 부피를 Vcm^{3}라 하면

$V=(t+5)^3=t^3+15t^2+75t+125$

정육면체의 부피가 512cm^{3}이면

$t^3+15t^2+75t+125=512,\ (t-3)(t^2+18t+129)=0$

$\therefore t=3\ (\because\ t$는 실수$)$

시각 t에 대한 부피 V의 변화율은

$\dfrac{dV}{dt}=3t^2+30t+75$

따라서 $t=3$에서 정육면체의 부피의 변화율은

$3\times3^2+30\times3+75=192(\mathrm{cm^3/s})$

45 t초 후의 원뿔의 반지름의 길이는 $(10+t)$cm, 높이는 $(20-t)$cm이므로

$0<t<20$

원뿔의 부피를 Vcm^{3}라 하면

$V=\dfrac{\pi}{3}(10+t)^2(20-t)=-\dfrac{\pi}{3}(t^3-300t-2000)$

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=-\dfrac{\pi}{3}(3t^2-300)=-\pi(t+10)(t-10)$

이때 원뿔의 부피가 증가에서 감소로 바뀌는 순간은 $\dfrac{dV}{dt}$의 부호가 양에서 음으로 바뀌는 순간이므로 $t=10$

따라서 $t=10$일 때 원뿔의 부피는

$-\dfrac{\pi}{3}(10^3-300\times10-2000)=\dfrac{4000}{3}\pi(\mathrm{cm^3})$

Ⅲ-1. 부정적분과 정적분

01 부정적분

기초 문제 Training

p.52

1 (1) $\mathbf{2x-1}$ (2) $\mathbf{x^2-x+C}$

2 (1) $\mathbf{f(x)=2}$ (2) $\mathbf{f(x)=8x+3}$
(3) $\mathbf{f(x)=-x^2+10x-1}$
(4) $\mathbf{f(x)=4x^3-6x^2+6x+7}$

3 (1) $\mathbf{\frac{1}{2}x^2-3x+C}$ (2) $\mathbf{\frac{1}{2}x^2-3x}$

4 (1) $\mathbf{3x+C}$ (2) $\mathbf{\frac{1}{5}x^5+C}$
(3) $\mathbf{\frac{1}{15}x^{15}+C}$ (4) $\mathbf{\frac{1}{151}x^{151}+C}$

5 (1) $\mathbf{\frac{7}{2}x^2+C}$ (2) $\mathbf{\frac{5}{2}x^2+2x+C}$
(3) $\mathbf{x^3-2x^2+x+C}$ (4) $\mathbf{\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+3x+C}$

6 (1) $\mathbf{\frac{1}{3}x^3-x^2+x+C}$ (2) $\mathbf{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x+C}$
(3) $\mathbf{\frac{1}{4}x^4+x+C}$ (4) $\mathbf{\frac{1}{2}x^2-x+C}$

핵심 유형 Training

p.53~57

1 4	**2** -5	**3** 44	**4** ㄱ	**5** ③	**6** ④
7 ⑤	**8** 8	**9** ⑤	**10** ③	**11** 25	**12** 29
13 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+4x-\frac{10}{3}$				**14** 17	**15** 2
16 0	**17** ③	**18** $f(x)=\frac{3}{2}x^2+4x-\frac{11}{2}$			**19** ④
20 ②	**21** ⑤	**22** 12	**23** -4	**24** 3	**25** -16
26 14	**27** ③	**28** 10	**29** ①	**30** -4	**31** 6
32 ④	**33** 1	**34** 22			

1 $(2x^3-4x^2+C)'=xf(x)$이므로
$xf(x)=(2x^3-4x^2+C)'$
$=6x^2-8x=x(6x-8)$
따라서 $f(x)=6x-8$이므로
$f(2)=12-8=4$

2 $f(x)=F'(x)=(x^4+ax^2+bx)'$
$=4x^3+2ax+b$
$f(0)=2$이므로 $b=2$
따라서 $f(x)=4x^3+2ax+2$이므로
$f'(x)=12x^2+2a$
$f'(1)=4$이므로
$12+2a=4$ $\quad\therefore a=-4$
$\therefore F(x)=x^4-4x^2+2x$
$\therefore F(-1)=1-4-2=-5$

3 $\{f(x)g(x)\}'=F(x)$이므로
$F(x)=\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$=2x(3x^2+x)+(x^2-1)(6x+1)$
$=12x^3+3x^2-6x-1$
$\therefore F(1)=12+3-6-1=8$
$F'(x)=36x^2+6x-6$이므로
$F'(1)=36+6-6=36$
$\therefore F(1)+F'(1)=8+36=44$

4 ㄱ. $F'(x)=f(x)$이므로
$\{F(x)+x\}'=f(x)+1$
$\therefore \int\{f(x)+1\}\,dx=F(x)+x+C$
ㄴ. $\{xF(x)\}'=F(x)+xf(x)$이므로
$\int\{F(x)+xf(x)\}\,dx=xF(x)+C$
ㄷ. $\{F(x)\}^2=F(x)F(x)$이므로
$[\{F(x)\}^2]'=F'(x)F(x)+F(x)F'(x)$
$=2F'(x)F(x)=2f(x)F(x)$
$\therefore \left[\frac{1}{2}\{F(x)\}^2\right]'=F(x)f(x)$
$\therefore \int F(x)f(x)\,dx=\frac{1}{2}\{F(x)\}^2+C$
따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

5 $F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3-4x)\right\}dx$
$=x^3-4x+C$
$F(1)=3$이므로
$1-4+C=3$ $\quad\therefore C=6$
따라서 $F(x)=x^3-4x+6$이므로
$F(-1)=-1+4+6=9$

6 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+4x-1)\right\}dx$
$=x^2+4x-1+C$
$=(x+2)^2+C-5$

유형편

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 2이므로

$C-5=2$ $\quad\therefore C=7$

따라서 $f(x)=x^2+4x+6$이므로

$f(2)=4+8+6=18$

7 $F(x)=\int\left[\frac{d}{dx}\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]dx$

$=\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+C_1\}\right]dx$

$=f(x)+C_2$

$=20x^{20}+19x^{19}+18x^{18}+\cdots+2x^2+x+C_2$

$F(0)=5$이므로 $F(0)=C_2=5$

따라서 $F(x)=20x^{20}+19x^{19}+18x^{18}+\cdots+2x^2+x+5$이므로

$F(1)=20+19+18+\cdots+2+1+5$

$=\frac{20\times21}{2}+5=215$

8 $\frac{d}{dx}\left\{\int(x^2+4x+a)\,dx\right\}=x^2+4x+a$이므로

$x^2+4x+a=bx^2+cx+3$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$b=1,\ c=4,\ a=3$ $\quad\therefore a+b+c=8$

9 $f(x)=\int(9x^2+3x+2)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=9x^2+3x+2$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=9+3+2=14$

10 $f(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int(x^2+6x+k)\,dx\right\}$

$=x^2+6x+k$

$=(x+3)^2+k-9$

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 -1이므로

$k-9=-1$ $\quad\therefore k=8$

11 $\frac{d}{dx}\left\{\int(x-1)f(x)\,dx\right\}=(x-1)f(x)$이므로

$(x-1)f(x)=4x^3-x^2+k$

위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=4-1+k$ $\quad\therefore k=-3$

$(x-1)f(x)=4x^3-x^2-3=(x-1)(4x^2+3x+3)$이므로

$f(x)=4x^2+3x+3$

$\therefore f(2)=16+6+3=25$

12 $f(x)=\int(4x^3+3x^2+2x+1)\,dx$

$=x^4+x^3+x^2+x+C$

$f(0)=-1$이므로 $C=-1$

따라서 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x-1$이므로

$f(2)=16+8+4+2-1=29$

13 $f(x)=\int\frac{x^3}{x-2}dx-\int\frac{8}{x-2}dx$

$=\int\frac{x^3-8}{x-2}dx$

$=\int\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}dx$

$=\int(x^2+2x+4)\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3+x^2+4x+C$

$f(1)=2$이므로

$\frac{1}{3}+1+4+C=2$ $\quad\therefore C=-\frac{10}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+4x-\frac{10}{3}$

14 $f(x)=\int(\sqrt{x}-1)^2dx+\int(\sqrt{x}+1)^2dx$

$=\int\{(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+1)^2\}\,dx$

$=\int(x-2\sqrt{x}+1+x+2\sqrt{x}+1)\,dx$

$=\int(2x+2)\,dx=x^2+2x+C$

$f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=x^2+2x+2$이므로

$f(3)=9+6+2=17$

15 $g(x)=\int xf'(x)\,dx+\int f(x)\,dx$

$=\int\{xf'(x)+f(x)\}\,dx$

$=\int\left[\frac{d}{dx}\{xf(x)\}\right]dx$

$=xf(x)+C$

$=x+1+C$

$g(1)=0$이므로 $2+C=0$

$\therefore C=-2$

따라서 $g(x)=x-1$이므로

$g(3)=3-1=2$

16 $f(x)=\int f'(x)\,dx$이므로

$f(x)=\int(2ax+3)\,dx=ax^2+3x+C$

$f(0)=2$이므로 $C=2$

$f(x)=ax^2+3x+2$에서 $f(1)=3$이므로

$a+3+2=3 \qquad \therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-2x^2+3x+2$이므로

