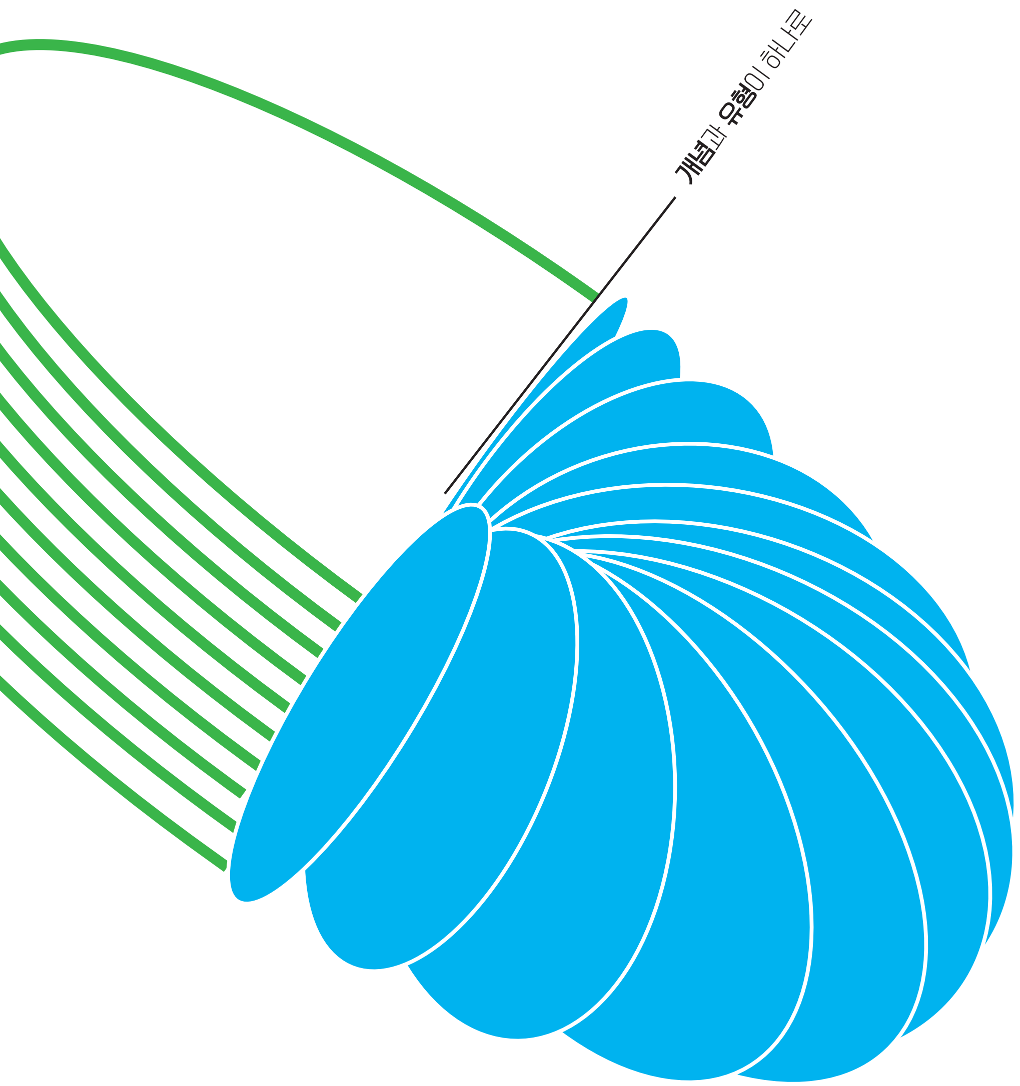
개념+유형

공통수학2

정답과 해설



개념편
정답과 해설

Ⅰ-1 01 두 점 사이의 거리

두 점 사이의 거리

개념 Check 8쪽

1 답 (1) **6** (2) **3** (3) $\mathbf{2\sqrt{13}}$ (4) $\mathbf{2\sqrt{5}}$

(1) $\overline{AB}=|-2-4|=6$

(2) $\overline{OA}=|-3|=3$

(3) $\overline{AB}=\sqrt{\{5-(-1)\}^2+\{1-(-3)\}^2}$

$=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

(4) $\overline{OA}=\sqrt{(-2)^2+4^2}$

$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

문제 9~14쪽

01-**1** 답 $\mathbf{-20}$

$\overline{AB}=3\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(6-3)^2+(-4-a)^2}=3\sqrt{5}$

양변을 제곱하면

$9+(a+4)^2=45,\ a^2+8a-20=0$

$(a+10)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-10$ 또는 $a=2$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$-10\times2=-20$

01-**2** 답 **12**

$\overline{AC}=2\overline{BC}$이므로

$\sqrt{\{3-(-5)\}^2+(6-a)^2}=2\sqrt{(3-1)^2+(6-2)^2}$

양변을 제곱하면

$64+(6-a)^2=80,\ a^2-12a+20=0$

$(a-2)(a-10)=0$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=10$

따라서 모든 a의 값의 합은

$2+10=12$

01-**3** 답 **1**

$\overline{AB}=\sqrt{(a-5)^2+(-3-a)^2}$

$=\sqrt{2a^2-4a+34}$

$=\sqrt{2(a-1)^2+32}$

따라서 선분 AB의 길이는 $a=1$일 때 최솟값을 갖는다.

02-**1** 답 $\mathbf{2\sqrt{10}}$

점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-4)^2+\{-(-1)\}^2=(a-5)^2+(-2)^2$

$a^2-8a+17=a^2-10a+29$

$2a=12 \qquad \therefore\ a=6$

$\therefore\ P(6,\ 0)$

점 Q의 좌표를 $(0,\ b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서

$\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(-4)^2+\{b-(-1)\}^2=(-5)^2+(b-2)^2$

$b^2+2b+17=b^2-4b+29$

$6b=12 \qquad \therefore\ b=2$

$\therefore\ Q(0,\ 2)$

$\therefore\ \overline{PQ}=\sqrt{(-6)^2+2^2}=2\sqrt{10}$

02-**2** 답 $\mathbf{\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)}$

점 P의 좌표를 $(a,\ a-1)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$\{a-(-3)\}^2+(a-1-1)^2$

$=\{a-(-1)\}^2+(a-1-2)^2$

$2a^2+2a+13=2a^2-4a+10$

$6a=-3 \qquad \therefore\ a=-\frac{1}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$이다.

03-**1** 답 $\mathbf{\frac{75}{2},\ \left(0,\ \frac{3}{2}\right)}$

점 P의 좌표를 $(0,\ a)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=(-6)^2+(a-1)^2+\{-(-1)\}^2+(a-2)^2$

$=2a^2-6a+42$

$=2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{75}{2}$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=\frac{3}{2}$일 때 최솟값 $\frac{75}{2}$를 갖고,

그때의 점 P의 좌표는 $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$이다.

03-**2** 답 **(3, 3)**

점 P의 좌표를 (a, a)라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=(a-1)^2+(a-2)^2+(a-3)^2+(a-6)^2$

$=4a^2-24a+50$

$=4(a-3)^2+14$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=3$일 때 최솟값을 갖고, 그때의 점 P의 좌표는 $(3, 3)$이다.

03-**3** 답 **11**

점 P의 좌표를 $(a, a-3)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=a^2+\{a-3-(-1)\}^2+(a-4)^2+\{a-3-(-3)\}^2$

$=4a^2-12a+20$

$=4\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+11$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=\frac{3}{2}$일 때 최솟값 11을 갖고, 그 때의 점 P의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$이므로

$a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$, $m=11$

$\therefore a+b+m=11$

04-**1** 답 (1) **∠B=90°인 직각삼각형** (2) **정삼각형**

(1) $\overline{AB}=\sqrt{(1-4)^2+\{1-(-2)\}^2}$

$=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\overline{BC}=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}$

$=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\overline{CA}=\sqrt{(4-3)^2+(-2-3)^2}$

$=\sqrt{26}$

이때 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로 삼각형 ABC는 $\angle B=90°$인 직각삼각형이다.

(2) $\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+\{3-(-3)\}^2}$

$=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$\overline{BC}=\sqrt{(-3\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}-3)^2}$

$=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$\overline{CA}=\sqrt{\{-1-(-3\sqrt{3})\}^2+(-3-\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

이때 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

04-**2** 답 **−2, 3**

$\overline{AB}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(6-2)^2}=\sqrt{25}=5$

$\overline{BC}=\sqrt{(a-2)^2+(4-6)^2}=\sqrt{a^2-4a+8}$

$\overline{CA}=\sqrt{(-1-a)^2+(2-4)^2}=\sqrt{a^2+2a+5}$

이때 삼각형 ABC는 $\angle C=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$에서

$a^2-4a+8+a^2+2a+5=25$

$a^2-a-6=0$, $(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

04-**3** 답 **24**

$\overline{AB}=\sqrt{(2-a)^2+4^2}=\sqrt{a^2-4a+20}$

$\overline{BC}=\sqrt{(6-2)^2+(-4-4)^2}=\sqrt{80}$

$\overline{CA}=\sqrt{(6-a)^2+(-4)^2}=\sqrt{a^2-12a+52}$

(i) $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$a^2-4a+20=80$

$a^2-4a-60=0$

$(a+6)(a-10)=0$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=10$

(ii) $\overline{BC}=\overline{CA}$에서 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로

$80=a^2-12a+52$

$a^2-12a-28=0$

$(a+2)(a-14)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=14$

(iii) $\overline{AB}=\overline{CA}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{CA}^2$이므로

$a^2-4a+20=a^2-12a+52$

$8a=32$ $\therefore a=4$

이때 $\overline{AB}=\overline{CA}=2\sqrt{5}$, $\overline{BC}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$에서

$\overline{AB}+\overline{CA}=\overline{BC}$이므로 삼각형이 만들어지지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 모든 양수 a의 값의 합은

$10+14=24$

05-**1** 답 **5**

$\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소인 경우는 점 P가 선분 AB 위에 있을 때이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}\ge\overline{AB}$

$=\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}$

$=\sqrt{25}=5$

따라서 구하는 최솟값은 5이다.

05-**2** 답 $\sqrt{65}$

$A(3, -2)$, $B(-1, 5)$, $P(x, y)$라 하면

$\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2}=\overline{AP}+\overline{BP}$

$\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소인 경우는 점 P가 선분 AB 위에 있을 때이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}\ge\overline{AB}$

$=\sqrt{(-1-3)^2+\{5-(-2)\}^2}$

$=\sqrt{65}$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{65}$이다.

05-3 답 $2\sqrt{5}$

$\sqrt{x^2+y^2+8x-4y+20}=\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}$이므로

$\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(-4,\ 2)$, $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

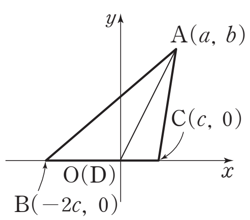
$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{AP}}$

$\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{AP}}$의 값이 최소인 경우는 점 P가 선분 OA 위에 있을 때이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{AP}}&\ge\overline{\mathrm{OA}}\\&=\sqrt{(-4)^2+2^2}\\&=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다.

06-1 답 풀이 참조



오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D는 원점이 된다.

$\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{C}(c,\ 0)$이라 하면

$\mathrm{B}(-2c,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(-2c-a)^2+(-b)^2=a^2+4ac+4c^2+b^2$

$\overline{\mathrm{AC}}^2=(c-a)^2+(-b)^2=a^2-2ac+c^2+b^2$

$\overline{\mathrm{AD}}^2=a^2+b^2$

$\overline{\mathrm{CD}}^2=c^2$

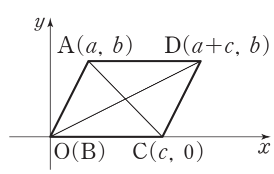
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}^2+2\overline{\mathrm{AC}}^2=3(a^2+b^2+2c^2)$ …… ㉠

$\quad\overline{\mathrm{AD}}^2+2\overline{\mathrm{CD}}^2=a^2+b^2+2c^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{\mathrm{AB}}^2+2\overline{\mathrm{AC}}^2=3(\overline{\mathrm{AD}}^2+2\overline{\mathrm{CD}}^2)$

06-2 답 풀이 참조



오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 B를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이 된다.

$\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{C}(c,\ 0)$이라 하면 $\mathrm{D}(a+c,\ b)$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}^2=(c-a)^2+(-b)^2=a^2-2ac+c^2+b^2$

$\overline{\mathrm{BD}}^2=(a+c)^2+b^2=a^2+2ac+c^2+b^2$

$\overline{\mathrm{AB}}^2=a^2+b^2$

$\overline{\mathrm{BC}}^2=c^2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2=2(a^2+b^2+c^2)$ …… ㉠

$\quad\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=a^2+b^2+c^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2=2(\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2)$

연습문제

15~17쪽

1 $\dfrac{22}{3}$ **2** ② **3** ④ **4** 29 **5** 2

6 $(0,\ -2)$ **7** ③ **8** ⑤ **9** ② **10** ①

11 ④ **12** $(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ **13** $2\sqrt{2}$

14 (가) B (나) a (다) b (라) $(x-a)^2+y^2$

(마) $(x-a)^2+(y-b)^2$

15 52 **16** 116 **17** $\sqrt{5}$ **18** ②

19 2시간 후, 5 km

1 $\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$에서 $\dfrac{1}{2}|x-(-3)|=|x-2|$

$\therefore\ |x+3|=2|x-2|$

(ⅰ) $x<-3$일 때, $-(x+3)=-2(x-2)$

$\quad -x-3=-2x+4\qquad\therefore\ x=7$

$\quad$이는 $x<-3$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $-3\le x<2$일 때, $x+3=-2(x-2)$

$\quad x+3=-2x+4\qquad\therefore\ x=\dfrac{1}{3}$

(ⅲ) $x\ge2$일 때, $x+3=2(x-2)$

$\quad x+3=2x-4\qquad\therefore\ x=7$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 모든 x의 값의 합은 $\dfrac{1}{3}+7=\dfrac{22}{3}$

다른 풀이

$\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$에서 $|x+3|=2|x-2|$

$x+3=2(x-2)$ 또는 $x+3=-2(x-2)$

$\therefore\ x=7$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$

따라서 모든 x의 값의 합은 $7+\dfrac{1}{3}=\dfrac{22}{3}$

2 $\overline{\mathrm{AB}}=5$이므로

$\sqrt{\{a-4-(-a)\}^2+(-2-1)^2}=5$

양변을 제곱하면

$(2a-4)^2+9=25,\ a^2-4a=0$

$a(a-4)=0\qquad\therefore\ a=4\ (\because\ a>0)$

3 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$\sqrt{\{6-(a-3)\}^2+(-1)^2}=\sqrt{(a-6)^2+4^2}$

양변을 제곱하면

$(9-a)^2+1=(a-6)^2+16$

$a^2-18a+82=a^2-12a+52$

$6a=30\qquad\therefore\ a=5$

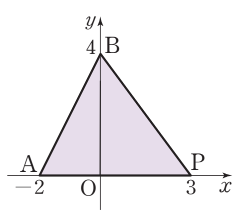
4 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\{4-(-1)\}^2+(1-3)^2=29$

5 $l^2=(-1-2t)^2+\{2t-(-3)\}^2$
$=8t^2+16t+10$
$=8(t+1)^2+2$
따라서 l^2은 $t=-1$일 때 최솟값 2를 갖는다.

6 점 P의 좌표를 $(a,\ a-2)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서
$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$\{a-(-3)\}^2+(a-2-2)^2=(a-4)^2+(a-2-1)^2$
$2a^2-2a+25=2a^2-14a+25$
$12a=0 \qquad \therefore a=0$
따라서 점 P의 좌표는 $(0,\ -2)$이다.

7 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서
$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$\{a-(-2)\}^2=a^2+(-4)^2$
$a^2+4a+4=a^2+16$
$4a=12 \qquad \therefore a=3$
따라서 점 P의 좌표는 $(3,\ 0)$
이므로 삼각형 ABP의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{BO}$
$=\frac{1}{2}\times5\times4=10$



8 점 P(1, 2)에서 세 꼭짓점 $A(a,\ 7)$, $B(-3,\ 5)$, $C(5,\ b)$에 이르는 거리가 같으므로
$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$
$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(1-a)^2+(2-7)^2=\{1-(-3)\}^2+(2-5)^2$
$a^2-2a+1=0,\ (a-1)^2=0$
$\therefore a=1$
$\overline{BP}=\overline{CP}$에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$이므로
$\{1-(-3)\}^2+(2-5)^2=(1-5)^2+(2-b)^2$
$b^2-4b-5=0,\ (b+1)(b-5)=0$
$\therefore b=5\ (\because b>0)$
$\therefore ab=1\times5=5$

9 점 P의 좌표를 $(a,\ a-1)$이라 하면
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$
$=(a-8)^2+\{a-1-(-7)\}^2+(a-12)^2+(a-1-5)^2$
$=4a^2-40a+280$
$=4(a-5)^2+180$
따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=5$일 때 최솟값을 갖고, 그때의 점 P의 좌표는 $(5,\ 4)$이므로
$a=5,\ b=4 \qquad \therefore a+b=9$

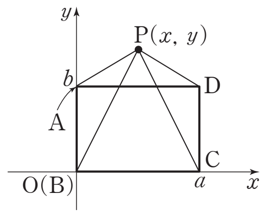
10 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$
$=(a-3)^2+(b-5)^2+(a-2)^2+(b-4)^2$
$\qquad+(a-1)^2+\{b-(-3)\}^2$
$=3a^2-12a+3b^2-12b+64$
$=3(a-2)^2+3(b-2)^2+40$
따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$은 $a=2,\ b=2$일 때 최솟값 40을 갖는다.

11 $\overline{AB}=\sqrt{\{-(-2)\}^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
$\overline{BC}=\sqrt{4^2+(-2-2)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$
$\overline{CA}=\sqrt{(-2-4)^2+\{-(-2)\}^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$
이때 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로 삼각형 ABC는
$\angle B=90°$인 직각삼각형이다.
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=8$

12 점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면
$\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+\{2-(-2)\}^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$
$\overline{BC}=\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2}=\sqrt{a^2+b^2-2a-4b+5}$
$\overline{CA}=\sqrt{(-1-a)^2+(-2-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2+2a+4b+5}$
$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로
$20=a^2+b^2-2a-4b+5$
$\therefore a^2+b^2-2a-4b-15=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$
$\overline{BC}=\overline{CA}$에서 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로
$a^2+b^2-2a-4b+5=a^2+b^2+2a+4b+5$
$4a+8b=0 \qquad \therefore a=-2b \qquad \cdots\cdots ㉡$
㉡을 ㉠에 대입하면
$4b^2+b^2+4b-4b-15=0$
$5b^2=15,\ b^2=3 \qquad \therefore b=\pm\sqrt{3}$
그런데 점 C가 제2사분면 위의 점이므로
$b=\sqrt{3}$
이를 ㉡에 대입하면 $a=-2\sqrt{3}$
따라서 점 C의 좌표는 $(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$이다.

13 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소인 경우는 점 P가 선분 AB 위에 있을 때이므로
$\overline{AP}+\overline{BP}\ge\overline{AB}$
$=\sqrt{(a-2-4)^2+\{3-(a+1)\}^2}$
$=\sqrt{2a^2-16a+40}$
$=\sqrt{2(a-4)^2+8}$
따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{8}$, 즉 $2\sqrt{2}$이다.

14 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 B를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 (가) $\boxed{\mathrm{B}}$는 원점이 된다.



이때 $\mathrm{A}(0,\ b)$, $\mathrm{C}(a,\ 0)$,

$\mathrm{D}($(나) $\boxed{a}$, (다) $\boxed{b}$$)$, $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

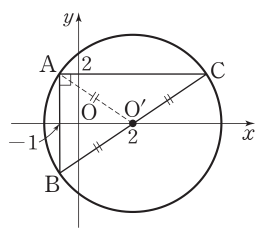
$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2=x^2+(y-b)^2+$ (라) $\boxed{(x-a)^2+y^2}$

$=x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$

$\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{DP}}^2=x^2+y^2+$ (마) $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{DP}}^2$

15 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 외심을 $\mathrm{O'}(2,\ 0)$이라 하면 점 O′에서 각 꼭짓점까지의 거리가 같으므로 점 O′은 선분 BC의 중점이다.



따라서 선분 BC는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이므로 삼각형 ABC는 선분 BC를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$

$=(2\overline{\mathrm{AO'}})^2$

$=4\overline{\mathrm{AO'}}^2$

$=4[\{2-(-1)\}^2+(-2)^2]$

$=52$

16 점 $\mathrm{B}_4(30,\ 18)$이고, $\overline{\mathrm{B}_4\mathrm{A}_4}=\overline{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4}=18$이므로

$\mathrm{A}_3(12,\ 0)$

이때 정사각형 $\mathrm{OA}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$, $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$, $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3\mathrm{C}_3$의 넓이의 비가 $1:4:9$이므로 닮음비는 $1:2:3$이다.

즉, $\overline{\mathrm{OA}_1}:\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}:\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}=1:2:3$이고, $\overline{\mathrm{OA}_3}=12$이므로

$\overline{\mathrm{OA}_1}=12\times\dfrac{1}{6}=2$

$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}=12\times\dfrac{2}{6}=4$

$\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}=12\times\dfrac{3}{6}=6$

$\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}=\overline{\mathrm{B}_3\mathrm{A}_3}=6$이므로

$\mathrm{B}_3(12,\ 6)$

$\overline{\mathrm{OA}_1}=\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1}=2$이므로

$\mathrm{B}_1(2,\ 2)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_3}^2=(12-2)^2+(6-2)^2$

$=116$

17 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2,\ -1)$, $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{AP}}$

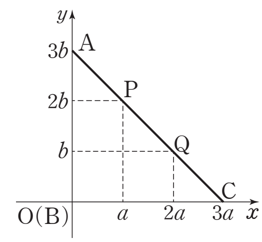
$\geq\overline{\mathrm{OA}}$

$=\sqrt{2^2+(-1)^2}$

$=\sqrt{5}$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{5}$이다.

18 다음 그림과 같이 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이 된다.



두 점 P, Q가 변 AC의 삼등분점이므로 점 P의 x좌표를 a, 점 Q의 y좌표를 b라 하면

$\mathrm{A}(0,\ 3b)$, $\mathrm{C}(3a,\ 0)$ …… ㉠

$\mathrm{P}(a,\ 2b)$, $\mathrm{Q}(2a,\ b)$ …… ㉡

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2$이므로 ㉠에서

$(3a)^2+(3b)^2=6^2$

$\therefore\ a^2+b^2=4$

㉡에서

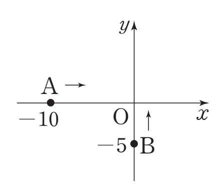
$\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{BQ}}^2=a^2+(2b)^2+(2a)^2+b^2$

$=5(a^2+b^2)$

$=5\times4$

$=20$

19 오른쪽 그림과 같이 직선 OA를 x축, 직선 OB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 O는 원점이 된다.



A, B의 출발점의 위치를 각각 $(-10,\ 0)$, $(0,\ -5)$로 놓고 t시간 후의 A, B의 위치를 각각 P, Q라 하면

$\mathrm{P}(-10+3t,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ -5+4t)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\{-(-10+3t)\}^2+(-5+4t)^2}$

$=\sqrt{25t^2-100t+125}$

$=\sqrt{25(t-2)^2+25}$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$는 $t=2$일 때 최솟값 $\sqrt{25}$, 즉 5를 갖는다.

즉, A와 B 사이의 거리가 최소가 되는 것은 2시간 후이고, 그때의 거리는 5 km이다.

Ⅰ-1 02 선분의 내분점

선분의 내분점

개념 Check 19쪽

1 답 (1) **B** (2) **C** (3) **2, 1**

2 답 (1) **2** (2) $\mathbf{\frac{1}{2}}$

(1) $\frac{1\times(-4)+2\times5}{1+2}=2$

(2) $\frac{5-4}{2}=\frac{1}{2}$

3 답 (1) $\left(\mathbf{5},\ \mathbf{\frac{7}{3}}\right)$ (2) $\left(\mathbf{\frac{9}{2}},\ \mathbf{1}\right)$

(1) $\left(\frac{2\times6+1\times3}{2+1},\ \frac{2\times5+1\times(-3)}{2+1}\right)$ $\quad\therefore \left(5,\ \frac{7}{3}\right)$

(2) $\left(\frac{3+6}{2},\ \frac{-3+5}{2}\right)$ $\quad\therefore \left(\frac{9}{2},\ 1\right)$

4 답 (1) **5** (2) **10**

(1) $\frac{a-3}{2}=1 \quad \therefore a=5$

(2) $\frac{1\times a+3\times(-2)}{1+3}=1 \quad \therefore a=10$

문제 20～24쪽

01-1 답 **4**

선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표가 $(b,\ 3)$이므로

$\frac{3\times2+1\times(-2)}{3+1}=b,\ \frac{3\times a+1\times3}{3+1}=3$

$\therefore a=3,\ b=1 \quad \therefore a+b=4$

01-2 답 $\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{3\times3+2\times8}{3+2},\ \frac{3\times9+2\times4}{3+2}\right)$ $\quad\therefore (5,\ 7)$

선분 AB의 중점 Q의 좌표는

$\left(\frac{8+3}{2},\ \frac{4+9}{2}\right)$ $\quad\therefore \left(\frac{11}{2},\ \frac{13}{2}\right)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{\left(\frac{11}{2}-5\right)^2+\left(\frac{13}{2}-7\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

01-3 답 $\left(\mathbf{\frac{11}{5}},\ \mathbf{-2}\right)$

선분 AB를 $1:b$로 내분하는 점의 좌표가 $(2,\ -1)$이므로

$\frac{1\times a+b\times1}{1+b}=2,\ \frac{1\times(-11)+b\times4}{1+b}=-1$

$\therefore a-b=2,\ 5b=10$

즉, $b=2$이므로 $a-2=2 \quad \therefore a=4$

$\therefore$ B$(4,\ -11)$

따라서 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times4+3\times1}{2+3},\ \frac{2\times(-11)+3\times4}{2+3}\right)$ $\quad\therefore \left(\frac{11}{5},\ -2\right)$

02-1 답 $\mathbf{\frac{2}{3}}$

$(1-t):t$에서 $1-t>0,\ t>0$이므로

$0<t<1$ …… ㉠

선분 AB를 $(1-t):t$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{(1-t)\times(-6)+t\times(-3)}{(1-t)+t},\ \frac{(1-t)\times4+t\times(-2)}{(1-t)+t}\right)$

$\therefore (3t-6,\ -6t+4)$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$3t-6<0,\ -6t+4>0 \quad \therefore t<\frac{2}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $0<t<\frac{2}{3}$

따라서 $\alpha=0,\ \beta=\frac{2}{3}$이므로 $\alpha+\beta=\frac{2}{3}$

02-2 답 **4**

선분 AB를 $1:k$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times(-3)+k\times2}{1+k},\ \frac{1\times8+k\times3}{1+k}\right)$

$\therefore \left(\frac{2k-3}{k+1},\ \frac{3k+8}{k+1}\right)$

이 점이 직선 $y=2x+2$ 위에 있으므로

$\frac{3k+8}{k+1}=2\times\frac{2k-3}{k+1}+2$

$3k+8=2(2k-3)+2(k+1)$

$3k=12 \quad \therefore k=4$

02-3 답 $\mathbf{(2,\ -2)}$

선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times5+1\times(-1)}{3+1},\ \frac{3\times2+1\times a}{3+1}\right)$ $\quad\therefore \left(\frac{7}{2},\ \frac{a+6}{4}\right)$

이 점이 x축 위에 있으므로

$\frac{a+6}{4}=0 \quad \therefore a=-6 \quad \therefore$ A$(-1,\ -6)$

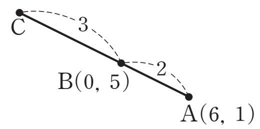
따라서 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+5}{2},\ \frac{-6+2}{2}\right)$ $\quad\therefore (2,\ -2)$

03-1 답 $(-9,\ 11)$

$3\overline{AB}=2\overline{BC}$이므로 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$

이때 점 C의 x좌표가 음수이므로 점 B는 선분 AC를 $2:3$으로 내분하는 점이다.



점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\dfrac{2\times a+3\times 6}{2+3}=0,\ \dfrac{2\times b+3\times 1}{2+3}=5$

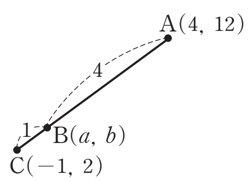
$\therefore\ a=-9,\ b=11$

따라서 점 C의 좌표는 $(-9,\ 11)$이다.

03-2 답 4

$\overline{AB}=4\overline{BC}$이므로 $\overline{AB}:\overline{BC}=4:1$

따라서 점 B는 선분 AC를 $4:1$로 내분하는 점이고 점 C의 좌표가 $(-1,\ 2)$이므로



$a=\dfrac{4\times(-1)+1\times 4}{4+1}=0,$

$b=\dfrac{4\times 2+1\times 12}{4+1}=4 \qquad \therefore\ a+b=4$

04-1 답 $(6,\ 8)$

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 선분 AC의 중점과 선분 BD의 중점이 일치한다.

선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{2+5}{2},\ \dfrac{4+3}{2}\right) \qquad \therefore\ \left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{7}{2}\right) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 선분 BD의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{1+a}{2},\ \dfrac{-1+b}{2}\right) \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$\dfrac{7}{2}=\dfrac{1+a}{2},\ \dfrac{7}{2}=\dfrac{-1+b}{2} \qquad \therefore\ a=6,\ b=8$

따라서 점 D의 좌표는 $(6,\ 8)$이다.

04-2 답 $\mathrm{C}(6,\ -4),\ \mathrm{D}(7,\ 2)$

두 대각선 AC, BD의 교점은 선분 AC, 선분 BD 각각의 중점과 일치한다.

점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 선분 AC의 중점의 좌표가 $(3,\ 0)$이므로

$\dfrac{0+a}{2}=3,\ \dfrac{4+b}{2}=0$

$\therefore\ a=6,\ b=-4 \qquad \therefore\ \mathrm{C}(6,\ -4)$

점 D의 좌표를 $(c,\ d)$라 하면 선분 BD의 중점의 좌표가 $(3,\ 0)$이므로

$\dfrac{-1+c}{2}=3,\ \dfrac{-2+d}{2}=0$

$\therefore\ c=7,\ d=2 \qquad \therefore\ \mathrm{D}(7,\ 2)$

04-3 답 -4

마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 선분 AC의 중점과 선분 BD의 중점이 일치한다.

선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+b}{2},\ \dfrac{3-3}{2}\right) \qquad \therefore\ \left(\dfrac{b-2}{2},\ 0\right) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

선분 BD의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{a+2}{2},\ \dfrac{-1+1}{2}\right) \qquad \therefore\ \left(\dfrac{a+2}{2},\ 0\right) \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$\dfrac{b-2}{2}=\dfrac{a+2}{2} \qquad \therefore\ a-b=-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

또 마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로

$\overline{AB}=\overline{AD}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2$

$\{a-(-2)\}^2+(-1-3)^2=\{2-(-2)\}^2+(1-3)^2$

$a^2+4a=0,\ a(a+4)=0$

$\therefore\ a=-4\ (\because\ a<0)$

이를 ㉢에 대입하여 풀면 $b=0$

$\therefore\ a+b=-4+0=-4$

05-1 답 $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$

선분 AD가 $\angle$A의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-7-5)^2+5^2}=13$

$\overline{AC}=\sqrt{(2-5)^2+(-4)^2}=5$

$\therefore\ \overline{BD}:\overline{CD}=13:5$

따라서 점 D는 변 BC를 $13:5$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$\left(\dfrac{13\times 2+5\times(-7)}{13+5},\ \dfrac{13\times(-4)+5\times 5}{13+5}\right)$

$\therefore\ \left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$

05-2 답 $\dfrac{16}{3}$

선분 AD가 $\angle$A의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-3-3)^2+(-2-6)^2}=10$

$\overline{AC}=\sqrt{(6-3)^2+(2-6)^2}=5$

$\therefore\ \overline{BD}:\overline{CD}=10:5=2:1$

따라서 점 D는 변 BC를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times 6+1\times(-3)}{2+1},\ \dfrac{2\times 2+1\times(-2)}{2+1}\right)$

$\therefore\ \left(3,\ \dfrac{2}{3}\right)$

$\therefore\ \overline{AD}=6-\dfrac{2}{3}=\dfrac{16}{3}$

2 삼각형의 무게중심

개념 Check 25쪽

1 답 (1) $(4,\ 3)$ (2) $(2,\ 2)$

(1) 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{3+7+2}{3},\ \frac{1+2+6}{3}\right)$

$\therefore (4,\ 3)$

(2) 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-2+5+3}{3},\ \frac{3+4-1}{3}\right)$

$\therefore (2,\ 2)$

문제 26쪽

06-1 답 $(-1,\ -4)$

점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1,\ 1)$이므로

$\frac{4+0+a}{3}=1,\ \frac{2+5+b}{3}=1$

$\therefore a=-1,\ b=-4$

따라서 점 C의 좌표는 $(-1,\ -4)$이다.

06-2 답 $\left(-\frac{5}{2},\ 2\right)$

두 점 B, C의 좌표를 각각 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(-1,\ 3)$이므로

$\frac{2+a+c}{3}=-1,\ \frac{5+b+d}{3}=3$

$\therefore a+c=-5,\ b+d=4$

따라서 선분 BC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a+c}{2},\ \frac{b+d}{2}\right)$

$\therefore \left(-\frac{5}{2},\ 2\right)$

06-3 답 $(2,\ -1)$

삼각형 DEF의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{6+3-3}{3},\ \frac{-1-4+2}{3}\right)$

$\therefore (2,\ -1)$

다른 풀이

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 D의 좌표는

$\left(\frac{2\times3+1\times6}{2+1},\ \frac{2\times(-4)+1\times(-1)}{2+1}\right)$

$\therefore (4,\ -3)$

선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점 E의 좌표는

$\left(\frac{2\times(-3)+1\times3}{2+1},\ \frac{2\times2+1\times(-4)}{2+1}\right)$

$\therefore (-1,\ 0)$

선분 CA를 $2:1$로 내분하는 점 F의 좌표는

$\left(\frac{2\times6+1\times(-3)}{2+1},\ \frac{2\times(-1)+1\times2}{2+1}\right)$

$\therefore (3,\ 0)$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{4-1+3}{3},\ \frac{-3+0+0}{3}\right)$

$\therefore (2,\ -1)$

연습문제 27~28쪽

1 ④	2 ⑤	3 $\frac{2}{3}$	4 ③	5 ③
6 ①	7 4	8 17	9 7	10 $(3,\ 2)$
11 ②	12 ③	13 ⑤	14 $3x-6y-13=0$	

1 선분 AB를 삼등분하는 두 점은 선분 AB를 각각 $1:2$, $2:1$로 내분하는 점과 같다.

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times7+2\times1}{1+2},\ \frac{1\times10+2\times(-2)}{1+2}\right)$

$\therefore (3,\ 2)$

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times7+1\times1}{2+1},\ \frac{2\times10+1\times(-2)}{2+1}\right)$

$\therefore (5,\ 6)$

$\therefore a+b+c+d=3+2+5+6$

$=16$

2 선분 AB를 $4:3$으로 내분하는 점의 좌표가 $(-1,\ 2)$이므로

$\frac{4\times(-4)+3\times a}{4+3}=-1,\ \frac{4\times b+3\times(3-b)}{4+3}=2$

$\therefore a=3,\ b=5$

$\therefore a+b=8$

3 선분 AB를 $(m+2):m$으로 내분하는 점의 좌표가 $(2,\ -1)$이므로

$$\frac{(m+2)\times1+m\times5}{(m+2)+m}=2 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$$\frac{(m+2)\times a+m\times(-3)}{(m+2)+m}=-1 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠에서 $6m+2=4m+4 \qquad \therefore m=1$

이를 ㉡에 대입하면

$$\frac{3a-3}{4}=-1 \qquad \therefore a=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore a+m=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$$

4 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\times6+2\times0}{1+2},\ \frac{1\times0+2\times a}{1+2}\right)$$

$$\therefore \left(2,\ \frac{2a}{3}\right)$$

이 점이 직선 $y=-x$ 위에 있으므로

$$\frac{2a}{3}=-2 \qquad \therefore a=-3$$

5 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{m\times3+n\times(-4)}{m+n},\ \frac{m\times1+n\times5}{m+n}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{3m-4n}{m+n},\ \frac{m+5n}{m+n}\right)$$

이 점이 y축 위에 있으므로

$$\frac{3m-4n}{m+n}=0 \qquad \therefore 3m=4n$$

따라서 m, n은 서로소인 자연수이므로

$m=4,\ n=3 \qquad \therefore m+n=7$

6 $\triangle BOC:\triangle OAC=2:1$에서

$\overline{BO}:\overline{OA}=2:1$

따라서 점 O는 선분 BA를 $2:1$로 내분하는 점이므로

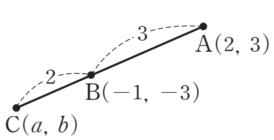
$$\frac{2\times3+1\times a}{2+1}=0,\ \frac{2\times1+1\times b}{2+1}=0$$

$\therefore a=-6,\ b=-2$

$\therefore a+b=-8$

7 $2\overline{AB}=3\overline{BC}$이므로 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:2$

따라서 점 B는 선분 AC를 $3:2$로 내분하는 점이므로



$$\frac{3\times a+2\times2}{3+2}=-1,$$

$$\frac{3\times b+2\times3}{3+2}=-3$$

$\therefore a=-3,\ b=-7$

$\therefore a-b=4$

8 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 선분 AC의 중점과 선분 BD의 중점이 일치한다.

선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+a}{2},\ \frac{5-1}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{-1+a}{2},\ 2\right) \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

선분 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{7+3}{2},\ \frac{-2+b}{2}\right)$$

$$\therefore \left(5,\ \frac{-2+b}{2}\right) \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$\frac{-1+a}{2}=5,\ 2=\frac{-2+b}{2}$$

$\therefore a=11,\ b=6$

$\therefore a+b=17$

9 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+4+8}{3},\ \frac{6+1+a}{3}\right) \qquad \therefore \left(\frac{14}{3},\ \frac{7+a}{3}\right)$$

이 점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$$\frac{7+a}{3}=\frac{14}{3} \qquad \therefore a=7$$

10 $D(1,\ -1)$, $E(3,\ 1)$, $F(5,\ 6)$이라 하면 삼각형 ABC의 무게중심은 삼각형 DEF의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+3+5}{3},\ \frac{-1+1+6}{3}\right)$$

$\therefore (3,\ 2)$

11 두 점 B, C의 좌표를 각각 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$라 하면 삼각형 ABC의 두 변 AB, AC의 중점이 각각 $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$이므로

$$\frac{-1+a}{2}=x_1,\ \frac{7+b}{2}=y_1,\ \frac{-1+c}{2}=x_2,\ \frac{7+d}{2}=y_2$$

$x_1+x_2=-1$에서

$$\frac{-1+a}{2}+\frac{-1+c}{2}=-1 \qquad \therefore a+c=0$$

$y_1+y_2=4$에서

$$\frac{7+b}{2}+\frac{7+d}{2}=4 \qquad \therefore b+d=-6$$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+a+c}{3},\ \frac{7+b+d}{3}\right) \qquad \therefore \left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

즉, $m=-\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{3}$이므로

$$mn=-\frac{1}{9}$$

12 선분 AD가 $\angle A$의 외각의 이등분선이므로

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

$\overline{AB} = \sqrt{(-8)^2 + (-3-3)^2} = 10$

$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

$\therefore \overline{BD} : \overline{CD} = 10 : 5 = 2 : 1$

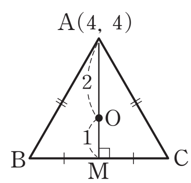
따라서 점 C는 선분 BD의 중점이므로

$\frac{-8+a}{2} = 4,\ \frac{-3+b}{2} = 0$

$\therefore a = 16,\ b = 3$

$\therefore a + b = 19$

13 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M(a, b)라 하면 삼각형 ABC의 무게중심은 선분 AM을 2 : 1로 내분하는 점이다.



이때 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(0, 0)$이므로

$\frac{2 \times a + 1 \times 4}{2+1} = 0,\ \frac{2 \times b + 1 \times 4}{2+1} = 0$

$\therefore a = -2,\ b = -2$

따라서 중점 M의 좌표는 $(-2, -2)$이다.

또 정삼각형의 한 내각의 이등분선은 밑변을 수직이등분하므로

$\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$

즉, 삼각형 ABM은 $\angle ABM = 60^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB} : \overline{AM} = 2 : \sqrt{3}$ ...... ㉠

$\overline{AM} = \sqrt{(-2-4)^2 + (-2-4)^2} = 6\sqrt{2}$

㉠에서

$\overline{AB} : 6\sqrt{2} = 2 : \sqrt{3}$

$\therefore \overline{AB} = 4\sqrt{6}$

따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 $4\sqrt{6}$이다.

14 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 P는 직선 $x - 2y + 1 = 0$ 위에 있으므로

$a - 2b + 1 = 0$ ...... ㉠

선분 AP를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x = \frac{1 \times a + 2 \times 3}{1+2} = \frac{a+6}{3}$,

$y = \frac{1 \times b + 2 \times (-2)}{1+2} = \frac{b-4}{3}$

$\therefore a = 3x - 6,\ b = 3y + 4$

이를 ㉠에 대입하면

$3x - 6 - 2(3y+4) + 1 = 0$

$\therefore 3x - 6y - 13 = 0$

Ⅰ-2 01 두 직선의 위치 관계

1 직선의 방정식

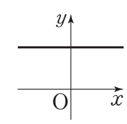
개념 Check 31쪽

1 답 (1) $\boldsymbol{y = 3x + 8}$ (2) $\boldsymbol{y = x - 3}$
(3) $\boldsymbol{y = -3x + 3}$ (4) $\boldsymbol{y = -2x + 4}$

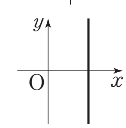
2 답 (1) $\boldsymbol{x = -4}$ (2) $\boldsymbol{y = 3}$

3 답 (1) **제1사분면, 제2사분면** (2) **제1사분면, 제4사분면**
(3) **제2사분면, 제4사분면**
(4) **제1사분면, 제3사분면, 제4사분면**

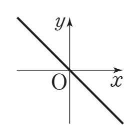
(1) $y = -\frac{c}{b}$에서 $-\frac{c}{b} > 0$이므로 직선은 제1사분면, 제2사분면을 지난다.



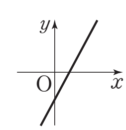
(2) $x = -\frac{c}{a}$에서 $-\frac{c}{a} > 0$이므로 직선은 제1사분면, 제4사분면을 지난다.



(3) $y = -\frac{a}{b}x$에서 $-\frac{a}{b} < 0$이므로 직선은 제2사분면, 제4사분면을 지난다.



(4) $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$에서 $-\frac{a}{b} > 0,\ -\frac{c}{b} < 0$이므로 직선은 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지난다.



문제 32~35쪽

01-1 답 **5**

두 점 $(2, -4)$, $(-4, 10)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2-4}{2}, \frac{-4+10}{2}\right)$ $\therefore (-1, 3)$

직선 $2x - y + 3 = 0$, 즉 $y = 2x + 3$의 기울기는 2이다.

따라서 점 $(-1, 3)$을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은 $y - 3 = 2\{x - (-1)\}$ $\therefore y = 2x + 5$

즉, 이 직선의 y절편은 5이다.

01-2 답 **1**

선분 BC를 3 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3 \times 3 + 2 \times (-2)}{3+2}, \frac{3 \times (-3) + 2 \times 2}{3+2}\right)$ $\therefore (1, -1)$

따라서 두 점 A$(-1, 7)$, $(1, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y - 7 = \frac{-1-7}{1-(-1)}\{x - (-1)\}$ $\therefore 4x + y - 3 = 0$

즉, $a = 4,\ b = -3$이므로 $a + b = 1$

01-**3** 답 $\boldsymbol{y=5x-10}$

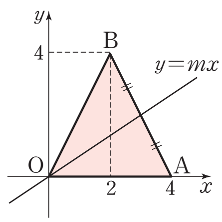
삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{3-4+7}{3}, \frac{5-2-3}{3}\right)$ $\therefore (2, 0)$

따라서 두 점 A(3, 5), G(2, 0)을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{0-5}{2-3}(x-2)$ $\therefore y=5x-10$

02-**1** 답 $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$



직선 $y=mx$가 원점 O를 지나므로 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하려면 선분 AB의 중점을 지나야 한다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{4+2}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$ $\therefore (3, 2)$

따라서 직선 $y=mx$가 점 (3, 2)를 지나므로

$2=3m$ $\therefore m=\frac{2}{3}$

02-**2** 답 $\boldsymbol{y=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}}$

점 A를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 선분 BC의 중점을 지나야 한다.

선분 BC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3-1}{2}, \frac{-1+5}{2}\right)$ $\therefore (1, 2)$

따라서 두 점 A(−3, −3), (1, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-3)=\frac{2-(-3)}{1-(-3)}\{x-(-3)\}$ $\therefore y=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$

02-**3** 답 $\boldsymbol{y=x+2}$

직선이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

직사각형의 두 대각선의 교점은 두 점 A(3, 8), C(7, 6)을 이은 선분 AC의 중점이므로

$\left(\frac{3+7}{2}, \frac{8+6}{2}\right)$ $\therefore (5, 7)$

따라서 두 점 (−4, −2), (5, 7)을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-2)=\frac{7-(-2)}{5-(-4)}\{x-(-4)\}$

$\therefore y=x+2$

03-**1** 답 $\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{5}}$

$(k+2)x-(2k-1)y+k-1=0$을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y-1)+k(x-2y+1)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$2x+y-1=0$, $x-2y+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=\frac{1}{5}$, $y=\frac{3}{5}$

따라서 $P\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$이므로 점 P와 원점 사이의 거리는

$\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

03-**2** 답 **3**

두 직선 $2x+y-4=0$, $x-y+1=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(2x+y-4)+k(x-y+1)=0$ (단, k는 실수) …… ㉠

직선 ㉠이 점 (−1, 1)을 지나므로

$-5-k=0$ $\therefore k=-5$

이를 ㉠에 대입하면

$(2x+y-4)-5(x-y+1)=0$

$\therefore x-2y+3=0$

따라서 $a=1$, $b=3$이므로 $ab=3$

다른 풀이

$2x+y-4=0$, $x-y+1=0$을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=2$

따라서 두 직선의 교점의 좌표가 (1, 2)이므로 두 점 (1, 2), (−1, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{1-2}{-1-1}(x-1)$ $\therefore x-2y+3=0$

즉, $a=1$, $b=3$이므로 $ab=3$

04-**1** 답 $\boldsymbol{m<1}$ **또는** $\boldsymbol{m>3}$

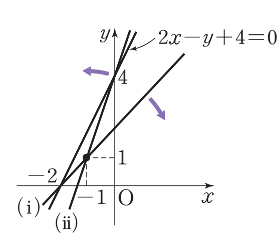
$mx-y+m+1=0$을 m에 대하여 정리하면

$(x+1)m-y+1=0$ …… ㉠

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x+1=0$, $-y+1=0$ $\therefore x=-1$, $y=1$

즉, 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 (−1, 1)을 지난다.



오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 직선 $2x-y+4=0$과 제2사분면에서 만나도록 직선 ㉠을 움직여 보면

(i) 직선 ㉠이 점 (−2, 0)을 지날 때,

$-m+1=0$ $\therefore m=1$

(ii) 직선 ㉠이 점 (0, 4)를 지날 때,

$m-3=0$ $\therefore m=3$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$m<1$ 또는 $m>3$

04-2 답 $-\frac{1}{4}\le k\le 1$

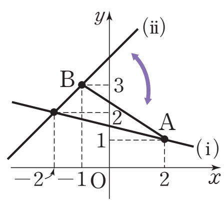
$y=k(x+2)+2$를 k에 대하여 정리하면

$k(x+2)-y+2=0$ ⋯⋯ ㉠

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x+2=0$, $-y+2=0$ $\quad\therefore x=-2$, $y=2$

즉, 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 2)$를 지난다.



오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 선분 AB와 만나도록 직선 ㉠을 움직여 보면

(i) 직선 ㉠이 점 A(2, 1)을 지날 때,

$4k+1=0$ $\quad\therefore k=-\frac{1}{4}$

(ii) 직선 ㉠이 점 B(−1, 3)을 지날 때,

$k-1=0$ $\quad\therefore k=1$

(i), (ii)에서 k의 값의 범위는

$-\frac{1}{4}\le k\le 1$

2 두 직선의 평행과 수직

개념 Check 37쪽

1 답 (1) **2** (2) $-\frac{1}{2}$

2 답 (1) **6** (2) $-\frac{3}{2}$

(1) $\frac{a}{2}=\frac{3}{1}\ne\frac{-1}{4}$ $\quad\therefore a=6$

(2) $a\times2+3\times1=0$ $\quad\therefore a=-\frac{3}{2}$

문제 38~41쪽

05-1 답 $y=-3x-1$

두 점 (1, 2), (4, 3)을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3-2}{4-1}=\frac{1}{3}$

이때 이 직선에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$\frac{1}{3}m=-1$ $\quad\therefore m=-3$

따라서 기울기가 −3이고 점 (−1, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=-3\{x-(-1)\}$ $\quad\therefore y=-3x-1$

05-2 답 -1

직선 $x+2y+3=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 (2, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{2}x+2$

이 직선이 점 $(6, a)$를 지나므로

$a=-\frac{1}{2}\times6+2=-1$

05-3 답 $\frac{3}{2}$

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+8}{2}, \frac{3+7}{2}\right)$ $\quad\therefore (4, 5)$

직선 $2x+y+1=0$, 즉 $y=-2x-1$의 기울기가 −2이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$-2m=-1$ $\quad\therefore m=\frac{1}{2}$

따라서 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 점 (4, 5)를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=\frac{1}{2}(x-4)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{2}x+3$

즉, $a=\frac{1}{2}$, $b=3$이므로

$ab=\frac{3}{2}$

06-1 답 $-\frac{1}{12}$

두 직선 $2x+(2k+1)y+3=0$, $2kx+y-1=0$이 서로 평행하려면

$\frac{2}{2k}=\frac{2k+1}{1}\ne\frac{3}{-1}$

$4k^2+2k=2$, $2k^2+k-1=0$

$(k+1)(2k-1)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=\frac{1}{2}$

이때 $\alpha>0$이므로 $\alpha=\frac{1}{2}$

또 두 직선이 서로 수직이려면

$2\times2k+(2k+1)\times1=0$ $\quad\therefore k=-\frac{1}{6}$

$\therefore \beta=-\frac{1}{6}$

$\therefore \alpha\beta=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{12}$

06-2 답 **4**

두 직선 $x+ay-4=0$, $3x-by+1=0$이 서로 수직이므로

$3-ab=0$　　$\therefore ab=3$　　…… ㉠

두 직선 $x+ay-4=0$, $x+(b+2)y+2=0$이 서로 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{a}{b+2}\neq\frac{-4}{2}$

$a=b+2$　　$\therefore b=a-2$

이를 ㉠에 대입하면

$a(a-2)=3$, $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$　　$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

이를 ㉠에 대입하면 $3b=3$　　$\therefore b=1$

$\therefore a+b=3+1=4$

06-3 답 **19**

두 직선 $x+ay+1=0$, $ax+(a+2)y+b=0$이 서로 수직이므로

$1\times a+a(a+2)=0$, $a^2+3a=0$

$a(a+3)=0$　　$\therefore a=-3$ ($\because a<0$)

따라서 두 직선은 $x-3y+1=0$, $-3x-y+b=0$이고 두 직선의 교점의 좌표가 $(c, 2)$이므로

$c-6+1=0$, $-3c-2+b=0$

$\therefore b=17$, $c=5$

$\therefore a+b+c=-3+17+5=19$

07-1 답 $\boldsymbol{\frac{7}{4}}$

직선 AB의 기울기는 $\frac{6-(-4)}{-2-3}=-2$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3-2}{2}, \frac{-4+6}{2}\right)$　　$\therefore \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

따라서 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 점 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$　　$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$

이 직선이 점 $(2, a)$를 지나므로

$a=\frac{1}{2}\times 2+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$

07-2 답 $\boldsymbol{y=-2x+3}$

직선 $x-2y-4=0$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는

$A(4, 0)$, $B(0, -2)$

직선 $x-2y-4=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-2$의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 -2이다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0-2}{2}\right)$　　$\therefore (2, -1)$

따라서 기울기가 -2이고 점 $(2, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-1)=-2(x-2)$

$\therefore y=-2x+3$

07-3 답 $\boldsymbol{a=8,\ b=-4}$

직선 AB의 기울기는 $\frac{b-a}{4-(-2)}=\frac{b-a}{6}$

선분 AB의 수직이등분선 $x-2y+3=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 직선 AB의 기울기는 -2이다.

따라서 $\frac{b-a}{6}=-2$이므로 $a-b=12$　　…… ㉠

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$　　$\therefore \left(1, \frac{a+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $x-2y+3=0$ 위에 있으므로

$1-2\times\frac{a+b}{2}+3=0$　　$\therefore a+b=4$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $b=-4$

08-1 답 **1**

$x+ay+2=0$　　…… ㉠

$2x+y-6=0$　　…… ㉡

$3x-y+2=0$　　…… ㉢

서로 다른 세 직선으로 둘러싸인 삼각형이 직각삼각형이려면 두 직선이 서로 수직이고 다른 한 직선은 두 직선과 평행하지 않아야 한다.

직선 ㉡, ㉢의 기울기는 각각 -2, 3이므로 두 직선 ㉡, ㉢은 서로 수직이 아니다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉡이 서로 수직일 때,

　$1\times 2+a\times 1=0$　　$\therefore a=-2$

(ii) 두 직선 ㉠, ㉢이 서로 수직일 때,

　$1\times 3+a\times(-1)=0$　　$\therefore a=3$

(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 합은

$-2+3=1$

08-2 답 **−1, 1, 2**

$2x-y-3=0$　　…… ㉠

$x+y-3=0$　　…… ㉡

$ax-y-1=0$　　…… ㉢

(i) 세 직선이 모두 평행할 때,

　두 직선 ㉠, ㉡의 기울기는 각각 2, -1이므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 없다.

(ii) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때,

두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행하면

$\frac{2}{a}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{-3}{-1}$ $\quad\therefore a=2$

두 직선 ㉡, ㉢이 서로 평행하면

$\frac{1}{a}=\frac{1}{-1}\neq\frac{-3}{-1}$ $\quad\therefore a=-1$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=1$

직선 ㉢이 점 $(2, 1)$을 지나야 하므로

$2a-1-1=0$ $\quad\therefore a=1$

(i), (ii), (iii)에서 상수 a의 값은 -1, 1, 2이다.

연습문제 42~43쪽

1 2 **2** ④ **3** -1 **4** ㄱ, ㄴ, ㄷ **5** ④
6 8 **7** ② **8** -1 **9** ①
10 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ **11** -2 **12** 13 **13** 3
14 $(4, 3)$ **15** -3

1 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times3+1\times(-3)}{2+1}, \frac{2\times5+1\times2}{2+1}\right)$ $\quad\therefore (1, 4)$

$x+y-3=0$에서 $y=-x+3$

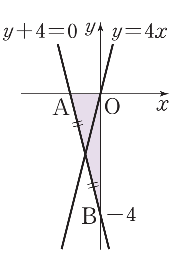
따라서 점 $(1, 4)$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-4=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x+5$

이 직선이 점 $(a, 3)$을 지나므로

$3=-a+5$ $\quad\therefore a=2$

2 직선 $ax+y+4=0$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면



$A\left(-\frac{4}{a}, 0\right)$, $B(0, -4)$

직선 $y=4x$가 원점 O를 지나므로 삼각형 ABO의 넓이를 이등분하려면 선분 AB의 중점을 지나야 한다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-\frac{4}{a}}{2}, \frac{-4}{2}\right)$ $\quad\therefore \left(-\frac{2}{a}, -2\right)$

따라서 직선 $y=4x$가 점 $\left(-\frac{2}{a}, -2\right)$를 지나므로

$-2=4\times\left(-\frac{2}{a}\right)$ $\quad\therefore a=4$

3 정사각형과 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 도형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

정사각형의 두 대각선의 교점은 두 점 $(-2, -2)$, $(0, 0)$을 이은 선분의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{-2+0}{2}\right)$ $\quad\therefore (-1, -1)$

직사각형의 두 대각선의 교점은 두 점 $(2, 2)$, $(6, 4)$를 이은 선분의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{2+6}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$ $\quad\therefore (4, 3)$

두 점 $(-1, -1)$, $(4, 3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3-(-1)}{4-(-1)}=\frac{4}{5}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y+1=\frac{4}{5}(x+1)$ $\quad\therefore 4x-5y-1=0$

즉, $a=4$, $b=-5$이므로 $a+b=-1$

4 ㄱ. $(k-1)x+(2k+1)y-k-5=0$을 k에 대하여 정리하면 $(-x+y-5)+k(x+2y-1)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$-x+y-5=0$, $x+2y-1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-3$, $y=2$

따라서 k의 값에 관계없이 점 $(-3, 2)$를 지난다.

ㄴ. $k=1$이면 $3y-6=0$, 즉 $y=2$이므로 x축에 평행한 직선이다.

ㄷ. $k=-\frac{1}{2}$이면 $-\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}=0$, 즉 $x=-3$이므로 점 $(-3, 0)$을 지난다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5 두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x-2y+2)+k(2x+y-6)=0$ (단, k는 실수) ⋯⋯ ㉠

직선 ㉠이 점 $(4, 0)$을 지나므로

$6+2k=0$ $\quad\therefore k=-3$

이를 ㉠에 대입하면

$(x-2y+2)-3(2x+y-6)=0$ $\quad\therefore x+y-4=0$

따라서 이 직선의 y절편은 4이다.

6 직선 $3x+2y-4=0$, 즉 $y=-\frac{3}{2}x+2$의 기울기가 $-\frac{3}{2}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{2}{3}$이다.

따라서 기울기가 $\frac{2}{3}$이고 점 $(2, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=\frac{2}{3}(x-2)$ $\quad\therefore 2x-3y+11=0$

즉, $a=-3$, $b=11$이므로 $a+b=8$

7 두 직선 $x+ay+1=0$, $2x-by+1=0$이 서로 수직이므로

$1\times2+a\times(-b)=0 \qquad \therefore ab=2$

두 직선 $x+ay+1=0$, $x-(b-3)y-1=0$이 서로 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{a}{-(b-3)}\neq\frac{1}{-1}$

$-(b-3)=a \qquad \therefore a+b=3$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\times2=5$

8 두 직선 $x-ky+2=0$, $(k-1)x-2y+k=0$이 서로 평행하려면

$\frac{1}{k-1}=\frac{-k}{-2}\neq\frac{2}{k}$

$\frac{1}{k-1}=\frac{-k}{-2}$에서 $k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0 \qquad \therefore k=-1$ 또는 $k=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{-k}{-2}\neq\frac{2}{k}$에서 $k^2\neq4 \qquad \therefore k\neq\pm2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k=-1$

9 직선 AB의 기울기는 $\frac{-9-15}{b-a}=\frac{24}{a-b}$

선분 AB의 수직이등분선 $y=\frac{1}{2}x+1$의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 직선 AB의 기울기는 -2이다.

따라서 $\frac{24}{a-b}=-2$이므로 $a-b=-12 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{15-9}{2}\right) \qquad \therefore \left(\frac{a+b}{2}, 3\right)$

이 점이 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$ 위에 있으므로

$3=\frac{1}{2}\times\frac{a+b}{2}+1 \qquad \therefore a+b=8 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=10$

$\therefore ab=-20$

10 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 직선 AC는 선분 BD의 수직이등분선이다.

직선 BD의 기울기는 $\frac{7-(-5)}{4-(-2)}=2$이므로 직선 AC의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

선분 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-5+7}{2}\right) \qquad \therefore (1, 1)$

따라서 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 $(1, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{2}(x-1) \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

11 $ax-y=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x+y-2=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

$2x-y-1=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

(i) 세 직선이 모두 평행할 때,

두 직선 ㉡, ㉢의 기울기는 각각 -1, 2이므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 없다.

(ii) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때,

두 직선 ㉠, ㉡이 서로 평행하면

$\frac{a}{1}=\frac{-1}{1}\neq\frac{0}{-2} \qquad \therefore a=-1$

두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행하면

$\frac{a}{2}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{0}{-1} \qquad \therefore a=2$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$

직선 ㉠이 점 $(1, 1)$을 지나야 하므로

$a-1=0 \qquad \therefore a=1$

(i), (ii), (iii)에서 모든 상수 a의 값의 곱은

$-1\times1\times2=-2$

12 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$이고, $\triangle ADE : \triangle ABC=1:9$이므로

$\overline{AD}:\overline{AB}=1:3 \qquad \therefore \overline{AD}:\overline{DB}=1:2$

점 D는 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$D\left(\frac{1\times0+2\times3}{1+2}, \frac{1\times2+2\times4}{1+2}\right) \qquad \therefore D\left(2, \frac{10}{3}\right)$

$\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$에서

(직선 DE의 기울기)=(직선 BC의 기울기)

$=\frac{-1-2}{5-0}=-\frac{3}{5}$

따라서 직선 DE의 방정식은

$y-\frac{10}{3}=-\frac{3}{5}(x-2) \qquad \therefore y=-\frac{3}{5}x+\frac{68}{15}$

즉, $a=-\frac{3}{5}$, $b=\frac{68}{15}$이므로

$a+3b=-\frac{3}{5}+3\times\frac{68}{15}=13$

13 $mx-y+2m=0$을 m에 대하여 정리하면

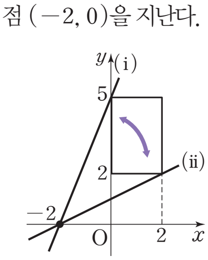
$m(x+2)-y=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x+2=0$, $-y=0 \qquad \therefore x=-2$, $y=0$

즉, 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 0)$을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 직사각형과 만나도록 직선 ㉠을 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $(0, 5)$를 지날 때,

$2m-5=0 \qquad \therefore m=\frac{5}{2}$

(ⅱ) 직선 ㉠이 점 $(2,\ 2)$를 지날 때,

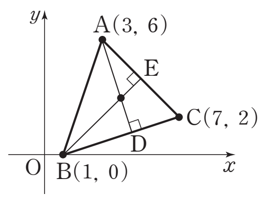
$4m-2=0 \qquad \therefore\ m=\frac{1}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 m의 값의 범위는

$\frac{1}{2} \le m \le \frac{5}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{2}$이므로 $a+b=3$

14 직선 BC의 기울기는



$\frac{2-0}{7-1}=\frac{1}{3}$이므로 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면 직선 AD의 기울기는 -3이다.

이때 직선 AD의 방정식은

$y-6=-3(x-3)$

$\therefore\ y=-3x+15 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

직선 AC의 기울기는 $\frac{2-6}{7-3}=-1$이므로 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하면 직선 BE의 기울기는 1이다.

이때 직선 BE의 방정식은

$y=x-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

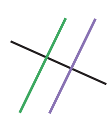
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=4,\ y=3$

따라서 구하는 세 수선의 교점의 좌표는 $(4,\ 3)$이다.

15 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나누는 경우는 다음과 같은 2가지의 경우이다.

(ⅰ) 세 직선 중 두 직선이 평행한 경우

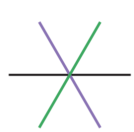
두 직선 $y=-x+2,\ y=2x+1$은 평행하지 않으므로 직선 $y=ax+3$이 직선 $y=-x+2$ 또는 직선 $y=2x+1$과 평행해야 한다.



$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=2$

(ⅱ) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$y=-x+2,\ y=2x+1$을 연립하여 풀면 $x=\frac{1}{3},\ y=\frac{5}{3}$



즉, 두 직선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right)$

직선 $y=ax+3$이 점 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right)$를 지나야 하므로

$\frac{5}{3}=a\times\frac{1}{3}+3 \qquad \therefore\ a=-4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 상수 a의 값의 합은

$-1+2+(-4)=-3$

Ⅰ-2 02 점과 직선 사이의 거리

1 점과 직선 사이의 거리

문제 45~48쪽

01-1 답 1

점 $(3,\ -1)$과 직선 $3x+ay+2=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\frac{|3\times3+a\times(-1)+2|}{\sqrt{3^2+a^2}}=\sqrt{10}$

$|11-a|=\sqrt{10(9+a^2)}$

양변을 제곱하면

$a^2-22a+121=10a^2+90$

$9a^2+22a-31=0,\ (9a+31)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-\frac{31}{9}$ 또는 $a=1$

그런데 a는 정수이므로 $a=1$

01-2 답 $\boldsymbol{x-2y-5=0}$ 또는 $\boldsymbol{x-2y+5=0}$

직선 $x-2y-1=0$에 평행한 직선의 방정식을 $x-2y+a=0\ (a\ne-1)$이라 하면 점 $(2,\ 1)$과 직선 $x-2y+a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|2-2\times1+a|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$

$|a|=5 \qquad \therefore\ a=\pm5$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$x-2y-5=0$ 또는 $x-2y+5=0$

01-3 답 $\boldsymbol{\sqrt{13}}$

$(4+2k)x+(3-k)y-18-4k=0$을 k에 대하여 정리하면

$(4x+3y-18)+k(2x-y-4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$4x+3y-18=0,\ 2x-y-4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3,\ y=2$

따라서 점 P의 좌표는 $(3,\ 2)$이므로 점 $\mathrm{P}(3,\ 2)$와 직선 $3x+2y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times3+2\times2|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\sqrt{13}$

02-1 답 $\boldsymbol{\sqrt{10}}$

두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+y-3=0$ 위의 한 점 $(0,\ 3)$과 직선 $3x+y+7=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|3+7|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$

02-2 답 **10**

직선 $x+y+5=0$ 위의 한 점 $(-5,\ 0)$과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|-5+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$$

$|k-5|=6,\ k-5=\pm 6$

$\therefore\ k=-1$ 또는 $k=11$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$-1+11=10$

02-3 답 $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$

두 직선 $2x-y+2=0,\ ax+3y-4=0$이 서로 평행하므로

$$\frac{2}{a}=\frac{-1}{3}\neq\frac{2}{-4} \qquad \therefore\ a=-6$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x-y+2=0$ 위의 한 점 $(0,\ 2)$와 직선 $-6x+3y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3\times 2-4|}{\sqrt{(-6)^2+3^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{15}$$

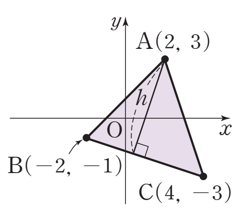
03-1 답 **16**

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\{4-(-2)\}^2+\{-3-(-1)\}^2}=2\sqrt{10}$

직선 BC의 방정식은

$$y+1=\frac{-3+1}{4+2}(x+2)$$

$\therefore\ x+3y+5=0$



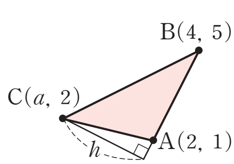
점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$과 직선 $x+3y+5=0$ 사이의 거리를 h라 하면

$$h=\frac{|2+3\times 3+5|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{16}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore\ \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times h=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times\frac{16}{\sqrt{10}}=16$$

03-2 답 **5**

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4-2)^2+(5-1)^2}=2\sqrt{5}$



직선 AB의 방정식은

$$y-1=\frac{5-1}{4-2}(x-2)$$

$\therefore\ 2x-y-3=0$

점 $\mathrm{C}(a,\ 2)$와 직선 $2x-y-3=0$ 사이의 거리를 h라 하면

$$h=\frac{|2a-2-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2a-5|}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore\ \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times h=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\frac{|2a-5|}{\sqrt{5}}=|2a-5|$$

즉, $|2a-5|=9$이므로

$2a-5=\pm 9 \qquad \therefore\ a=7$ 또는 $a=-2$

따라서 모든 a의 값의 합은

$7+(-2)=5$

03-3 답 $\dfrac{7}{2}$

두 직선 $y=2x,\ y=-2x+6$의 교점의 x좌표는

$$2x=-2x+6,\ 4x=6 \qquad \therefore\ x=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ \mathrm{A}\left(\frac{3}{2},\ 3\right)$$

두 직선 $y=\frac{1}{4}x,\ y=-2x+6$의 교점의 x좌표는

$$\frac{1}{4}x=-2x+6,\ \frac{9}{4}x=6 \qquad \therefore\ x=\frac{8}{3}$$

$$\therefore\ \mathrm{B}\left(\frac{8}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\frac{8}{3}\right)^2+\left(3-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{7\sqrt{5}}{6}$$

원점과 직선 $y=-2x+6$, 즉 $2x+y-6=0$ 사이의 거리를 h라 하면

$$h=\frac{|-6|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore\ \triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times h=\frac{1}{2}\times\frac{7\sqrt{5}}{6}\times\frac{6\sqrt{5}}{5}=\frac{7}{2}$$

04-1 답 $\boldsymbol{2x+2y+5=0}$ **또는** $\boldsymbol{4x-4y-7=0}$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x-y-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|x-3y-6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}$$

$|3x-y-1|=|x-3y-6|$

$3x-y-1=\pm(x-3y-6)$

$\therefore\ 2x+2y+5=0$ 또는 $4x-4y-7=0$

04-2 답 $\boldsymbol{3x-y=0}$

두 직선 $x-2y+1=0,\ 2x+y-1=0$이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x-2y+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|2x+y-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$|x-2y+1|=|2x+y-1|$

$x-2y+1=\pm(2x+y-1)$

$\therefore\ x+3y-2=0$ 또는 $3x-y=0$

따라서 기울기가 양수인 직선의 방정식은

$3x-y=0$

연습문제

49~50쪽

1 ③	**2** ③	**3** ⑤	**4** ①	**5** -1
6 ②	**7** ①	**8** ③	**9** ④	**10** ③
11 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$		**12** $3x+y-8=0$		

1 두 점 $(-1,\ 5)$, $(3,\ -7)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-5=\frac{-7-5}{3-(-1)}\{x-(-1)\}$

$\therefore\ 3x+y-2=0$

따라서 점 $(5,\ -3)$과 직선 $3x+y-2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times5-3-2|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$

2 $x-3y+3=0$, $2x-y+1=0$을 연립하여 풀면

$x=0$, $y=1$

즉, 직선 $ax+by-1=0$이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$b-1=0 \qquad \therefore\ b=1$

이때 원점과 직선 $ax+y-1=0$ 사이의 거리가 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{|-1|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{2}$

$\sqrt{a^2+1}=2$, $a^2=3$

$\therefore\ a=-\sqrt{3}$ 또는 $a=\sqrt{3}$

그런데 $a>0$이므로 $a=\sqrt{3}$

$\therefore\ ab=\sqrt{3}\times1=\sqrt{3}$

3 직선 $x+3y-5=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$의 기울기가 $-\frac{1}{3}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 3이다.