$f(2)=-8+6+2=0$

17 $f'(x)=6x^2-4x+3$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x^2-4x+3)\,dx$

$\quad=2x^3-2x^2+3x+C_1$

$f(0)=2$이므로 $C_1=2$

따라서 $f(x)=2x^3-2x^2+3x+2$이므로 $f(x)$를 적분하면

$\int(2x^3-2x^2+3x+2)\,dx$

$=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+C$

18 (나)에서 $x \to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\to 0 \Rightarrow \lim_{x\to1}f(x)=0$

$\therefore f(1)=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ($\because$ ㉠)

$\quad=f'(1)=2a-1$

(가)에서 $f'(1)=3+a$이므로

$3+a=2a-1 \qquad \therefore a=4$

따라서 $f'(x)=3x+4$이므로

$f(x)=\int(3x+4)\,dx=\frac{3}{2}x^2+4x+C$

㉠에서 $f(1)=0$이므로

$\frac{3}{2}+4+C=0 \qquad \therefore C=-\frac{11}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}x^2+4x-\frac{11}{2}$

19 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-2x+1$이므로

$f'(x)=3x^2-2x+1$

이때 $f(x)=\int f'(x)\,dx$이므로

$f(x)=\int(3x^2-2x+1)\,dx=x^3-x^2+x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 0)$을 지나므로

$f(1)=1+C=0 \qquad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+x-1$이므로

$f(3)=27-9+3-1=20$

20 $f(x)=\int(3ax-4)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3ax-4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, -2)$에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(1)=3a-4=2 \qquad \therefore a=2$

따라서 $f'(x)=6x-4$이므로

$f(x)=\int(6x-4)\,dx=3x^2-4x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, -2)$를 지나므로

$f(1)=3-4+C=-2 \qquad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=3x^2-4x-1$이므로

$f(2)=12-8-1=3$

21 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $-4x+k$이므로 $f'(x)=-4x+k$

이때 $f(x)=\int f'(x)\,dx$이므로

$f(x)=\int(-4x+k)\,dx=-2x^2+kx+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$f(0)=C=3$

$\therefore f(x)=-2x^2+kx+3$

따라서 이차방정식 $-2x^2+kx+3=0$의 두 근의 합이 2이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\frac{k}{2}=2 \qquad \therefore k=4$

22 $f(x)=\int f'(x)\,dx$이므로

(i) $x\ge1$일 때, $f(x)=\int 4x\,dx=2x^2+C_1$

(ii) $x<1$일 때, $f(x)=\int(x^2-2x)\,dx=\frac{1}{3}x^3-x^2+C_2$

(i), (ii)에 의해 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+C_1 & (x\ge1)\\ \frac{1}{3}x^3-x^2+C_2 & (x<1)\end{cases}$$

$f(0)=2$이므로 $C_2=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$에서

$2+C_1=\frac{1}{3}-1+C_2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2+C_1=\frac{1}{3}-1+2 \qquad \therefore C_1=-\frac{2}{3}$

유형편

따라서 $f(x)=\begin{cases} 2x^2-\frac{2}{3} & (x\ge1) \\ \frac{1}{3}x^3-x^2+2 & (x<1) \end{cases}$이므로

$f(2)-f(-2)=\left(8-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{8}{3}-4+2\right)=12$

23 $f(x)=\int f'(x)\,dx$이므로

(i) $x\ge-2$일 때

$f(x)=\int(x+3)\,dx=\frac{1}{2}x^2+3x+C_1$

(ii) $x<-2$일 때

$f(x)=\int(-2x+k)\,dx=-x^2+kx+C_2$

(i), (ii)에 의해 함수 $f(x)$는

$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+3x+C_1 & (x\ge-2) \\ -x^2+kx+C_2 & (x<-2) \end{cases}$

$f(0)=1$이므로 $C_1=1$ …… ㉠

$f(-3)=-4$이므로 $-9-3k+C_2=-4$

$\therefore C_2=3k+5$ …… ㉡

이때 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$f(-2)=\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2-}f(x)$에서

$-4+C_1=-4-2k+C_2$

위의 식에 ㉠, ㉡을 대입하면

$-4+1=-4-2k+(3k+5)$ $\quad\therefore k=-4$

24 $f'(x)=\begin{cases} x-1 & (x\ge0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$이고, $f(x)=\int f'(x)\,dx$이므로

(i) $x\ge0$일 때, $f(x)=\int(x-1)\,dx=\frac{1}{2}x^2-x+C_1$

(ii) $x<0$일 때, $f(x)=\int(-1)\,dx=-x+C_2$

(i), (ii)에 의해 함수 $f(x)$는

$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-x+C_1 & (x\ge0) \\ -x+C_2 & (x<0) \end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=C_1=0$

또 함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $f(0)=\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)$에서

$C_1=C_2=0$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-x & (x\ge0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$이므로

$f(2)+f(-3)=(2-2)+3=3$

25 삼차함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$

$F(x)=xf(x)+3x^4-4x^2+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+12x^3-8x$

$xf'(x)=-12x^3+8x=x(-12x^2+8)$

$\therefore f'(x)=-12x^2+8$

이때 $f(x)=\int f'(x)\,dx$이므로

$f(x)=\int(-12x^2+8)\,dx=-4x^3+8x+C$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=-4x^3+8x$이므로

$f(2)=-32+16=-16$

26 $\int f(x)\,dx=xf(x)-x^3+x^2+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-3x^2+2x$

$xf'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$

$\therefore f'(x)=3x-2$

이때 $f(x)=\int f'(x)\,dx$이므로

$f(x)=\int(3x-2)\,dx=\frac{3}{2}x^2-2x+C_1$

$f(0)=-2$이므로 $C_1=-2$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-2x-2$이므로

$f(4)=24-8-2=14$

27 이차함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$

$F(x)-\int(x+1)f(x)\,dx=4x^4+3x^3-2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-(x+1)f(x)=16x^3+9x^2-4x$

$-xf(x)=16x^3+9x^2-4x=x(16x^2+9x-4)$

$\therefore f(x)=-16x^2-9x+4$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의해 $\frac{4}{-16}=-\frac{1}{4}$이다.

28 $\int f(x)\,dx=(x-2)f(x)+x^3-12x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x-2)f'(x)+3x^2-12$

$(x-2)f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$

$\therefore f'(x)=-3(x+2)=-3x-6$

이때 $f(x)=\int f'(x)\,dx$이므로

$f(x)=\int(-3x-6)\,dx=-\frac{3}{2}x^2-6x+C_1$

$f(0)=4$이므로 $C_1=4$

$\therefore\ f(x)=-\frac{3}{2}x^2-6x+4=-\frac{3}{2}(x+2)^2+10$

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값이 10이다.

29 $f(a+b)=f(a)+f(b)+1$에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+1 \qquad \therefore\ f(0)=-1$ …… ㉠

미분계수의 정의에 의해 $f'(0)$의 값을 구하면

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}$

$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}=2$ …… ㉡

도함수의 정의에 의해 $f'(x)$를 구하면

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+1-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}=2$ ($\because$ ㉡)

$\therefore\ f(x)=\int 2\,dx=2x+C$

㉠에서 $f(0)=-1$이므로 $f(0)=C=-1$

따라서 $f(x)=2x-1$이므로 $-2-1=-3$

30 $f(a+b)=f(a)+f(b)+kab$에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0 \qquad \therefore\ f(0)=0$ …… ㉠

미분계수의 정의에 의해 $f'(-2)$의 값을 구하면

$f'(-2)=\lim_{h\to0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(-2)+f(h)-2kh-f(-2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}-2k\right\}=3$

$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=3+2k$ …… ㉡

도함수의 정의에 의해 $f'(x)$를 구하면

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+kxh-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+kx\right\}$

$=3+2k+kx$ ($\because$ ㉡)

$\therefore\ f(x)=\int(3+2k+kx)\,dx=\frac{k}{2}x^2+(2k+3)x+C$

㉠에서 $f(0)=0$이므로 $C=0$

또 $f(-2)=2$이므로 $2k-2(2k+3)=2$

$-2k=8 \qquad \therefore\ k=-4$

31 $f(a+b)=f(a)+f(b)+a^2b+ab^2$에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore\ f(0)=0$ …… ㉠

미분계수의 정의에 의해 $f'(2)$의 값을 구하면

$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+4h+2h^2-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+4h+2h^2}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+4=3$

$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=-1$ …… ㉡

도함수의 정의에 의해 $f'(x)$를 구하면

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+x^2h+xh^2-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+x^2h+xh^2}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+x^2=-1+x^2$ ($\because$ ㉡)

$\therefore\ f(x)=\int(-1+x^2)\,dx=\frac{1}{3}x^3-x+C$

㉠에서 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$이므로

$f(3)=9-3=6$

32 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x^2+6x-12)\,dx$

$=2x^3+3x^2-12x+C$

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로

$f(1)=2+3-12+C=3 \qquad \therefore\ C=10$

$\therefore\ f(x)=2x^3+3x^2-12x+10$

또 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이므로 극댓값은

$f(-2)=-16+12+24+10=30$

33 $f'(x)=ax(x-2)$ $(a<0)$라 하면

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int ax(x-2)\,dx$$
$$=\int(ax^2-2ax)\,dx=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값, $x=2$에서 극댓값을 가지므로

$f(0)=C=-1$

$f(2)=-\frac{4}{3}a+C=-\frac{4}{3}a-1=3$

$\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2-1$이므로

$f(1)=-1+3-1=1$

34 $f(x)$의 최고차항이 x^3이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $3x^2$이다.