구하는 직선의 방정식을 $y=3x+a$라 하면 점 $(-2,\ 6)$과 직선 $y=3x+a$, 즉 $3x-y+a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\frac{|3\times(-2)-6+a|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

$|a-12|=10$, $a-12=\pm10$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=22$

$\therefore\ y_1+y_2=2+22=24$

4 세 점 $O(0,\ 0)$, $A(8,\ 4)$, $B(7,\ a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{0+8+7}{3},\ \frac{0+4+a}{3}\right) \qquad \therefore\ \left(5,\ \frac{4+a}{3}\right)$

$G(5,\ b)$이므로 $b=\frac{4+a}{3}$ ...... ㉠

한편 직선 OA의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x \qquad \therefore\ x-2y=0$

점 $G(5,\ b)$와 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|5-2b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$

$|5-2b|=5$, $5-2b=\pm5$

$\therefore\ b=0$ 또는 $b=5$

이를 ㉠에 대입하여 풀면

$a=-4$, $b=0$ 또는 $a=11$, $b=5$

그런데 $a>0$이므로 $a=11$, $b=5$

$\therefore\ a+b=16$

5 두 직선 $x-2y-1=0$, $2x+ay+b=0$이 서로 평행하므로

$\frac{1}{2}=\frac{-2}{a}\neq\frac{-1}{b} \qquad \therefore\ a=-4$

직선 $x-2y-1=0$ 위의 한 점 $(1,\ 0)$과 직선 $2x-4y+b=0$ 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$이므로

$\frac{|2\times1+b|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$|b+2|=5$, $b+2=\pm5$

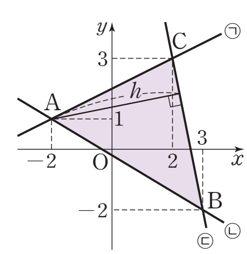
$\therefore\ b=3\ (\because\ b>0)$

$\therefore\ a+b=-4+3=-1$

6 $x-2y+4=0$ ...... ㉠

$3x+5y+1=0$ ...... ㉡

$5x+y-13=0$ ...... ㉢



두 직선 ㉠과 ㉡, ㉡과 ㉢, ㉢과 ㉠의 교점을 각각 A, B, C라 하면

$A(-2,\ 1)$, $B(3,\ -2)$, $C(2,\ 3)$

$\overline{BC}=\sqrt{(2-3)^2+\{3-(-2)\}^2}=\sqrt{26}$

점 $A(-2,\ 1)$과 직선 ㉢ 사이의 거리를 h라 하면

$h=\frac{|5\times(-2)+1\times1-13|}{\sqrt{5^2+1^2}}=\frac{22}{\sqrt{26}}$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times h$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{26}\times\frac{22}{\sqrt{26}}$

$=11$

7 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 P에서 두 직선 $x-2y+3=0$, $2x+y-1=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x-2y+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|2x+y-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$|x-2y+3|=|2x+y-1|$

$x-2y+3=\pm(2x+y-1)$

$\therefore\ x+3y-4=0$ 또는 $3x-y+2=0$

8 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점 $(a, -1)$에서 두 직선 $3x-4y+8=0$, $4x+3y+12=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3a+4+8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|4a-3+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

$|3a+12|=|4a+9|$

$3a+12=\pm(4a+9)$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=3$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-3+3=0$

9 $x-y-3+k(x+y)=0$에서

$(k+1)x+(k-1)y-3=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

원점과 직선 ㉠ 사이의 거리 $f(k)$는

$$f(k)=\frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2(k^2+1)}}$$

$f(k)$는 분모가 최소일 때 최댓값을 갖고, $\sqrt{2(k^2+1)}$에서 $k^2\geq0$이므로 $k=0$일 때 분모는 최솟값 $\sqrt{2}$를 갖는다.

따라서 $f(k)$의 최댓값은 $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

10 두 점 A$(8, 6)$, O$(0, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{3}{4}x$

점 B의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면 점 B와 직선 $y=\frac{3}{4}x$, 즉 $3x-4y=0$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{BI}}=\frac{|3a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{3a}{5}$$

이때 H$(8, 0)$이고 $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{BI}}$이므로

$8-a=\frac{3a}{5}\qquad\therefore\ a=5$

따라서 점 B$(5, 0)$이므로 직선 AB의 방정식은

$y=\frac{0-6}{5-8}(x-5)\qquad\therefore\ y=2x-10$

즉, $m=2$, $n=-10$이므로

$m+n=-8$

11 $\overline{\mathrm{AB}}$는 두 직선 $y=2x+1$, $y=2x-2$ 사이의 거리이고, 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=2x+1$ 위의 한 점 $(0, 1)$과 직선 $y=2x-2$, 즉 $2x-y-2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{|-1-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

직선 l은 직선 $y=2x+1$과 수직이므로 기울기가 $-\frac{1}{2}$이다.

직선 l의 방정식을 $y=-\frac{1}{2}x+a$, 즉 $x+2y-2a=0$이라 하고 원점과 직선 l 사이의 거리를 h라 하면

$$h=\frac{|-2a|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2|a|}{\sqrt{5}}$$

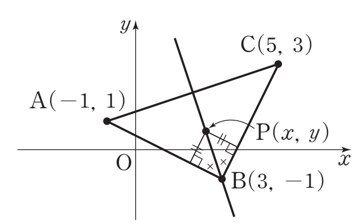
$$\therefore\ \triangle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times h=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{5}}{5}\times\frac{2|a|}{\sqrt{5}}=\frac{3|a|}{5}$$

즉, $\frac{3|a|}{5}=\frac{3}{2}$이므로 $|a|=\frac{5}{2}\qquad\therefore\ a=\pm\frac{5}{2}$

이때 A, B가 제1사분면 위의 점이므로 $a=\frac{5}{2}$

따라서 직선 l의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

12 삼각형의 내심은 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이므로 점 B와 삼각형 ABC의 내심을 지나는 직선은 다음 그림과 같이 $\angle$B의 이등분선과 같다.



직선 AB의 방정식은

$y-1=\frac{-1-1}{3-(-1)}\{x-(-1)\}$

$\therefore\ x+2y-1=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

직선 BC의 방정식은

$y-(-1)=\frac{3-(-1)}{5-3}(x-3)$

$\therefore\ 2x-y-7=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

따라서 두 직선 ㉠, ㉡이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 P(x, y)라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2x-y-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$|x+2y-1|=|2x-y-7|$

$x+2y-1=\pm(2x-y-7)$

$\therefore\ x-3y-6=0$ 또는 $3x+y-8=0$

그런데 $\angle$B의 이등분선의 y절편은 양수이어야 하므로 구하는 직선의 방정식은 $3x+y-8=0$

Ⅰ-3 01 원의 방정식

원의 방정식(1)

개념 Check 52쪽

1 답 (1) $(0,\ 0),\ 2\sqrt{3}$ (2) $(1,\ -4),\ 4$
(3) $(0,\ 1),\ 3$ (4) $(-3,\ 0),\ 5$

2 답 (1) $x^2+y^2=4$ (2) $(x-2)^2+(y-3)^2=25$

문제 53~54쪽

01-1 답 (1) $(x+2)^2+(y-3)^2=18$
(2) $(x+1)^2+y^2=4$

(1) 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y-3)^2=r^2$
이 원이 점 $(1,\ 6)$을 지나므로
$(1+2)^2+(6-3)^2=r^2$ $\therefore\ r^2=18$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y-3)^2=18$

(2) 원의 중심은 선분 AB의 중점과 같으므로 원의 중심의 좌표는
$\left(\frac{-3+1}{2},\ \frac{0+0}{2}\right)$ $\therefore\ (-1,\ 0)$
또 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$와 같으므로
$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}|1-(-3)|=2$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+1)^2+y^2=4$

01-2 답 $(x-3)^2+(y-1)^2=25$

원의 중심의 좌표는 $(3,\ 1)$이므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-1)^2=r^2$
이 원이 점 $(0,\ -3)$을 지나므로
$(0-3)^2+(-3-1)^2=r^2$ $\therefore\ r^2=25$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-1)^2=25$

01-3 답 2

원의 중심은 선분 AB의 중점과 같으므로 원의 중심의 좌표는
$\left(\frac{-1+1}{2},\ \frac{-3+1}{2}\right)$ $\therefore\ (0,\ -1)$
또 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$와 같으므로
$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{\{1-(-1)\}^2+\{1-(-3)\}^2}=\sqrt{5}$
따라서 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은
$x^2+(y+1)^2=5$
이 원이 점 $(k,\ 0)$을 지나므로
$k^2+1=5,\ k^2=4$ $\therefore\ k=2\ (\because\ k>0)$

02-1 답 (1) $(x+1)^2+y^2=16$ (2) $x^2+(y-2)^2=13$

(1) 원의 중심이 x축 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a,\ 0)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x-a)^2+y^2=r^2$ ······ ㉠
원 ㉠이 점 $(-1,\ 4)$를 지나므로
$(-1-a)^2+4^2=r^2$ $\therefore\ a^2+2a+17=r^2$ ······ ㉡
원 ㉠이 점 $(3,\ 0)$을 지나므로
$(3-a)^2=r^2$ $\therefore\ a^2-6a+9=r^2$ ······ ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-1,\ r^2=16$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+1)^2+y^2=16$

(2) 원의 중심이 y축 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(0,\ a)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$x^2+(y-a)^2=r^2$ ······ ㉠
원 ㉠이 점 $(2,\ -1)$을 지나므로
$2^2+(-1-a)^2=r^2$ $\therefore\ a^2+2a+5=r^2$ ······ ㉡
원 ㉠이 점 $(3,\ 4)$를 지나므로
$3^2+(4-a)^2=r^2$ $\therefore\ a^2-8a+25=r^2$ ······ ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2,\ r^2=13$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+(y-2)^2=13$

다른 풀이

(1) 원의 중심의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 이 점과 두 점 $(-1,\ 4),\ (3,\ 0)$ 사이의 거리가 서로 같으므로
$\sqrt{(-1-a)^2+4^2}=\sqrt{(3-a)^2}$
양변을 제곱하면
$a^2+2a+17=a^2-6a+9,\ 8a=-8$ $\therefore\ a=-1$
즉, 원의 중심의 좌표는 $(-1,\ 0)$
원의 반지름의 길이는 두 점 $(-1,\ 0),\ (-1,\ 4)$ 사이의 거리와 같으므로
$\sqrt{\{-1-(-1)\}^2+4^2}=4$
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x+1)^2+y^2=16$

(2) 원의 중심의 좌표를 $(0,\ a)$라 하면 이 점과 두 점 $(2,\ -1),\ (3,\ 4)$ 사이의 거리가 서로 같으므로
$\sqrt{2^2+(-1-a)^2}=\sqrt{3^2+(4-a)^2}$

양변을 제곱하면

$a^2+2a+5=a^2-8a+25$, $10a=20$ $\qquad \therefore a=2$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(0, 2)$

원의 반지름의 길이는 두 점 $(0, 2)$, $(2, -1)$ 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{2^2+(-1-2)^2}=\sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+(y-2)^2=13$

02-2 답 $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

원의 중심이 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, a+2)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a-2)^2=r^2$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

원 ㉠이 점 $(-1, 3)$을 지나므로

$(-1-a)^2+(1-a)^2=r^2$ $\qquad \therefore 2a^2+2=r^2$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉡

원 ㉠이 점 $(-3, 1)$을 지나므로

$(-3-a)^2+(-1-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2+8a+10=r^2$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-1$, $r^2=4$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-1)^2=4$

다른 풀이

원의 중심의 좌표를 $(a, a+2)$라 하면 이 점과 두 점 $(-1, 3)$, $(-3, 1)$ 사이의 거리가 서로 같으므로

$\sqrt{\{a-(-1)\}^2+\{(a+2)-3\}^2}$

$=\sqrt{\{a-(-3)\}^2+\{(a+2)-1\}^2}$

양변을 제곱하면

$2a^2+2=2a^2+8a+10$, $8a=-8$ $\qquad \therefore a=-1$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(-1, 1)$

원의 반지름의 길이는 두 점 $(-1, 1)$, $(-1, 3)$ 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{\{-1-(-1)\}^2+(3-1)^2}=2$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-1)^2=4$

2 좌표축에 접하는 원의 방정식

개념 Check 55쪽

1 답 (1) $(x-4)^2+(y-3)^2=9$

(2) $(x-2)^2+(y+5)^2=4$

(3) $(x+3)^2+(y+3)^2=9$

2 답 (1) $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

(2) $(x+5)^2+(y-3)^2=25$

(3) $(x+4)^2+(y+4)^2=16$

문제 56~57쪽

03-1 답 $(x-3)^2+(y-2)^2=9$

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times4+1\times1}{2+1}, \frac{2\times5+1\times(-4)}{2+1}\right)$ $\qquad \therefore (3, 2)$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(3, 2)$이고 이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 3이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=9$

03-2 답 (1) $(x-1)^2+(y+3)^2=9$

(2) $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

또는 $(x-10)^2+(y-7)^2=100$

(1) 원의 중심의 좌표를 (a, b)라 하면 반지름의 길이는 $|b|$이므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

원 ㉠이 점 $(-2, -3)$을 지나므로

$(-2-a)^2+(-3-b)^2=b^2$

$\therefore a^2+4a+6b+13=0$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉡

원 ㉠이 점 $(4, -3)$을 지나므로

$(4-a)^2+(-3-b)^2=b^2$

$\therefore a^2-8a+6b+25=0$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y+3)^2=9$

(2) 원의 중심의 좌표를 (a, b)라 하면 반지름의 길이는 $|a|$이므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

원 ㉠이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$(2-a)^2+(1-b)^2=a^2$

$b^2-2b-4a+5=0$

$\therefore a=\frac{1}{4}(b^2-2b+5)$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉡

원 ㉠이 점 $(4, -1)$을 지나므로

$(4-a)^2+(-1-b)^2=a^2$

$\therefore b^2+2b-8a+17=0$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$b^2+2b-8\times\frac{1}{4}(b^2-2b+5)+17=0$

$b^2-6b-7=0$, $(b+1)(b-7)=0$

$\therefore b=-1$ 또는 $b=7$

이를 ㉡에 대입하면

$b=-1$일 때 $a=2$, $b=7$일 때 $a=10$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 또는 $(x-10)^2+(y-7)^2=100$

03-**3** 답 $(x-4)^2+(y-2)^2=4$

또는 $(x-12)^2+(y-10)^2=100$

원의 중심이 직선 $y=x-2$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, a-2)$라 하면 반지름의 길이는 $|a-2|$

따라서 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a+2)^2=(a-2)^2$

이 원이 점 $(4, 4)$를 지나므로

$(4-a)^2+(6-a)^2=(a-2)^2$, $a^2-16a+48=0$

$(a-4)(a-12)=0$ $\quad\therefore a=4$ 또는 $a=12$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-2)^2=4$ 또는 $(x-12)^2+(y-10)^2=100$

04-**1** 답 8

점 $(2, -2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 두 원의 중심이 제4사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(r, -r)$

따라서 원의 방정식은 $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

이 원이 점 $(2, -2)$를 지나므로

$(2-r)^2+(-2+r)^2=r^2$

$r^2-8r+8=0$ $\quad\therefore r=4\pm2\sqrt{2}$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각

$(4+2\sqrt{2}, -4-2\sqrt{2})$, $(4-2\sqrt{2}, -4+2\sqrt{2})$

이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{\{4-2\sqrt{2}-(4+2\sqrt{2})\}^2+\{-4+2\sqrt{2}-(-4-2\sqrt{2})\}^2}$

$=\sqrt{(-4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2}$

$=8$

04-**2** 답 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$

원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(-r, r)$

따라서 원의 방정식은 $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

이때 원의 중심 $(-r, r)$가 직선 $2x-y+6=0$ 위에 있으므로

$-2r-r+6=0$, $3r=6$ $\quad\therefore r=2$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-2)^2=4$

다른 풀이

원의 중심이 직선 $2x-y+6=0$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, 2a+6)$이라 하면 이 원이 제2사분면에서 x축과 y축에 동시에 접하므로

$|a|=2a+6$, $-a=2a+6$ ($\because a<0$) $\quad\therefore a=-2$

따라서 중심의 좌표는 $(-2, 2)$이고 반지름의 길이는 2이므로 구하는 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-2)^2=4$

3 원의 방정식 (2)

개념 Check 59쪽

1 답 (1) $(-2, 3)$, 2 (2) $(1, -2)$, 3

(1) $(x+2)^2+(y-3)^2=4$ (2) $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

2 답 $3x+4y-7=0$

$x^2+y^2-5-(x^2+y^2-6x-8y+9)=0$

$\therefore 3x+4y-7=0$

문제 60~63쪽

05-**1** 답 8

$x^2+y^2+6x-4y+a=0$을 변형하면

$(x+3)^2+(y-2)^2=13-a$

이 원의 중심의 좌표는 $(-3, 2)$이므로

$b=-3$, $c=2$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{13-a}$이므로

$\sqrt{13-a}=2$, $13-a=4$ $\quad\therefore a=9$

$\therefore a+b+c=9+(-3)+2=8$

05-**2** 답 2

$x^2+y^2-2kx+2y+3k^2-5k-2=0$을 변형하면

$(x-k)^2+(y+1)^2=-2k^2+5k+3$

이 방정식이 원을 나타내려면

$-2k^2+5k+3>0$, $2k^2-5k-3<0$

$(2k+1)(k-3)<0$ $\quad\therefore -\frac{1}{2}<k<3$

따라서 자연수 k는 1, 2의 2개이다.

05-**3** 답 2

$x^2+y^2+2ax-6ay+10a-25=0$을 변형하면

$(x+a)^2+(y-3a)^2=10a^2-10a+25$

이 방정식이 넓이가 45π인 원을 나타내려면

$10a^2-10a+25=45$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$ $\quad\therefore a=2$ ($\because a>0$)

06-**1** 답 14

주어진 세 점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 0)$을 지나므로 $C=0$

$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

원 ㉠이 점 $(2, 6)$을 지나므로

$40+2A+6B=0$ $\quad\therefore A+3B=-20$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

원 ㉠이 점 $(4, 2)$를 지나므로

$20+4A+2B=0$ $\quad\therefore 2A+B=-10$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $A=-2$, $B=-6$

따라서 원의 방정식은

$x^2+y^2-2x-6y=0$

즉, $(x-1)^2+(y-3)^2=10$이므로

$a=1$, $b=3$, $r^2=10$

$\therefore a+b+r^2=14$

다른 풀이

원의 중심에서 세 점까지의 거리가 모두 r이므로

$a^2+b^2=r^2$ ...... ㉠

$(a-2)^2+(b-6)^2=r^2$ ...... ㉡

$(a-4)^2+(b-2)^2=r^2$ ...... ㉢

㉠, ㉡에서 $a^2+b^2=a^2+b^2-4a-12b+40$

$\therefore a+3b=10$ ...... ㉣

㉠, ㉢에서 $a^2+b^2=a^2+b^2-8a-4b+20$

$\therefore 2a+b=5$ ...... ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

이를 ㉠에 대입하면 $r^2=1^2+3^2=10$

$\therefore a+b+r^2=14$

06-2 답 $\boldsymbol{25\pi}$

원의 중심을 $\mathrm{P}(a, b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$a^2+(b+4)^2=(a+1)^2+(b-3)^2$

$\therefore a-7b=3$ ...... ㉠

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{CP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$이므로

$a^2+(b+4)^2=(a+2)^2+b^2$

$\therefore a-2b=3$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=0$

즉, 원의 중심은 $\mathrm{P}(3, 0)$이므로 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{3^2+\{-(-4)\}^2}=5$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times5^2=25\pi$

07-1 답 **2**

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-2x-2y-2-(x^2+y^2+2x+2y-6)=0$

$\therefore x+y-1=0$

이 직선이 점 $(-1, a)$를 지나므로

$-1+a-1=0$ $\therefore a=2$

07-2 답 $\boldsymbol{x^2+y^2-8x-6y=0}$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2+2x-4y-6+k(x^2+y^2-18x-8y+6)=0$

(단, $k\neq-1$) ...... ㉠

이 원이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$-6+6k=0$ $\therefore k=1$

이를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+2x-4y-6+(x^2+y^2-18x-8y+6)=0$

$\therefore x^2+y^2-8x-6y=0$

08-1 답 $\boldsymbol{x^2+y^2-10x+21=0}$

$2\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}$이므로 $4\overline{\mathrm{BP}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2$

따라서 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$4\{(x-4)^2+y^2\}=(x-1)^2+y^2$

$\therefore x^2+y^2-10x+21=0$

08-2 답 **15**

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=3:2$이므로

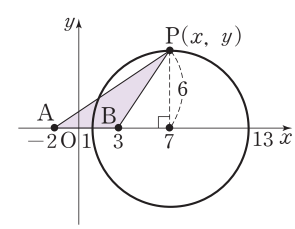
$3\overline{\mathrm{BP}}=2\overline{\mathrm{AP}}$ $\therefore 9\overline{\mathrm{BP}}^2=4\overline{\mathrm{AP}}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$9\{(x-3)^2+y^2\}=4\{(x+2)^2+y^2\}$

$x^2+y^2-14x+13=0$ $\therefore (x-7)^2+y^2=36$

따라서 점 P는 중심의 좌표가 $(7, 0)$이고 반지름의 길이가 6인 원 위를 움직이므로 다음 그림과 같이 삼각형 PAB의 넓이는 $\overline{\mathrm{AB}}$가 밑변이고 높이가 원의 반지름의 길이와 같을 때 최대이다.



따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times5\times6=15$

연습문제 64~66쪽

1 ③	**2** 4	**3** ⑤	**4** ⑤	**5** ⑤
6 25	**7** ①	**8** $-2\le k<2$ 또는 $2<k\le6$		
9 $4\sqrt{2}\pi$	**10** -6	**11** ④	**12** 5	**13** ②
14 ③	**15** -1	**16** ③	**17** ⑤	
18 $(x-7)^2+(y-6)^2=85$			**19** ①	**20** ②
21 ②				

1 $x^2+y^2-6x=0$을 변형하면

$(x-3)^2+y^2=9$

원의 중심의 좌표는 $(3, 0)$이므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-3)^2+y^2=r^2$

이 원이 점 $(1, 2)$를 지나므로

$(1-3)^2+2^2=r^2 \qquad \therefore r^2=8$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+y^2=8$

2 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5+1}{2}\right) \qquad \therefore (1, 3)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\sqrt{\{4-(-2)\}^2+(1-5)^2}=\sqrt{13}$

따라서 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-3)^2=13$

이 원이 x축과 만나는 두 점의 x좌표는

$(x-1)^2+(0-3)^2=13$

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$\therefore \mathrm{A}(-1, 0)$, $\mathrm{B}(3, 0)$

따라서 선분 AB의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=|3-(-1)|=4$

3 원의 중심이 x축 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+y^2=r^2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

원 ㉠이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$(-a)^2+1^2=r^2 \qquad \therefore a^2+1=r^2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

원 ㉠이 점 $(2, -1)$을 지나므로

$(2-a)^2+(-1)^2=r^2 \qquad \therefore a^2-4a+5=r^2 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $r^2=2$

따라서 원의 방정식은

$(x-1)^2+y^2=2$

ㄴ. $(2-1)^2+1^2=2$이므로 점 $(2, 1)$을 지난다.

ㄷ. 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 넓이는

$\pi\times(\sqrt{2})^2=2\pi$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

4 원의 중심이 직선 $y=x+3$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, a+3)$이라 하면 반지름의 길이는 $|a+3|$

따라서 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a-3)^2=(a+3)^2$

이 원이 점 $(1, 2)$를 지나므로

$(1-a)^2+(-a-1)^2=(a+3)^2$

$a^2-6a-7=0$, $(a+1)(a-7)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$

따라서 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-1, 2)$, $(7, 10)$이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{\{7-(-1)\}^2+(10-2)^2}=8\sqrt{2}$

5 주어진 조건을 만족시키는 두 원의 중심은 제3사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(-r, -r)$

따라서 원의 방정식은

$(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$

이 원이 점 $(-3, -3)$을 지나므로

$(-3+r)^2+(-3+r)^2=r^2$

$\therefore r^2-12r+18=0$

이때 두 원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$r_1+r_2=12$

따라서 두 원의 둘레의 길이의 합은

$2\pi r_1+2\pi r_2=2\pi(r_1+r_2)=2\pi\times12=24\pi$

6 $x^2+y^2-8x+6y=0$을 변형하면

$(x-4)^2+(y+3)^2=25$

이 원의 반지름의 길이가 5이므로 원의 넓이는

$\pi\times5^2=25\pi$

$\therefore k=25$

7 $x^2+y^2+6x-4y+4=0$을 변형하면

$(x+3)^2+(y-2)^2=9$

원의 넓이를 이등분하려면 직선 $2x-ay+4=0$이 원의 중심 $(-3, 2)$를 지나야 하므로

$-6-2a+4=0$, $-2-2a=0$

$\therefore a=-1$

8 $x^2+y^2+kx-2y+k=0$을 변형하면

$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{k^2}{4}-k+1$

이 방정식이 반지름의 길이가 2 이하인 원을 나타내려면

$0<\sqrt{\frac{k^2}{4}-k+1}\le2$

$\therefore 0<\frac{k^2}{4}-k+1\le4$

(i) $\frac{k^2}{4}-k+1>0$에서

$k^2-4k+4>0$, $(k-2)^2>0$

$\therefore k\ne2$인 모든 실수 $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $\frac{k^2}{4}-k+1\leq 4$에서

$k^2-4k+4\leq 16$, $k^2-4k-12\leq 0$

$(k+2)(k-6)\leq 0$

$\therefore -2\leq k\leq 6$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2\leq k<2$ 또는 $2<k\leq 6$

9 $x^2+y^2+4mx-2my+7m^2-8=0$을 변형하면

$(x+2m)^2+(y-m)^2=-2m^2+8$

이 방정식이 나타내는 도형이 원이므로

$-2m^2+8>0$, $m^2<4$ $\quad\therefore -2<m<2$

이때 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{-2m^2+8}$이므로 원의 넓이를 S라 하면

$S=\pi(-2m^2+8)$

따라서 $m=0$일 때 S의 값이 최대이고, 이때 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi$

10 $x^2+y^2+8x+kx+9=0$을 변형하면

$(x+4)^2+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}+7$

이 원의 반지름의 길이는 $|-4|=4$이므로

$\sqrt{\frac{k^2}{4}+7}=4$, $\frac{k^2}{4}+7=16$

$k^2=36$ $\quad\therefore k=\pm 6$

그런데 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로

$-\frac{k}{2}>0$ $\quad\therefore k<0$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 상수 k의 값은 -6이다.

11 $x^2+y^2-2ax+4y+b+1=0$을 변형하면

$(x-a)^2+(y+2)^2=a^2-b+3$

따라서 중심의 좌표는 $(a, -2)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2-b+3}$이다.

이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$|a|=|-2|=\sqrt{a^2-b+3}$

$|a|=2$에서 $a=2$ ($\because a>0$)

$\sqrt{2^2-b+3}=2$의 양변을 제곱하면

$4-b+3=4$ $\quad\therefore b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

12 원의 중심을 $\mathrm{P}(a, b)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(a+2)^2+(b-3)^2=(a+1)^2+b^2$

$\therefore a-3b=-6$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}$에서 $\overline{\mathrm{BP}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$이므로

$(a+1)^2+b^2=a^2+(b+1)^2$

$\therefore a=b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=3$

따라서 원의 중심은 $\mathrm{P}(3, 3)$이므로 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{AP}}=|3-(-2)|=5$

13 주어진 세 점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 0)$을 지나므로 $C=0$

$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0$ …… ㉠

원 ㉠이 점 $(-6, -2)$를 지나므로

$40-6A-2B=0$

$\therefore 3A+B=20$ …… ㉡

원 ㉠이 점 $(-2, 6)$을 지나므로

$40-2A+6B=0$

$\therefore A-3B=20$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $A=8$, $B=-4$

즉, 원의 방정식은

$x^2+y^2+8x-4y=0$

이 원이 점 $(-8, k)$를 지나므로

$64+k^2-64-4k=0$

$k^2-4k=0$, $k(k-4)=0$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$)

14 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+ax+2y-1-(x^2+y^2-2x+ay-13)=0$

$\therefore (a+2)x+(2-a)y+12=0$

이 직선이 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4(2-a)+12=0$ $\quad\therefore a=5$

15 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-4x-2+k(x^2+y^2-ay-1)=0$ (단, $k\neq -1$) …… ㉠

이 원이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$-2-k=0$ $\quad\therefore k=-2$

이를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-4x-2-2(x^2+y^2-ay-1)=0$

$x^2+y^2+4x-2ay=0$

$\therefore (x+2)^2+(y-a)^2=a^2+4$

이 원의 넓이가 5π이므로

$a^2+4=5$, $a^2=1$ $\quad\therefore a=\pm 1$

따라서 모든 상수 a의 값의 곱은

$-1\times 1=-1$

16 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로

$2\overline{BP}=\overline{AP}$ $\quad\therefore 4\overline{BP}^2=\overline{AP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$4\{(x-6)^2+(y+4)^2\}=x^2+(y-2)^2$

$x^2+y^2-16x+12y+68=0$

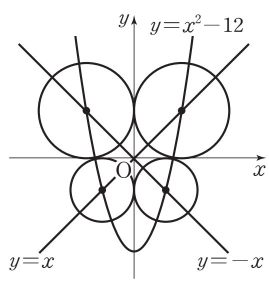
$\therefore (x-8)^2+(y+6)^2=32$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 길이는

$2\pi\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}\pi$

17 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.

따라서 주어진 원의 중심은 곡선 $y=x^2-12$와 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$의 교점이다.



(i) $x^2-12=x$에서

$x^2-x-12=0$, $(x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=4$

(ii) $x^2-12=-x$에서

$x^2+x-12=0$, $(x+4)(x-3)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서 네 원의 반지름의 길이는 각각 3, 3, 4, 4이므로 네 원의 넓이의 합은

$\pi\times3^2+\pi\times3^2+\pi\times4^2+\pi\times4^2=50\pi$

18 $2x+y=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$3x+5y=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$x+y-2=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 A, 두 직선 ㉡, ㉢의 교점을 B, 두 직선 ㉢, ㉠의 교점을 C라 하면

$A(0, 0)$, $B(5, -3)$, $C(-2, 4)$

이때 외접원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-5)^2+(b+3)^2$

$\therefore 5a-3b=17$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$a^2+b^2=(a+2)^2+(b-4)^2$

$\therefore a-2b=-5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=7$, $b=6$

즉, 외접원의 중심은 $P(7, 6)$이므로 반지름의 길이는

$\overline{AP}=\sqrt{7^2+6^2}=\sqrt{85}$

따라서 구하는 외접원의 방정식은

$(x-7)^2+(y-6)^2=85$

19 원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$이 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$의 둘레의 길이를 이등분하므로 두 원의 공통인 현은 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$의 중심을 지난다.

주어진 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+2ax+2y-6-(x^2+y^2+2x-2ay-2)=0$

$\therefore (a-1)x+(a+1)y-2=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2+y^2+2x-2ay-2=0$을 변형하면

$(x+1)^2+(y-a)^2=3+a^2$

따라서 직선 ㉠은 점 $(-1, a)$를 지나므로

$-(a-1)+a(a+1)-2=0$

$a^2=1$ $\quad\therefore a=1$ ($\because a>0$)

20 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-2y+k(x^2+y^2+2x+2y-16)=0$

(단, $k\neq-1$)

$\therefore (k+1)x^2+(k+1)y^2+2kx+(2k-2)y-16k=0$

이때 $k\neq-1$이므로

$x^2+y^2+\dfrac{2k}{k+1}x+\dfrac{2k-2}{k+1}y-\dfrac{16k}{k+1}=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 원의 중심이 x축 위에 있으므로 원의 중심의 y좌표는 0이다.

즉, ㉠의 y의 계수가 0이어야 하므로

$\dfrac{2k-2}{k+1}=0$ $\quad\therefore k=1$

이를 ㉠에 대입하면 $x^2+y^2+x-8=0$

$\therefore \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{33}{4}$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{\sqrt{33}}{2}$이므로 구하는 원의 넓이는

$\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{33}}{2}\right)^2=\dfrac{33}{4}\pi$

21 $x^2+y^2+4x+6y+4=0$을 변형하면

$(x+2)^2+(y+3)^2=9$

점 B의 좌표를 (a, b)라 하면 점 B는 이 원 위에 있으므로

$(a+2)^2+(b+3)^2=9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

점 M의 좌표를 (x, y)라 하면 점 M은 선분 AB의 중점이므로

$x=\frac{4+a}{2}$, $y=\frac{1+b}{2}$

$\therefore a=2x-4, b=2y-1$

이를 ㉠에 대입하면

$(2x-4+2)^2+(2y-1+3)^2=9$

$\therefore (x-1)^2+(y+1)^2=\frac{9}{4}$

따라서 점 M이 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$인 원이므로 구하는 넓이는

$\pi\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}\pi$

Ⅰ-3 02 원과 직선의 위치 관계

원과 직선의 위치 관계

개념 Check 67쪽

1 답 (1) **서로 다른 두 점에서 만난다.**
(2) **한 점에서 만난다(접한다).**
(3) **만나지 않는다.**

문제 68~71쪽

01-1 답 (1) $-5<k<5$
(2) $k=\pm5$
(3) $k<-5$ **또는** $k>5$

$y=2x+k$를 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(2x+k)^2=5$

$\therefore 5x^2+4kx+k^2-5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-5)$

$=-(k+5)(k-5)$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$-(k+5)(k-5)>0$

$(k+5)(k-5)<0$

$\therefore -5<k<5$

(2) 한 점에서 만나려면 $D=0$이어야 하므로

$-(k+5)(k-5)=0$

$\therefore k=\pm5$

(3) 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로

$-(k+5)(k-5)<0$

$(k+5)(k-5)>0$

$\therefore k<-5$ 또는 $k>5$

다른 풀이

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$

또 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$r=\sqrt{5}$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<r$이어야 하므로

$\frac{|k|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$, $|k|<5$

$\therefore -5<k<5$

(2) 한 점에서 만나려면 $d=r$이어야 하므로

$\frac{|k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, $|k|=5$

$\therefore k=\pm5$

(3) 만나지 않으려면 $d>r$이어야 하므로

$\frac{|k|}{\sqrt{5}}>\sqrt{5}$, $|k|>5$

$\therefore k<-5$ 또는 $k>5$

01-2 답 $-\frac{12}{5}$

원의 중심 $(-3, 2)$와 직선 $y=kx$, 즉 $kx-y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-3k-2|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}$

원의 반지름의 길이가 2이므로 직선과 원이 접하려면

$\frac{|-3k-2|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=2$

$|-3k-2|=2\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하면

$9k^2+12k+4=4k^2+4$

$5k^2+12k=0$, $k(5k+12)=0$

$\therefore k=-\frac{12}{5}$ $(\because k\neq0)$

다른 풀이

$y=kx$를 $(x+3)^2+(y-2)^2=4$에 대입하면

$(x+3)^2+(kx-2)^2=4$

$\therefore (k^2+1)x^2+2(3-2k)x+9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(3-2k)^2-(k^2+1)\times9$

$\quad=-5k^2-12k$

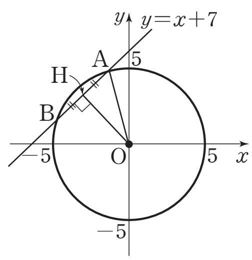
직선과 원이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$-5k^2-12k=0,\ k(5k+12)=0$

$\therefore\ k=-\frac{12}{5}\ (\because\ k\neq0)$

02-1 답 $\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 직선 $y=x+7$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



선분 OH의 길이는 점 O(0, 0)과 직선 $y=x+7$, 즉 $x-y+7=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{OH}=\frac{|7|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$

삼각형 OAH는 직각삼각형이고 $\overline{OA}=5$이므로

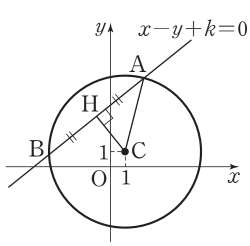
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}$

$\quad=\sqrt{5^2-\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

02-2 답 $3\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B, 원의 중심을 C(1, 1)이라 하고, 점 C에서 직선 $x-y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times8=4$

삼각형 CAH는 직각삼각형이고 $\overline{CA}=5$이므로

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{AH}^2}$

$\quad=\sqrt{5^2-4^2}=3$ …… ㉠

또 선분 CH의 길이는 점 C(1, 1)과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{CH}=\frac{|1-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$3=\frac{|k|}{\sqrt{2}},\ |k|=3\sqrt{2}$

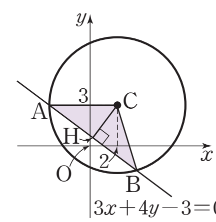
$\therefore\ k=3\sqrt{2}\ (\because\ k>0)$

02-3 답 **12**

$x^2+y^2-4x-6y-12=0$을 변형하면

$(x-2)^2+(y-3)^2=25$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 C(2, 3)에서 직선 $3x+4y-3=0$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



선분 CH의 길이는 점 C(2, 3)과 직선 $3x+4y-3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{CH}=\frac{|6+12-3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$

삼각형 AHC는 직각삼각형이고 $\overline{CA}=5$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=2\times4=8$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}$