(나)에서 $f'(2)=0$이므로

(가)에서 $f'(-2)=f'(2)=0$

$f'(x)=3(x+2)(x-2)=3x^2-12$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-12)\,dx$$
$$=x^3-12x+C$$

또 (나)에서 $f(2)=-3$이므로

$8-24+C=-3\qquad\therefore C=13$

따라서 $f(x)=x^3-12x+13$이므로

$f(-3)=-27+36+13=22$

다른 풀이

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(-x)=3x^2-2ax+b$

(가)에서

$3x^2+2ax+b=3x^2-2ax+b\qquad\therefore a=0$

$\therefore f'(x)=3x^2+b$

(나)에서 $f'(2)=0$이므로

$f'(2)=12+b=0\qquad\therefore b=-12$

따라서 $f(x)=x^3-12x+C$이고 조건 (나)에서 $f(2)=-3$이므로

$f(2)=8-24+C=-3\qquad\therefore C=13$

즉, $f(x)=x^3-12x+13$이므로

$f(-3)=-27+36+13=22$

02 정적분

기초 문제 Training

p.58

1 (1) -3 (2) $\frac{13}{3}$ (3) 12 (4) $-\frac{16}{3}$

2 (1) 0 (2) $-\frac{11}{6}$ (3) $\frac{19}{4}$

3 (1) 18 (2) -6

4 (1) -3 (2) 15 (3) 0 (4) $\frac{28}{3}$

5 (1) $f(x)=2x-4$ (2) $f(x)=6x^2-6x+5$
(3) $f(x)=4x^3+6x^2-2x+1$
(4) $f(x)=3x^2+4x-1$

핵심 유형 Training

p.59~64

1 ④	2 24	3 ①	4 $-\frac{7}{4}$	5 ①	6 ③
7 8	8 ④	9 ①	10 44	11 2	12 $\frac{3}{2}$
13 ①	14 5	15 ①	16 ③	17 1	18 ②
19 7	20 ①	21 9	22 ②	23 61	24 7
25 ③	26 18	27 2	28 -20	29 ③	30 2
31 -5	32 9	33 ③	34 0	35 ④	36 ①
37 -1	38 ②	39 $-\frac{8}{3}$	40 7	41 ③	42 3
43 ⑤	44 4				

1 $$\int_2^2(3x-2)(x+4)\,dx+\int_3^1(x-1)(-2x+1)\,dx$$
$$=0+\int_3^1(-2x^2+3x-1)\,dx$$
$$=\int_3^1(-2x^2+3x-1)\,dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x\right]_3^1=\frac{22}{3}$$

2 $$\int_{-1}^3(x+1)f(x)\,dx=\int_{-1}^3(x+1)(x^2-x+1)\,dx$$
$$=\int_{-1}^3(x^3+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_{-1}^3=24$$

3 $$\int_0^{-2}(-2x^3+kx)\,dx=\left[-\frac{1}{2}x^4+\frac{k}{2}x^2\right]_0^{-2}=-8+2k$$

즉, $-8+2k=k$이므로 $k=8$

4 $\int_{-2}^{k}(2x+3)\,dx=\Big[x^2+3x\Big]_{-2}^{k}=k^2+3k+2$

$=\left(k+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

따라서 주어진 정적분의 값은 $k=-\frac{3}{2}$일 때 최솟값이 $-\frac{1}{4}$이므로

$m=-\frac{3}{2}$, $n=-\frac{1}{4}$ $\quad\therefore m+n=-\frac{7}{4}$

5 $\int_{-1}^{2}(3x^2+x)\,dx-3\int_{-1}^{2}(x^2-x)\,dx$

$=\int_{-1}^{2}(3x^2+x)\,dx-\int_{-1}^{2}(3x^2-3x)\,dx$

$=\int_{-1}^{2}\{(3x^2+x)-(3x^2-3x)\}\,dx$

$=\int_{-1}^{2}4x\,dx=\Big[2x^2\Big]_{-1}^{2}=6$

6 $\int_{2}^{3}\frac{x^3}{x-1}\,dx+\int_{3}^{2}\frac{1}{t-1}\,dt$

$=\int_{2}^{3}\frac{x^3}{x-1}\,dx+\int_{3}^{2}\frac{1}{x-1}\,dx$

$=\int_{2}^{3}\frac{x^3}{x-1}\,dx-\int_{2}^{3}\frac{1}{x-1}\,dx$

$=\int_{2}^{3}\frac{x^3-1}{x-1}\,dx=\int_{2}^{3}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\,dx$

$=\int_{2}^{3}(x^2+x+1)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{2}^{3}$

$=\frac{59}{6}$

7 $\int_{0}^{2}(x^2+2x+k)\,dx-2\int_{2}^{0}(x^2-2x)\,dx$

$=\int_{0}^{2}(x^2+2x+k)\,dx+\int_{0}^{2}(2x^2-4x)\,dx$

$=\int_{0}^{2}\{(x^2+2x+k)+(2x^2-4x)\}\,dx$

$=\int_{0}^{2}(3x^2-2x+k)\,dx$

$=\Big[x^3-x^2+kx\Big]_{0}^{2}=4+2k$

즉, $4+2k=20$이므로 $k=8$

8 $2\int_{1}^{k}(x-1)\,dx-\int_{1}^{k}4\,dx$

$=\int_{1}^{k}(2x-2)\,dx-\int_{1}^{k}4\,dx$

$=\int_{1}^{k}(2x-6)\,dx=\Big[x^2-6x\Big]_{1}^{k}$

$=k^2-6k+5=(k-3)^2-4$

따라서 주어진 정적분의 값은 $k=3$일 때 최소이다.

9 $\int_{0}^{2}(3x^2-4x+1)\,dx+\int_{2}^{3}(3t^2-4t+1)\,dt$

$=\int_{0}^{2}(3x^2-4x+1)\,dx+\int_{2}^{3}(3x^2-4x+1)\,dx$

$=\int_{0}^{3}(3x^2-4x+1)\,dx$

$=\Big[x^3-2x^2+x\Big]_{0}^{3}=12$

10 $\int_{2}^{3}(\sqrt{x}-3)^2\,dx-\int_{2}^{1}(\sqrt{x}-3)^2\,dx+\int_{1}^{3}(\sqrt{x}+3)^2\,dx$

$=\int_{2}^{3}(\sqrt{x}-3)^2\,dx+\int_{1}^{2}(\sqrt{x}-3)^2\,dx+\int_{1}^{3}(\sqrt{x}+3)^2\,dx$

$=\int_{1}^{3}(\sqrt{x}-3)^2\,dx+\int_{1}^{3}(\sqrt{x}+3)^2\,dx$

$=\int_{1}^{3}\{(\sqrt{x}-3)^2+(\sqrt{x}+3)^2\}\,dx$

$=\int_{1}^{3}(2x+18)\,dx=\Big[x^2+18x\Big]_{1}^{3}=44$

11 $\int_{3}^{4}f(x)\,dx$

$=\int_{3}^{-2}f(x)\,dx+\int_{-2}^{4}f(x)\,dx$

$=-\int_{-2}^{3}f(x)\,dx+\left\{\int_{-2}^{-1}f(x)\,dx+\int_{-1}^{4}f(x)\,dx\right\}$

$=-6+(3+5)=2$

12 $\int_{1}^{a}f(x)\,dx-\int_{1}^{2}f(x)\,dx=\int_{1}^{a}f(x)\,dx+\int_{2}^{1}f(x)\,dx$

$=\int_{2}^{a}f(x)\,dx$

$\therefore \int_{2}^{a}f(x)\,dx=2$

$\int_{2}^{a}(-4x+3)\,dx=\Big[-2x^2+3x\Big]_{2}^{a}=-2a^2+3a+2$

즉, $-2a^2+3a+2=2$이므로 $a(2a-3)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

그런데 a는 양수이므로 $a=\frac{3}{2}$

13 적분구간 $[0, 3]$을 $x=1$을 기준으로 나누면

$\int_{0}^{3}f(x)\,dx=\int_{0}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{3}f(x)\,dx$

$=\int_{0}^{1}(x^2+1)\,dx+\int_{1}^{3}2x\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}+\Big[x^2\Big]_{1}^{3}$

$=\frac{4}{3}+8=\frac{28}{3}$

14 주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & (x\ge 1) \\ 1 & (-1\le x<1) \\ x+2 & (x<-1) \end{cases}$$ 이므로

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$$
$$=\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx+\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{3} f(x)\,dx$$
$$=\int_{-3}^{-1}(x+2)\,dx+\int_{-1}^{1}1\,dx+\int_{1}^{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-3}^{-1}+\left[x\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x\right]_{1}^{3}$$
$$=0+2+3=5$$