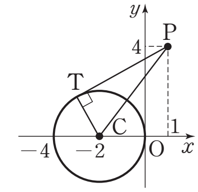
$\quad=\frac{1}{2}\times8\times3=12$

03-1 답 $\sqrt{21}$

$x^2+y^2+4x=0$을 변형하면

$(x+2)^2+y^2=4$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면 C$(-2,\ 0)$이므로



$\overline{CP}=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+4^2}=5$

이때 삼각형 CPT는 직각삼각형이고 $\overline{CT}=2$이므로

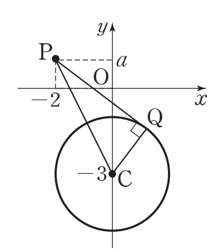
$\overline{PT}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CT}^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

03-2 답 **1**

$x^2+y^2+6y+5=0$을 변형하면

$x^2+(y+3)^2=4$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면 C$(0,\ -3)$이므로



$\overline{CP}=\sqrt{(-2)^2+\{a-(-3)\}^2}$

$\quad=\sqrt{a^2+6a+13}$ …… ㉠

접점을 Q라 하면 삼각형 CQP는 직각삼각형이고 $\overline{CQ}=2$이므로

$\overline{CP}=\sqrt{\overline{CQ}^2+\overline{PQ}^2}$

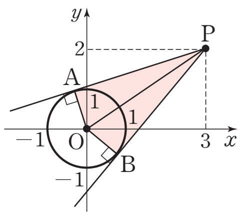
$\quad=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{a^2+6a+13}=2\sqrt{5}$

$a^2+6a+13=20,\ a^2+6a-7=0$

$(a+7)(a-1)=0\quad\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$

03-**3** 답 $\mathbf{2\sqrt{3}}$



오른쪽 그림에서 원의 접선의 성질에 의하여

$\overline{OA}\perp\overline{AP}$, $\overline{OB}\perp\overline{BP}$

따라서 삼각형 AOP는 직각삼각형이고

$\overline{OA}=1$, $\overline{OP}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

이므로

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-1^2}=2\sqrt{3}$

$\triangle$AOP$\equiv\triangle$BOP(RHS 합동)이므로

$\square AOBP=2\triangle AOP$

$=2\times\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{OA}$

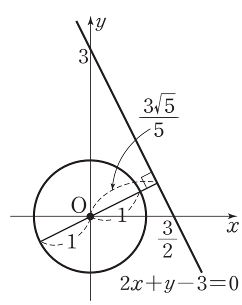
$=2\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1=2\sqrt{3}$

04-**1** 답 $\mathbf{\frac{4}{5}}$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $2x+y-3=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

또 원의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=1$



오른쪽 그림에서 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값 M과 최솟값 m은

$M=d+r=\frac{3\sqrt{5}}{5}+1$

$m=d-r=\frac{3\sqrt{5}}{5}-1$

$\therefore\ Mm=\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2-1$

$=\frac{4}{5}$

04-**2** 답 **4**

$x^2+y^2-6x-2y+8=0$을 변형하면

$(x-3)^2+(y-1)^2=2$

이 원의 중심 $(3,\ 1)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k+2|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원의 중심과 직선 사이의 거리는

$4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

즉, $\frac{|k+2|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$이므로

$|k+2|=6\qquad\therefore\ k=4\ (\because\ k>0)$

2 원의 접선의 방정식

개념 Check 73쪽

1 답 (1) $\boldsymbol{y=-2x\pm2\sqrt{5}}$ (2) $\boldsymbol{y=2\sqrt{2}x\pm6}$

2 답 (1) $\boldsymbol{3x-y+10=0}$ (2) $\boldsymbol{2x-\sqrt{6}y-10=0}$

문제 74~77쪽

05-**1** 답 $\boldsymbol{y=-2x\pm5}$

직선 $x-2y-2=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-1$의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -2이고 원 $x^2+y^2=5$의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-2x\pm\sqrt{5}\times\sqrt{(-2)^2+1}$

$\therefore\ y=-2x\pm5$

다른 풀이 판별식 이용

기울기가 -2인 직선의 방정식을 $y=-2x+n$이라 하고 이 식을 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(-2x+n)^2=5$

$\therefore\ 5x^2-4nx+n^2-5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 원과 직선이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-2n)^2-5(n^2-5)=0$

$n^2=25\qquad\therefore\ n=\pm5$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-2x\pm5$

다른 풀이 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

기울기가 -2인 직선의 방정식을 $y=-2x+n$, 즉 $2x+y-n=0$이라 하면 이 직선과 원의 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$\frac{|-n|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$, $|n|=5\qquad\therefore\ n=\pm5$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-2x\pm5$

05-**2** 답 **5**

기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+n$, 즉 $2x-y+n=0$이라 하면 이 직선과 원의 중심 $(1,\ -3)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같아야 하므로

$\frac{|2+3+n|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2$, $|n+5|=2\sqrt{5}$

$\therefore\ n=-5\pm2\sqrt{5}$

따라서 두 직선의 y절편의 곱은

$(-5-2\sqrt{5})(-5+2\sqrt{5})=25-20=5$

06-1 답 **17**

점 $(a,\ 8)$이 원 $x^2+y^2=100$ 위의 점이므로

$a^2+8^2=100,\ a^2=36 \qquad \therefore a=6\ (\because a>0)$

원 위의 점 $(6,\ 8)$에서의 접선의 방정식은

$6x+8y=100 \qquad \therefore 3x+4y=50$

이 직선이 점 $(2,\ b)$를 지나므로

$6+4b=50,\ 4b=44 \qquad \therefore b=11$

$\therefore a+b=6+11=17$

06-2 답 **−8**

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=20 \qquad \therefore y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{20}{b}$

이 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로

$-\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2} \qquad \therefore b=-2a \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=20 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=4$ 또는 $a=2,\ b=-4$

$\therefore ab=-8$

06-3 답 **7**

원의 중심 $(2,\ -1)$과 점 $(4,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{2+1}{4-2}=\dfrac{3}{2}$

원의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선에 수직이므로 접선의 기울기는 $-\dfrac{2}{3}$이다.

따라서 기울기가 $-\dfrac{2}{3}$이고 점 $(4,\ 2)$를 지나는 접선의 방정식은

$y-2=-\dfrac{2}{3}(x-4) \qquad \therefore 2x+3y-14=0$

따라서 이 직선의 x절편은 7이다.

07-1 답 **$y=1$ 또는 $3x-4y-5=0$**

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(3,\ 1)$을 지나므로

$3x_1+y_1=1 \qquad \therefore y_1=-3x_1+1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

또 접점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x_1=0,\ y_1=1$ 또는 $x_1=\dfrac{3}{5},\ y_1=-\dfrac{4}{5}$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=1$ 또는 $3x-4y-5=0$

다른 풀이 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(3,\ 1)$을 지나는 접선의 방정식은

$y-1=m(x-3) \qquad \therefore mx-y-3m+1=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$\dfrac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\ |-3m+1|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$9m^2-6m+1=m^2+1,\ 8m^2-6m=0$

$m(4m-3)=0 \qquad \therefore m=0$ 또는 $m=\dfrac{3}{4}$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=1$ 또는 $3x-4y-5=0$

다른 풀이 판별식 이용

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(3,\ 1)$을 지나는 접선의 방정식은

$y-1=m(x-3) \qquad \therefore y=mx-3m+1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+(mx-3m+1)^2=1$

$\therefore (m^2+1)x^2-2(3m^2-m)x+9m^2-6m=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(3m^2-m)^2-(m^2+1)(9m^2-6m)=0$

$8m^2-6m=0,\ m(4m-3)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=\dfrac{3}{4}$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=1$ 또는 $3x-4y-5=0$

07-2 답 $\dfrac{8}{3}$

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$2x_1+y_1=1 \qquad \therefore y_1=-2x_1+1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

또 접점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x_1=0,\ y_1=1$ 또는 $x_1=\dfrac{4}{5},\ y_1=-\dfrac{3}{5}$

이를 ㉠에 대입하면 두 접선의 방정식은

$y=1$ 또는 $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3}$

$\therefore \mathrm{B}(0,\ 1),\ \mathrm{C}\left(0,\ -\dfrac{5}{3}\right)$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{8}{3}=\dfrac{8}{3}$

07-3 답 4

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(1, 2)$를 지나는 접선의 방정식은

$y-2=m(x-1)$ $\therefore mx-y-m+2=0$

이 직선과 원의 중심 $(3, 5)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$\dfrac{|3m-5-m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$, $|2m-3|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2-12m+8=0$

따라서 두 접선의 기울기는 이 이차방정식의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 기울기의 합은 4이다.

07-4 답 $2\sqrt{2}$

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(0, 0)$을 지나는 접선의 방정식은

$y=mx$ $\therefore mx-y=0$

이 직선과 원의 중심 $(0, a)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$\dfrac{|-a|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$, $|-a|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $4m^2+4-a^2=0$

두 접선의 기울기는 이 이차방정식의 두 근이고 두 접선이 서로 수직이므로 근과 계수의 관계에 의하여 기울기의 곱은

$\dfrac{4-a^2}{4}=-1$, $a^2=8$ $\therefore a=2\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

연습문제 78~80쪽

1 ③	**2** 4	**3** ④	**4** ②	**5** ②
6 20π	**7** ③	**8** ⑤	**9** 3	**10** 9π
11 ④	**12** ⑤	**13** ⑤		
14 $x-\sqrt{3}y-1=0$ 또는 $x+\sqrt{3}y-1=0$				**15** ①
16 ①	**17** ④	**18** 50	**19** ③	**20** $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$
21 ①	**22** $\sqrt{15}$			

1 $y=-x+k$를 $(x-1)^2+y^2=2$에 대입하면

$(x-1)^2+(-x+k)^2=2$

$\therefore 2x^2-2(k+1)x+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k+1)^2-2(k^2-1)>0$

$k^2-2k-3<0$, $(k+1)(k-3)<0$

$\therefore -1<k<3$

따라서 정수 k는 0, 1, 2의 3개이다.

2 $x^2+y^2-2x-4y-20=0$을 변형하면

$(x-1)^2+(y-2)^2=25$

원의 중심 $(1, 2)$와 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|4-6+k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{|k-2|}{5}$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 만나려면

$\dfrac{|k-2|}{5}\le 5$, $|k-2|\le 25$

$-25\le k-2\le 25$ $\therefore -23\le k\le 27$

따라서 $\alpha=-23$, $\beta=27$이므로 $\alpha+\beta=4$

3 원의 중심 $(-1, 3)$과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\dfrac{|-1+3+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|k+2|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=4\pi$ $\therefore r=2$ ($\because r>0$)

원과 직선이 접하려면 $d=r$이어야 하므로

$\dfrac{|k+2|}{\sqrt{2}}=2$, $|k+2|=2\sqrt{2}$

$k+2=\pm 2\sqrt{2}$ $\therefore k=-2\pm 2\sqrt{2}$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$(-2-2\sqrt{2})+(-2+2\sqrt{2})=-4$

4 두 점 $(-1, 1)$, $(3, 3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는

$\left(\dfrac{-1+3}{2}, \dfrac{1+3}{2}\right)$ $\therefore (1, 2)$

원의 반지름의 길이는

$\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$

원의 중심 $(1, 2)$와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2-2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}$

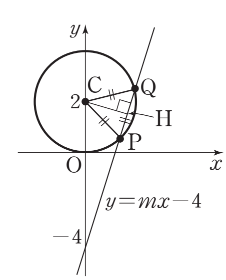
원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}>\sqrt{5}$, $|k|>5$ $\therefore k<-5$ 또는 $k>5$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다.

5 $x^2+y^2-4y=0$을 변형하면

$x^2+(y-2)^2=4$



오른쪽 그림에서 두 선분 CP, CQ는 원의 반지름이므로

$\overline{CP}=\overline{CQ}=2$

삼각형 CPQ가 정삼각형이므로

$\overline{PQ}=2$

원의 중심 C에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PH}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=1$

삼각형 CPH는 직각삼각형이므로

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{PH}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ …… ㉠

선분 CH의 길이는 원의 중심 C(0, 2)와 직선 $mx-y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{CH}=\frac{|-2-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{m^2+1}}$ …… ㉡

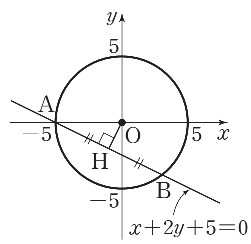
㉠, ㉡에서

$\sqrt{3}=\frac{6}{\sqrt{m^2+1}}$, $\sqrt{3m^2+3}=6$

$3m^2+3=36$, $m^2=11$

$\therefore m=\sqrt{11}$ ($\because m>0$)

6 오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하면 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 선분 AB를 지름으로 하는 원이다.



원의 중심 O(0, 0)에서 직선 $x+2y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 OH의 길이는 원점 O와 직선 $x+2y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{OH}=\frac{|5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$

삼각형 OAH는 직각삼각형이고 $\overline{OA}=5$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}$

$=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$

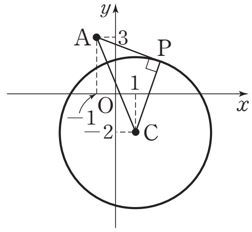
따라서 넓이가 최소인 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$이므로 구하는 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{5})^2=20\pi$

7 $x^2+y^2-2x+4y-11=0$을 변형하면

$(x-1)^2+(y+2)^2=16$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면 C(1, −2)이므로



$\overline{CA}$

$=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(-2-3)^2}$

$=\sqrt{29}$

이때 삼각형 CPA는 직각삼각형이고 $\overline{CP}=4$이므로

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CP}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{29})^2-4^2}=\sqrt{13}$

8 $x^2+y^2-6x+8y+7=0$을 변형하면

$(x-3)^2+(y+4)^2=18$

원의 중심 (3, −4)와 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3-4+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k-1|}{\sqrt{2}}$

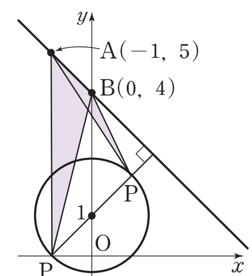
원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$이므로 원의 중심과 직선 사이의 거리는

$7\sqrt{2}-3\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

즉, $\frac{|k-1|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$이므로

$|k-1|=8$ $\therefore k=9$ ($\because k>0$)

9 오른쪽 그림과 같이 삼각형 APB의 넓이가 최대 또는 최소가 될 때는 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대 또는 최소가 될 때이다.



두 점 A(−1, 5), B(0, 4)를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{4-5}{1}x$

$\therefore x+y-4=0$

원의 중심 (0, 1)과 직선 $x+y-4=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

또 원의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=\sqrt{2}$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{1^2+(4-5)^2}=\sqrt{2}$이므로 삼각형 APB의 넓이의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하면

$M=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times(d+r)$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right)=\frac{5}{2}$

$m=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times(d-r)$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}$

$\therefore M+m=3$

10 원의 반지름의 길이를 r라 하면 기울기가 $\sqrt{3}$인 접선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x\pm r\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}$

$\therefore y=\sqrt{3}x\pm 2r$

이 직선이 점 $(2\sqrt{3}, 0)$을 지나므로

$0=6\pm 2r$, $2r=\pm 6$ $\therefore r=3$ ($\because r>0$)

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times 3^2=9\pi$

11 직선 $x+3y-7=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$의 기울기가 $-\frac{1}{3}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 3이다.

접선의 방정식을 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$이라 하면 이 직선과 원의 중심 $(3, 0)$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $2\sqrt{10}$과 같아야 하므로

$\frac{|9+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=2\sqrt{10}$, $|9+k|=20$

$9+k=\pm20$　　$\therefore k=-29$ 또는 $k=11$

$\therefore P(0, -29), Q(0, 11)$ 또는 $P(0, 11), Q(0, -29)$

$\therefore \overline{PQ}=|11-(-29)|=40$

12 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3, 1)$에서의 접선의 방정식은

$3x+y=10$　　$\therefore y=-3x+10$

따라서 이 직선의 y절편은 10이다.

13 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(2, -1)$에서의 접선의 방정식은

$2x-y=5$

$\therefore 2x-y-5=0$　　…… ㉠

$x^2+y^2+4x-2y=k$를 변형하면

$(x+2)^2+(y-1)^2=k+5$

이 원의 중심 $(-2, 1)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 반지름의 길이와 같아야 하므로

$\frac{|-4-1-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{k+5}$

$2\sqrt{5}=\sqrt{k+5}$, $20=k+5$

$\therefore k=15$

14 원 $(x-1)^2+y^2=1$의 넓이를 이등분하려면 직선은 이 원의 중심 $(1, 0)$을 지나야 한다.

따라서 구하는 직선의 기울기를 m이라 하면 이 직선은 점 $(1, 0)$을 지나므로

$y=m(x-1)$

$\therefore mx-y-m=0$　　…… ㉠

이 직선과 원 $(x+1)^2+y^2=1$의 중심 $(-1, 0)$ 사이의 거리가 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$\frac{|-m-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$, $|2m|=\sqrt{m^2+1}$

$4m^2=m^2+1$, $m^2=\frac{1}{3}$

$\therefore m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$\frac{\sqrt{3}}{3}x-y-\frac{\sqrt{3}}{3}=0$ 또는 $-\frac{\sqrt{3}}{3}x-y+\frac{\sqrt{3}}{3}=0$

$\therefore x-\sqrt{3}y-1=0$ 또는 $x+\sqrt{3}y-1=0$

15 접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(1, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=m(x-1)$

$\therefore mx-y-m+3=0$

원의 중심 $(2, 0)$과 이 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$\frac{|2m-m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$|m+3|=\sqrt{5(m^2+1)}$

$(m+3)^2=5(m^2+1)$

$\therefore 2m^2-3m-2=0$

두 접선의 기울기는 이 이차방정식의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 기울기의 곱은

$\frac{-2}{2}=-1$

16 접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(0, a)$를 지나는 접선의 방정식은

$y-a=mx$　　$\therefore mx-y+a=0$

이 직선과 원의 중심 $(0, -2)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 3과 같으므로

$\frac{|2+a|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$, $|2+a|=3\sqrt{m^2+1}$

$(2+a)^2=9(m^2+1)$

$\therefore 9m^2-(a^2+4a-5)=0$

두 접선의 기울기는 이 이차방정식의 두 근이고 두 접선이 서로 수직이므로 근과 계수의 관계에 의하여 기울기의 곱은

$-\frac{a^2+4a-5}{9}=-1$

$a^2+4a-5=9$, $a^2+4a-14=0$

$\therefore a=3\sqrt{2}-2$ ($\because a>0$)

17 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=9$　　…… ㉠

이 직선이 점 $(6, 0)$을 지나므로

$6x_1=9$　　$\therefore x_1=\frac{3}{2}$　　…… ㉡

또 접점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=9$　　…… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하여 풀면

$x_1=\frac{3}{2}, y_1=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 또는 $x_1=\frac{3}{2}, y_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

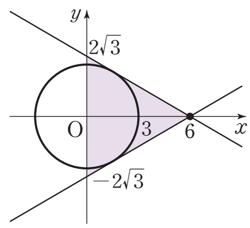
이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$\frac{3}{2}x-\frac{3\sqrt{3}}{2}y=9$ 또는 $\frac{3}{2}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}y=9$

$\therefore x-\sqrt{3}y-6=0$ 또는 $x+\sqrt{3}y-6=0$

따라서 두 직선의 y절편은 $-2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times6=12\sqrt{3}$



18 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a)$라 하면 x축과 y축에 동시에 접하는 원이므로 반지름의 길이는 $|a|$

점 $(a,\ a)$와 직선 $3x-4y+12=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3a-4a+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-a+12|}{5}$

즉, $|a|=\frac{|-a+12|}{5}$이므로

$5|a|=|-a+12|$

$25a^2=(-a+12)^2$

$a^2+a-6=0$, $(a+3)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=2$

따라서 두 원의 중심 A, B의 좌표가 $(2,\ 2)$, $(-3,\ -3)$이므로

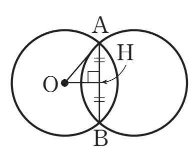
$\overline{AB}^2=(-3-2)^2+(-3-2)^2=50$

19 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-9-(x^2+y^2-6x-8y+16)=0$

$\therefore\ 6x+8y-25=0$ ⋯⋯ ㉠

두 원의 교점을 각각 A, B라 하고 원 $x^2+y^2=9$의 중심 $O(0,\ 0)$에서 직선 ㉠에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OA}=3$, $\overline{OH}=\frac{|-25|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{5}{2}$

직각삼각형 AOH에서

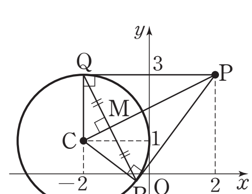
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}}{2}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=2\times\frac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$

20 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$을 변형하면

$(x+2)^2+(y-1)^2=4$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(-2,\ 1)$, 점 P에서 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 Q, R라 하고 선분 QR의 중점을 M이라 하면



$\overline{CQ}=2$

$\overline{CP}=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+(3-1)^2}=2\sqrt{5}$

삼각형 CPQ는 직각삼각형이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CQ}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$

이때 삼각형 CPQ의 넓이에서

$\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{CQ}=\frac{1}{2}\times\overline{CP}\times\overline{QM}$

$\frac{1}{2}\times4\times2=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\overline{QM}$

$\therefore\ \overline{QM}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 두 접점 사이의 거리는

$\overline{QR}=2\overline{QM}=2\times\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

21 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로

$2\overline{BP}=\overline{AP}$ $\qquad\therefore\ 4\overline{BP}^2=\overline{AP}^2$

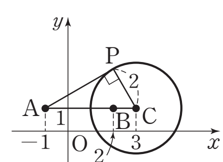
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$4\{(x-2)^2+(y-1)^2\}=(x+1)^2+(y-1)^2$

$x^2+y^2-6x-2y+6=0$

$\therefore\ (x-3)^2+(y-1)^2=4$

따라서 점 P는 중심이 점 $(3,\ 1)$이고 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직이므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}$가 원에 접할 때, $\angle PAB$의 크기는 최대가 된다.



이때 원의 중심을 C라 하면

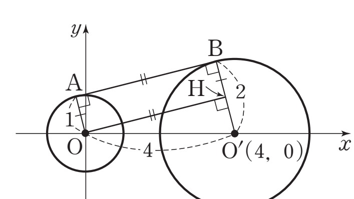
$\overline{AC}=3-(-1)=4$, $\overline{CP}=2$

삼각형 PAC가 직각삼각형이므로

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

22 원 $x^2+y^2=1$의 중심은 $O(0,\ 0)$이고, 원 $(x-4)^2+y^2=4$의 중심을 $O'(4,\ 0)$이라 하면

$\overline{OO'}=4$



위의 그림과 같이 중심 O에서 $\overline{O'B}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{O'H}=2-1=1$

이때 삼각형 O'HO는 직각삼각형이므로

$\overline{AB}=\overline{OH}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{O'H}^2}$

$=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

Ⅰ-4 01 평행이동

평행이동

개념 Check 83쪽

1 답 (1) $(4,\ -2)$ (2) $(6,\ -3)$

2 답 (1) $(-4,\ 7)$ (2) $(-5,\ 2)$

3 답 (1) $2x+y-6=0$ (2) $(x-3)^2+(y+2)^2=9$

4 답 (1) $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ (2) $y=(x+6)^2+7$

문제 84~86쪽

01-1 답 **16**

점 $(a,\ -3)$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(a-2,\ -3+b)$
따라서 $a-2=6,\ -3+b=5$이므로 $a=8,\ b=8$
$\therefore\ a+b=16$

01-2 답 $(3,\ -2)$

점 $(2,\ 2)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(-1,\ 4)$라 하면
$2+a=-1,\ 2+b=4 \qquad \therefore\ a=-3,\ b=2$
따라서 점 $(6,\ -4)$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(6-3,\ -4+2) \qquad \therefore\ (3,\ -2)$

01-3 답 **13**

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+1)$은 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하는 것이다.
이 평행이동에 의하여 점 $(-2,\ 3)$이 옮겨지는 점의 좌표는
$(-2+a,\ 3+1) \qquad \therefore\ (a-2,\ 4)$
이 점이 직선 $y=x-7$ 위에 있으므로
$4=a-2-7 \qquad \therefore\ a=13$

02-1 답 -6

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+p,\ y+3p)$는 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $3p$만큼 평행이동하는 것이다.
이 평행이동에 의하여 직선 $y=2x+3$이 옮겨지는 직선의 방정식은
$y-3p=2(x-p)+3 \qquad \therefore\ y=2x+p+3$
이 직선이 직선 $y=2x-3$과 일치하므로
$p+3=-3 \qquad \therefore\ p=-6$

02-2 답 -3

점 $(3,\ 1)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(2,\ 4)$라 하면
$3+m=2,\ 1+n=4 \qquad \therefore\ m=-1,\ n=3$
직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y-3=a(x+1)+b \qquad \therefore\ y=ax+a+b+3$
이 직선이 직선 $y=ax+b$와 일치하므로
$a+b+3=b \qquad \therefore\ a=-3$

02-3 답 $4x+y+15=0$

직선 $3x-y+5=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$3(x-2)-(y-m)+5=0 \qquad \therefore\ 3x-y+m-1=0$
이 직선이 직선 $3x-y+7=0$과 일치하므로
$m-1=7 \qquad \therefore\ m=8$
한편 직선은 평행이동해도 기울기가 변하지 않으므로 구하는 직선의 방정식을
$4x+y+a=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
으로 놓으면 이 직선을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 8만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$4(x-2)+(y-8)+a=0 \qquad \therefore\ 4x+y+a-16=0$
이 직선이 직선 $4x+y-1=0$과 일치하므로
$a-16=-1 \qquad \therefore\ a=15$
이를 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은
$4x+y+15=0$

03-1 답 $a=1,\ b=0,\ c=1$

점 $(1,\ 1)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(0,\ 4)$라 하면
$1+m=0,\ 1+n=4 \qquad \therefore\ m=-1,\ n=3$
$x^2+y^2-2x+4y+a=0$을 변형하면
$(x-1)^2+(y+2)^2=5-a$
이 원을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x+1-1)^2+(y-3+2)^2=5-a$
$\therefore\ x^2+(y-1)^2=5-a$
이 원의 중심의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 $b=0,\ c=1$
또 반지름의 길이는 $\sqrt{5-a}$이므로
$\sqrt{5-a}=2,\ 5-a=4 \qquad \therefore\ a=1$

다른 풀이

원 $x^2+y^2-2x+4y+a=0$, 즉 $(x-1)^2+(y+2)^2=5-a$의 중심 $(1,\ -2)$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(1-1,\ -2+3) \qquad \therefore\ (0,\ 1)$

이 점이 옮겨진 원의 중심과 일치하므로 $b=0$, $c=1$
또 원은 평행이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로
$\sqrt{5-a}=2$, $5-a=4$ $\quad\therefore a=1$

03-**2** 답 **6**

포물선 $y=x^2$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
$y-b=(x-a)^2$ $\quad\therefore y=x^2-2ax+a^2+b$
이 포물선이 포물선 $y=x^2+6x+7$과 일치하므로
$-2a=6$, $a^2+b=7$
따라서 $a=-3$, $b=-2$이므로 $ab=6$

다른 풀이

포물선 $y=x^2$의 꼭짓점 $(0,\ 0)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(a,\ b)$
이 점이 포물선 $y=x^2+6x+7$, 즉 $y=(x+3)^2-2$의 꼭짓점 $(-3,\ -2)$와 일치하므로
$a=-3$, $b=-2$ $\quad\therefore ab=6$

연습문제 87~88쪽

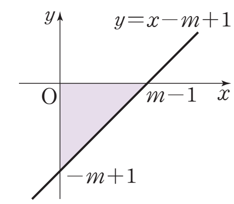
1 $(-2,\ 6)$		**2** ②	**3** ③	**4** 7
5 ⑤	**6** 14	**7** ③	**8** $(-2,\ -3)$	
9 9	**10** ⑤	**11** ③	**12** $(7,\ 3)$	**13** -2
14 -8				

1 점 $(-4,\ 3)$을 점 $(1,\ -2)$로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동하는 것이다.
이 평행이동에 의하여 점 $(a,\ b)$가 점 $(3,\ 1)$로 옮겨진다고 하면
$a+5=3$, $b-5=1$ $\quad\therefore a=-2$, $b=6$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 6)$이다.

2 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $\mathrm{P}'(a+2,\ b-4)$
$\therefore \overline{\mathrm{PP}'}=\sqrt{\{(a+2)-a\}^2+\{(b-4)^2-b\}^2}$
$=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$

3 직선 $3x+y-1=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$3(x-m)+(y+5)-1=0$ $\quad\therefore 3x+y-3m+4=0$
이 직선과 점 $(1,\ -2)$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로
$\dfrac{|3-2-3m+4|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$, $|5-3m|=10$
$5-3m=\pm10$ $\quad\therefore m=5$ $(\because m>0)$

4 직선 $x-y-1=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$(x-m)-(y-2)-1=0$ $\quad\therefore y=x-m+1$
이 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같고, 그 넓이가 18이므로



$\dfrac{1}{2}\times|m-1|\times|-m+1|=18$
$(m-1)^2=36$, $m-1=\pm6$
$\therefore m=7$ $(\because m>1)$

5 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y-4=a(x+1)+b$ $\quad\therefore y=ax+a+b+4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
직선 ㉠이 직선 $y=-\dfrac{1}{3}x-1$과 수직이므로
$-\dfrac{1}{3}a=-1$ $\quad\therefore a=3$
또 직선 ㉠이 직선 $y=-\dfrac{1}{3}x-1$과 x축 위에서 만나려면 점 $(-3,\ 0)$을 지나야 하므로
$0=-3a+a+b+4$ $\quad\therefore b=2$
$\therefore ab=3\times2=6$

6 직선 $y=2x+k$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y+3=2(x-2)+k$ $\quad\therefore 2x-y+k-7=0$
이 직선이 원 $x^2+y^2=5$와 한 점에서 만나려면 원의 중심 $(0,\ 0)$과 이 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같아야 하므로
$\dfrac{|k-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|k-7|=5$
$k-7=\pm5$ $\quad\therefore k=2$ 또는 $k=12$
따라서 모든 상수 k의 값의 합은
$2+12=14$

7 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$을 변형하면
$(x+1)^2+(y-2)^2=4$
평행이동하여 이 원과 겹쳐지려면 반지름의 길이가 2이어야 한다.
ㄱ. 반지름의 길이가 2이므로 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 주어진 원과 겹쳐진다.
ㄴ. 반지름의 길이가 3이므로 평행이동하여 주어진 원과 겹쳐질 수 없다.

ㄷ. $x^2+y^2+6x+4y+9=0$을 변형하면

$(x+3)^2+(y+2)^2=4$

즉, 반지름의 길이가 2이므로 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 주어진 원과 겹쳐진다.

따라서 보기에서 평행이동하여 주어진 원과 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

8 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하는 것이다.

이 평행이동에 의하여 원 $x^2+y^2+6x+2y+1=0$, 즉 $(x+3)^2+(y+1)^2=9$가 옮겨지는 원의 방정식은

$(x-1+3)^2+(y+2+1)^2=9$

$\therefore (x+2)^2+(y+3)^2=9$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(-2, -3)$이다.

9 원 C의 방정식은 $(x-m+1)^2+(y-n+2)^2=9$이므로 중심의 좌표는 $(m-1, n-2)$이고 반지름의 길이는 3이다.

㈎, ㈏에서 $m-1=n-2=3$ $\quad\therefore m=4, n=5$

$\therefore m+n=9$

10 원 $x^2+y^2=9$의 중심 $(0, 0)$을 원 $x^2+y^2+4x-6y+4=0$, 즉 $(x+2)^2+(y-3)^2=9$의 중심 $(-2, 3)$으로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하는 것이다.

이 평행이동에 의하여 포물선 $y=2x^2+5$가 옮겨지는 포물선의 방정식은

$y-3=2(x+2)^2+5$ $\quad\therefore y=2(x+2)^2+8$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 8)$이므로

$m=-2, n=8$ $\quad\therefore m+n=6$

11 점 $(2, m)$을 점 $(3, 2m)$으로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 m만큼 평행이동하는 것이다.

이 평행이동에 의하여 포물선 $y=-x^2+2x$가 옮겨지는 포물선의 방정식은

$y-m=-(x-1)^2+2(x-1)$

$\therefore y=-x^2+4x-3+m$

이 포물선이 직선 $y=2x+3$과 접하므로 이차방정식 $-x^2+4x-3+m=2x+3$, 즉 $x^2-2x+6-m=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(6-m)=0$ $\quad\therefore m=5$

12 점 C(4, 8)이 점 G(1, 6)으로 옮겨지므로 사각형 DEFG는 사각형 OABC를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이 평행이동에 의하여 두 점 O(0, 0), A(6, -3)이 옮겨지는 점은 각각 D($0-3$, $0-2$), E($6-3$, $-3-2$)

$\therefore$ D(-3, -2), E(3, -5)

이때 점 F의 좌표를 (a, b)라 하면 사각형 DEFG는 직사각형이므로 선분 DF의 중점 $\left(\frac{a-3}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$와 선분 EG의 중점 $\left(\frac{3+1}{2}, \frac{-5+6}{2}\right)$이 서로 일치한다.

즉, $a-3=4$, $b-2=1$이므로 $a=7$, $b=3$

따라서 점 F의 좌표는 (7, 3)이다.

13 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-m-2)^2+(y-n+1)^2=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 직선 $(k-1)x+(k+1)y-2k=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 원 ㉠의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심 $(m+2, n-1)$을 지나야 하므로

$(k-1)(m+2)+(k+1)(n-1)-2k=0$

$\therefore (m+n-1)k-m+n-3=0$

이 식이 k에 대한 항등식이므로

$m+n-1=0$, $-m+n-3=0$

두 식을 연립하여 풀면

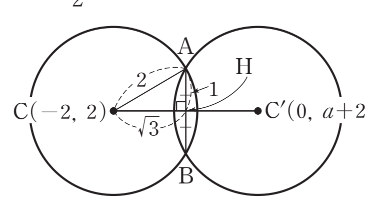
$m=-1, n=2$ $\quad\therefore mn=-2$

14 원 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$, 즉 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은

$x^2+(y-a-2)^2=4$

다음 그림과 같이 원 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$의 중심을 C(-2, 2), 원 $x^2+(y-a-2)^2=4$의 중심을 C$'$(0, $a+2$)라 하고, 직선 CC$'$과 선분 AB의 교점을 H라 하면

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times2=1$



직각삼각형 ACH에서 $\overline{CA}=2$이므로

$\overline{CH}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ $\quad\therefore \overline{CC'}=2\overline{CH}=2\sqrt{3}$

즉, 두 점 C, C$'$ 사이의 거리는 $2\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{\{-(-2)\}^2+\{(a+2)-2\}^2}=2\sqrt{3}$

$a^2+4=12$, $a^2=8$ $\quad\therefore a=\pm2\sqrt{2}$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$-2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=-8$

Ⅰ-4 02 대칭이동

1 대칭이동

개념 Check 91쪽

1 답 (1) $(3,\ -4)$ (2) $(-3,\ 4)$
(3) $(-3,\ -4)$ (4) $(4,\ 3)$

2 답 (1) $(-2,\ -5)$ (2) $(2,\ 5)$
(3) $(2,\ -5)$ (4) $(5,\ -2)$

3 답 (1) $x+4y+1=0$ (2) $x+4y-1=0$
(3) $x-4y-1=0$ (4) $4x-y-1=0$

4 답 (1) $(x-3)^2+(y+2)^2=7$
(2) $(x+3)^2+(y-2)^2=7$
(3) $(x+3)^2+(y+2)^2=7$
(4) $(x-2)^2+(y-3)^2=7$

5 답 (1) $y=-(x-1)^2+6$
(2) $y=(x+1)^2-6$
(3) $y=-(x+1)^2+6$
(4) $x=(y-1)^2-6$

문제 92~94쪽

01-1 답 20

점 $(a,\ -2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2,\ a)$

이 점을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2,\ -a)$

이 점이 점 $(6-a,\ 4+b)$와 일치하므로

$-2=6-a,\ -a=4+b$

$\therefore a=8,\ b=-12 \qquad \therefore a-b=20$

01-2 답 5

점 $(2,\ k)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 $(-2,\ -k)$

점 $(2,\ k)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(k,\ 2)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{\{k-(-2)\}^2+\{2-(-k)\}^2}$
$=\sqrt{2k^2+8k+8}$

즉, $\sqrt{2k^2+8k+8}=7\sqrt{2}$이므로

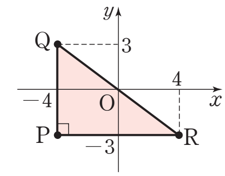
$2k^2+8k+8=98,\ k^2+4k-45=0$

$(k+9)(k-5)=0 \qquad \therefore k=5\ (\because k>0)$

01-3 답 24

점 $P(-4,\ -3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(-4,\ 3)$

점 $P(-4,\ -3)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는 $(4,\ -3)$



$\therefore \triangle PQR=\frac{1}{2}\times\overline{PR}\times\overline{PQ}=\frac{1}{2}\times8\times6=24$

02-1 답 9

$y=x^2+2mx+m^2-4=(x+m)^2-4$

이 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=-(x-m)^2+4$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(m,\ 4)$이므로

$m=5,\ n=4 \qquad \therefore m+n=9$

다른 풀이

$y=x^2+2mx+m^2-4=(x+m)^2-4$

이 포물선의 꼭짓점 $(-m,\ -4)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(m,\ 4)$

이 점이 점 $(5,\ n)$과 일치하므로

$m=5,\ n=4 \qquad \therefore m+n=9$

02-2 답 1

직선 $y=kx+1$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=-kx+1$ …… ㉠

$x^2+y^2-6x+4y+9=0$을 변형하면

$(x-3)^2+(y+2)^2=4$

직선 ㉠이 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(3,\ -2)$를 지나야 하므로

$-2=-3k+1 \qquad \therefore k=1$

02-3 답 18

원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y+4)^2=4$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+1)^2+(-y+4)^2=4$

$\therefore (x+1)^2+(y-4)^2=4$

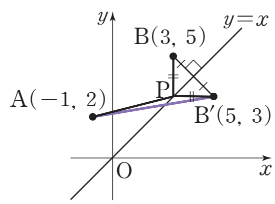
이 원이 직선 $4x+3y-a=0$에 접하려면 원의 중심 $(-1,\ 4)$와 직선 $4x+3y-a=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 2와 같아야 하므로

$\frac{|-4+12-a|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2,\ |8-a|=10$

$8-a=\pm10 \qquad \therefore a=18\ (\because a>0)$

03-**1** 답 $\sqrt{37}$

점 B(3, 5)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면



B′(5, 3)

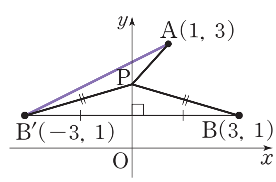
이때 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$
$\geq\overline{AB'}$
$=\sqrt{\{5-(-1)\}^2+(3-2)^2}$
$=\sqrt{37}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\sqrt{37}$이다.