15 $a>1$이므로

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$
$$=\int_{-a}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{a} f(x)\,dx$$
$$=\int_{-a}^{1}(2x-1)\,dx+\int_{1}^{a}(-x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[x^2-x\right]_{-a}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{1}^{a}$$
$$=\{(1-1)-(a^2+a)\}+\left\{\left(-\frac{1}{3}a^3+a^2\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)\right\}$$
$$=-\frac{1}{3}a^3-a-\frac{2}{3}$$

즉, $-\frac{1}{3}a^3-a-\frac{2}{3}=-\frac{16}{3}$이므로

$a^3+3a-14=0$, $(a-2)(a^2+2a+7)=0$

$\therefore a=2$ ($\because$ a는 실수)

16 $|x^2-2x|=\begin{cases} x^2-2x & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -x^2+2x & (0<x<2) \end{cases}$ 이므로

$$\int_{-2}^{3} |x^2-2x|\,dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x)\,dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{2}^{3}$$
$$=\frac{20}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{28}{3}$$

17 $|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -x^2+1 & (-1<x<1) \end{cases}$ 이므로

$$\int_{0}^{2} \frac{|x^2-1|}{x+1}\,dx$$
$$=\int_{0}^{1} \frac{-x^2+1}{x+1}\,dx+\int_{1}^{2} \frac{x^2-1}{x+1}\,dx$$
$$=-\int_{0}^{1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}\,dx+\int_{1}^{2} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}\,dx$$
$$=-\int_{0}^{1}(x-1)\,dx+\int_{1}^{2}(x-1)\,dx$$
$$=-\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_{1}^{2}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

18 $|x-3|=\begin{cases} x-3 & (x\ge 3) \\ -x+3 & (x<3) \end{cases}$ 이므로

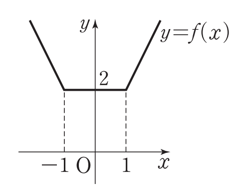
$$\int_{0}^{a} |x-3|\,dx$$
$$=\int_{0}^{3}(-x+3)\,dx+\int_{3}^{a}(x-3)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{0}^{3}+\left[\frac{1}{2}x^2-3x\right]_{3}^{a}$$
$$=\left(-\frac{9}{2}+9\right)+\left\{\left(\frac{1}{2}a^2-3a\right)-\left(\frac{9}{2}-9\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}a^2-3a+9$$

즉, $\frac{1}{2}a^2-3a+9=5$이므로

$a^2-6a+8=0$, $(a-2)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because$ $a>3$)

19 $f(x)=\begin{cases} 2x & (x>1) \\ 2 & (-1\le x<1) \\ -2x & (x<-1) \end{cases}$



이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $f(x)$는 $-1\le x\le 1$에서 최솟값 2를 가지므로 $a=2$

$$\therefore \int_{-1}^{a} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}2\,dx+\int_{1}^{2}2x\,dx$$
$$=\left[2x\right]_{-1}^{1}+\left[x^2\right]_{1}^{2}$$
$$=4+3=7$$

20 $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

라 하면

$f(x)=3x^2-2x+k$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$k=\int_{-1}^{1}(3t^2-2t+k)\,dt=\left[t^3-t^2+kt\right]_{-1}^{1}=2k+2$$

즉, $k=2k+2$이므로 $k=-2$

따라서 $f(x)=3x^2-2x-2$이므로

$f(-2)=12+4-2=14$

21 $\int_0^3 xf'(x)\,dx=k$ (k는 상수) …… ㉠

라 하면

$f(x)=6x+k$ …… ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=6$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$k=\int_0^3 6x\,dx=\Big[3x^2\Big]_0^3=27$

따라서 $f(x)=6x+27$이므로

$f(-3)=-18+27=9$

22 $\int_0^1 (x-1)f(t)\,dt=(x-1)\int_0^1 f(t)\,dt$이므로

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

라 하면

$f(x)=-3x^2+k(x-1)=-3x^2+kx-k$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$k=\int_0^1(-3t^2+kt-k)\,dt$

$=\Big[-t^3+\frac{k}{2}t^2-kt\Big]_0^1=-1+\frac{k}{2}-k$

즉, $k=-1+\frac{k}{2}-k$이므로 $k=-\frac{2}{3}$

$\therefore\ 3\int_0^1 f(x)\,dx=3k=3\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-2$

23 $\int_0^1 (x+t)f(t)\,dt=x\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^1 tf(t)\,dt$이므로

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$, $\int_0^1 tf(t)\,dt=l$ (k, l은 상수)라 하면

$f(x)=6x^2+kx+l$ …… ㉠

㉠을 $\int_0^1 f(t)\,dt=k$에 대입하면

$k=\int_0^1(6t^2+kt+l)\,dt=\Big[2t^3+\frac{k}{2}t^2+lt\Big]_0^1=2+\frac{k}{2}+l$

$\therefore\ k-2l=4$ …… ㉡

또 ㉠을 $\int_0^1 tf(t)=l$에 대입하면

$l=\int_0^1(6t^3+kt^2+lt)\,dt=\Big[\frac{3}{2}t^4+\frac{k}{3}t^3+\frac{l}{2}t^2\Big]_0^1$

$=\frac{3}{2}+\frac{k}{3}+\frac{l}{2}$

$\therefore\ 2k-3l=-9$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $k=-30$, $l=-17$

따라서 $f(x)=6x^2-30x-17$이므로

$f'(x)=12x-30$

$\therefore\ f(-1)-f'(-1)=19-(-42)=61$

24 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(x^2+3x-10)$

$\therefore\ f(x)=2x+3$

주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=a^2+3a-10$, $(a+5)(a-2)=0$

$\therefore\ a=2$ ($\because\ a>0$)

$\therefore\ f(a)=f(2)=4+3=7$

25 $\int_2^x f(t)\,dt=3x^2+ax-2$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_2^x f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(3x^2+ax-2)$

$\therefore\ f(x)=6x+a$

또 ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=12+2a-2$ $\quad\therefore\ a=-5$

따라서 $f(x)=6x-5$이므로

$f(3)=18-5=13$

26 $f(x)=\int_x^{x+1}(t^3+t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+1)^3+(x+1)\}-(x^3+x)$

$=3x^2+3x+2$

$\therefore\ \int_0^2 f'(x)\,dx=\int_0^2(3x^2+3x+2)\,dx$

$=\Big[x^3+\frac{3}{2}x^2+2x\Big]_0^2=18$

27 $\int_1^x f(t)\,dt=xf(x)+x^3-ax^2$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_1^x f(t)\,dt=\frac{d}{dx}\{xf(x)+x^3-ax^2\}$

$f(x)=f(x)+xf'(x)+3x^2-2ax$

$xf'(x)=-3x^2+2ax=x(-3x+2a)$

$\therefore\ f'(x)=-3x+2a$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-3x+2a)\,dx$

$=-\frac{3}{2}x^2+2ax+C$

$f(0)=C=-2$이므로

$f(x)=-\frac{3}{2}x^2+2ax-2$ …… ㉡

또 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)+1-a$

$\therefore\ f(1)=a-1$ …… ㉢

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=-\frac{3}{2}+2a-2=2a-\frac{7}{2}$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $a-1=2a-\frac{7}{2}$ $\quad\therefore a=\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+5x-2$이므로

$f(2)=-6+10-2=2$

28 $\int_1^x (x-t)f(t)\,dt=x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt$이므로

주어진 등식은

$x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt=x^3-10x^2-x+1$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-20x-1$

$\therefore \int_1^x f(t)\,dt=3x^2-20x-1$ …… ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-20$ $\quad\therefore f(0)=-20$

29 $\int_{-1}^x (x-t)f(t)\,dt=x\int_{-1}^x f(t)\,dt-\int_{-1}^x tf(t)\,dt$이므로

주어진 등식은

$x\int_{-1}^x f(t)\,dt-\int_{-1}^x tf(t)\,dt=ax^3+x^2+bx-3$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{-1}^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3ax^2+2x+b$

$\therefore \int_{-1}^x f(t)\,dt=3ax^2+2x+b$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-a+1-b-3$ $\quad\therefore a+b=-2$ …… ㉢

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=3a-2+b$ $\quad\therefore 3a+b=2$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-4$

$\therefore a-b=2-(-4)=6$

30 $\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt=\frac{1}{3}x^3$에서

$x\int_0^x f'(t)\,dt-\int_0^x tf'(t)\,dt=\frac{1}{3}x^3$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f'(t)\,dt+xf'(x)-xf'(x)=x^2$

$\int_0^x f'(t)\,dt=x^2$, $\Big[f(t)\Big]_0^x=x^2$

$\therefore f(x)-f(0)=x^2$

이때 $f(0)=1$이므로 $f(x)=x^2+1$

$\therefore f(-1)=1+1=2$

31 $f(x)=\int_1^x (t^2+at+6)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+ax+6$

이때 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(2)=0$

$4+2a+6=0$ $\quad\therefore a=-5$

32 $f(x)=\int_0^x (t^2-3t+2)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	1	…	2	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=2$에서 극소이므로 극댓값 $f(1)$, 극솟값 $f(2)$를 구하면

$f(1)=\int_0^1 (t^2-3t+2)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^1=\frac{5}{6}$

$f(2)=\int_0^2 (t^2-3t+2)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^2=\frac{2}{3}$

즉, $a=\frac{5}{6}$, $b=\frac{2}{3}$이므로 $6(a+b)=6\left(\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\right)=9$

33 $f(x)=\int_0^x (-3t^2+at+b)\,dt$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-3x^2+ax+b$ …… ㉡

이때 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값 $-\frac{7}{2}$을 가지므로

$f'(-1)=0$, $f(-1)=-\frac{7}{2}$

㉡에 $x=-1$을 대입하면 $f'(-1)=0$이므로

$f'(-1)=-3-a+b=0$ $\quad\therefore a-b=-3$ …… ㉢

㉠에 $x=-1$을 대입하면 $f(-1)=-\frac{7}{2}$이므로

$f(-1)=\int_0^{-1} (-3t^2+at+b)\,dt=\left[-t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^{-1}$

$=1+\frac{a}{2}-b=-\frac{7}{2}$

$\therefore a-2b=-9$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=6$ $\quad\therefore ab=18$

34 $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-a)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-1)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=a$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극대, $x=a$일 때 극소이다.

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $\frac{4}{3}$를 가지므로

$$f(1)=\int_0^1 (t-1)(t-a)\,dt=\int_0^1 \{t^2-(a+1)t+a\}\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a+1}{2}t^2+at\right]_0^1=\frac{3a-1}{6}$$

즉, $\frac{3a-1}{6}=\frac{4}{3}$이므로 $3a-1=8$ $\therefore a=3$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가지므로 구하는 극솟값은

$$f(3)=\int_0^3 (t-1)(t-3)\,dt=\int_0^3 (t^2-4t+3)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^3=0$$

35 $f(x)=\int_x^{x+1} (t^3-t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\{(x+1)^3-(x+1)\}-(x^3-x)$$
$$=3x^2+3x=3x(x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

$-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

$$f(-1)=\int_{-1}^0 (t^3-t)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^0=\frac{1}{4}$$
$$f(0)=\int_0^1 (t^3-t)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=-\frac{1}{4}$$
$$f(1)=\int_1^2 (t^3-t)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_1^2=\frac{9}{4}$$

이므로 $-1\le x\le 1$에서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{9}{4}$, 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이다. 즉, $M=\frac{9}{4}$, $m=-\frac{1}{4}$이므로 $M+m=2$

36 $f(x)=4x^2-2\int_0^1 xf(t)\,dt=4x^2-2x\int_0^1 f(t)\,dt$

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

라 하면

$f(x)=4x^2-2kx$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$k=\int_0^1 (4t^2-2kt)\,dt=\left[\frac{4}{3}t^3-kt^2\right]_0^1=\frac{4}{3}-k$$

즉, $k=\frac{4}{3}-k$이므로 $2k=\frac{4}{3}$ $\therefore k=\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=4x^2-\frac{4}{3}x=4\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{9}$이므로

함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{6}$에서 최솟값이 $-\frac{1}{9}$이다.

37 $\int_0^x (t-x)f(t)\,dt=\int_0^x tf(t)\,dt-x\int_0^x f(t)\,dt$이므로

주어진 등식은

$\int_0^x tf(t)\,dt-x\int_0^x f(t)\,dt=x^4-2x^3+2x^2$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$xf(x)-\int_0^x f(t)\,dt-xf(x)=4x^3-6x^2+4x$$

$\therefore \int_0^x f(t)\,dt=-4x^3+6x^2-4x$ …… ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-12x^2+12x-4$

따라서 $f(x)=-12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-1$이므로 함수 $f(x)$는

$x=\frac{1}{2}$에서 최댓값이 -1이다.

38 $f(x)=k(x-1)(x-3)$ $(k>0)$라 하고,

$g(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=kx(x-2)-k(x-1)(x-3)$$
$$=k(2x-3)$$

$g'(x)=0$에서 $x=\frac{3}{2}$

함수 $g(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 극소이면서 최소이므로

최솟값은 $g\left(\frac{3}{2}\right)$이다.

39 $f(x)=kx(x-2)=k(x-1)^2-k$ $(k>0)$라 하면

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 -2이므로 $k=2$

$\therefore f(x)=2x(x-2)=2x^2-4x$

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

$F'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $F(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $F(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

$$F(2)=\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2 (2t^2-4t)\,dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^3-2t^2\right]_0^2=-\frac{8}{3}$$

40 $F(x)=k(x-2)(x-5)=k(x^2-7x+10)\ (k<0)$
이라 하면

$$\int_1^x f(t)\,dt=k(x^2-7x+10)$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=k(2x-7)$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(3,\ 1)$을 지나므로

$1=k(6-7)\qquad \therefore k=-1$

따라서 $f(x)=-2x+7$이므로 $f(0)=7$

41 $f(t)=5t^2-2t+3$이라 하고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (5t^2-2t+3)\,dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_0^x$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)=f(0)=3$$

42 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-3h}^{1+h} f(x)\,dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{1-3h}^{1+h}=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)+F(1)-F(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}+3\lim_{h\to 0}\frac{F(1-3h)-F(1)}{-3h}$$
$$=F'(1)+3F'(1)=4F'(1)=4f(1)=-4+4a$$

즉, $-4+4a=8$이므로 $4a=12\qquad \therefore a=3$

43 $f(t)=2t^3+t+5$라 하고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x (2t^3+t+5)\,dt$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_1^x$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)=f(1)=8$$

44 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2} f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_1^{x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{(x-1)(x+1)}\times(x+1)$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times(x+1)$$
$$=2F'(1)=2f(1)=4$$

Ⅲ-2. 정적분의 활용

01 넓이, 속도와 거리

기초 문제 Training
p.66

1 (1) $\frac{32}{3}$ (2) $\frac{9}{2}$ (3) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

2 (가) x^2-4x (나) $-x^2+4x$ (다) $\frac{23}{3}$

3 (1) 10 (2) -36

4 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{32}{3}$ (4) $\frac{125}{6}$

5 (1) $\frac{8}{3}$ (2) $\frac{125}{3}$

6 (1) 2 (2) -2 (3) $\frac{5}{2}$

핵심 유형 Training
p.67~72

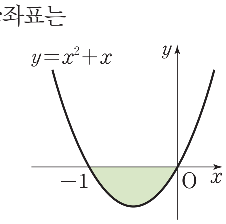
1 $\frac{13}{4}$	**2** ②	**3** 4	**4** $\sqrt{6}$	**5** ①	**6** -3
7 -20	**8** 2	**9** ④	**10** ④	**11** ④	**12** ③
13 ①	**14** ④	**15** $\frac{1}{3}$	**16** $\frac{3}{4}$	**17** $\frac{64}{3}$	**18** $\frac{16}{3}$
19 ⑤	**20** $-\frac{3}{2}$	**21** $\frac{\sqrt{6}}{9}$	**22** 16	**23** 2	**24** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$
25 1	**26** $\frac{1}{3}$	**27** ③	**28** 2	**29** ⑤	**30** 8m
31 ④	**32** 2회	**33** $144\pi\,\mathrm{cm}^3$		**34** 15km	**35** ②
36 8	**37** 90m	**38** 6초	**39** 2	**40** ㄱ, ㄴ	

1 곡선 $y=x^2+x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2+x=0$에서

$x(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$



$$\therefore S_1=-\int_{-1}^0 (x^2+x)\,dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0=\frac{1}{6}$$

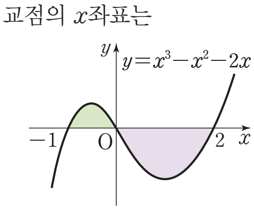
곡선 $y=x^3-x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^3-x^2-2x=0$에서

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$

또는 $x=2$



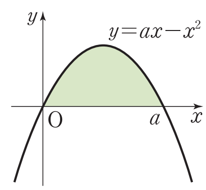
$\therefore\ S_2=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx-\int_{0}^{2}(x^3-x^2-2x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{2}$

$=\frac{37}{12}$

$\therefore\ S_1+S_2=\frac{1}{6}+\frac{37}{12}=\frac{13}{4}$

2 곡선 $y=ax-x^2$과 x축의 교점의 x좌표는



$ax-x^2=0$에서 $x(a-x)=0$

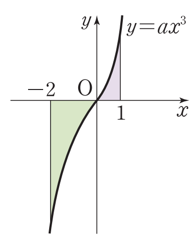
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=a\ (a>0)$

구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_{0}^{a}(ax-x^2)\,dx=\left[\frac{a}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{a}=\frac{a^3}{6}$

따라서 $\frac{a^3}{6}=\frac{9}{16}$이므로 $a^3=\frac{27}{8}$ $\quad\therefore\ a=\frac{3}{2}$

3 구하는 넓이를 S라 하면

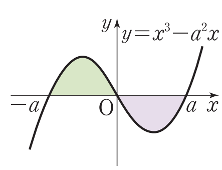


$S=-\int_{-2}^{0}ax^3\,dx+\int_{0}^{1}ax^3\,dx$

$=-\left[\frac{a}{4}x^4\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{a}{4}x^4\right]_{0}^{1}=\frac{17}{4}a$