03-**2** 답 $\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$

점 B(3, 1)을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면



B′(−3, 1)

이때 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}\geq\overline{AB'}$

즉, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소일 때의 점 P는 직선 AB′과 y축의 교점이다.

두 점 A(1, 3), B′(−3, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\dfrac{1-3}{-3-1}(x-1)$ $\quad\therefore y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$이다.

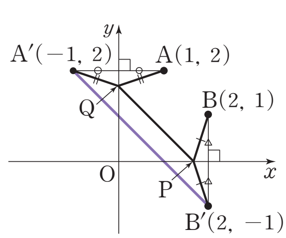
03-**3** 답 $3\sqrt{2}$

점 A(1, 2)를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

A′(−1, 2)

점 B(2, 1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

B′(2, −1)



이때 $\overline{AQ}=\overline{A'Q}$, $\overline{PB}=\overline{PB'}$이므로

$\overline{AQ}+\overline{QP}+\overline{PB}=\overline{A'Q}+\overline{QP}+\overline{PB'}$
$\geq\overline{A'B'}$
$=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(-1-2)^2}$
$=3\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AQ}+\overline{QP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $3\sqrt{2}$이다.

2 점과 직선에 대한 대칭이동

문제 96~97쪽

04-**1** 답 -3

점 (−1, −1)이 두 점 (2, a), (b, −3)을 이은 선분의 중점이므로

$\dfrac{2+b}{2}=-1$, $\dfrac{a-3}{2}=-1$ $\quad\therefore a=1, b=-4$

$\therefore a+b=-3$

04-**2** 답 9

$y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 (1, 4)이다.

따라서 점 (a, b)가 두 점 (1, 4), (3, 5)를 이은 선분의 중점이므로

$a=\dfrac{1+3}{2}=2$, $b=\dfrac{4+5}{2}=\dfrac{9}{2}$

$\therefore ab=9$

05-**1** 답 $a=-2$, $b=-1$

두 점 (−6, 1), (2, 5)를 이은 선분의 중점 $\left(\dfrac{-6+2}{2}, \dfrac{1+5}{2}\right)$, 즉 (−2, 3)이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$3=-2a+b$ ...... ㉠

또 두 점 (−6, 1), (2, 5)를 지나는 직선과 직선 $y=ax+b$는 서로 수직이므로

$\dfrac{5-1}{2+6}\times a=-1$ $\quad\therefore a=-2$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-1$

05-**2** 답 $(x-5)^2+(y+3)^2=4$

원 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$의 중심 (1, 1)을 직선 $x-y-4=0$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하자.

두 점 (1, 1), (a, b)를 이은 선분의 중점 $\left(\dfrac{1+a}{2}, \dfrac{1+b}{2}\right)$가 직선 $x-y-4=0$ 위의 점이므로

$\dfrac{1+a}{2}-\dfrac{1+b}{2}-4=0$ $\quad\therefore a-b=8$ ...... ㉠

또 두 점 (1, 1), (a, b)를 지나는 직선과 직선 $x-y-4=0$은 서로 수직이므로

$\dfrac{b-1}{a-1}\times 1=-1$ $\quad\therefore a+b=2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-3$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표가 (5, −3)이고 반지름의 길이가 2이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-5)^2+(y+3)^2=4$

연습문제 98~100쪽

1 ③	2 ⑤	3 ③	4 -3	5 -1
6 ①	7 $-\frac{2}{3}$	8 ②	9 ③	10 ④
11 ①	12 ③	13 ①	14 ④	
15 $8\pi-16$	16 3 m, 25 m	17 ②	18 ②	

1 점 (a, b)를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(-a, -b)$
이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(-b, -a)$
이 점이 점 $(1, 2)$와 같으므로
$-b=1, -a=2$
$\therefore a=-2, b=-1$
$\therefore ab=2$

2 $A(4, 0)$, $B(0, 3)$이므로 점 P의 좌표는
$\left(\frac{2\times0+1\times4}{2+1}, \frac{2\times3+1\times0}{2+1}\right)$ $\therefore \left(\frac{4}{3}, 2\right)$
점 P를 x축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는
$\left(\frac{4}{3}, -2\right)$
점 P를 y축에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는
$\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$
따라서 삼각형 RQP의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\frac{4}{3}}{3}, \frac{2-2+2}{3}\right)$ $\therefore \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{3}\right)$
즉, $a=\frac{4}{9}$, $b=\frac{2}{3}$이므로
$a+b=\frac{10}{9}$

3 직선 $mx-(n+1)y+5=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$-mx+(n+1)y+5=0$
이 직선이 $(n-3)x+my+5=0$과 일치하므로
$-m=n-3, n+1=m$
두 식을 연립하여 풀면 $m=2, n=1$
$\therefore mn=2$

4 주어진 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$x^2+y^2+6x-2y+9=0$
이 식을 변형하면
$(x+3)^2+(y-1)^2=1$
이 원의 중심의 좌표가 $(-3, 1)$이고 반지름의 길이가 1이므로
$a=-3, b=1, c=1$ $\therefore abc=-3$

다른 풀이
$x^2+y^2-2x+6y+9=0$을 변형하면
$(x-1)^2+(y+3)^2=1$
이 원의 중심 $(1, -3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-3, 1)$
$\therefore a=-3, b=1$
한편 원을 대칭이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 $c=1$
$\therefore abc=-3\times1\times1=-3$

5 원 $(x+1)^2+(y-k)^2=10$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(x+1)^2+(-y-k)^2=10$
$\therefore (x+1)^2+(y+k)^2=10$
직선 $x-y+2=0$이 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(-1, -k)$를 지나야 하므로
$-1+k+2=0$ $\therefore k=-1$

6 직선 $x-2y=9$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$y-2x=9$ $\therefore 2x-y+9=0$
이 직선이 원 $(x-3)^2+(y+5)^2=k$에 접하려면 원의 중심 $(3, -5)$와 이 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{k}$와 같아야 하므로
$\frac{|6+5+9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{k}$
$20=\sqrt{5k}$, $400=5k$
$\therefore k=80$

7 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은
$y-7=m(x-1)$
$\therefore y=mx-m+7$
이 직선을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y+3=m(x-2)-m+7$
$\therefore y=mx-3m+4$
이 직선을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$y=-mx-3m+4$
이 직선이 점 $(3, 8)$을 지나므로
$8=-3m-3m+4$
$\therefore m=-\frac{2}{3}$

8 $y=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ a-1)$이므로 이 점을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-1+m,\ a-1+3)$

$\therefore\ (m-1,\ a+2)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(1-m,\ -a-2)$

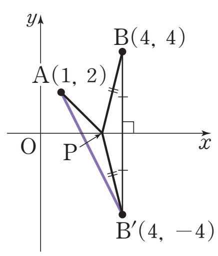
이 점이 점 $(-2,\ 9)$와 일치하므로

$1-m=-2,\ -a-2=9$

$\therefore\ m=3,\ a=-11$

$\therefore\ a+m=-8$

9 점 B(4, 4)를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면



B′(4, −4)

이때 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$

$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$

$\geq\overline{\mathrm{AB'}}$

$=\sqrt{(4-1)^2+(-4-2)^2}$

$=3\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $3\sqrt{5}$이다.

10 $y=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$

$y=-x^2+14x-50=-(x-7)^2-1$

두 포물선이 점 P에 대하여 서로 대칭이므로 두 꼭짓점 $(3,\ 1)$, $(7,\ -1)$도 점 P에 대하여 서로 대칭이다.

따라서 점 P는 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{3+7}{2},\ \dfrac{1-1}{2}\right)$

$\therefore\ (5,\ 0)$

11 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$을 점 $(3,\ 2)$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A'}(a,\ b)$라 하면 선분 AA′의 중점의 좌표가 $(3,\ 2)$이므로

$\dfrac{-2+a}{2}=3,\ \dfrac{1+b}{2}=2$

$\therefore\ a=8,\ b=3$

따라서 점 A′(8, 3)이고, 이 점을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면

$\mathrm{A''}(-8,\ 3)$

이때 직선 l은 두 점 A, A″을 지나므로 그 기울기는

$\dfrac{3-1}{-8+2}=-\dfrac{1}{3}$

다른 풀이

점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식을

$y-1=m(x+2)$라 하자.

이 직선 위의 점 $(x,\ y)$를 점 $(3,\ 2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(x',\ y')$이라 하면

$\dfrac{x+x'}{2}=3,\ \dfrac{y+y'}{2}=2\qquad\therefore\ x=6-x',\ y=4-y'$

이를 $y-1=m(x+2)$에 대입하면

$3-y'=m(8-x')\qquad\therefore\ y'=mx'-8m+3$

따라서 점 A를 지나는 직선을 점 $(3,\ 2)$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=mx-8m+3$

이 직선을 y축에 대하여 대칭이동한 직선 l의 방정식은

$y=-mx-8m+3$

직선 l이 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$을 지나므로

$1=2m-8m+3,\ 6m=2\qquad\therefore\ m=\dfrac{1}{3}$

따라서 직선 l의 기울기는 $-m$이므로 $-\dfrac{1}{3}$이다.

12 대칭이동한 원의 반지름의 길이는 서로 같으므로 $b=4$

두 원의 중심 $(-2,\ -3)$, $(6,\ a)$를 이은 선분의 중점

$\left(\dfrac{-2+6}{2},\ \dfrac{-3+a}{2}\right)$, 즉 $\left(2,\ \dfrac{a-3}{2}\right)$이 직선

$y=-2x+c$ 위의 점이므로

$\dfrac{a-3}{2}=-2\times2+c\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또 두 점 $(-2,\ -3)$, $(6,\ a)$를 지나는 직선과 직선 $y=-2x+c$는 서로 수직이므로

$\dfrac{a+3}{6+2}\times(-2)=-1\qquad\therefore\ a=1$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $c=3$

$\therefore\ a+b+c=1+4+3=8$

13 (ⅰ) 점 $\mathrm{A}(4,\ 1)$을 직선 $x-y+1=0$에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 선분 AC의 중점

$\left(\dfrac{4+a}{2},\ \dfrac{1+b}{2}\right)$가 직선 $x-y+1=0$ 위의 점이므로

$\dfrac{4+a}{2}-\dfrac{1+b}{2}+1=0$

$\therefore\ a-b=-5\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또 직선 AC와 직선 $x-y+1=0$, 즉 $y=x+1$은 서로 수직이므로

$\dfrac{b-1}{a-4}\times1=-1$

$\therefore\ a+b=5\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=5$

$\therefore\ \mathrm{C}(0,\ 5)$

(ii) 점 B(5, 1)을 직선 $x-y+1=0$에 대하여 대칭이동한 점 D의 좌표를 $(c,\ d)$라 하면 선분 BD의 중점 $\left(\dfrac{5+c}{2},\ \dfrac{1+d}{2}\right)$가 직선 $x-y+1=0$ 위의 점이므로

$$\frac{5+c}{2}-\frac{1+d}{2}+1=0$$

$\therefore\ c-d=-6$ ······ ㉢

또 직선 BD와 직선 $x-y+1=0$, 즉 $y=x+1$은 서로 수직이므로

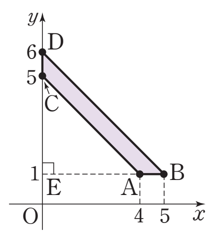
$$\frac{d-1}{c-5}\times 1=-1$$

$\therefore\ c+d=6$ ······ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $c=0,\ d=6$

$\therefore$ D(0, 6)

오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 연장선이 y축과 만나는 점을 E라 하면



$\square$ABDC

$=\triangle$BDE$-\triangle$ACE

$=\dfrac{1}{2}\times 5\times 5-\dfrac{1}{2}\times 4\times 4=\dfrac{9}{2}$

14 점 (3, 2)를 규칙에 따라 이동해 보자.

점 (3, 2)에서 $3>2$이므로 [규칙 1]에서

$(3,\ 2) \longrightarrow (-3,\ -2)$

점 $(-3,\ -2)$에서 $-3<-2$이므로 [규칙 2]에서

$(-3,\ -2) \longrightarrow (-3+1,\ -2)$ $\quad\therefore\ (-2,\ -2)$

점 $(-2,\ -2)$에서 $-2=-2$이므로 [규칙 3]에서

$(-2,\ -2) \longrightarrow (-2,\ -2+1)$ $\quad\therefore\ (-2,\ -1)$

점 $(-2,\ -1)$에서 $-2<-1$이므로 [규칙 2]에서

$(-2,\ -1) \longrightarrow (-2+1,\ -1)$ $\quad\therefore\ (-1,\ -1)$

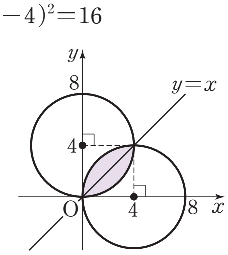
⋮

이와 같이 점 (3, 2)를 규칙에 따라 이동하면 이동된 점의 y좌표는 x좌표와 같거나 1만큼 크므로 점 (17, 16)은 지날 수 없다.

15 원 $(x-4)^2+y^2=16$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-4)^2+x^2=16$ $\quad\therefore\ x^2+(y-4)^2=16$

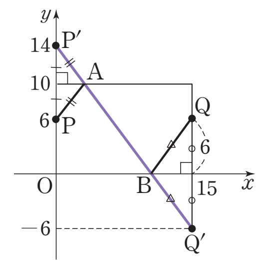
따라서 주어진 원과 대칭이동한 원이 겹쳐지는 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로 그 넓이는



$2\times\left(\dfrac{1}{4}\pi\times 4^2-\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\right)$

$=8\pi-16$

16 전시물 B가 있는 벽면과 입구 P가 있는 벽면을 각각 x축, y축으로 하여 전시장을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 점 P를 직선 $y=10$에 대하여 대칭이동한 점을 P′, 점 Q를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 Q′이라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{P'A}}+\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BQ'}}\geq\overline{\mathrm{P'Q'}}$

이므로 선분 P′Q′의 길이가 구하는 최소 이동 거리이다.

(i) 점 A는 직선 P′Q′과 직선 $y=10$의 교점이다.

이때 P′(0, 14), Q′(15, -6)이므로 두 점 P′, Q′을 지나는 직선의 방정식은

$y-14=\dfrac{-6-14}{15}x$ $\quad\therefore\ y=-\dfrac{4}{3}x+14$

$y=10$일 때, x의 값을 구하면

$10=-\dfrac{4}{3}x+14$ $\quad\therefore\ x=3$

따라서 전시물 A는 입구 P가 있는 벽면에서 오른쪽으로 3 m 떨어져 있어야 한다.

(ii) 선분 P′Q′의 길이를 구하면

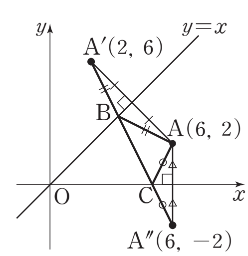
$\overline{\mathrm{P'Q'}}=\sqrt{15^2+(-6-14)^2}=25(\mathrm{m})$

따라서 최소 이동 거리는 25 m이다.

17 점 A(6, 2)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′, x축에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면

A′(2, 6), A″(6, -2)

삼각형 ABC의 둘레의 길이는



$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}$

$=\overline{\mathrm{A'B}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA''}}$

$\geq\overline{\mathrm{A'A''}}$

$=\sqrt{(6-2)^2+(-2-6)^2}$

$=4\sqrt{5}$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 $4\sqrt{5}$이다.

18 방정식 $f(x+1,\ -(y-2))=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 ②와 같다.

다른 풀이

방정식 $f(x+1,\ -y+2)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ②와 같다.

Ⅱ-1 01 집합의 뜻과 집합 사이의 포함 관계

집합의 뜻과 표현

개념 Check 103쪽

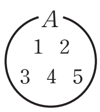
1 답 (1) **1, 2, 3** (2) **1, 3, 5, 7, 9**

2 답 (1) $\notin$ (2) $\in$ (3) $\notin$ (4) $\in$

3 답 (1) $\boldsymbol{A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}}$

(2) 예 $\boldsymbol{A=\{x\,|\,x}$**는 5 이하의 자연수**$\boldsymbol{\}}$

(3)



4 답 (1) ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅂ (2) ㄷ, ㅁ (3) ㄴ

ㄱ. $\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$ ➡ 유한집합

ㄴ. $x^2+2=0$인 실수 x는 존재하지 않는다.

➡ 공집합, 유한집합

ㄷ. $\{11,\ 13,\ 15,\ 17,\ \cdots\}$ ➡ 무한집합

ㄹ. $\{2\}$ ➡ 유한집합

ㅁ. 1과 2 사이의 유리수는 무수히 많다. ➡ 무한집합

ㅂ. $\{3,\ 6,\ 9\}$ ➡ 유한집합

문제 104~107쪽

01-1 답 ㄴ, ㄷ, ㅂ

ㄱ, ㄹ, ㅁ. '잘생긴', '아름다운', '잘하는'은 기준이 명확하지 않아 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

ㄴ. 원소가 105, 112, 119, 126, …인 집합이다.

ㄷ. 원소가 국어, 영어, 수학, …인 집합이다.

ㅂ. 원소가 월, 화, 수, 목, 금, 토, 일인 집합이다.

따라서 보기에서 집합인 것은 ㄴ, ㄷ, ㅂ이다.

01-2 답 ⑤

① 원소가 1인 집합이다.

② $84=2^2\times3\times7$이므로 원소가 2, 3, 7인 집합이다.

③ $x^2-3x=0$에서 $x(x-3)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 원소가 0, 3인 집합이다.

④ 원소가 하나도 없으므로 공집합이다.

⑤ '작은'은 기준이 명확하지 않아 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 집합이 아닌 것은 ⑤이다.

02-1 답 (1) 예 $\boldsymbol{A=\{x\,|\,x}$**는 4로 나누었을 때의 나머지가 1인 100 이하의 자연수**$\boldsymbol{\}}$

(2) 예 $\boldsymbol{B=\{x\,|\,x}$**는 모음인 알파벳 소문자**$\boldsymbol{\}}$

(3) $\boldsymbol{C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 49\}}$

(4) $\boldsymbol{D=\{-2,\ 4\}}$

(4) $x^2-2x-8=0$에서

$(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

02-2 답 **원소나열법:** $\boldsymbol{A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}}$

조건제시법: 예 $\boldsymbol{A=\{x\,|\,x}$**는 10보다 작은 홀수**$\boldsymbol{\}}$

02-3 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ, ㄴ, ㄷ. $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 9\}$

ㄹ. $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 9\}$

따라서 보기에서 주어진 집합을 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

03-1 답 (1) $\boldsymbol{C=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}}$

(2) $\boldsymbol{D=\{-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3\}}$

$x^2=1$에서 $x=\pm1$

$\therefore B=\{-1,\ 1\}$

(1) 집합 A의 원소 a와 집합 B의 원소 b에 대하여 $a-b$의 값은 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	-1	1
1	2	0
2	3	1
3	4	2

$C=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

(2) 집합 A의 원소 a와 집합 B의 원소 b에 대하여 $\frac{a}{b}$의 값은 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	-1	1
1	-1	1
2	-2	2
3	-3	3

$D=\{-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3\}$

03-2 답 $\boldsymbol{-7}$

집합 B의 원소 b와 집합 A의 원소 a에 대하여 ba의 값은 오른쪽 표와 같으므로

b \ a	1	2
-1	-1	-2
0	0	0

$B\otimes A=\{-2,\ -1,\ 0\}$

집합 A의 원소 a와 집합 $B\otimes A$의 원소 ba에 대하여 $a\times ba$의 값은 오른쪽 표와 같으므로

a \ ba	-2	-1	0
1	-2	-1	0
2	-4	-2	0

$A\otimes(B\otimes A)$

$=\{-4,\ -2,\ -1,\ 0\}$

따라서 집합 $A\otimes(B\otimes A)$의 모든 원소의 합은

$-4+(-2)+(-1)+0=-7$

04-**1** 답 ㄱ, ㄹ

ㄴ. $n(\{2\})=n(\{\varnothing\})=1$

ㄷ. $n(\{1, 2, 3\})-n(\{1, 3\})=3-2=1$

ㄹ. $A=\{1, 3, 5, 15\}$이므로 $n(A)=4$

ㅁ. $A=\varnothing$이므로 $n(A)=0$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

04-**2** 답 **11**

$A=\{0, 1, 2, 3, \cdots, 9\}$이므로 $n(A)=10$

$B=\{\varnothing\}$에서 $n(B)=1$

집합 C에서 $x^2+x+1=0$인 실수 x는 없으므로

$C=\varnothing$ $\quad\therefore n(C)=0$

$\therefore n(A)+n(B)+n(C)=10+1+0$

$=11$

2 집합 사이의 포함 관계

개념 Check 109쪽

1 답 (1) $\subset$, $\not\subset$ (2) $\not\subset$, $\subset$ (3) $\subset$, $\not\subset$ (4) $\not\subset$, $\not\subset$

2 답 (1) $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$

(2) $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$

3 답 (1) $=$ (2) $\neq$ (3) $\neq$ (4) $=$

(1) $B=\{2, 3, 5, 7\}$이므로 $A=B$

(2) $B=\{1, 5, 25\}$이므로 $A\neq B$

(3) $A=\{-1, 1\}$, $B=\{-1, 0, 1\}$이므로 $A\neq B$

(4) $A=\{1, 2, \cdots, 9\}$, $B=\{1, 2, \cdots, 9\}$이므로 $A=B$

4 답 $a=9$, $b=5$

$A=B$이므로 $9\in A$, $5\in B$이어야 한다.

$9\in A$에서 $a=9$

$5\in B$에서 $b=5$

5 답 ㄱ, ㄹ

ㄱ. $A\subset B$, $A\neq B$이므로 A는 B의 진부분집합이다.

ㄴ. $A=\{2, 3, 5, 7, \cdots\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$이므로 $A\not\subset B$

따라서 A는 B의 진부분집합이 아니다.

ㄷ. $A=\{-1, 1\}$이므로 $A=B$

따라서 A는 B의 진부분집합이 아니다.

ㄹ. $B=\{2, 3, 5, 7\}$이므로 $A\subset B$, $A\neq B$

따라서 A는 B의 진부분집합이다.

ㅁ. $A\not\subset B$이므로 A는 B의 진부분집합이 아니다.

따라서 보기에서 A가 B의 진부분집합인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

6 답 $\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$

문제 110~111쪽

05-**1** 답 ㄴ, ㄹ, ㅂ

$A=\{1, 3, 7, 21\}$

ㄱ. $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이지만 집합 A의 원소는 아니므로 $\varnothing\subset A$, $\varnothing\notin A$

ㄴ. 7은 집합 A의 원소이므로 $7\in A$

ㄷ. 3, 7은 집합 A의 원소이므로 $\{3, 7\}\subset A$

ㄹ. 1, 21은 집합 A의 원소이므로 $\{1, 21\}\subset A$

ㅁ. 14는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{3, 14\}\not\subset A$

ㅂ. $A\subset A$이므로 $\{1, 3, 7, 21\}\subset A$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ, ㅂ이다.

05-**2** 답 ②

집합 A의 원소는 0, $\{1\}$, $\{1, 2\}$, 3

① 2는 집합 A의 원소가 아니므로 $2\notin A$

② $\{1, 2\}$는 집합 A의 원소이지만 1, 2는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{1, 2\}\in A$, $\{1, 2\}\not\subset A$

③ 1은 집합 A의 원소가 아니므로 $\{0, 1\}\not\subset A$

④ $\{1\}$은 집합 A의 원소이므로 $\{1\}\in A$

⑤ 0은 집합 A의 원소이므로 $\{0\}\subset A$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

05-**3** 답 **5**

집합 A의 원소는 $\varnothing$, 1, 2, $\{1, 2\}$

ㄱ. $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$

ㄴ, ㄹ. $\{1, 2\}$는 집합 A의 원소이므로

$\{1, 2\}\in A$, $\{\{1, 2\}\}\subset A$

ㄷ. 1, 2는 집합 A의 원소이므로 $\{1, 2\}\subset A$

ㅁ. $\varnothing$은 집합 A의 원소이므로 $\{\varnothing\}\subset A$

ㅂ. 1은 집합 A의 원소이므로 $1\in A$, $\{1\}\subset A$

$\{1\}$은 집합 A의 원소가 아니므로 $\{1\}\notin A$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ의 5개이다.

06-1 답 **1**

$1 \in A$이므로 $A \subset B$이려면 $1 \in B$에서

$a+4=1$ 또는 $2a-1=1$ $\quad \therefore a=-3$ 또는 $a=1$

(i) $a=-3$일 때,

$A=\{-1, 1\}, B=\{-7, 1, 3\}$ $\quad \therefore A \not\subset B$

(ii) $a=1$일 때,

$A=\{1, 3\}, B=\{1, 3, 5\}$ $\quad \therefore A \subset B$

(i), (ii)에서 $a=1$

06-2 답 **3**

$A \subset B$, $B \subset A$이면 $A=B$

$1 \in B$이므로 $A=B$이려면 $1 \in A$에서

$a^2+1=1, a^2=0$ $\quad \therefore a=0$

$\therefore A=\{-1, 1, 2\}, B=\{-1, 1, b-1\}$

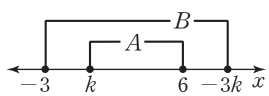
$2 \in A$이므로 $A=B$이려면 $2 \in B$에서

$b-1=2$ $\quad \therefore b=3$

$\therefore a+b=0+3=3$

06-3 답 $\boldsymbol{-3 \le k \le -2}$

$A \subset B$이도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$-3 \le k \le 6$, $-3k \ge 6$

$\therefore -3 \le k \le -2$

3 부분집합의 개수

개념 Check 112쪽

1 답 (1) **64** (2) **63** (3) **16** (4) **4**

(1) $2^6=64$ (2) $2^6-1=63$

(3) $2^{6-2}=2^4=16$ (4) $2^{6-4}=2^2=4$

문제 113~114쪽

07-1 답 (1) **8** (2) **56**

(1) 구하는 부분집합의 개수는 집합 A에서 1, 3, 4를 제외한 집합 $\{2, 5, 6\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{6-3}=2^3=8$

(2) 집합 A의 부분집합의 개수에서 소수 2, 3, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로

$2^6-2^{6-3}=64-8=56$

07-2 답 **32**

$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로 집합 A의 부분집합 중에서 1, 2는 반드시 원소로 갖고 8은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 집합 $\{3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합의 개수와 같다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{8-3}=2^5=32$

07-3 답 **55**

$A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

(i) 집합 A의 진부분집합의 개수는

$2^6-1=63$

(ii) 홀수 1, 3, 9를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{6-3}=2^3=8$

(i), (ii)에서 구하는 부분집합의 개수는

$63-8=55$

08-1 답 **8**

구하는 집합 X의 개수는 집합 $\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합 중에서 a, b를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{5-2}=2^3=8$

08-2 답 **4**

$A \subset X \subset B$에서 $\{3, 5\} \subset X \subset \{2, 3, 5, 7\}$

따라서 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 3, 5를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{4-2}=2^2=4$

08-3 답 **7**

$A \subset X \subset B$에서 $\{1, 2, 3, 4\} \subset X \subset \{1, 2, 3, \cdots, k\}$

따라서 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 4를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{k-4}=8=2^3$

즉, $k-4=3$이므로 $k=7$

연습문제 115~117쪽

1 ③	**2** ④	**3** ⑤	**4** ②	**5** ⑤
6 ③	**7** ④	**8** ②	**9** 2	**10** 4
11 ⑤	**12** ②	**13** 24	**14** 9	**15** ③
16 8	**17** 15	**18** ⑤	**19** 48	**20** ③

1 ㄱ, ㄴ. '큰', '아주 작은'은 기준이 명확하지 않아 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
따라서 보기에서 집합인 것은 ㄷ, ㄹ, ㅁ, ㅂ의 4개이다.

2 집합 A는 소인수가 2와 5뿐인 자연수의 집합이다.
주어진 수를 각각 소인수분해하면
① $10=2\times5$ ② $50=2\times5^2$
③ $100=2^2\times5^2$ ④ $150=2\times3\times5^2$
⑤ $200=2^3\times5^2$
따라서 집합 A의 원소가 아닌 것은 ④이다.

3 ① $\{3, 5, 7\}$
② $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
③ $\{11, 13, 15, \cdots, 99\}$
④ $x^2-6x+8=0$에서 $(x-2)(x-4)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=4$ $\therefore \{2, 4\}$
⑤ -1보다 크거나 같고 3보다 작거나 같은 실수는 무수히 많다.
따라서 무한집합인 것은 ⑤이다.

4 $A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이므로 $n(A)=6$
$B=\{0\}$이므로 $n(B)=1$
$C=\{10, 20, 30, 40\}$이므로 $n(C)=4$
$\therefore n(A)+n(B)-n(C)=6+1-4=3$

5 ① $n(\{\varnothing\})=1$
② $n(\{1\})=n(\{2\})=1$
③ $A=\{1, 2\}$, $B=\{3, 4\}$일 때, $n(A)=n(B)=2$이지만 $A\neq B$이다.
④ $A\subset B$이면 A는 B의 진부분집합이거나 $A=B$이므로 $n(A)\leq n(B)$
⑤ $n(\{0\})+n(\varnothing)+n(\{0, \varnothing\})=1+0+2=3$
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

6 집합 A의 원소는 $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, 1, $\{2, 3\}$
ㄱ. $\varnothing$은 집합 A의 원소이므로 $\varnothing\in A$
ㄴ. 2는 집합 A의 원소가 아니므로 $2\notin A$
ㄷ. $\{1, 2\}$는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{1, 2\}\notin A$
ㄹ. $\{2, 3\}$은 집합 A의 원소이므로 $\{2, 3\}\in A$
ㅁ. $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$
ㅂ. $\varnothing$, $\{\varnothing\}$은 집합 A의 원소이므로 $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\subset A$
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㅁ, ㅂ이다.

7 ㄱ. $A=\{4, 6, 8, 10, 12, \cdots\}$, $B=\{4, 8, 12, \cdots\}$이므로
$B\subset A$, $A\not\subset B$
ㄴ. $A=\{5, 10, 15, 20, \cdots\}$, $B=\{5, 10, 15, 20, \cdots\}$이므로
$B\subset A$, $A\subset B$
ㄷ. $B\subset A$, $A\not\subset B$
따라서 보기에서 $B\subset A$이지만 $A\not\subset B$인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

8 집합 A의 임의의 두 원소 x, y에 대하여 $x+y$의 값은 오른쪽 표와 같으므로
$B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

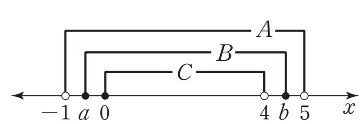
$x \backslash y$	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

집합 A의 임의의 두 원소 x, y에 대하여 xy의 값은 오른쪽 표와 같으므로
$C=\{-1, 0, 1\}$
$\therefore A=C\subset B$

$x \backslash y$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

9 $1\in A$이므로 $A\subset B$이려면 $1\in B$에서
$a-1=1$ 또는 $a-3=1$
$\therefore a=2$ 또는 $a=4$
(i) $a=2$일 때,
$A=\{1, 4\}$, $B=\{-1, 1, 4\}$ $\therefore A\subset B$
(ii) $a=4$일 때,
$A=\{1, 6\}$, $B=\{1, 3, 4\}$ $\therefore A\not\subset B$
(i), (ii)에서 $a=2$

10 $C\subset B\subset A$이도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore -1<a\leq0$, $4\leq b<5$
이때 a, b는 정수이므로
$a=0$, $b=4$ $\therefore a+b=4$

11 $2\in B$이므로 $A=B$이려면 $2\in A$에서
$a+2=2$ 또는 $a^2-2=2$
$\therefore a=0$ 또는 $a=\pm2$
(i) $a=-2$일 때,
$A=\{0, 2\}$, $B=\{2, 8\}$ $\therefore A\neq B$
(ii) $a=0$일 때,
$A=\{-2, 2\}$, $B=\{2, 6\}$ $\therefore A\neq B$
(iii) $a=2$일 때,
$A=\{2, 4\}$, $B=\{2, 4\}$ $\therefore A=B$
(i), (ii), (iii)에서 $a=2$

12 집합 A의 부분집합 중에서 1, 3은 반드시 원소로 갖고 2는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 집합 A에서 1, 2, 3을 제외한 집합 $\{4, 5\}$의 부분집합의 개수와 같다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{5-3}=2^2=4$

13 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$
(i) 집합 A의 부분집합의 개수는
$2^5=32$
(ii) 집합 A의 부분집합 중에서 2, 8을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 집합 A에서 2, 8을 제외한 집합 $\{4, 6, 10\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^{5-2}=2^3=8$
(i), (ii)에서 구하는 부분집합의 개수는
$32-8=24$

14 집합 A의 부분집합 중에서 1, 2는 반드시 원소로 갖고 3, 4, n은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 집합 A에서 1, 2, 3, 4, n을 제외한 집합의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^{n-5}=16=2^4$
따라서 $n-5=4$이므로
$n=9$

15 $A\subset X\subset B$에서
$\{-1, 0, 1\}\subset X\subset\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
따라서 구하는 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 -1, 0, 1을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로
$2^{7-3}=2^4=16$

16 집합 A의 원소 x와 집합 B의 원소 y에 대하여 $x+y$의 값은 다음 표와 같다.

y \ x	1	2	3	4	a
1	2	3	4	5	$a+1$
3	4	5	6	7	$a+3$
5	6	7	8	9	$a+5$

즉, 집합 X의 원소는
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $a+1$, $a+3$, $a+5$
이때 $n(X)=10$이려면 자연수 a에 대하여
$a+1\le 9$, $a+3>9$
$\therefore 6<a\le 8$
따라서 자연수 a는 7, 8이므로 구하는 최댓값은 8이다.

17 집합 A는 자연수를 원소로 가지므로
$1\in A$이면 $(8-1)\in A$ $\therefore 7\in A$
$2\in A$이면 $(8-2)\in A$ $\therefore 6\in A$
$3\in A$이면 $(8-3)\in A$ $\therefore 5\in A$
$4\in A$이면 $(8-4)\in A$ $\therefore 4\in A$
x가 8 이상의 자연수이면 $8-x\le 0$이므로 $(8-x)\notin A$
즉, 집합 A의 원소가 될 수 있는 것은
1, 7 또는 2, 6 또는 3, 5 또는 4
집합 A는 공집합이 아니므로 집합 A의 개수는
$2^4-1=15$

18 (i) 집합 X가 8을 원소로 갖는 경우
(가)를 만족시키려면 $\{4, 5, 6, 7, 9\}$의 부분집합 중에서 공집합을 제외하면 되므로 집합 A의 부분집합 X의 개수는
$2^5-1=31$
(ii) 집합 X가 8을 원소로 갖지 않는 경우
(나)를 만족시키려면 집합 X는 4, 6을 반드시 원소로 가져야 한다.
즉, 집합 A의 부분집합 중에서 4, 6은 반드시 원소로 갖고 8은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 집합 A에서 4, 6, 8을 제외한 집합 $\{5, 7, 9\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^{6-3}=2^3=8$
(i), (ii)에서 집합 X의 개수는 $31+8=39$

19 $\sqrt{25}=5$이므로
$A_{25}=\{1, 3, 5\}$
$A_n\subset A_{25}$이려면 $1\le\sqrt{n}<7$이어야 하므로
$1\le n<49$
따라서 자연수 n의 최댓값은 48이다.

20 집합 $A=\{-1, 0, 1, 2\}$의 부분집합 중에서
-1을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는
$2^{4-1}=2^3=8$
0을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는
$2^{4-1}=2^3=8$
1을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는
$2^{4-1}=2^3=8$
2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는
$2^{4-1}=2^3=8$
따라서 부분집합 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{16}에는 원소 -1, 0, 1, 2가 각각 8번씩 들어간다.
따라서 구하는 값은
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{16}=8(-1+0+1+2)=16$

Ⅱ-1 02 집합의 연산

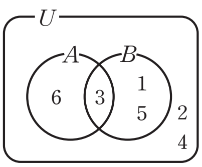
집합의 연산

개념 Check 120쪽

1 답 (1) $A\cup B=\{a, b, c\}$, $A\cap B=\{b\}$
(2) $A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}$, $A\cap B=\{1, 2\}$
(3) $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A\cap B=\{3, 4\}$
(4) $A\cup B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$,
$A\cap B=\{1, 2, 3, 6\}$

2 답 (1) 서로소가 아니다. (2) 서로소이다.
(1) $A\cap B=\{x|2<x<3\}$이므로 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.
(2) $x^2+5x+4=0$에서 $(x+4)(x+1)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=-1$ $\quad\therefore A=\{-4, -1\}$
$x^2-4=0$에서 $(x+2)(x-2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$ $\quad\therefore B=\{-2, 2\}$
따라서 $A\cap B=\varnothing$이므로 두 집합 A, B는 서로소이다.

3 답 (1) $\{1, 2, 4, 5\}$ (2) $\{2, 4, 6\}$
(3) $\{6\}$ (4) $\{1, 5\}$
(5) $\{1, 2, 4, 5, 6\}$ (6) $\{2, 4\}$
전체집합 U와 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(1) $A^C=\{1, 2, 4, 5\}$
(2) $B^C=\{2, 4, 6\}$
(3) $A-B=\{6\}$
(4) $B-A=\{1, 5\}$
(5) $(A\cap B)^C=\{1, 2, 4, 5, 6\}$
(6) $(A\cup B)^C=\{2, 4\}$

4 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ
ㄹ. $(A^C)^C\cap U=A\cap U=A$
ㅂ. $A^C\cap B=B-A$

문제 121~125쪽

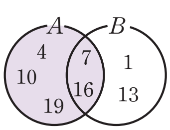
01-1 답 (1) $\{1, 3, 5\}$ (2) $\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 20\}$
$A=\{1, 3, 5, 15\}$, $B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$,
$C=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$
(1) $B\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 18, 20\}$이므로
$A\cap(B\cup C)=\{1, 3, 5\}$
(2) $A\cap B=\{1, 3\}$이므로
$(A\cap B)\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 20\}$

01-2 답 9
$A^C=\{1, 3, 5\}$이므로 A^C의 모든 원소의 합은
$1+3+5=9$

01-3 답 1
$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{3, 6, 9\}$
$A^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로
$B-A^C=\{6\}$ $\quad\therefore n(B-A^C)=1$

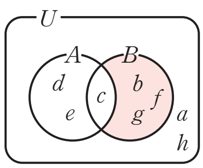
다른 풀이
$B-A^C=B\cap(A^C)^C=B\cap A$이므로
$B-A^C=\{6\}$ $\quad\therefore n(B-A^C)=1$

02-1 답 $\{4, 7, 10, 16, 19\}$
벤 다이어그램을 그려서



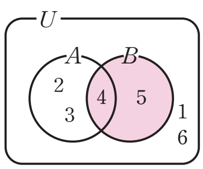
$A\cap B=\{7, 16\}$,
$B=\{1, 7, 13, 16\}$,
$A\cup B=\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$
의 순서로 원소를 써넣으면 위의 그림과 같다.
$\therefore A=\{4, 7, 10, 16, 19\}$

02-2 답 $\{b, f, g\}$
벤 다이어그램을 그려서



$A\cap B=\{c\}$,
$A\cap B^C=A-B=\{d, e\}$,
$(A\cup B)^C=\{a, h\}$,
$U=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
의 순서로 원소를 써넣으면 위의 그림과 같다.
$\therefore B-A=\{b, f, g\}$

02-3 답 9
벤 다이어그램을 그려서



$A-B=\{2, 3\}$,
$B-A=\{5\}$,
$(A\cap B)^C=\{1, 2, 3, 5, 6\}$,
$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
의 순서로 원소를 써넣으면 위의 그림과 같다.
$\therefore B=\{4, 5\}$
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은
$4+5=9$

03-1 답 $\boldsymbol{a=4,\ b=2}$

$A=\{-3,\ 0,\ 2,\ 2a-b\}$, $A-B=\{2\}$에서

$A\cap B=\{-3,\ 0,\ 2a-b\}$

즉, $0\in B$, $2a-b\in B$이므로

$a-2b=0$ …… ㉠

$2a-b=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=2$

03-2 답 $\boldsymbol{\{1\}}$

$A\cap B=\{2,\ 6\}$에서 $6\in A$이므로

$a^2-a=6$, $a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0$ $\quad\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

(i) $a=-2$일 때,

$A=\{2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 11\}$

이때 $A\cap B=\{2\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=3$일 때,

$A=\{2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 6\}$

이때 $A\cap B=\{2,\ 6\}$이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=3$이고 $A=\{2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 6\}$이므로

$B-A=\{1\}$

03-3 답 **7**

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6\}$에서 $6\in A$ 또는 $6\in B$이므로

$a=6$ 또는 $a+1=6$

$\therefore a=5$ 또는 $a=6$

(i) $a=5$일 때,

$A=\{1,\ 2,\ 5\}$, $B=\{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$

이때 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6\}$이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $a=6$일 때,

$A=\{1,\ 2,\ 6\}$, $B=\{2,\ 4,\ 5,\ 7\}$

이때 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

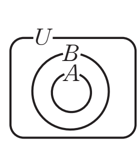
(i), (ii)에서 $a=5$이고 $A=\{1,\ 2,\ 5\}$, $B=\{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$이므로

$A\cap B=\{2,\ 5\}$

따라서 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은

$2+5=7$

04-1 답 ⑤



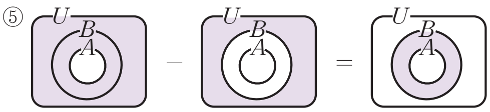
① $B^C\subset A^C$이면 $A\subset B$

② $A\subset B$이면 $A\cup B=B$이므로

$(A\cup B)-B=B-B=\varnothing$

③, ④ $A\subset B$이면

$A^C\cup B=U$, $A\cap B=A$

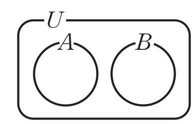
⑤ 

A^C $\qquad$ B^C $\qquad$ $A^C-B^C=B-A$

$\therefore A^C-B^C\neq\varnothing$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

04-2 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅂ



두 집합 A, B가 서로소이므로

$A\cap B=\varnothing$

ㄱ. $A-B=A$

ㄴ. $B-A=B$

ㄷ. $(A\cap B)^C=\varnothing^C=U$

ㄹ. $A\cup B\neq A$

ㅁ. $A\cup B^C=B^C$

ㅂ. $B-A=B$이므로 A와 $B-A$는 서로소이다.

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅂ이다.

05-1 답 **4**

$A\cup B=U$에서

$\{1,\ 5\}\cup B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

따라서 집합 B의 개수는 전체집합 U의 부분집합 중에서 0, 2, 3, 4를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{6-4}=2^2=4$

05-2 답 **8**

$A-X=A$에서

$A\cap X=\varnothing$ $\quad\therefore \{2,\ 4,\ 6\}\cap X=\varnothing$

$B-X=\varnothing$에서

$B\subset X$ $\quad\therefore \{1,\ 8\}\subset X$

따라서 집합 X의 개수는 전체집합 U의 부분집합 중에서 2, 4, 6은 원소로 갖지 않고 1, 8은 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{8-3-2}=2^3=8$

05-3 답 **8**

$A\cup X=X$에서

$A\subset X$ $\quad\therefore \{1,\ 2,\ 3\}\subset X$

$(B-A)\cap X=\{5,\ 6\}$에서 $\{4,\ 5,\ 6\}\cap X=\{5,\ 6\}$이므로

$4\notin X$, $5\in X$, $6\in X$

따라서 집합 X의 개수는 전체집합 U의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 5, 6은 반드시 원소로 갖고 4는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{9-5-1}=2^3=8$

2 집합의 연산 법칙

개념 Check 126쪽

1 답 (1) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
(2) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
(3) $\{6\}$
(4) $\{6\}$

문제 127~130쪽

06-1 답 (1) A (2) $A\cap B$

(1) $(A\cup B)\cap(B-A)^C$
$=(A\cup B)\cap(B\cap A^C)^C$ ◀ 차집합의 성질
$=(A\cup B)\cap(B^C\cup A)$ ◀ 드모르간 법칙
$=(A\cup B)\cap(A\cup B^C)$ ◀ 교환법칙
$=A\cup(B\cap B^C)$ ◀ 분배법칙
$=A\cup\varnothing$ ◀ 여집합의 성질
$=A$ ◀ 합집합의 성질

(2) $(A-B)^C\cap A$
$=(A\cap B^C)^C\cap A$ ◀ 차집합의 성질
$=(A^C\cup B)\cap A$ ◀ 드모르간 법칙
$=(A^C\cap A)\cup(B\cap A)$ ◀ 분배법칙
$=\varnothing\cup(B\cap A)$ ◀ 여집합의 성질
$=A\cap B$ ◀ 합집합의 성질, 교환법칙

06-2 답 ①

$(A-B^C)\cap(B^C-C)^C$
$=(A\cap B)\cap(B^C\cap C^C)^C$ ◀ 차집합의 성질
$=(A\cap B)\cap(B\cup C)$ ◀ 드모르간 법칙
$=A\cap B$ ($\because$ $(A\cap B)\subset(B\cup C)$)
따라서 주어진 집합과 항상 같은 집합은 ①이다.

06-3 답 풀이 참조

$B\subset(A\cup B)$이므로
$B\cap(A\cup B)=B$ ◀ 합집합과 교집합의 성질
$A-(A\cap C^C)$을 간단히 하면
$A-(A\cap C^C)$
$=A\cap(A\cap C^C)^C$ ◀ 차집합의 성질
$=A\cap(A^C\cup C)$ ◀ 드모르간 법칙
$=(A\cap A^C)\cup(A\cap C)$ ◀ 분배법칙
$=\varnothing\cup(A\cap C)$ ◀ 여집합의 성질
$=A\cap C$ ◀ 합집합의 성질

$\therefore$ $\{B\cap(A\cup B)\}\cap\{A-(A\cap C^C)\}$
$=B\cap(A\cap C)$
$=(B\cap A)\cap C$ ◀ 결합법칙
$=(A\cap B)\cap C$ ◀ 교환법칙
$=A\cap B\cap C$

07-1 답 ⑤

$(A\cup B)-(A^C\cap B)$
$=(A\cup B)\cap(A^C\cap B)^C$ ◀ 차집합의 성질
$=(A\cup B)\cap(A\cup B^C)$ ◀ 드모르간 법칙
$=A\cup(B\cap B^C)$ ◀ 분배법칙
$=A\cup\varnothing$ ◀ 여집합의 성질
$=A$ ◀ 합집합의 성질
즉, $A=A\cup B$이므로 $B\subset A$
③ $B\subset A$이면 $A\cap B=B$
④ $B\subset A$이면 $A=B$인 경우를 제외하고 $A-B\neq\varnothing$
따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

07-2 답 ④

$(A-B)^C-B$
$=(A\cap B^C)^C\cap B^C$ ◀ 차집합의 성질
$=(A^C\cup B)\cap B^C$ ◀ 드모르간 법칙
$=(A^C\cap B^C)\cup(B\cap B^C)$ ◀ 분배법칙
$=(A^C\cap B^C)\cup\varnothing$ ◀ 여집합의 성질
$=A^C\cap B^C$ ◀ 합집합의 성질
$=(A\cup B)^C$ ◀ 드모르간 법칙
즉, $(A\cup B)^C=\varnothing$이므로 $A\cup B=U$ ◀ 여집합의 성질
따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

08-1 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $A\diamond B=(A\cup B)-(A\cap B)$
$=(B\cup A)-(B\cap A)$ ◀ 교환법칙
$=B\diamond A$

ㄴ. $A^C\diamond B^C=(A^C\cup B^C)-(A^C\cap B^C)$
$=(A^C\cup B^C)\cap(A^C\cap B^C)^C$ ◀ 차집합의 성질
$=(A^C\cup B^C)\cap(A\cup B)$ ◀ 드모르간 법칙
$=(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)$ ◀ 교환법칙
$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$ ◀ 드모르간 법칙
$=(A\cup B)-(A\cap B)$ ◀ 차집합의 성질
$=A\diamond B$

ㄷ. $A\diamond U=(A\cup U)-(A\cap U)$
$=U-A=A^C$
$\therefore$ $A\diamond U\neq\varnothing$
따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

08-**2** 답 $A\cup B$

$A◎B=(A\cup B)^C\cup B$

$=(A^C\cap B^C)\cup B$ ◀ 드모르간 법칙

$=(A^C\cup B)\cap(B^C\cup B)$ ◀ 분배법칙

$=(A^C\cup B)\cap U$ ◀ 여집합의 성질

$=A^C\cup B$

$\therefore (A◎B)◎B=(A^C\cup B)◎B$

$=(A^C\cup B)^C\cup B$

$=(A\cap B^C)\cup B$ ◀ 드모르간 법칙

$=(A\cup B)\cap(B^C\cup B)$ ◀ 분배법칙

$=(A\cup B)\cap U$ ◀ 여집합의 성질

$=A\cup B$

09-**1** 답 6

$(A_2\cap A_3)\cup A_{12}=A_6\cup A_{12}=A_6$

따라서 $A_n\subset A_6$에서 n은 6의 배수이므로 자연수 n의 최솟값은 6이다.

09-**2** 답 36

$(A_{18}\cup A_{36})\cap(A_{24}\cup A_{36})=(A_{18}\cap A_{24})\cup A_{36}$

$=A_{72}\cup A_{36}=A_{36}$

$\therefore n=36$

09-**3** 답 12

$(A_2\cup A_3)\cap A_8=(A_2\cap A_8)\cup(A_3\cap A_8)$

$=A_8\cup A_{24}=A_8$

따라서 전체집합 U의 원소 중 8의 배수는 12개이므로 구하는 집합의 원소의 개수는 12이다.

3 유한집합의 원소의 개수

개념 Check 131쪽

1 답 (1) 45 (2) 8

(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=20+35-10=45$

(2) $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=17+23-32=8$

2 답 (1) 17 (2) 15 (3) 10 (4) 12

(1) $n(A^C)=n(U)-n(A)=30-13=17$

(2) $n(B^C)=n(U)-n(B)=30-15=15$

(3) $n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)=25-15=10$

(4) $n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)=25-13=12$

문제 132~134쪽

10-**1** 답 17

$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$이므로

$n(A\cup B)=n(B-A)+n(A)=11+42=53$

$\therefore n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

$=70-53=17$

10-**2** 답 43

$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로

$n((A\cap B)^C)=32$

$n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)=n(U)-n((A\cap B)^C)$

$=50-32=18$

$\therefore n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)$

$=25+18=43$

10-**3** 답 19

$A\cap C=\varnothing$에서

$A\cap B\cap C=(A\cap C)\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing$이므로

$n(A\cap C)=0$, $n(A\cap B\cap C)=0$

$n(A\cap B)$, $n(B\cap C)$를 구하면

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=11+10-16=5$

$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)$

$=10+8-13=5$

$\therefore n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$

$-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

$=11+10+8-5-5-0+0=19$

11-**1** 답 24

반 전체 학생의 집합을 U, 여행지 A에 가 본 학생의 집합을 A, 여행지 B에 가 본 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=50$, $n(A)=28$, $n(A\cap B)=11$,

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=9$

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$

$=50-9=41$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)-n(A)$

$=41+11-28=24$

따라서 구하는 학생 수는 24이다.

11-2 답 **23**

반 전체 학생의 집합을 U, 컴퓨터를 신청한 학생의 집합을 A, 논술을 신청한 학생의 집합을 B라 하면 $U=A\cup B$이므로

$n(A\cup B)=35$, $n(A)=21$, $n(B)=26$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$$\begin{aligned} n(A\cap B)&=n(A)+n(B)-n(A\cup B)\\ &=21+26-35\\ &=12 \end{aligned}$$

컴퓨터와 논술 중에서 한 가지만 신청한 학생의 집합은

$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

$\therefore$ $n(A\cup B)-n(A\cap B)=35-12=23$

따라서 구하는 학생 수는 23이다.

12-1 답 **24**

$n(A\cap B)$가 최대이려면 $n(A\cup B)$가 최소이어야 한다.

이때 $n(A)>n(B)$이므로 $B\subset A$이어야 한다.

따라서 $n(A\cap B)$의 최댓값은

$M=n(A\cap B)=n(B)=19$

$n(A\cap B)$가 최소이려면 $n(A\cup B)$가 최대이어야 한다.

즉, $A\cup B=U$이어야 하므로 $n(A\cap B)$의 최솟값은

$$\begin{aligned} m&=n(A\cap B)\\ &=n(A)+n(B)-n(A\cup B)\\ &=n(A)+n(B)-n(U)\\ &=26+19-40=5 \end{aligned}$$

$\therefore$ $M+m=19+5=24$

12-2 답 **17**

반 전체 학생의 집합을 U, A 사이트에 가입한 학생의 집합을 A, B 사이트에 가입한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=50$, $n(A)=33$, $n(B)=26$

$n(A\cap B)$가 최대이려면 $n(A\cup B)$가 최소이어야 한다.

이때 $n(A)>n(B)$이므로 $B\subset A$이어야 한다.

따라서 $n(A\cap B)$의 최댓값은

$n(A\cap B)=n(B)=26$

$n(A\cap B)$가 최소이려면 $n(A\cup B)$가 최대이어야 한다.

즉, $A\cup B=U$이어야 하므로 $n(A\cap B)$의 최솟값은

$$\begin{aligned} n(A\cap B)&=n(A)+n(B)-n(A\cup B)\\ &=n(A)+n(B)-n(U)\\ &=33+26-50\\ &=9 \end{aligned}$$

따라서 두 사이트에 모두 가입한 학생 수의 최댓값은 26, 최솟값은 9이므로 그 차는

$26-9=17$

연습문제

135~138쪽

1 ③	**2** ④	**3** ⑤	**4** ①	**5** 8
6 ⑤	**7** ④	**8** ⑤	**9** 8	**10** 8
11 ④	**12** ②	**13** ②	**14** 16	**15** ②
16 7	**17** 2	**18** 36	**19** ③	**20** 432
21 16	**22** 96	**23** ④	**24** 16	**25** ③

1 $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$,

$B=\{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \cdots\}$이므로

$A\cap B=\{2, 8, 14, 20\}$

$C=\{1, 2, 4, 8\}$이므로

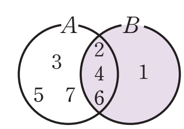
$(A\cap B)\cup C=\{1, 2, 4, 8, 14, 20\}$

따라서 집합 $(A\cap B)\cup C$의 원소가 아닌 것은 ③이다.

2 ③ $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 $B-A=B-(A\cap B)=\{2, 6\}$

④ $B^C=\{4, 5, 7, 8\}$이므로 $A-B^C=\{1, 3\}$

3 벤 다이어그램을 그려서



$A\cap B=\{2, 4, 6\}$,

$A=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$A\cup B=U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

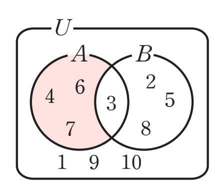
의 순서로 원소를 써넣으면 위의 그림과 같다.

$\therefore$ $B=\{1, 2, 4, 6\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 곱은

$1\times2\times4\times6=48$

4 벤 다이어그램을 그려서



$A\cap B=\{3\}$,

$A^C\cap B=B-A=\{2, 5, 8\}$,

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{1, 9, 10\}$,

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

의 순서로 원소를 써넣으면 위의 그림과 같다.

$\therefore$ $A-B=\{4, 6, 7\}$

따라서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은

$4+6+7=17$

5 $A\cup B=\{6, 8, 10\}$에서 $10\in B$이므로

$a=10$ 또는 $a+2=10$

$\therefore$ $a=8$ 또는 $a=10$

(i) $a=8$일 때, $B=\{8, 10\}$

이때 $A\cup B=\{6, 8, 10\}$이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $a=10$일 때, $B=\{10, 12\}$

이때 $A\cup B=\{6, 8, 10, 12\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=8$

6 $A\cap B=\{2\}$에서 $2\in B$이므로

$a^2-2a-1=2,\ a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=3$

(i) $a=-1$일 때,

$A=\{2,\ 3,\ 5\},\ B=\{2,\ 3\}$

이때 $A\cap B=\{2,\ 3\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=3$일 때,

$A=\{1,\ 2,\ 15\},\ B=\{2,\ 3\}$

이때 $A\cap B=\{2\}$이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=3$이고 $A=\{1,\ 2,\ 15\}$, $B=\{2,\ 3\}$이므로

$$\begin{aligned}(A-B)\cup(B-A)&=\{1,\ 15\}\cup\{3\}\\&=\{1,\ 3,\ 15\}\end{aligned}$$

따라서 집합 $(A-B)\cup(B-A)$의 모든 원소의 합은

$1+3+15=19$

7 ② $(A\cap B)-(B^C)^C=(A\cap B)-B=\varnothing$

③ $A\cap(A\cup A^C)=A\cap U=A$

④ $B\cup(B\cap B^C)=B\cup\varnothing=B$

⑤ $\varnothing^C\cap(A-B)=U\cap(A-B)=A-B$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

8 $A\cap B=A$에서 $A\subset B$

② $A\subset B$이면 $B^C\subset A^C$이므로

$A^C\cap B^C=B^C$

⑤ $A^C\cap B=B-A$이므로 $A=B$인 경우를 제외하고

$A^C\cap B\neq\varnothing$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

9 $\{1,\ 2,\ 3\}\cap A=\varnothing$이면 집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$과 집합 A는 서로소이다.

따라서 집합 A의 개수는 전체집합 U의 부분집합 중에서 1, 2, 3을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{6-3}=2^3=8$

10 $X\cup A=X$에서 $A\subset X$ …… ㉠

$X\cap B^C=X$에서 $X\subset B^C$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $A\subset X\subset B^C$

$\therefore\ \{1,\ 2\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8\}$

따라서 집합 X의 개수는 집합 $\{1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{5-2}=2^3=8$

11 ① $$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(A^C\cap B^C)&=(A\cup B)\cap(A\cup B)^C\\&=(A\cup B)-(A\cup B)\\&=\varnothing\end{aligned}$$

② $$\begin{aligned}A\cap(A\cap B)^C&=A\cap(A^C\cup B^C)\\&=(A\cap A^C)\cup(A\cap B^C)\\&=\varnothing\cup(A\cap B^C)\\&=A\cap B^C\\&=A-B\end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned}(A\cup B)-C&=(A\cup B)\cap C^C\\&=(A\cap C^C)\cup(B\cap C^C)\\&=(A-C)\cup(B-C)\end{aligned}$$

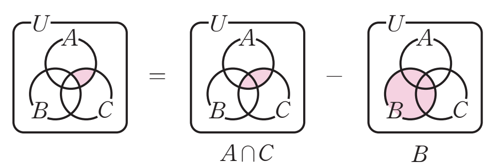
④ $(A\cap B)-(A\cap C)$

$$\begin{aligned}&=(A\cap B)\cap(A\cap C)^C\\&=(A\cap B)\cap(A^C\cup C^C)\\&=\{(A\cap B)\cap A^C\}\cup\{(A\cap B)\cap C^C\}\\&=\varnothing\cup\{(A\cap B)\cap C^C\}\\&=A\cap(B\cap C^C)\\&=A\cap(B-C)\\&\neq A-(B\cap C)\end{aligned}$$

⑤ $$\begin{aligned}A-(B-C)&=A\cap(B\cap C^C)^C\\&=A\cap(B^C\cup C)\\&=(A\cap B^C)\cup(A\cap C)\\&=(A-B)\cup(A\cap C)\end{aligned}$$

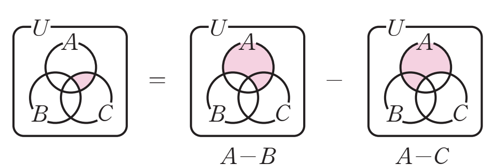
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

12 ㄱ, ㄷ. 색칠한 부분을 나타내는 집합은 다음 그림과 같이 집합 $A\cap C$에서 집합 B의 원소를 제외한 집합이므로



$$\begin{aligned}(A\cap C)-B&=(A\cap C)\cap B^C\\&=(A\cap B^C)\cap C\end{aligned}$$

ㅂ. 색칠한 부분을 나타내는 집합은 다음 그림과 같이 집합 $A-B$에서 집합 $A-C$의 원소를 제외한 집합이므로



$(A-B)-(A-C)$

따라서 보기에서 색칠한 부분을 나타내는 집합인 것은 ㄱ, ㄷ, ㅂ이다.

13 $(A-B)^C\cap B=(A\cap B^C)^C\cap B$
$=(A^C\cup B)\cap B$
$=(A^C\cap B)\cup(B\cap B)$
$=(B-A)\cup B$
$=B$

$\therefore\ B=\{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$

$A^C-B^C=A^C\cap(B^C)^C=A^C\cap B=B-A$

$\therefore\ B-A=\{1,\ 5\}$

따라서 집합 A의 개수는 전체집합 U의 부분집합 중에서 3, 6, 7은 반드시 원소로 갖고 1, 5는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{7-3-2}=2^2=4$

14 $A\cup(A^C\cap B)=(A\cup A^C)\cap(A\cup B)$
$=U\cap(A\cup B)$
$=A\cup B$

$B\cup(B^C\cap A^C)^C=B\cup(B\cup A)$
$=A\cup B$

$\therefore\ \{A\cup(A^C\cap B)\}\cap\{B\cup(B^C\cap A^C)^C\}$
$=(A\cup B)\cap(A\cup B)$
$=A\cup B$

즉, $A\cup B=A$이므로 $B\subset A$

따라서 집합 B는 집합 A의 부분집합이므로 그 개수는

$2^4=16$

15 $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)=n(B)-n(B-A)$
$=25-6=19$

$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=40+25-19=46$

다른 풀이

$n(A\cup B)=n(A)+n(B-A)=40+6=46$

16 $A\cap B^C=A$에서 $A-B=A$이므로

$A\cap B=\varnothing$ $\quad\therefore\ n(A\cap B)=0$

$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)=9+14=23$

$\therefore\ n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A\cup B)$
$=30-23=7$

17 조사한 학생 전체의 집합을 U, A 영화를 관람한 학생의 집합을 A, B 영화를 관람한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=30,\ n(A)=16,\ n(B)=22,\ n((A\cup B)^C)=6$

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$
$=30-6=24$

A 영화는 보았지만 B 영화는 보지 않은 학생의 집합은 $A-B$이므로

$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)=24-22=2$

따라서 구하는 학생 수는 2이다.

18 $B-A=\{3,\ 11\}$이고

$(A\cup B)\cap B^C=(A\cup B)-B=A-B=\{19\}$이므로

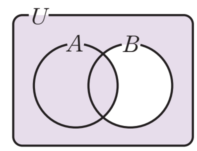
집합 B는 전체집합 U의 부분집합 중에서 3, 11은 반드시 원소로 갖고 19는 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 원소의 개수가 최대인 집합 B는

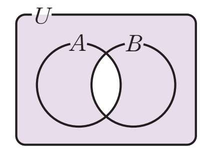
$B=\{3,\ 7,\ 11,\ 15\}$이므로 모든 원소의 합은

$3+7+11+15=36$

19 두 집합 $A\cup B^C$, $(A\cap B)^C$을 각각 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



$A\cup B^C$



$(A\cap B)^C$

ㄱ. 위의 벤 다이어그램에서 $(A\cup B^C)\cup(A\cap B)^C=U$이므로

$U=\{2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 12\}\cup\{1,\ 3,\ 5,\ 9\}$
$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 12\}$

ㄴ. 위의 벤 다이어그램에서

$(A\cup B^C)-(A\cap B)^C=A\cap B$이므로

$A\cap B=\{2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 12\}-\{1,\ 3,\ 5,\ 9\}$
$=\{2,\ 4,\ 8,\ 12\}$

ㄷ. $A^C\cap B=(A\cup B^C)^C=U-(A\cup B^C)$
$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 12\}-\{2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 12\}$
$=\{1,\ 3,\ 9\}$

따라서 집합 $A^C\cap B$의 원소의 개수는 3이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

20 (가)에서 $A\cap B=\{4,\ 6\}$이므로 $A=\{4,\ 6,\ a,\ b\}$라 하자.

$B=\{x+k\,|\,x\in A\}$이므로

$B=\{4+k,\ 6+k,\ a+k,\ b+k\}$

(나)에서 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합이 40이고

(집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합)
=(집합 A의 모든 원소의 합)
+(집합 B의 모든 원소의 합)
−(집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합)

이므로

$40=21+(21+4k)-10$

$4k=8$ $\quad\therefore\ k=2$

이때 집합 $B=\{6, 8, a+2, b+2\}$이므로

$a+2=4$ 또는 $b+2=4$

$\therefore a=2$ 또는 $b=2$

(i) $a=2$일 때,

$4+6+2+b=21$에서

$b=9$

(ii) $b=2$일 때,

$4+6+a+2=21$에서

$a=9$

(i), (ii)에서 $A=\{2, 4, 6, 9\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 곱은

$2\times4\times6\times9=432$

21 전체집합 $U=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$에 대하여 $\{2, 3\}\cup X=\{-2, 0, 2\}\cup X$를 만족시키는 집합 X는 $A\cap B=\{2\}$의 원소 2는 갖거나 갖지 않아도 상관없지만 $-2, 0, 3$은 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 X의 개수는 전체집합 U의 부분집합 중에서 $-2, 0, 3$을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{7-3}=2^4=16$

22 ㈎에서 $n(A\cap B)=2$이므로 집합 B는 집합 A의 원소 중에서 2개만을 원소로 갖는다.

집합 A의 원소 4개 중에서 집합 B에 속하는 원소 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

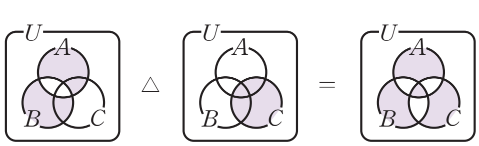
㈎, ㈏에서 집합 B는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 부분집합 중에서 집합 A의 원소 2개는 반드시 원소로 갖고 나머지 2개는 원소로 갖지 않는 집합이므로 그 개수는

$2^{8-2-2}=2^4=16$

따라서 구하는 집합 B의 개수는

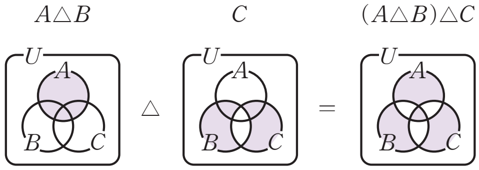
$6\times16=96$

23 ①



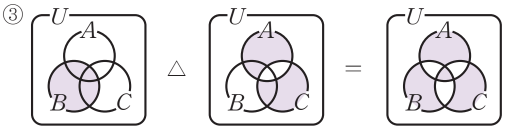
$A\triangle B$ $\quad$ C $\quad$ $(A\triangle B)\triangle C$

②



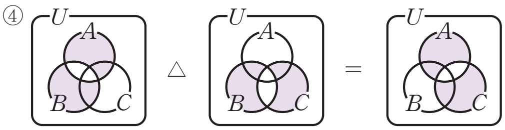
A $\quad$ $B\triangle C$ $\quad$ $A\triangle(B\triangle C)$

③



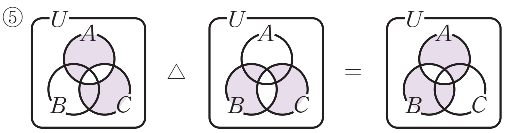
B $\quad$ $A\triangle C$ $\quad$ $B\triangle(A\triangle C)$

④



$A\triangle B$ $\quad$ $B\triangle C$ $\quad$ $(A\triangle B)\triangle(B\triangle C)$

⑤



$A\triangle C$ $\quad$ $B\triangle C$ $\quad$ $(A\triangle C)\triangle(B\triangle C)$

따라서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ④이다.

24 $A_4\cap A_6$은 4와 6의 공배수, 즉 12의 배수의 집합이므로

$(A_4\cap A_6)\cup A_{36}=A_{12}\cup A_{36}=A_{12}$

$\therefore n=12$

$(A_8\cup A_{12})\subset A_m$에서 $A_8\subset A_m$, $A_{12}\subset A_m$이므로 8은 m의 배수이고 12도 m의 배수이다.

즉, m의 최댓값은 8과 12의 최대공약수인 4이다.

따라서 구하는 값은

$12+4=16$

25 조사한 손님 전체의 집합을 U, A 작품을 읽은 사람의 집합을 A, B 작품을 읽은 사람의 집합을 B라 하면

$n(U)=100$, $n(A)=54$, $n(B)=67$

B 작품만 읽은 사람의 집합은 $B-A$이므로

$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$

$\qquad\qquad=n(A\cup B)-54 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$n(B-A)$가 최대이려면 $n(A\cup B)$도 최대이어야 한다.

즉, $A\cup B=U$이어야 하므로 $n(B-A)$의 최댓값은 ㉠에서

$M=n(B-A)$

$\quad=n(A\cup B)-54$

$\quad=n(U)-54$

$\quad=100-54=46$

$n(B-A)$가 최소이려면 $n(A\cup B)$도 최소이어야 한다.

이때 $n(A)<n(B)$이므로 $A\subset B$이어야 한다.

$n(B-A)$의 최솟값은 ㉠에서

$m=n(B-A)$

$\quad=n(A\cup B)-54$

$\quad=n(B)-54$

$\quad=67-54=13$

$\therefore M-m=46-13=33$

Ⅱ-2 01 명제와 조건

명제와 조건

문제 141~143쪽

01-1 답 ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㅂ

ㄱ. '아름답다.'는 참, 거짓의 기준이 분명하지 않으므로 명제가 아니다.

ㄴ. 3은 소수이므로 참인 명제이다.

ㄷ. 8의 양의 약수는 1, 2, 4, 8의 4개이므로 거짓인 명제이다.