따라서 $\frac{17}{4}a=17$이므로 $a=4$

4 $y=x(x+a)(x-a)=x^3-a^2x$ 이므로 곡선 $y=x^3-a^2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면

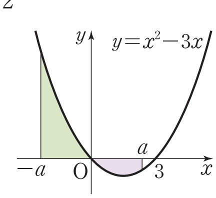


$S_1=\int_{-a}^{0}(x^3-a^2x)\,dx-\int_{0}^{a}(x^3-a^2x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a^2}{2}x^2\right]_{-a}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a^2}{2}x^2\right]_{0}^{a}$

$=\left(-\frac{a^4}{4}+\frac{a^4}{2}\right)-\left(\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{2}\right)=\frac{a^4}{2}$

곡선 $y=x^2-3x$와 x축 및 두 직선 $x=-a$, $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이 S_2라 하면



$S_2=\int_{-a}^{0}(x^2-3x)\,dx$

$\quad-\int_{0}^{a}(x^2-3x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-a}^{0}-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{a}$

$=\left(\frac{1}{3}a^3+\frac{3}{2}a^2\right)-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2\right)=3a^2$

따라서 $\frac{a^4}{2}=3a^2$이므로

$a^2=6$ $\quad\therefore\ a=\sqrt{6}\ (\because\ 0<a<3)$

5 $\int_{-a}^{a}(3x^2+x-2)\,dx=2\int_{0}^{a}(3x^2-2)\,dx$

$=2\left[x^3-2x\right]_{0}^{a}=2(a^3-2a)$

따라서 $2(a^3-2a)=-8$이므로

$a^3-2a+4=0$, $(a+2)(a^2-2a+2)=0$

이때 a는 실수이므로 $a=-2$

6 $\int_{-1}^{1}xf(x)\,dx=2$에서

$\int_{-1}^{1}x(ax+b)\,dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)\,dx=2\int_{0}^{1}ax^2\,dx$

$=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_{0}^{1}=\frac{2}{3}a$

이때 $\frac{2}{3}a=2$이므로 $a=3$

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)\,dx=-1$에서

$\int_{-1}^{1}x^2(ax+b)\,dx=\int_{-1}^{1}(ax^3+bx^2)\,dx=2\int_{0}^{1}bx^2\,dx$

$=2\left[\frac{b}{3}x^3\right]_{0}^{1}=\frac{2}{3}b$

이때 $\frac{2}{3}b=-1$이므로 $b=-\frac{3}{2}$

$\therefore\ a+4b=3+4\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-3$

7 $f(-x)+f(x)=0$에서 $f(-x)=-f(x)$이므로

$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=0$

$g(x)=xf(x)$, $h(x)=x^2f(x)$라 하면

$g(-x)=-xf(-x)=xf(x)=g(x)$

$h(-x)=(-x)^2f(-x)=-x^2f(x)=-h(x)$

$\therefore\ \int_{-1}^{1}xf(x)\,dx=2\int_{0}^{1}xf(x)\,dx$, $\int_{-1}^{1}x^2f(x)=0$

$\therefore\ \int_{-1}^{1}(3x^2-2x+4)f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{1}3x^2f(x)\,dx-\int_{-1}^{1}2xf(x)\,dx+4\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$

$=0-2\int_{-1}^{1}xf(x)\,dx+0=-4\int_{0}^{1}xf(x)\,dx$

$=-4\times5=-20$

8 $f(-x)=f(x)$이므로

$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx$

$\int_{-a}^{a}\{f(x)+3x^2\}\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx+2\int_{0}^{a}3x^2\,dx$

$=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx+2\left[x^3\right]_{0}^{a}$

$=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx+2a^3$

즉, $2\int_0^a f(x)\,dx+2a^3=6a$이므로

$\int_0^a f(x)\,dx=-a^3+3a$

또 $f(-x)=f(x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$g(a)=\int_{-a}^0 f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx=-a^3+3a$

$g'(a)=-3a^2+3$이므로 $g'(a)=0$에서

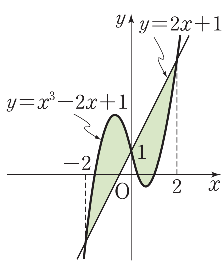
$a=-1$ 또는 $a=1$

이때 $a>0$이므로 함수 $g(a)$는 $a=1$에서 극대이다.

따라서 함수 $g(a)$의 극댓값은

$g(1)=-1+3=2$

9 곡선 $y=x^3-2x+1$과 직선 $y=2x+1$의 교점의 x좌표는



$x^3-2x+1=2x+1$에서

$x^3-4x=0$

$x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^0\{(x^3-2x+1)-(2x+1)\}\,dx+\int_0^2\{(2x+1)-(x^3-2x+1)\}\,dx$$

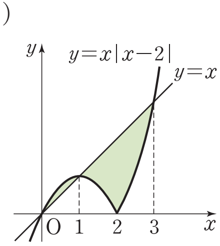
$$=\int_{-2}^0(x^3-4x)\,dx+\int_0^2(-x^3+4x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_0^2$$

$$=4+4=8$$

10 $y=x|x-2|=\begin{cases}x^2-2x & (x\ge2)\\ -x^2+2x & (x<2)\end{cases}$

곡선 $y=x|x-2|$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는



(i) $x\ge2$일 때

$x^2-2x=x$에서

$x(x-3)=0$

$\therefore\ x=3\ (\because\ x\ge2)$

(ii) $x<2$일 때

$-x^2+2x=x$에서

$x(x-1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

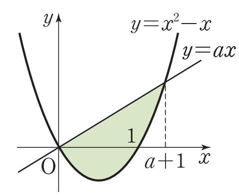
$$S=\int_0^1\{(-x^2+2x)-x\}\,dx+\int_1^2\{x-(-x^2+2x)\}\,dx+\int_2^3\{x-(x^2-2x)\}\,dx$$

$$=\int_0^1(-x^2+x)\,dx+\int_1^2(x^2-x)\,dx+\int_2^3(-x^2+3x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_2^3$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}+\frac{7}{6}=\frac{13}{6}$$

11 곡선 $y=x^2-x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는



$x^2-x=ax$에서

$x^2-(a+1)x=0$

$x\{x-(a+1)\}=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=a+1$

구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^{a+1}\{ax-(x^2-x)\}\,dx$$

$$=\int_0^{a+1}\{-x^2+(a+1)x\}\,dx$$

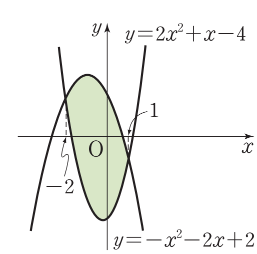
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+1}{2}x^2\right]_0^{a+1}$$

$$=\frac{(a+1)^3}{6}$$

따라서 $\frac{(a+1)^3}{6}=\frac{9}{2}$이므로

$(a+1)^3=27,\ a+1=3\qquad\therefore\ a=2$

12 두 곡선 $y=2x^2+x-4$, $y=-x^2-2x+2$의 교점의 x좌표는



$2x^2+x-4=-x^2-2x+2$

에서 $3x^2+3x-6=0$

$3(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

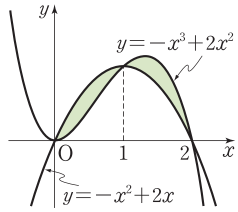
따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^1\{(-x^2-2x+2)-(2x^2+x-4)\}\,dx$$

$$=\int_{-2}^1(-3x^2-3x+6)\,dx$$

$$=\left[-x^3-\frac{3}{2}x^2+6x\right]_{-2}^1=\frac{27}{2}$$

13 두 곡선 $y=-x^3+2x^2$, $y=-x^2+2x$의 교점의 x좌표는



$-x^3+2x^2=-x^2+2x$에서

$x^3-3x^2+2x=0$

$x(x^2-3x+2)=0$

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1\{(-x^2+2x)-(-x^3+2x^2)\}\,dx+\int_1^2\{(-x^3+2x^2)-(-x^2+2x)\}\,dx$$

$$=\int_0^1(x^3-3x^2+2x)\,dx+\int_1^2(-x^3+3x^2-2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

14 두 삼차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표가 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$이므로

$f(x)-g(x)=ax(x+1)(x-1)$ (a는 상수)이라 하자.