ㄹ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

ㅁ, ㅂ. 거짓인 명제이다.

따라서 보기에서 명제인 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㅂ이다.

01-2 답 (1) **참인 명제** (2) **참인 명제** (3) **거짓인 명제** (4) **명제가 아니다.**

(1) 정삼각형은 이등변삼각형이므로 참인 명제이다.

(2) 주어진 식을 정리하면 $0>-5$이므로 참인 명제이다.

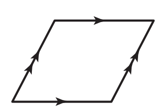
(3) 6은 3의 배수이지만 9의 배수가 아니므로 거짓인 명제이다.

(4) $2(x-2)=x(x-3)$에서 $x^2-5x+4=0$

x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

01-3 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 평행사변형이지만 직사각형이 아닐 수 있으므로 거짓인 명제이다.



ㄴ. 5의 양의 약수인 1, 5는 10의 양의 약수이므로 참인 명제이다.

ㄷ. (홀수)+(홀수)=(짝수)이므로 참인 명제이다.

ㄹ. $3+4=7$이므로 길이가 3, 4, 7인 세 선분으로 삼각형을 만들 수 없다.

따라서 거짓인 명제이다.

따라서 보기에서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

02-1 답 (1) **6은 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.**

(2) $\boldsymbol{x<-3}$ **또는** $\boldsymbol{x\geq 5}$

02-2 답 ⑤

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$에서

$a-b=0$이고 $b-c=0$이고 $c-a=0$ $\quad\therefore a=b=c$

따라서 $a=b=c$의 부정은

$a\neq b$ 또는 $b\neq c$ 또는 $c\neq a$

이와 같은 표현은

⑤ a, b, c 중에서 서로 다른 것이 적어도 하나 있다.

02-3 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

주어진 명제의 부정을 구하고 참, 거짓을 판별하면

ㄱ. '$2\geq\sqrt{3}$'이므로 참이다.

ㄴ. '$x+2\neq x+3$'이고 이 식을 정리하면 $2\neq 3$이므로 참이다.

ㄷ. '10은 소수가 아니다.'이므로 참이다.

ㄹ. '4는 2의 배수가 아니다.'이므로 거짓이다.

따라서 보기에서 그 부정이 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

명제가 거짓이면 그 명제의 부정은 참이므로 거짓인 명제를 찾으면 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

03-1 답 (1) $\{\mathbf{1, 2, 4, 8}\}$ (2) $\{\mathbf{3, 6}\}$ (3) $\{\mathbf{3, 4, 5, 6, 7, 8}\}$

전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 2, 3, 6\}$, $Q=\{1, 2, 4, 8\}$

(1) '$\sim(\sim q)$'의 진리집합은

$(Q^C)^C=Q=\{1, 2, 4, 8\}$

(2) 'p 그리고 $\sim q$'의 진리집합은

$P\cap Q^C=P-Q=\{3, 6\}$

(3) '$\sim p$ 또는 $\sim q$'의 진리집합은

$P^C\cup Q^C=(P\cap Q)^C=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

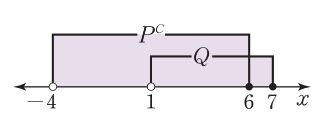
03-2 답 $\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{-4<x\leq 7}\}$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x\leq -4$ 또는 $x>6\}$, $Q=\{x|1<x\leq 7\}$

이때 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은 $P^C\cup Q$이고

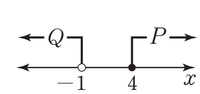
$P^C=\{x|-4<x\leq 6\}$이므로 다음 그림에서



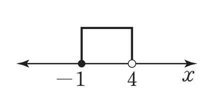
$P^C\cup Q=\{x|-4<x\leq 7\}$

03-3 답 ⑤

$P=\{x|x\geq 4\}$, $Q=\{x|x<-1\}$이므로 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



또 조건 '$-1\leq x<4$'의 진리집합 $\{x|-1\leq x<4\}$를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 집합은 $P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$

2 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓

개념 Check 144쪽

1 답 (1) **가정: 4의 배수이다., 결론: 8의 배수이다.**
(2) **가정: $x=2$이다., 결론: $2x-4=0$이다.**

문제 145~147쪽

04-1 답 (1) **참** (2) **거짓** (3) **거짓**

(1) $x^2>1$에서 $x^2-1>0$
$(x+1)(x-1)>0$ $\quad\therefore x<-1$ 또는 $x>1$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x\,|\,x>1\}$, $Q=\{x\,|\,x<-1$ 또는 $x>1\}$
따라서 $P\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

(2) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{(x, y)\,|\,x=0$ 또는 $y=0\}$,
$Q=\{(x, y)\,|\,x=0$이고 $y=0\}$
따라서 $P\not\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

(3) [반례] $x=3$, $y=2$, $z=-1$이면 $x>y$이지만
$xz<yz$이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.

04-2 답 ㄱ, ㄹ

ㄱ. p: x가 4의 양의 배수, q: x가 2의 양의 배수라 하고
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{4, 8, 12, \cdots\}$, $Q=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots\}$
따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄴ. [반례] $x=2$이면 x는 소수이지만 짝수이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.

ㄷ. [반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$이면 $x+y$와 xy는 정수이지만 x, y는 정수가 아니다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.

ㄹ. $x^2-1=0$에서 $x=\pm1$이고 $|\pm1|=1$이므로 주어진 명제는 참이다.

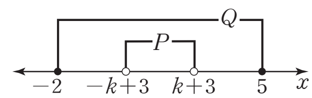
따라서 보기에서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

05-1 답 **4**

주어진 명제의 가정을 p, 결론을 q라 하면
p: $x=a$, q: $x^2-2x-8=0$
조건 q: $x^2-2x-8=0$에서 $(x+2)(x-4)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{a\}$, $Q=\{-2, 4\}$
이때 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로
$a=4$ ($\because a>0$)

05-2 답 **2**

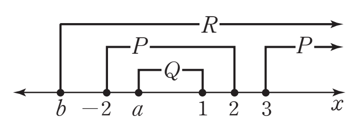
$|x-3|<k$에서 $-k<x-3<k$ ($\because k>0$)
$\therefore -k+3<x<k+3$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x\,|\,-k+3<x<k+3\}$
$Q=\{x\,|\,-2\le x\le 5\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.



위의 그림에서 $-k+3\ge-2$, $k+3\le5$이어야 하므로
$k\le2$
그런데 $k>0$이므로 $0<k\le2$
따라서 양수 k의 최댓값은 2이다.

05-3 답 **4**

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면
$P=\{x\,|\,-2\le x\le2$ 또는 $x\ge3\}$
$Q=\{x\,|\,a\le x\le1\}$
$R=\{x\,|\,x\ge b\}$
명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q\subset P$이어야 하고, 명제 $p \longrightarrow r$가 참이 되려면 $P\subset R$이어야 한다.



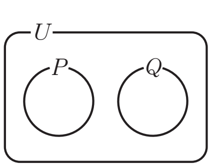
위의 그림에서 $-2\le a\le1$, $b\le-2$
따라서 a의 최솟값은 -2, b의 최댓값은 -2이므로 그 곱은
$-2\times(-2)=4$

06-1 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $P\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.
ㄷ. $Q\subset R^C$이므로 명제 $q \longrightarrow \sim r$는 참이다.
따라서 보기에서 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

06-2 답 ④

①, ② $P\not\subset Q$, $Q\not\subset P$이므로 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow p$는 거짓이다.



③, ⑤ $P^C\not\subset Q$, $Q^C\not\subset P$이므로 두 명제 $\sim p \longrightarrow q$, $\sim q \longrightarrow p$는 거짓이다.
④ $P\subset Q^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$는 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ④이다.

3 '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제

개념 Check 148쪽

1 답 (1) **거짓** (2) **참**

(1) p: $|x|>0$이라 하고 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{x|x\neq0$인 실수$\}$

따라서 $P\neq U$이므로 이 명제는 거짓이다.

(2) p: $|x|\leq0$이라 하고 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{0\}$

따라서 $P\neq\varnothing$이므로 이 명제는 참이다.

2 답 (1) **어떤 실수 x에 대하여 $x^2\neq16$이다.**

(2) **모든 실수 x에 대하여 $x^2\leq8$이다.**

문제 149쪽

07-**1** 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $x=-\frac{1}{2}$이면 $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}>0$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄴ. 가장 작은 자연수 1에 대하여 $1^2>0$이므로 모든 자연수 x에 대하여 $x^2>0$이다.

따라서 주어진 명제는 참이다.

ㄷ. 모든 자연수 x, y에 대하여 $x^2\geq1$, $y^2\geq1$이므로

$x^2+y^2\geq2$

즉, $x^2+y^2=1$인 자연수 x, y가 존재하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다.

따라서 보기에서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

07-**2** 답 (1) **어떤 실수 x에 대하여 $x^2+1<0$이다. (거짓)**

(2) **모든 실수 x에 대하여 $2x^2+1\neq0$이다. (참)**

(3) **어떤 실수 x에 대하여 $x^2+x+1\leq0$이다. (거짓)**

(1) 주어진 명제의 부정은

'어떤 실수 x에 대하여 $x^2+1<0$이다.'

이때 실수 x에 대하여 $x^2\geq0$이므로 $x^2+1>0$

따라서 주어진 명제의 부정은 거짓이다.

(2) 주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x에 대하여 $2x^2+1\neq0$이다.'

이때 실수 x에 대하여 $x^2\geq0$이므로 $2x^2+1\geq1$

즉, $2x^2+1\neq0$이므로 주어진 명제의 부정은 참이다.

(3) 주어진 명제의 부정은

'어떤 실수 x에 대하여 $x^2+x+1\leq0$이다.'

이때 실수 x에 대하여

$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

따라서 주어진 명제의 부정은 거짓이다.

연습문제 150~151쪽

1 ②	**2** ④	**3** 3	**4** ①	**5** 5
6 ③	**7** ⑤	**8** ④	**9** ⑤	**10** ④
11 ③	**12** ③	**13** 81		

1 ① 주어진 식을 정리하면 $-2=1$이므로 거짓인 명제이다.

② x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

③ 10은 15의 약수가 아니므로 거짓인 명제이다.

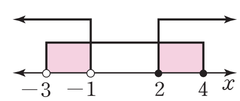
④ 3은 3의 배수이지만 6의 배수가 아니므로 거짓인 명제이다.

⑤ 넓이가 같아도 모양이 다를 수 있으므로 거짓인 명제이다.

따라서 명제가 아닌 것은 ②이다.

2 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은 'p 그리고 $\sim q$'

이때 p: $-3<x\leq4$, $\sim q$: $x<-1$ 또는 $x\geq2$이므로 다음 그림에서 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은



$-3<x<-1$ 또는 $2\leq x\leq4$

3 전체집합 $U=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore P=\{1, 2\}$

$x^3-4x=0$에서 $x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

$\therefore Q=\{-2, 0, 2\}$

이때 조건 '$\sim p$ 그리고 $\sim q$'의 진리집합은 $P^C\cap Q^C$이므로

$P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C=\{-3, -1\}$

따라서 구하는 모든 원소의 곱은

$-3\times(-1)=3$

4 명제 $p\longrightarrow\sim q$가 거짓이려면 $P\not\subset Q^C$이어야 하므로 집합 P의 원소이지만 집합 Q^C의 원소가 아닌 원소를 찾으면 된다.

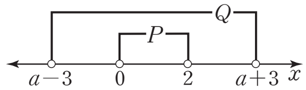
따라서 반례를 원소로 갖는 집합은

$P-Q^C=P\cap Q$

5 p: $0<x<2$, q: $a-3<x<a+3$이라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

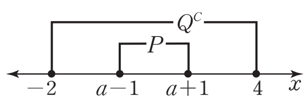
$P=\{x|0<x<2\}$, $Q=\{x|a-3<x<a+3\}$

명제 $p\longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.



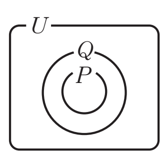
위의 그림에서 $a-3\le0$, $a+3\ge2$이어야 하므로
$-1\le a\le3$
따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

6 $|x-a|\le1$에서 $-1\le x-a\le1$
$\therefore a-1\le x\le a+1$
$x^2-2x-8>0$에서 $(x+2)(x-4)>0$
$\therefore x<-2$ 또는 $x>4$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x\,|\,a-1\le x\le a+1\}$
$Q=\{x\,|\,x<-2$ 또는 $x>4\}$
명제 $p\longrightarrow\sim q$가 참이 되려면 $P\subset Q^C$이어야 한다.
이때 $Q^C=\{x\,|\,-2\le x\le4\}$이므로



위의 그림에서 $a-1\ge-2$, $a+1\le4$이어야 하므로
$-1\le a\le3$
따라서 실수 a의 최댓값은 3이다.

7 명제 $p\longrightarrow q$가 참이므로 $P\subset Q$



① $Q-P\ne Q$
② $P\cap Q=P$
③ $P\cup Q=Q$
④ $P-Q=\varnothing$
⑤ $P^C\cup Q=U$
따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

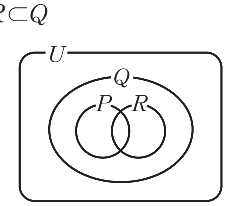
8 ㄱ. $Q\subset P$이므로 명제 $q\longrightarrow p$가 참이다.
ㄷ. $R\subset P$이므로 $P^C\subset R^C$
따라서 명제 $\sim p\longrightarrow\sim r$가 참이다.
따라서 보기에서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

9 ① [반례] $x=-1$, $y=-2$이면 $xy>0$이지만 $x<0$이고 $y<0$이다. (거짓)
② [반례] $x=0$이면 $x^2=0$이다. (거짓)
③ [반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$이면 $x+y$는 유리수이다. (거짓)
④ 모든 실수 x에 대하여
$x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$ (거짓)
⑤ $3x-2=x+2(x-3)+4$에서 $3x-2=3x-2$
따라서 모든 실수 x에 대하여 성립한다. (참)
따라서 참인 명제는 ⑤이다.

10 ㄱ. p: $x^2>4$라 하고 조건 p의 진리집합을 P라 하면
$x^2>4$에서 $x^2-4>0$, $(x+2)(x-2)>0$
$\therefore x<-2$ 또는 $x>2$ $\quad\therefore P=\varnothing$
따라서 주어진 명제는 거짓이다.
ㄴ. p: $2x-3\le1$이라 하고 조건 p의 진리집합을 P라 하면 $2x-3\le1$에서 $2x\le4$ $\quad\therefore x\le2$
$\therefore P=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$
따라서 $P=U$이므로 주어진 명제는 참이다.
ㄷ. p: $x^2+x-2>0$이라 하고 조건 p의 진리집합을 P라 하면 $x^2+x-2>0$에서 $(x+2)(x-1)>0$
$\therefore x<-2$ 또는 $x>1$ $\quad\therefore P=\{2\}$
따라서 $P\ne\varnothing$이므로 주어진 명제는 참이다.
따라서 보기에서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

11 ①, ② 유리수의 제곱, 유리수의 세제곱도 유리수이므로 x가 유리수이면 x^2, x^3도 유리수이다. (참)
③ [반례] $x=\sqrt{2}$이면 $x^2=2$는 유리수이지만 $x^3=2\sqrt{2}$는 무리수이다. (거짓)
④ $x\ne0$일 때, 유리수의 나눗셈의 몫은 유리수이므로 x^2과 x^3이 유리수이면 $\dfrac{x^3}{x^2}=x$는 유리수이다. (참)
⑤ 유리수와 유리수의 곱은 유리수이므로 유리수 x와 유리수 x^2의 곱인 x^3도 유리수이다. (참)
따라서 거짓인 명제는 ③이다.

12 $P\cap Q=P$에서 $P\subset Q$
$R^C\cup Q=U$에서 $(R^C\cup Q)^C=\varnothing$
$R\cap Q^C=\varnothing$, $R-Q=\varnothing$ $\quad\therefore R\subset Q$



ㄱ. $P\subset Q$이므로 명제 $p\longrightarrow q$는 참이다.
ㄴ. $R\subset Q$이므로 명제 $r\longrightarrow q$는 참이다.
ㄷ. $P\cap R\ne\varnothing$이면 $P\not\subset R^C$이므로 명제 $p\longrightarrow\sim r$는 거짓이다.
따라서 보기에서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

13 주어진 명제의 부정은
'모든 실수 x에 대하여 $x^2-18x+k\ge0$이다.'
즉, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-18x+k\ge0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-18x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(-9)^2-k\le0$ $\quad\therefore k\ge81$
따라서 k의 최솟값은 81이다.

Ⅱ-2 02 명제의 역과 대우

1 명제의 역과 대우

개념 Check 152쪽

1 답 (1) **역: 이등변삼각형은 정삼각형이다.**
대우: 이등변삼각형이 아니면 정삼각형이 아니다.
(2) **역: 홀수는 소수이다.**
대우: 홀수가 아니면 소수가 아니다.
(3) **역: $x^2=9$이면 $x=3$이다.**
대우: $x^2\neq9$이면 $x\neq3$이다.

문제 153～155쪽

01-1 답 (1) **역: x가 8의 양의 약수이면 x는 4의 양의 약수이다. (거짓)**
대우: x가 8의 양의 약수가 아니면 x는 4의 양의 약수가 아니다. (참)
(2) **역: $5-2x<1$이면 $x>-3$이다. (참)**
대우: $5-2x\geq1$이면 $x\leq-3$이다. (거짓)

(1) 역: [반례] $x=8$은 8의 양의 약수이지만 4의 양의 약수는 아니다.
(2) 대우: [반례] $x=0$이면 $5-2x\geq1$이지만 $x>-3$이다.

01-2 답 ㄹ

ㄱ. 역: $x=y$이면 $x^2-y^2=0$이다. (참)
대우: $x\neq y$이면 $x^2-y^2\neq0$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x\neq y$이지만 $x^2-y^2=0$이다.
ㄴ. 역: $x^2-1=0$이면 $x-1=0$이다. (거짓)
[반례] $x=-1$이면 $x^2-1=0$이지만 $x-1\neq0$이다.
대우: $x^2-1\neq0$이면 $x-1\neq0$이다. (참)
ㄷ. 역: $x+y>0$이면 $x>0$이고 $y>0$이다. (거짓)
[반례] $x=3$, $y=-2$이면 $x+y>0$이지만 $x>0$이고 $y<0$이다.
대우: $x+y\leq0$이면 $x\leq0$ 또는 $y\leq0$이다. (참)
ㄹ. 역: $x\neq0$이고 $y\neq0$이면 $xy\neq0$이다. (참)
대우: $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다. (참)
따라서 보기에서 역과 대우가 모두 참인 명제인 것은 ㄹ이다.

02-1 답 -5

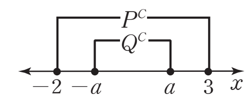
주어진 명제가 참이므로 그 대우 '$x=4$이면 $x^2+kx+4=0$이다.'도 참이다.
$x=4$를 $x^2+kx+4=0$에 대입하면
$16+4k+4=0$ $\quad\therefore k=-5$

02-2 답 -2

주어진 명제가 참이므로 그 대우 '$x\leq k$이고 $y\leq5$이면 $x+y\leq3$이다.'도 참이다.
$x\leq k$이고 $y\leq5$에서 $x+y\leq k+5$
대우가 참이려면 $k+5\leq3$ $\quad\therefore k\leq-2$
따라서 k의 최댓값은 -2이다.

02-3 답 2

명제 $p\longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q\longrightarrow\sim p$도 참이다.
$\sim q$: $|x|\leq a$에서 $-a\leq x\leq a$ ($\because$ a는 자연수)
$\sim p$: $x^2-x-6\leq0$에서 $(x+2)(x-3)\leq0$
$\therefore -2\leq x\leq3$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P^C=\{x\,|\,-2\leq x\leq3\}$, $Q^C=\{x\,|\,-a\leq x\leq a\}$
명제 $\sim q\longrightarrow\sim p$가 참이 되려면 $Q^C\subset P^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-a\geq-2$, $a\leq3$ $\quad\therefore a\leq2$
따라서 자연수 a는 1, 2의 2개이다.

03-1 답 ②

① 명제 $p\longrightarrow r$가 참이면 그 대우도 참이므로 명제 $\sim r\longrightarrow\sim p$가 참이다.
③ 명제 $q\longrightarrow\sim r$가 참이면 그 대우도 참이므로 명제 $r\longrightarrow\sim q$가 참이다.
④ 두 명제 $p\longrightarrow r$, $r\longrightarrow\sim q$가 참이므로 명제 $p\longrightarrow\sim q$가 참이다.
⑤ 명제 $p\longrightarrow\sim q$가 참이면 그 대우도 참이므로 명제 $q\longrightarrow\sim p$가 참이다.
따라서 항상 참이라 할 수 없는 것은 ②이다.

03-2 답 ㄷ, ㄹ

ㄱ. 명제 $s\longrightarrow q$가 참이면 그 대우도 참이므로 명제 $\sim q\longrightarrow\sim s$가 참이다.
두 명제 $p\longrightarrow\sim q$, $\sim q\longrightarrow\sim s$가 참이므로 명제 $p\longrightarrow\sim s$가 참이다.
따라서 명제 $p\longrightarrow s$는 거짓이다.
ㄴ, ㄷ. 두 명제 $r\longrightarrow p$, $p\longrightarrow\sim q$가 참이므로 명제 $r\longrightarrow\sim q$와 그 대우 $q\longrightarrow\sim r$가 참이다.
따라서 명제 $q\longrightarrow r$는 거짓이다.
ㄹ. 명제 $p\longrightarrow\sim q$가 참이면 그 대우도 참이므로 명제 $q\longrightarrow\sim p$가 참이다.
두 명제 $s\longrightarrow q$, $q\longrightarrow\sim p$가 참이므로 명제 $s\longrightarrow\sim p$가 참이다.
따라서 보기에서 항상 참인 명제인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

03-**3** 답 ③

명제 (가), (나)에서

p: 기온이 높다.,

q: 제품 A가 잘 팔린다.,

r: 제품 B가 잘 팔린다.

라 하자.

(가)에서 명제 $p \longrightarrow q$가 참이고 (나)에서 명제 $r \longrightarrow \sim q$와 그 대우 $q \longrightarrow \sim r$가 참이다.

두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$와 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$가 참이다.

① $q \longrightarrow p$ ② $q \longrightarrow r$

③ $p \longrightarrow \sim r$ ④ $\sim p \longrightarrow r$

⑤ $r \longrightarrow p$

따라서 항상 참인 명제는 ③이다.

2 충분조건과 필요조건

개념 Check 156쪽

1 답 (1) **충분** (2) **필요** (3) **필요충분**

문제 157~159쪽

04-**1** 답 (1) **충분조건** (2) **필요조건** (3) **필요조건** (4) **필요충분조건**

(1) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{a|a>1\}$, $Q=\{a|a>0\}$

$\therefore P \subset Q$

따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(2) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{(a, b)|a=b$ 또는 $a=-b\}$,

$Q=\{(a, b)|a=b\}$

$\therefore Q \subset P$

따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(3) 명제 $p \longrightarrow q$: [반례] $a=1$, $b=-1$이면 $a+b=0$이지만 $a^2+b^2 \neq 0$이다. (거짓)

명제 $q \longrightarrow p$: $a^2+b^2=0$이면 $a=0$, $b=0$이므로 $a+b=0$이다. (참)

따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(4) 명제 $p \longrightarrow q$: $abc \neq 0$이면 $a \neq 0$이고 $b \neq 0$이고 $c \neq 0$이므로 a, b, c는 모두 0이 아니다. (참)

명제 $q \longrightarrow p$: a, b, c가 모두 0이 아니면 $abc \neq 0$이다. (참)

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

04-**2** 답 ㄱ

ㄱ. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P \subset Q$

따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{(x, y)|x=y$ 또는 $x=-y\}$,

$Q=\{(x, y)|x=y$ 또는 $x=-y\}$

$\therefore P=Q$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. 명제 $p \longrightarrow q$: [반례] $x=2$, $y=10$이면 $xy=20$이지만 $x \neq 5$, $y \neq 4$이다. (거짓)

명제 $q \longrightarrow p$: $x=5$, $y=4$이면 $xy=20$이다. (참)

따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄹ. 명제 $p \longrightarrow q$: [반례] $x=1$, $y=-2$이면 $x>0$이지만 $x+y<0$이다. (거짓)

명제 $q \longrightarrow p$: $x+y>0$이면 $x>0$ 또는 $y>0$이다. (참)

따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 보기에서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은 ㄱ이다.

05-**1** 답 **2**

p: $x^2+ax-3 \neq 0$, q: $x-1 \neq 0$이라 하자.

p가 q이기 위한 충분조건이려면 $p \Longrightarrow q$

참인 명제의 대우는 참이므로 $\sim q \Longrightarrow \sim p$

즉, $x-1=0$이면 $x^2+ax-3=0$이므로

$1+a-3=0 \qquad \therefore a=2$

05-**2** 답 **2**

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x|-1 \leq x \leq 1$ 또는 $x>3\}$,

$Q=\{x|x>a\}$,

$R=\{x|x \geq b\}$

q가 p이기 위한 필요조건이려면 $p \Longrightarrow q$에서

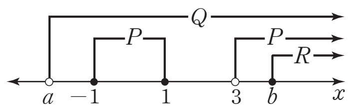
$P \subset Q$

r가 p이기 위한 충분조건이려면 $r \Longrightarrow p$에서

$R \subset P$

$\therefore R \subset P \subset Q$

세 집합 P, Q, R를 수직선 위에 나타내면



위의 그림에서 $a<-1$, $b>3$

따라서 정수 a의 최댓값은 -2, 정수 b의 최솟값은 4이므로 그 합은

$-2+4=2$

05-3 답 -4

p가 q이기 위한 필요충분조건이려면 $p \Longleftrightarrow q$

즉, 이차방정식 $(x-1)^2=a$의 두 근이 $x=3$ 또는 $x=b$이어야 하므로 $(x-1)^2=a$에 $x=3$을 대입하면 $a=4$

$(x-1)^2=4$에서 $x-1=\pm 2$ $\quad\therefore x=3$ 또는 $x=-1$

$\therefore b=-1$

$\therefore ab=4\times(-1)=-4$

06-1 답 ④

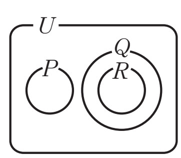
p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow \sim q$에서

$P\subset Q^C$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\sim r$는 $\sim q$이기 위한 필요조건이므로 $\sim q \Longrightarrow \sim r$에서

$Q^C\subset R^C$ $\quad\therefore R\subset Q$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 만족시키는 세 집합 P, Q, R 사이의 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $P\not\subset R$

② $P^C\cup Q=P^C$이므로 $R\subset(P^C\cup Q)$

③ $Q^C\not\subset R$

⑤ $(P\cup R)\not\subset Q^C$

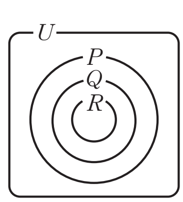
따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

06-2 답 ⑤

$P\cup Q=P$에서 $Q\subset P$

$Q\cap R=R$에서 $R\subset Q$

$\therefore R\subset Q\subset P$



① $Q\subset P$에서 $q \Longrightarrow p$이므로 q는 p이기 위한 충분조건이다.

② $R\subset Q$에서 $r \Longrightarrow q$이므로 q는 r이기 위한 필요조건이다.

③ $R\subset P$에서 $r \Longrightarrow p$이므로 r는 p이기 위한 충분조건이다.

④ $R\subset Q$, 즉 $Q^C\subset R^C$에서 $\sim q \Longrightarrow \sim r$이므로 $\sim r$는 $\sim q$이기 위한 필요조건이다.

⑤ $Q\not\subset P^C$이므로 q는 $\sim p$이기 위한 충분조건이 아니다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

연습문제

160~162쪽

1 ②	**2** ②	**3** 4	**4** ①	**5** ③
6 ③	**7** ⑤	**8** ④	**9** ③	**10** 3
11 ⑤	**12** ④	**13** ④	**14** ⑤	**15** ㄴ, ㄷ
16 ②	**17** ⑤			

1 ① 역: 두 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다. (거짓)

[반례] 등변사다리꼴은 두 대각선의 길이가 같지만 직사각형이 아니다.

대우: 두 대각선의 길이가 같지 않은 사각형은 직사각형이 아니다. (참)

② 역: $a>1$이고 $b>1$이면 $a+b>2$이다. (참)

대우: $a\le 1$ 또는 $b\le 1$이면 $a+b\le 2$이다. (거짓)

[반례] $a=-1$, $b=4$이면 $a\le 1$이지만 $a+b>2$이다.

③ 역: $|ab|=ab$이면 $a>0$, $b>0$이다. (거짓)

[반례] $a=-2$, $b=-3$이면 $|ab|=ab$이지만 $a<0$, $b<0$이다.

대우: $|ab|\ne ab$이면 $a\le 0$ 또는 $b\le 0$이다. (참)

④ 역: ab가 유리수이면 a, b도 유리수이다. (거짓)

[반례] $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$이면 ab는 유리수이지만 a, b는 유리수가 아니다.

대우: ab가 무리수이면 a 또는 b가 무리수이다. (참)

⑤ 역: 0이 아닌 a, b에 대하여 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이면 $a>b$이다. (거짓)

[반례] $a=-1$, $b=2$이면 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이지만 $a<b$이다.

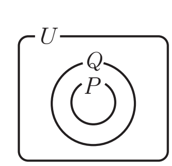
대우: 0이 아닌 a, b에 대하여 $\frac{1}{a}\ge\frac{1}{b}$이면 $a\le b$이다. (거짓)

[반례] $a=1$, $b=-2$이면 $\frac{1}{a}\ge\frac{1}{b}$이지만 $a>b$이다.

따라서 역은 참이고 대우는 거짓인 명제는 ②이다.

2 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$의 역이 참이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이다.

즉, $Q^C\subset P^C$이므로 $P\subset Q$



① $P\cap Q=P$

② $P\cap Q^C=P-Q=\varnothing$

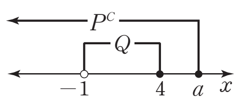
③ $P^C\cap Q=Q-P$

④ $P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C=Q^C$

⑤ $P\ne Q$

따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

3 $\sim p$: $x \le a$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P^C = \{x | x \le a\}$, $Q = \{x | -1 < x \le 4\}$
명제 $\sim p \longrightarrow q$의 역, 즉 명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이므로
$Q \subset P^C$
오른쪽 그림에서 $a \ge 4$
따라서 a의 최솟값은 4이다.



4 주어진 명제의 역 '$x^2+ax-1 \ne 0$이면 $x-2 \ne 0$이다.'가 참이면 그 대우 '$x-2=0$이면 $x^2+ax-1=0$이다.'가 참이므로
$4+2a-1=0 \qquad \therefore a = -\frac{3}{2}$

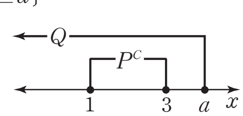
5 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이면 그 대우도 참이므로 명제 $q \longrightarrow \sim r$가 참이다.
두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$와 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$가 참이다.
따라서 보기에서 항상 참인 명제인 것은 ㄷ이다.

6 명제 (가), (나)에서
p: 날씨가 맑다., q: 기온이 올라간다.,
r: 빨래가 잘 마른다.
라 하자.
(가)에서 명제 $p \longrightarrow q$가 참이고 (나)에서 명제 $q \longrightarrow r$가 참이다.
따라서 명제 $p \longrightarrow r$와 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim p$가 참이다.
① $p \longrightarrow \sim r$ ② $\sim p \longrightarrow r$
③ $\sim r \longrightarrow \sim p$ ④ $r \longrightarrow p$
⑤ $\sim q \longrightarrow \sim r$
따라서 항상 참인 명제인 것은 ③이다.

7 ① 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P = \{\sqrt{3}\}$, $Q = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\} \qquad \therefore P \subset Q$
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
② 명제 $p \longrightarrow q$: $y<0$이면 $|x|>y$이다. (참)
명제 $q \longrightarrow p$: [반례] $x=3$, $y=2$이면 $|x|>y$이지만 $y>0$이다. (거짓)
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
③ 명제 $p \longrightarrow q$: $|x| \ge 0$, $|y| \ge 0$이므로
$|x|+|y|=0$이면 $x=0$, $y=0$이다. (참)
명제 $q \longrightarrow p$: $x=0$, $y=0$이면 $|x|+|y|=0$이다. (참)
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
④ 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P \subset Q$
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
⑤ 명제 $p \longrightarrow q$: [반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$이면 $x+y$, xy는 유리수이지만 x, y는 유리수가 아니다. (거짓)
명제 $q \longrightarrow p$: x, y가 유리수이면 $x+y$, xy는 유리수이다. (참)
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 ⑤이다.

8 p는 q이기 위한 충분조건이므로
$p \Longrightarrow q$ …… ㉠
p는 s이기 위한 필요조건이므로
$s \Longrightarrow p$ …… ㉡
q는 s이기 위한 충분조건이므로
$q \Longrightarrow s$ …… ㉢
r는 q이기 위한 필요조건이므로
$q \Longrightarrow r$ …… ㉣
ㄱ. ㉠, ㉣에서 $p \Longrightarrow r$
ㄴ. ㉢, ㉡에서 $q \Longrightarrow p$
ㅁ. ㉡, ㉠에서 $s \Longrightarrow q$
ㅂ. ㉡, ㉠, ㉣에서 $s \Longrightarrow r$
따라서 보기에서 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ이다.

9 $\sim p$: $x^2-4x+3 \le 0$에서
$(x-1)(x-3) \le 0 \qquad \therefore 1 \le x \le 3$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P^C = \{x | 1 \le x \le 3\}$, $Q = \{x | x \le a\}$
$\sim p$가 q이기 위한 충분조건이려면 $\sim p \Longrightarrow q$, 즉 $P^C \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서
$a \ge 3$
따라서 a의 최솟값은 3이다.



10 $x^2+3x-10=0$에서 $(x+5)(x-2)=0$
$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$
$x+a=0$에서 $x=-a$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{-5, 2\}$, $Q=\{-a\}$
p가 q이기 위한 필요조건이려면 $q \Longrightarrow p$에서 $Q \subset P$
즉, $-a=-5$ 또는 $-a=2$이므로
$a=-2$ 또는 $a=5$
따라서 모든 상수 a의 값의 합은
$-2+5=3$

11 $x^2-2x-3\le0$에서 $(x+1)(x-3)\le0$

$\therefore\ -1\le x\le3$

$|x-a|\le b$에서 $a-b\le x\le a+b$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|-1\le x\le3\}$, $Q=\{x|a-b\le x\le a+b\}$

p는 q이기 위한 필요충분조건이려면 $p\Longleftrightarrow q$에서

$P=Q$

즉, $a-b=-1$, $a+b=3$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$ $\quad\therefore\ ab=2$

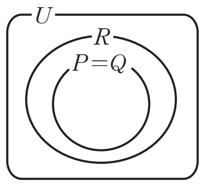
12 p는 q이기 위한 필요충분조건이므로 $p\Longleftrightarrow q$에서

$P=Q$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

r는 q이기 위한 필요조건이므로 $q\Longrightarrow r$에서

$Q\subset R$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 만족시키는 세 집합 P, Q, R 사이의 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $R\not\subset P$

② $P\cap Q\neq\varnothing$

③ $Q\cup R=R$이므로 $P\subset(Q\cup R)$, $(Q\cup R)\not\subset P$

④ $(P\cup Q)\subset R$

⑤ $R-P\neq Q$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

13 ㄱ. $Q\subset P$이므로 $q\Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $R\subset Q^C$이므로 $r\Longrightarrow\sim q$

따라서 r는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. $Q\subset P$이므로 $P^C\subset Q^C$

$\therefore\ \sim p\Longrightarrow\sim q$

따라서 $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14 주어진 규칙인 명제

'카드의 한쪽 면에 홀수가 적혀 있으면 다른 쪽 면에는 식물이 그려져 있다.'

가 참이면 그 대우인 명제

'카드의 한쪽 면에 동물이 그려져 있으면 다른 쪽 면에는 짝수가 적혀 있다.'

도 참이다.

따라서 주어진 규칙에 맞는지 알아보기 위하여 다른 쪽 면을 반드시 확인할 필요가 있는 카드는 홀수가 적힌 카드와 동물이 그려진 카드이므로 3, 토끼, 사자이다.