$-1\le x\le 0$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\int_{-1}^0\{f(x)-g(x)\}\,dx=1$$

$$\int_{-1}^0 ax(x-1)(x+1)\,dx=1$$

$$\int_{-1}^0 a(x^3-x)\,dx=1,\ a\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0=1$$

$\dfrac{a}{4}=1\qquad\therefore\ a=4$

따라서 $f(x)-g(x)=4x(x-1)(x+1)=4x^3-4x$이므로 $f(2)-g(2)=4\times2^3-4\times2=24$

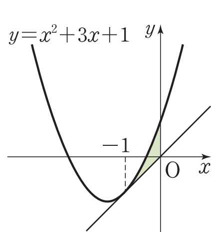
15 $f(x)=x^2+3x+1$이라 하면 $f'(x)=2x+3$이므로 곡선 위의 점 $(-1,\ -1)$에서 그은 접선의 기울기는

$f'(-1)=1$이고 접선의 방정식은

$y-(-1)=1\times\{x-(-1)\}$

$\therefore\ y=x$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{-1}^0\{(x^2+3x+1)-x\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^0(x^2+2x+1)\,dx$$

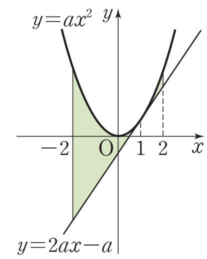
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^0=\frac{1}{3}$$

16 $f(x)=ax^2$이라 하면 $f'(x)=2ax$이므로 곡선 위의 점 $(1,\ a)$에서 그은 접선의 기울기는 $f'(1)=2a$이고 접선의 방정식은

$y-a=2a(x-1)$

$\therefore\ y=2ax-a$

구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{-2}^2\{ax^2-(2ax-a)\}\,dx$$

$$=2\int_0^2(ax^2+a)\,dx$$

$$=2\left[\frac{a}{3}x^3+ax\right]_0^2=\frac{28}{3}a$$

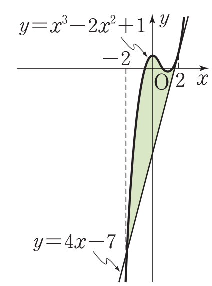
따라서 $\dfrac{28}{3}a=7$이므로 $a=\dfrac{3}{4}$

17 $f(x)=x^3-2x^2+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-4x$이므로 곡선 위의 점 $(2,\ 1)$에서 그은 접선의 기울기는

$f'(2)=12-8=4$이고 접선의 방정식은

$y-1=4(x-2)$

$\therefore\ y=4x-7$



곡선 $y=x^3-2x^2+1$과 직선 $y=4x-7$의 교점의 x좌표는

$x^3-2x^2+1=4x-7$에서

$x^3-2x^2-4x+8=0$

$(x+2)(x-2)^2=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^2\{(x^3-2x^2+1)-(4x-7)\}\,dx$$

$$=\int_{-2}^2(x^3-2x^2-4x+8)\,dx$$

$$=2\int_0^2(-2x^2+8)\,dx$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2=\frac{64}{3}$$

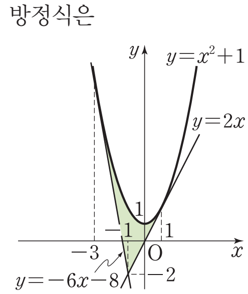
18 $f(x)=x^2+1$이라 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이고 접선의 방정식은

$y-(t^2+1)=2t(x-t)$

$\therefore\ y=2tx-t^2+1\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(-1,\ -2)$를 지나므로



$-2=-2t-t^2+1$

$t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0$

$\therefore\ t=-3$ 또는 $t=1$

(ⅰ) $t=-3$일 때,

㉠에서 $y=-6x-8$

(ⅱ) $t=1$일 때,

㉠에서 $y=2x$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

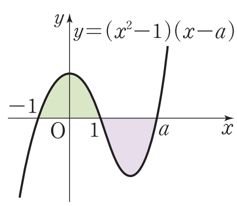
$$S=\int_{-3}^{-1}\{(x^2+1)-(-6x-8)\}\,dx+\int_{-1}^{1}\{(x^2+1)-2x\}\,dx$$

$$=\int_{-3}^{-1}(x^2+6x+9)\,dx+2\int_{0}^{1}(x^2+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x\right]_{-3}^{-1}+2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

19 곡선 $y=(x^2-1)(x-a)$와 x축의 교점의 x좌표는



$(x^2-1)(x-a)=0$에서

$(x+1)(x-1)(x-a)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=a$

곡선과 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{-1}^{a}(x^2-1)(x-a)\,dx=0$$

$$\int_{-1}^{a}(x^3-ax^2-x+a)\,dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_{-1}^{a}=0$$

$$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}=0$$

$a^4-6a^2-8a-3=0$

$(a+1)^3(a-3)=0$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>1)$

20 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_{0}^{3}\{-x^2(x-3)-ax(x-3)\}\,dx=0$$

$$\int_{0}^{3}\{-x^3+(3-a)x^2+3ax\}\,dx=0$$

$$\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3-a}{3}x^3+\frac{3a}{2}x^2\right]_{0}^{3}=0$$

$$\frac{9}{2}a+\frac{27}{4}=0$$

$\therefore\ a=-\dfrac{3}{2}$

21 $x^3-x+a=0$의 근 중에서 가장 큰 값을 α라 하면

$\alpha^3-\alpha+a=0$

$\therefore\ a=\alpha-\alpha^3$ …… ㉠

이때 $A=B$이므로

$$\int_{0}^{\alpha}(x^3-x+a)\,dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_{0}^{\alpha}=0$$

$\dfrac{1}{4}\alpha^4-\dfrac{1}{2}\alpha^2+a\alpha=0,\ \alpha^4-2\alpha^2+4a\alpha=0$

$\alpha>0$이므로 $\alpha^3-2\alpha+4a=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

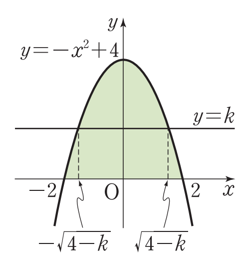
$3\alpha^3-2\alpha=0,\ \alpha(3\alpha^2-2)=0$

$\alpha>0$이므로 $\alpha=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면

$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}-\dfrac{6\sqrt{6}}{27}=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$

22 곡선 $y=-x^2+4$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-4=0$에서



$(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$

곡선 $y=-x^2+4$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는

$-x^2+4=k$에서 $x^2=4-k$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{4-k}$

곡선 $y=-x^2+4$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)\,dx=2\int_{0}^{2}(-x^2+4)\,dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{0}^{2}=\frac{32}{3}$$

곡선 $y=-x^2+4$와 직선 $y=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_{-\sqrt{4-k}}^{\sqrt{4-k}}(-x^2+4-k)\,dx$$

$$=2\int_{0}^{\sqrt{4-k}}(-x^2+4-k)\,dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+(4-k)x\right]_{0}^{\sqrt{4-k}}$$

$$=\frac{4}{3}(\sqrt{4-k})^3$$

주어진 조건에서 $S_1=2S_2$이므로

$\dfrac{32}{3}=2\times\dfrac{4}{3}(\sqrt{4-k})^3$

$(\sqrt{4-k})^3=4\qquad\therefore\ (4-k)^3=16$

23 $S_1=\int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2=\frac{4}{3}$

곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{2}x^2=mx$에서 $x^2-2mx=0$, $x(x-2m)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2m$

$\therefore$ $S_2=\int_2^{2m}\left(mx-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left[\frac{m}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\right]_2^{2m}$

$=\frac{2}{3}m^3-2m+\frac{4}{3}$

이때 $S_2=2S_1$이므로

$\frac{2}{3}m^3-2m+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

$m^3-3m-2=0$, $(m-2)(m+1)^2=0$

$\therefore$ $m=2$ ($\because$ $m>1$)

24 점 $(0, 2)$를 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면 직선의 방정식은 $y=mx+2$

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=mx+2$의 교점의 x좌표를 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하면 α, β는 방정식 $x^2=mx+2$, 즉 $x^2-mx-2=0$의 두 근이므로

근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=-2$ …… ㉠

한편, 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=mx+2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\int_\alpha^\beta (mx+2-x^2)\,dx=\left[\frac{m}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}x^3\right]_\alpha^\beta$

$=\frac{m}{2}(\beta^2-\alpha^2)+2(\beta-\alpha)-\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)$

$=(\beta-\alpha)\left\{\frac{m}{2}(\beta+\alpha)+2-\frac{1}{3}(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)\right\}$

㉠에서 $(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=m^2+8$이므로

$\beta-\alpha=\sqrt{m^2+8}$ ($\because$ $\alpha<\beta$)

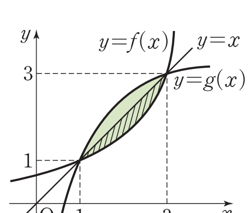
$\therefore$ $S=\sqrt{m^2+8}\left\{\frac{1}{2}m^2+2-\frac{1}{3}(m^2+2)\right\}$

$=\sqrt{m^2+8}\left(\frac{1}{6}m^2+\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{6}\sqrt{m^2+8}(m^2+8)$

$=\frac{1}{6}\sqrt{(m^2+8)^3}$

따라서 $m^2+8\geq 8$이므로 구하는 넓이 S는 $m=0$일 때 최소이고, 최솟값은 $\frac{8\sqrt{2}}{3}$이다.

25 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는



$\int_1^3\{x-f(x)\}\,dx$

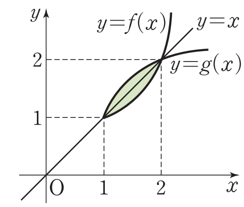
$=\int_1^3 x\,dx-\int_1^3 f(x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3-\frac{7}{2}=4-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 빗금 친 부분의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$2\times\frac{1}{2}=1$

26 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



$x^2-2x+2=x$에서 $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$ $\therefore$ $x=1$ 또는 $x=2$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=2\int_1^2\{x-(x^2-2x+2)\}\,dx$

$=2\int_1^2(-x^2+3x-2)\,dx$

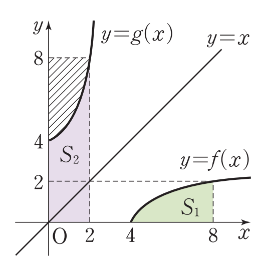
$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2=\frac{1}{3}$

27 함수 $f(x)=\sqrt{x-4}\,(x\geq 4)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\int_4^8 f(x)\,dx=S_1$,

$\int_0^2 g(x)\,dx=S_2$

라 하면 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 S_1과 같으므로



$\int_4^8 f(x)\,dx+\int_0^2 g(x)\,dx=S_1+S_2$

$=2\times 8=16$

28 $t=4$에서 점 P의 위치는

$0+\int_0^4 v(t)\,dt=\int_0^2(-t^2+2t)\,dt+\int_2^4(t^2-5t+6)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+6t\right]_2^4$

$=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$

29 이 자동차가 정지할 때 속도 $v(t)=0$이므로

$v(t)=20-2t=0$

$\therefore t=10$

따라서 제동을 건 후 10초 후에 자동차가 정지하므로 자동차가 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^{10}|20-2t|\,dt=\int_0^{10}(20-2t)\,dt$$
$$=\Big[20t-t^2\Big]_0^{10}$$
$$=100\,(\mathrm{m})$$

30 점 P가 원점을 출발하여 다시 원점으로 돌아오는 데 걸리는 시간을 a초라 하면 출발한 지 a초 후의 점 P의 위치의 변화량은 0이므로

$\int_0^a(3t^2-6t)\,dt=0,\ \Big[t^3-3t^2\Big]_0^a=0$

$a^3-3a^2=0,\ a^2(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

따라서 3초 동안 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|3t^2-6t|\,dt$$
$$=\int_0^2(-3t^2+6t)\,dt+\int_2^3(3t^2-6t)\,dt$$
$$=\Big[-t^3+3t^2\Big]_0^2+\Big[t^3-3t^2\Big]_2^3$$
$$=4+4=8\,(\mathrm{m})$$

31 점 P가 원점을 출발할 때의 속도 $v(0)=-10<0$이므로 점 P는 음의 방향으로 출발한다.

따라서 음의 방향과 반대 방향으로 움직이는 구간은

$v(t)=-t^2+7t-10\geq0,\ (t-2)(t-5)\leq0$

$\therefore 2\leq t\leq5$

따라서 $2\leq t\leq5$에서 $v(t)\geq0$이므로 점 P가 $2\leq t\leq5$에서 움직인 거리는

$$\int_2^5|v(t)|\,dt=\int_2^5(-t^2+7t-10)\,dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3+\frac{7}{2}t^2-10t\Big]_2^5$$
$$=\frac{9}{2}$$

32 두 점 A, B의 a초 후의 위치를 각각 $x_A(a)$, $x_B(a)$라 하면

$$x_A(a)=0+\int_0^a(6-t)\,dt$$
$$=0+\Big[6t-\frac{1}{2}t^2\Big]_0^a$$
$$=6a-\frac{1}{2}a^2$$

$$x_B(a)=12+\int_0^a(2t-3)\,dt$$
$$=12+\Big[t^2-3t\Big]_0^a$$
$$=a^2-3a+12$$

이때 두 점 A, B가 서로 만나는 때는 $x_A(a)=x_B(a)$인 경우이므로

$6a-\frac{1}{2}a^2=a^2-3a+12$

$a^2-6a+8=0$

$(a-2)(a-4)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

따라서 두 점 A, B는 출발 후 $a=2$, $a=4$일 때 다시 만나게 되므로 서로 만나는 횟수는 2회이다.

33 $v(t)=0$일 때 물이 멈추므로

$6t-t^2=0,\ t(6-t)=0$

$\therefore t=6\ (\because t>0)$

이때 6초 동안 물이 흘러 나온 거리는

$$\int_0^6|6t-t^2|\,dt=\int_0^6(6t-t^2)\,dt$$
$$=\Big[3t^2-\frac{1}{3}t^3\Big]_0^6$$
$$=36\,(\mathrm{cm})$$

따라서 6초 동안 흘러 나온 물의 양은

$\pi\times2^2\times36=144\pi\,(\mathrm{cm}^3)$

34 3km를 달리는 데 걸린 시간을 a분이라 하고 열차의 a분 후의 위치를 $x(a)$라 하면

$x(a)=\int_0^a v(t)\,dt=3$

$\int_0^a\left(\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t\right)dt=3$

$\Big[\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{4}t^2\Big]_0^a=3$

$\frac{1}{4}a^3+\frac{1}{4}a^2=3,\ a^3+a^2-12=0$

$(a-2)(a^2+3a+6)=0$

$\therefore a=2$

즉, 열차가 3km를 달리는 데 걸린 시간은 2분이고, 2분 후의 속도는

$\frac{3}{4}\times2^2+\frac{1}{2}\times2=4(\mathrm{km/m})$

따라서 이 열차가 출발 후 5분 동안 달린 거리는

$3+\int_2^5 4\,dt=3+\Big[4t\Big]_2^5=15(\mathrm{km})$

35 물체가 최고 지점에 도달할 때의 속도는 0이므로

$v(t)=10-10t=0 \qquad \therefore t=1$

따라서 $t=1$일 때 최고 지점에 도달하게 되므로 최고 높이는

$$10+\int_0^1 (10-10t)\,dt=10+\Big[10t-5t^2\Big]_0^1$$
$$=10+(10-5)$$
$$=15\,(\mathrm{m})$$

36 t초 후에 공의 운동 방향이 바뀐다고 하면

$v(t)=5(a-2t)=0$

$\therefore t=\dfrac{a}{2}$

따라서 $\dfrac{a}{2}$초 후에 공의 지면으로부터의 높이가 80 m이므로

$$\int_0^{\frac{a}{2}} (5a-10t)\,dt=80$$

$$\Big[5at-5t^2\Big]_0^{\frac{a}{2}}=80$$

$\dfrac{5}{4}a^2=80,\ a^2=64$

$\therefore a=8\ (\because a>0)$

37 물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로

$$\int_0^6 (-10t+k)\,dt=0$$

$$\Big[-5t^2+kt\Big]_0^6=0$$

$-180+6k=0 \qquad \therefore k=30$

$\therefore v(t)=-10t+30\,(\mathrm{m/s})$

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$v(t)=-10t+30=0 \qquad \therefore t=3$

즉, $t=3$일 때 이 물체는 최고 높이에 도달하고, 물체가 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는 최고 높이의 2배이므로

$$2\int_0^3 (-10t+30)\,dt=2\Big[-5t^2+30t\Big]_0^3$$
$$=90$$

따라서 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는 90 m이다.

38 공이 처음 쏘아 올린 위치로 다시 돌아오는 것은 4초 후이므로

$$60+\int_0^4 (a-10t)\,dt=60+\Big[at-5t^2\Big]_0^4$$
$$=4a-20$$

즉, $4a-20=60$이므로

$4a=80 \qquad \therefore a=20$

공이 지면에 떨어질 때까지 k초가 더 걸린다고 하면 공이 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로

$$60+\int_0^{4+k} (20-10t)\,dt=60+\Big[20t-5t^2\Big]_0^{4+k}$$
$$=-5k^2-20k+60$$

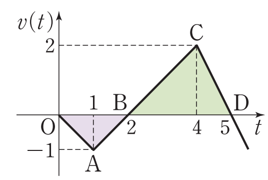
즉, $-5k^2-20k+60=0$이므로

$k^2+4k-12=0,\ (k+6)(k-2)=0$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$

따라서 지면에 떨어질 때까지 걸리는 시간은 $4+2=6$(초)이다.

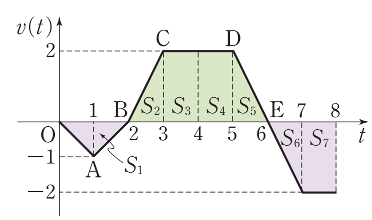
39



시각 $t=5$에서 점 P의 위치는

$$\int_0^5 v(t)\,dt=\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^5 v(t)\,dt$$
$$=-\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{BCD}$$
$$=-\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times3\times2=2$$

40



ㄱ. 출발 후 처음으로 정지하는 순간은 $t=2$일 때이므로 $t=2$까지 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v(t)|\,dt=\triangle\mathrm{OAB}$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times1=1$$

ㄴ. 물체가 운동 방향을 바꾸게 되는 시각은 속도 $v(t)=0$일 때이므로 출발 후 $t=2$에서 처음으로 운동 방향을 바꾸고 $t=6$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.

따라서 운동 방향을 두 번 바꾼다.

ㄷ. 위의 그림에서 속도 $v(t)$의 그래프와 t축이 이루는 각 부분의 넓이를 $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_5,\ S_6,\ S_7$이라 하면

$S_1=1,\ S_2=1,\ S_3=2,\ S_4=2,\ S_5=1,\ S_6=1,\ S_7=2$

이때 $-S_1+S_2+S_3=2$,

$-S_1+S_2+S_3+S_4+S_5-S_6-S_7=2$

이므로 $t=4$ 또는 $t=8$에서 이 물체의 위치가 2가 된다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

유형편

Memo