15 참인 두 명제에서

p: 성격이 급하지 않은 사람이다.,

q: 신중한 사람이다.,

r: 수학을 잘하는 사람이다.,

s: 머리가 좋은 사람이다.

라 하자.

명제 $p\longrightarrow q$가 참이고 명제 $r\longrightarrow s$가 참이므로 명제 $r\longrightarrow q$가 참이 되는 경우는 삼단논법에 의하여 다음과 같은 경우가 있을 수 있다.

(i) 두 명제 $r\longrightarrow p$, $p\longrightarrow q$가 참이면

명제 $r\longrightarrow q$가 참이다.

(ii) 두 명제 $r\longrightarrow s$, $s\longrightarrow q$가 참이면

명제 $r\longrightarrow q$가 참이다.

(iii) 세 명제 $r\longrightarrow s$, $s\longrightarrow p$, $p\longrightarrow q$가 참이면

명제 $r\longrightarrow q$가 참이다.

즉, 필요한 참인 명제는

명제 $r\longrightarrow p$ 또는 그 대우인 명제 $\sim p\longrightarrow\sim r$

명제 $s\longrightarrow q$ 또는 그 대우인 명제 $\sim q\longrightarrow\sim s$

명제 $s\longrightarrow p$ 또는 그 대우인 명제 $\sim p\longrightarrow\sim s$

주어진 보기에서

ㄱ. $p\longrightarrow r$ $\qquad$ ㄴ. $\sim p\longrightarrow\sim r$

ㄷ. $\sim p\longrightarrow\sim s$ $\qquad$ ㄹ. $\sim r\longrightarrow\sim p$

따라서 보기에서 필요한 참인 명제가 될 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

16 ㄱ. 명제 $p\longrightarrow q$: $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=U$이면

$A\cap B=\varnothing$이므로 $A\subset B^C$, $B\subset A^C$이다. (참)

명제 $q\longrightarrow p$: $A\subset B^C$, $B\subset A^C$이면 $A\cap B=\varnothing$이므로 $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=U$이다. (참)

따라서 $p\Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄴ. 명제 $p\longrightarrow q$: $A\subset B$이면 $n(A)\le n(B)$이다. (참)

명제 $q\longrightarrow p$: [반례] $A=\{1\}$, $B=\{2, 3\}$이면

$n(A)\le n(B)$이지만 $A\not\subset B$이다. (거짓)

따라서 $p\Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. 명제 $p\longrightarrow q$: [반례] $A=\{1\}$, $B=\{1, 2\}$이면

$A-B=\varnothing$이므로 $n(A-B)=0$이지만

$n(A)\neq n(B)$이다. (거짓)

명제 $q\longrightarrow p$: [반례] $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$이면

$n(A)=n(B)=2$이지만 $A-B=\{1\}$이므로

$n(A-B)\neq0$이다. (거짓)

따라서 보기에서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은 ㄴ이다.

17 p: $|a|+|b|=0$에서 $a=0$이고 $b=0$

q: $a^2-2ab+b^2=0$에서 $(a-b)^2=0$ $\therefore a=b$

r: $|a+b|=|a-b|$에서

$a+b=a-b$ 또는 $a+b=-(a-b)$

$\therefore a=0$ 또는 $b=0$

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{(a, b)\,|\,a=0$이고 $b=0\}$

$Q=\{(a, b)\,|\,a=b\}$

$R=\{(a, b)\,|\,a=0$ 또는 $b=0\}$

ㄱ. $P\subset Q$이므로 $p \Longrightarrow q$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $P\subset R$이므로 $R^C\subset P^C$

$\therefore \sim r \Longrightarrow \sim p$

따라서 $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $Q\cap R=\{(a, b)\,|\,a=0$이고 $b=0\}$이므로

$Q\cap R=P$ $\therefore$ (q이고 r) $\Longleftrightarrow p$

따라서 q이고 r는 p이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

Ⅱ-2 03 명제의 증명

명제의 증명

개념 Check

163쪽

1 답 (가) **자연수 a, b에 대하여 a 또는 b가 짝수이면 ab는 짝수이다.**

(나) **2**

문제

164~165쪽

01-1 답 **풀이 참조**

주어진 명제의 대우 '자연수 n에 대하여 n이 홀수이면 n^2은 홀수이다.'가 참임을 보이면 된다.

n이 홀수이면 $n=2k-1$(k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$n^2=(2k-1)^2=2(2k^2-2k)+1$

이때 $2k^2-2k$는 0 또는 자연수이므로 n^2은 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

01-2 답 **풀이 참조**

주어진 명제의 대우 '자연수 a, b, c에 대하여 a, b, c가 모두 홀수이면 $a^2+b^2\neq c^2$이다.'가 참임을 보이면 된다.

a, b가 홀수이면 $a=2m-1$, $b=2n-1$(m, n은 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$a^2+b^2=(2m-1)^2+(2n-1)^2$

$=2(2m^2-2m+2n^2-2n+1)$

이때 $2m^2-2m+2n^2-2n+1$은 자연수이므로 a^2+b^2은 짝수이다.

또 c가 홀수이면 $c=2l-1$(l은 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$c^2=(2l-1)^2=4l^2-4l+1$

$=2(2l^2-2l)+1$

이때 $2l^2-2l$은 0 또는 자연수이므로 c^2은 홀수이다.

즉, a^2+b^2은 짝수이고 c^2은 홀수이므로 $a^2+b^2\neq c^2$이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

01-3 답 (가) **짝수** (나) **서로소** (다) **2**

주어진 명제의 대우 '자연수 m, n에 대하여 m과 n이 모두 $\boxed{\text{(가) 짝수}}$이면 m과 n은 $\boxed{\text{(나) 서로소}}$가 아니다.'가 참임을 보이면 된다.

m과 n이 모두 $\boxed{\text{(가) 짝수}}$이면 $m=2k$, $n=2l$(k, l은 자연수)로 나타낼 수 있다.

이때 $\boxed{\text{(다) 2}}$는 m과 n의 공약수이므로 m과 n이 모두 $\boxed{\text{(가) 짝수}}$이면 m과 n은 $\boxed{\text{(나) 서로소}}$가 아니다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

02-1 답 **풀이 참조**

주어진 명제의 결론을 부정하여 a, b가 모두 홀수이거나 모두 짝수라 가정하자.

(i) a, b가 모두 홀수이면 $a=2k-1$, $b=2l-1$(k, l은 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$a+b=(2k-1)+(2l-1)=2(k+l-1)$

이때 $k+l-1$은 자연수이므로 $a+b$는 짝수이다.

(ii) a, b가 모두 짝수이면 $a=2m$, $b=2n$(m, n은 자연수)으로 나타낼 수 있으므로

$a+b=2m+2n=2(m+n)$

이때 $m+n$은 자연수이므로 $a+b$는 짝수이다.

(i), (ii)에서 $a+b$는 짝수이므로 $a+b$가 홀수라는 가정에 모순이다.

따라서 자연수 a, b에 대하여 $a+b$가 홀수이면 a, b 중에서 하나는 홀수이고 다른 하나는 짝수이다.

02-2 답 (가) $\mathbf{3}$ (나) $\boldsymbol{9k^2}$ (다) **3의 배수**

주어진 명제의 결론을 부정하여 n이 3의 배수라 가정하면

$n=\boxed{^{(가)}\ 3}k$ (k는 자연수) …… ㉠

로 나타낼 수 있다.

㉠의 양변을 제곱하면

$n^2=\boxed{^{(나)}\ 9k^2}=3\times3k^2$

이때 n^2은 $\boxed{^{(다)}\ \text{3의 배수}}$이므로 가정에 모순이다.

따라서 자연수 n에 대하여 n^2이 3의 배수가 아니면 n은 3의 배수가 아니다.

2 절대부등식

문제 167～171쪽

03-1 답 (1) **풀이 참조** (2) **풀이 참조** (3) **풀이 참조**

(1) $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\ge0$ $\therefore a^2+b^2\ge2ab$

이때 등호는 $a-b=0$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.

(2) $(|a|+1)^2-(|a+1|)^2$

$=a^2+2|a|+1-(a^2+2a+1)$

$=2(|a|-a)\ge0$ ($\because |a|\ge a$)

$\therefore (|a|+1)^2\ge(|a+1|)^2$

그런데 $|a|+1\ge0$, $|a+1|\ge0$이므로

$|a|+1\ge|a+1|$

이때 등호는 $|a|=a$, 즉 $a\ge0$일 때 성립한다.

(3) $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)$

$=\frac{1}{2}\{\underbrace{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}_{(\text{실수})^2+(\text{실수})^2+(\text{실수})^2\ge0}\}\ge0$

$\therefore a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

이때 등호는 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$, 즉 $a=b=c$일 때 성립한다.

03-2 답 (가) $\boldsymbol{a^2-2ab+b^2}$ (나) $\boldsymbol{|ab|}$ (다) $\boldsymbol{\ge}$

(라) $\boldsymbol{ab\ge0}$ **(또는** $\boldsymbol{|ab|=ab}$**)**

(i) $|a|\ge|b|$일 때,

$(|a-b|)^2-(|a|-|b|)^2$

$=\boxed{^{(가)}\ a^2-2ab+b^2}-(a^2-2|ab|+b^2)$

$=2(\boxed{^{(나)}\ |ab|}-ab)\boxed{^{(다)}\ \ge}0$ ($\because |ab|\ge ab$)

$\therefore (|a-b|)^2\ge(|a|-|b|)^2$

그런데 $|a-b|\ge0$, $|a|-|b|\ge0$이므로

$|a-b|\boxed{^{(다)}\ \ge}|a|-|b|$

(ii) $|a|<|b|$일 때,

$|a-b|>0$, $|a|-|b|<0$이므로

$|a-b|>|a|-|b|$

(i), (ii)에서 $|a-b|\ge|a|-|b|$

이때 등호는 $|a|\ge|b|$이고 $\boxed{^{(라)}\ ab\ge0\ (\text{또는 } |ab|=ab)}$ 일 때 성립한다.

04-1 답 **40**

$10x>0$, $8y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$10x+8y\ge2\sqrt{10x\times8y}=8\sqrt{5xy}$

이때 $xy=5$이므로

$10x+8y\ge8\sqrt{25}=40$ (단, 등호는 $5x=4y$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 40이다.

04-2 답 **6**

$3x>0$, $2y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3x+2y\ge2\sqrt{3x\times2y}=2\sqrt{6xy}$

이때 $3x+2y=12$이므로

$12\ge2\sqrt{6xy}$

$\therefore \sqrt{6xy}\le6$ (단, 등호는 $3x=2y$일 때 성립)

양변을 제곱하면

$6xy\le36$ $\therefore xy\le6$

따라서 구하는 최댓값은 6이다.

04-3 답 **1**

$a^2>0$, $16b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+16b^2\ge2\sqrt{a^2\times16b^2}=8ab$

이때 $a^2+16b^2=8$이므로

$8\ge8ab$

$\therefore ab\le1$ (단, 등호는 $a^2=16b^2$, 즉 $a=4b$일 때 성립)

따라서 구하는 최댓값은 1이다.

04-4 답 **2**

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{2}{ab}$ …… ㉠

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\ge2\sqrt{ab}$

이때 $a+b=2$이므로

$2\ge2\sqrt{ab}$

$\therefore \sqrt{ab}\le1$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $ab\le1$

㉠에서 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{ab}\ge2$

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

05-1 답 16

$x>0$, $y>0$에서 $3xy>0$, $\frac{3}{xy}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(3x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{3}{x}\right)=10+3xy+\frac{3}{xy}$$
$$\geq 10+2\sqrt{3xy\times\frac{3}{xy}}$$
$$=10+6=16$$

(단, 등호는 $xy=1$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 16이다.

05-2 답 5

$x>1$에서 $x-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{4}{x-1}=x-1+\frac{4}{x-1}+1$$
$$\geq 2\sqrt{(x-1)\times\frac{4}{x-1}}+1$$
$$=4+1=5$$

$\left(\text{단, 등호는 } x-1=\frac{4}{x-1}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 5이다.

05-3 답 2

$x>0$, $y>0$에서 $\frac{9x}{y}>0$, $\frac{4y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(9x+2y)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)=20+\frac{9x}{y}+\frac{4y}{x}$$
$$\geq 20+2\sqrt{\frac{9x}{y}\times\frac{4y}{x}}$$
$$=20+12=32$$

이때 $9x+2y=16$이므로

$16\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 32$

$\therefore\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}\geq 2$ (단, 등호는 $3x=2y$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

06-1 답 (1) -14 (2) 10

(1) a, b, x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

이때 $a^2+b^2=28$, $x^2+y^2=7$이므로

$28\times 7\geq(ax+by)^2$, $14^2\geq(ax+by)^2$

$\therefore\ -14\leq ax+by\leq 14$

(단, 등호는 $ay=bx$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 -14이다.

(2) x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+4^2)(x^2+y^2)\geq(3x+4y)^2$

이때 $x^2+y^2=4$이므로

$25\times 4\geq(3x+4y)^2$

$10^2\geq(3x+4y)^2$

$\therefore\ -10\leq 3x+4y\leq 10$

(단, 등호는 $3y=4x$일 때 성립)

따라서 구하는 최댓값은 10이다.

06-2 답 13

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+3^2)(x^2+y^2)\geq(2x+3y)^2$

이때 $2x+3y=13$이므로

$13(x^2+y^2)\geq 13^2$

$\therefore\ x^2+y^2\geq 13$ (단, 등호는 $2y=3x$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 13이다.

06-3 답 -10

a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+3^2)(a^2+b^2)\geq(a+3b)^2$

이때 $a^2+b^2=100$이므로

$10\times 100\geq(a+3b)^2$

$\therefore\ (a+3b)^2\leq 1000$

따라서 $(a+3b)^2$은 등호가 성립할 때, 즉 $b=3a$일 때 최댓값 1000을 갖는다.

$a^2+b^2=100$에 $b=3a$를 대입하면

$a^2+9a^2=100$, $a^2=10$ $\quad\therefore\ a=\pm\sqrt{10}$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$-\sqrt{10}\times\sqrt{10}=-10$

07-1 답 $25\,\text{m}^2$

직각삼각형의 빗변이 아닌 두 변의 길이를 xm, ym라 하면

$x^2+y^2=100$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$

$100\geq 2xy$

$\therefore\ xy\leq 50$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

이때 직각삼각형의 넓이를 $S\,\text{m}^2$라 하면

$S=\frac{1}{2}xy\leq 25$

따라서 구하는 밭의 넓이의 최댓값은 $25\,\text{m}^2$이다.

07-2 답 $8\sqrt{2}$

직사각형의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라 하면 직사각형의 대각선은 원의 지름과 같으므로

$x^2+y^2=16$

직사각형의 둘레의 길이는 $2x+2y$이고 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+2^2)(x^2+y^2)\geq(2x+2y)^2$

$8\times16\geq(2x+2y)^2$

이때 $2x+2y>0$이므로

$0<2x+2y\leq8\sqrt{2}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 구하는 둘레의 길이의 최댓값은 $8\sqrt{2}$이다.

연습문제

172~174쪽

1 ㈎ 자연수 m, n에 대하여 m과 n이 모두 홀수이면 mn은 홀수이다.
㈏ 홀수 ㈐ 홀수

2 풀이 참조		**3** ②	**4** 4	**5** ④
6 28	**7** 2	**8** ①	**9** -2	**10** ③
11 33	**12** ③	**13** ④	**14** ②	**15** ②
16 $10\sqrt{2}$				

1 주어진 명제의 대우

'$\boxed{\text{㈎ 자연수 } m,\ n\text{에 대하여 } m\text{과 } n\text{이 모두 홀수이면 } mn\text{은 홀수이다.}}$'

가 참임을 보이면 된다.

m과 n이 모두 $\boxed{\text{㈏ 홀수}}$이면

$m=2k-1$, $n=2l-1$ (k, l은 자연수)

로 나타낼 수 있으므로

$mn=(2k-1)(2l-1)$

$\quad=2(2kl-k-l)+1$

이때 $2kl-k-l$은 0 또는 자연수이므로 mn은 $\boxed{\text{㈐ 홀수}}$이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

2 주어진 명제의 결론을 부정하여 $\sqrt{5}$가 유리수라 가정하면

$\sqrt{5}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수) $\cdots\cdots$ ㉠

으로 나타낼 수 있다.

㉠의 양변을 제곱하면

$5=\dfrac{n^2}{m^2}\qquad\therefore\ n^2=5m^2$ $\cdots\cdots$ ㉡

이때 n^2이 5의 배수이므로 n도 5의 배수이다.

n이 5의 배수이면 $n=5k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로 ㉡에 대입하면

$(5k)^2=5m^2\qquad\therefore\ m^2=5k^2$

이때 m^2이 5의 배수이므로 m도 5의 배수이다.

그런데 m, n이 모두 5의 배수이므로 m, n이 서로소라는 가정에 모순이다.

따라서 $\sqrt{5}$는 유리수가 아니다.

3 양의 실수 a, b, c에 대하여

$$\begin{aligned}(a+b)^2-4ab&=a^2+2ab+b^2-4ab\\&=a^2-2ab+b^2\\&=\boxed{\text{㈎ }(a-b)^2}\geq0\end{aligned}$$

이므로 $4ab\leq(a+b)^2$이고, 같은 방법으로

$4bc\leq(b+c)^2$, $4ca\leq(c+a)^2$이므로

$$\begin{aligned}&4abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\\&=\frac{4ab}{a+b}\times c+\frac{4bc}{b+c}\times a+\frac{4ca}{c+a}\times b\\&\leq\frac{(a+b)^2}{a+b}\times c+\frac{(b+c)^2}{b+c}\times a+\frac{(c+a)^2}{c+a}\times b\\&=(a+b)\times c+(b+c)\times a+(c+a)\times b\\&=\boxed{\text{㈏ }2(ab+bc+ca)}\qquad\cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

이다.

한편, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq0$에서

$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\geq0$이므로

$$ab+bc+ca\leq\frac{(a+b+c)^2}{\boxed{\text{㈐ }3}}\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

이다.

따라서 ㉠, ㉡으로부터

$$4abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\leq\frac{2}{3}(a+b+c)^2\qquad\cdots\cdots\ ㉢$$

이다.

이때 ㉢의 양변을 $4abc$로 나누면

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{(a+b+c)^2}{6abc}$$

이다.

4 ㄱ. $x<-3$일 때만 성립하므로 절대부등식이 아니다.

ㄴ. $x^2>x^2-2$에서 $0>-2$
따라서 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

ㄷ. $x\geq0$일 때, $|x|+x=2x\geq0$
$x<0$일 때, $|x|+x=-x+x=0\geq0$
따라서 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

ㄹ. $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$
따라서 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

ㅁ. 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

ㅂ. $x=2$이면 $-(x-2)^2=0$
따라서 $x=2$일 때 성립하지 않는다.

따라서 보기에서 절대부등식은 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ의 4개이다.

5 ㄱ. $(\sqrt{ab})^2-\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2=ab-\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$

$$=\frac{ab\{(a+b)^2-4ab\}}{(a+b)^2}$$

$$=\frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2}\geq 0$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\therefore (\sqrt{ab})^2\geq\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2$

그런데 $\sqrt{ab}>0$, $\frac{2ab}{a+b}>0$이므로 $\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$

ㄴ. $\left(a+\frac{1}{2a}\right)^2-(\sqrt{a^2+1})^2=a^2+\frac{1}{4a^2}+1-(a^2+1)$

$$=\frac{1}{4a^2}>0$$

$\therefore \left(a+\frac{1}{2a}\right)^2>(\sqrt{a^2+1})^2$

그런데 $a+\frac{1}{2a}>0$, $\sqrt{a^2+1}>0$이므로

$a+\frac{1}{2a}>\sqrt{a^2+1}$

ㄷ. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2=\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$

$$=\frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\therefore \frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$

ㄹ. $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq 0$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

$\therefore a^3+b^3+c^3\geq 3abc$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

6 $9a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$9a+b\geq 2\sqrt{9a\times b}=6\sqrt{ab}$

이때 $ab=9$이므로

$9a+b\geq 18$

따라서 $9a+b$는 등호가 성립할 때, 즉 $9a=b$일 때 최솟값 18을 갖는다.

$\therefore m=18$

$b=9a$일 때 최솟값을 가지므로 이를 $ab=9$에 대입하면

$a\times 9a=9$, $a^2=1$ $\quad\therefore a=1$ ($\because a>0$)

이를 $b=9a$에 대입하면 $b=9$

$\therefore \alpha=1$, $\beta=9$

$\therefore m+\alpha+\beta=18+1+9=28$

7 주어진 식을 전개하여 정리하면

$(x-2y)\left(\frac{2}{x}-\frac{4}{y}\right)=10-4\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이므로 주어진 식의 값은 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$의 값이 최소일 때 최대이다.

$\frac{x}{y}>0$, $\frac{y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\times\frac{y}{x}}=2$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

㉠에서

$(x-2y)\left(\frac{2}{x}-\frac{4}{y}\right)=10-4\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

$\leq 10-4\times 2=2$

따라서 구하는 최댓값은 2이다.

8 $4x>0$, $\frac{a}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4x+\frac{a}{x}\geq 2\sqrt{4x\times\frac{a}{x}}=2\sqrt{4a}=4\sqrt{a}$

$\left(\text{단, 등호는 } 4x=\frac{a}{x}\text{일 때 성립}\right)$

즉, 주어진 식의 최솟값이 $4\sqrt{a}$이므로

$4\sqrt{a}=2$, $\sqrt{a}=\frac{1}{2}$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

9 $(x-2)^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2-4x+\frac{1}{(x-2)^2}=(x-2)^2+\frac{1}{(x-2)^2}-4$

$\geq 2\sqrt{(x-2)^2\times\frac{1}{(x-2)^2}}-4$

$=2-4=-2$

$\left(\text{단, 등호는 } (x-2)^2=\frac{1}{(x-2)^2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 -2이다.

10 이차방정식 $x^2+2x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1+a>0$

$a+1>0$, $\frac{1}{a+1}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4a+\frac{1}{a+1}=4(a+1)+\frac{1}{a+1}-4$

$\geq 2\sqrt{4(a+1)\times\frac{1}{a+1}}-4$

$=4-4=0$

$\left(\text{단, 등호는 } 4(a+1)=\frac{1}{a+1}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 0이다.

11 x^2-x+y^2-2y+3

$=x^2+y^2+3-(x+2y)$

$=23-(x+2y)$ ($\because$ $x^2+y^2=20$) $\quad\cdots\cdots$ ㉠

즉, 주어진 식의 값은 $x+2y$의 값이 최소일 때 최대이다.

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2)(x^2+y^2)\ge(x+2y)^2$

이때 $x^2+y^2=20$이므로

$5\times20\ge(x+2y)^2$

$\therefore$ $-10\le x+2y\le10$ (단, 등호는 $y=2x$일 때 성립)

㉠에서 $13\le23-(x+2y)\le33$

$\therefore$ $13\le x^2-x+y^2-2y+3\le33$

따라서 구하는 최댓값은 33이다.

12 $\sqrt{n^2-1}$이 유리수라고 가정하면

$\sqrt{n^2-1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)

로 놓을 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $p^2(n^2-1)=q^2$이다.

p는 q^2의 약수이고 p, q는 서로소인 자연수이므로 $p=1$

즉, $n^2-1=q^2$이므로 $n^2=\boxed{^{(가)}\ q^2+1}$이다.

자연수 k에 대하여

(i) $q=2k$일 때, $n^2=(2k)^2+1$

따라서 $(2k)^2<n^2<\boxed{^{(나)}\ (2k+1)^2}$인 자연수 n이 존재하지 않는다.

(ii) $q=2k+1$일 때, $n^2=(2k+1)^2+1$

따라서 $\boxed{^{(나)}\ (2k+1)^2}<n^2<(2k+2)^2$인 자연수 n이 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $\sqrt{n^2-1}=\dfrac{q}{p}$($p$, q는 서로소인 자연수)를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 $\sqrt{n^2-1}$은 무리수이다.

이때 $f(q)=q^2+1$, $g(k)=(2k+1)^2$이므로

$f(2)+g(3)=5+49=54$

13 $(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2=3x+2y+2\sqrt{6xy}$

$=16+2\sqrt{6xy}$ ($\because$ $3x+2y=16$) $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편 $3x>0$, $2y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3x+2y\ge2\sqrt{6xy}$

이때 $3x+2y=16$이므로 $16\ge2\sqrt{6xy}$

$\therefore$ $\sqrt{6xy}\le8$ (단, 등호는 $3x=2y$일 때 성립)

㉠에서 $(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2=16+2\sqrt{6xy}\le16+2\times8=32$

이때 $\sqrt{3x}+\sqrt{2y}>0$이므로

$0<\sqrt{3x}+\sqrt{2y}\le4\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값은 $4\sqrt{2}$이다.

다른 풀이 코시-슈바르츠의 부등식 이용

$\sqrt{3x}$, $\sqrt{2y}$가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(3x+2y)\ge(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2$

$2\times16\ge(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2$

$\therefore$ $0<\sqrt{3x}+\sqrt{2y}\le4\sqrt{2}$

(단, 등호는 $\sqrt{3x}=\sqrt{2y}$, 즉 $3x=2y$일 때 성립)

따라서 구하는 최댓값은 $4\sqrt{2}$이다.

14 $x-y-2z=-3$에서 $y+2z=x+3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2+y^2+z^2=9$에서 $y^2+z^2=9-x^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

y, z는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2)(y^2+z^2)\ge(y+2z)^2$

㉠, ㉡을 대입하면

$5(9-x^2)\ge(x+3)^2$, $45-5x^2\ge x^2+6x+9$

$x^2+x-6\le0$, $(x+3)(x-2)\le0$

$\therefore$ $-3\le x\le2$ (단, 등호는 $2y=z$일 때 성립)

따라서 구하는 최댓값은 2이다.

15 점 P(a, b)를 지나고 직선 OP에 수직인 직선의 방정식은

$y-b=-\dfrac{a}{b}(x-a)$ $\qquad\therefore$ $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{a^2}{b}+b$

$\therefore$ $\mathrm{Q}\left(0,\ \dfrac{a^2}{b}+b\right)$

즉, 삼각형 OQR의 넓이는

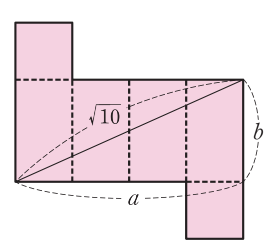
$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{a}\times\left(\dfrac{a^2}{b}+b\right)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)$

$\ge\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{a}}=1$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 삼각형 OQR의 넓이의 최솟값은 1이다.

16 네 옆면을 이루는 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 a, b라 하면



$a^2+b^2=10$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 직육면체의 밑면의 한 변의 길이는 $\dfrac{a}{4}$, 높이는 b이므로 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$\dfrac{a}{4}\times8+4b=2a+4b$

a, b는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+4^2)(a^2+b^2)\ge(2a+4b)^2$

$20\times10\ge(2a+4b)^2$ ($\because$ ㉠)

이때 $2a+4b>0$이므로

$0<2a+4b\le10\sqrt{2}$ (단, 등호는 $b=2a$일 때 성립)

따라서 구하는 최댓값은 $10\sqrt{2}$이다.

Ⅲ-1 01 함수의 뜻과 그래프

함수의 뜻

개념 Check 177쪽

1 답 ㄱ, ㄷ

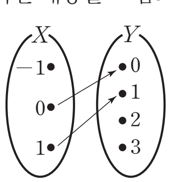
2 답 (1) 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{4, 5, 6\}$, 치역: $\{5\}$
(2) 정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역: $\{a, b, c\}$, 치역: $\{a, b\}$

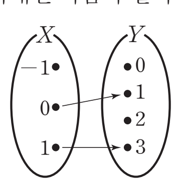
3 답 (1) $\{0, 1, 2\}$ (2) $\{0, 1\}$ (3) $\{2, 3\}$ (4) $\{0\}$
(1) $f(-1)=0$, $f(0)=1$, $f(1)=2$이므로 치역은 $\{0, 1, 2\}$
(2) $f(-1)=0$, $f(0)=1$, $f(1)=0$이므로 치역은 $\{0, 1\}$
(3) $f(-1)=3$, $f(0)=2$, $f(1)=3$이므로 치역은 $\{2, 3\}$
(4) $f(-1)=0$, $f(0)=0$, $f(1)=0$이므로 치역은 $\{0\}$

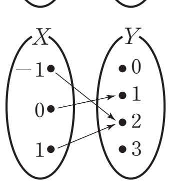
4 답 ㄱ, ㄷ
ㄱ. $f(-1)=1$, $f(1)=-1$, $g(-1)=1$, $g(1)=-1$
$\therefore f=g$
ㄴ. $f(-1)=-2$, $f(1)=2$, $g(-1)=1$, $g(1)=3$
$\therefore f\neq g$
ㄷ. $f(-1)=1$, $f(1)=1$, $g(-1)=1$, $g(1)=1$
$\therefore f=g$
따라서 보기에서 $f=g$인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

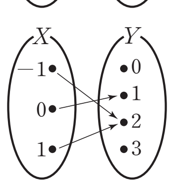
문제 178~180쪽

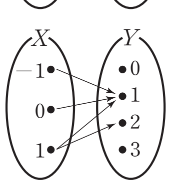
01-1 답 ㄷ, ㄹ, ㅂ
주어진 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

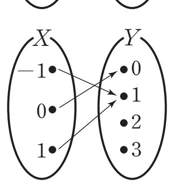
ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


ㅁ.


ㅂ.


ㄱ, ㄴ. 집합 X의 원소 -1에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
ㄷ, ㄹ, ㅂ. 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
ㅁ. 집합 X의 원소 1에 대응하는 집합 Y의 원소가 2개이므로 함수가 아니다.
따라서 보기에서 X에서 Y로의 함수인 것은 ㄷ, ㄹ, ㅂ이다.

02-1 답 2
$\sqrt{2}$는 무리수이므로
$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2=2$
1은 유리수이므로
$f(1)=-1+1=0$
$\therefore f(\sqrt{2})+f(1)=2+0=2$

02-2 답 3
$f(-1)=a-1$, $f(0)=-1$, $f(2)=4a-1$이므로
$a-1+(-1)+4a-1=12$, $5a=15$
$\therefore a=3$

02-3 답 9
1의 양의 약수는 1의 1개이므로
$f(1)=1$
$2^2=4$의 양의 약수는 1, 2, 4의 3개이므로
$f(2)=3$
$3^2=9$의 양의 약수는 1, 3, 9의 3개이므로
$f(3)=3$
$4^2=16$의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16의 5개이므로
$f(4)=5$
$5^2=25$의 양의 약수는 1, 5, 25의 3개이므로
$f(5)=3$
따라서 함수 f의 치역은 $\{1, 3, 5\}$이므로 치역의 모든 원소의 합은
$1+3+5=9$

03-1 답 1
$f=g$에서 $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$
$f(0)=g(0)$에서
$b=a$ ⋯⋯ ㉠
$f(1)=g(1)$에서
$a+b=1+a$ $\therefore b=1$
이를 ㉠에 대입하면
$a=1$
$\therefore ab=1\times 1=1$

03-2 답 5

$f=g$에서 $f(-3)=g(-3)$, $f(0)=g(0)$, $f(3)=g(3)$

$f(-3)=g(-3)$, $f(3)=g(3)$에서

$17=3a+b$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(0)=g(0)$에서 $b=-1$

이를 ㉠에 대입하면

$3a-1=17$, $3a=18$ $\therefore a=6$

$\therefore a+b=6+(-1)=5$

03-3 답 7

$f(x)=g(x)$이어야 하므로

$2x^2-2=x^3-x$, $x^3-2x^2-x+2=0$

$(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 집합 X는 집합 $\{-1, 1, 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 구하는 집합 X의 개수는

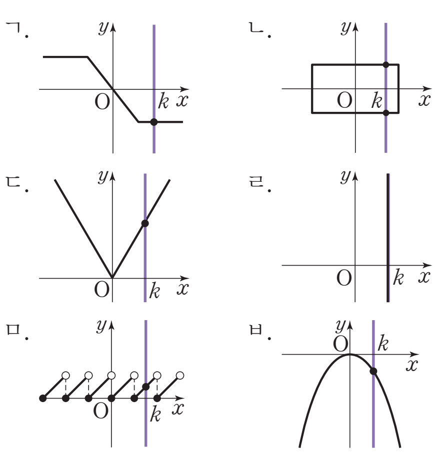
$2^3-1=7$

2 함수의 그래프

문제 182쪽

04-1 답 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ

주어진 그래프 위에 직선 $x=k$(k는 상수)를 그어 교점을 나타내면 다음과 같다.



따라서 보기에서 함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ이다.

3 여러 가지 함수

개념 Check 184쪽

1 답 (1) ㄹ, ㅁ, ㅂ (2) ㅁ, ㅂ (3) ㅁ (4) ㄴ

문제 185~187쪽

05-1 답 (1) ㄴ, ㄹ (2) ㄴ (3) ㄱ

(1) ㄱ. $x_1 \neq x_2$일 때, $f(x_1)=f(x_2)=-3$이므로 일대일대응이 아니다.

ㄷ. $1 \neq -1$이지만 $f(1)=f(-1)$이므로 일대일대응이 아니다.

ㄴ, ㄹ. $x_1 \neq x_2$일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$이고, 공역과 치역이 모두 실수 전체의 집합이므로 일대일대응이다.

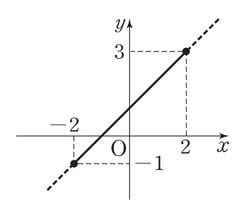
(2) 항등함수는 $f(x)=x$이므로 ㄴ이다.

(3) 상수함수는 $f(x)=c$ (c는 상수) 꼴이므로 ㄱ이다.

06-1 답 2

(i) $a>0$일 때,

함수 f가 일대일대응이려면 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-2, -1)$, $(2, 3)$을 지나야 한다.



$f(-2)=-1$에서

$-2a+b=-1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=3$에서

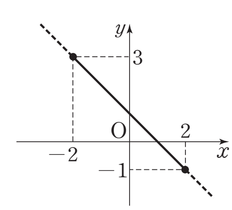
$2a+b=3$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

$\therefore a^2+b^2=1^2+1^2=2$

(ii) $a<0$일 때,

함수 f가 일대일대응이려면 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-2, 3)$, $(2, -1)$을 지나야 한다.



$f(-2)=3$에서

$-2a+b=3$ $\cdots\cdots$ ㉢

$f(2)=-1$에서

$2a+b=-1$ $\cdots\cdots$ ㉣

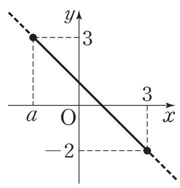
㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+1^2=2$

(i), (ii)에서 $a^2+b^2=2$

06-2 답 -1

함수 f가 일대일대응이려면 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(a,\ 3)$, $(3,\ -2)$를 지나야 한다.



$f(a)=3$에서 $-a+b=3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(3)=-2$에서 $-3+b=-2$

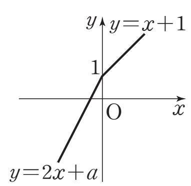
$\therefore\ b=1$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-2$

$\therefore\ a+b=-2+1=-1$

06-3 답 1

함수 f가 일대일대응이려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 직선 $y=2x+a$가 점 $(0,\ 1)$을 지나야 하므로 $a=1$

07-1 답 7

함수 f는 항등함수이므로

$f(x)=x$ $\qquad\therefore\ f(5)=5$

함수 g는 상수함수이고 $f(2)=g(2)=2$이므로

$g(x)=2$ $\qquad\therefore\ g(5)=2$

$\therefore\ f(5)+g(5)=5+2=7$

07-2 답 50

$f(50)=1$이고 함수 f는 상수함수이므로 $f(x)=1$

따라서 $f(1)=f(3)=f(5)=\cdots=f(99)=1$이므로

$f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(99)=1\times 50=50$

07-3 답 7

함수 g는 항등함수이므로

$g(x)=x$ $\qquad\therefore\ g(3)=3$

$f(1)=g(3)=3$이므로 $f(1)+f(3)=f(4)$에서

$3+f(3)=f(4)$

이때 함수 f는 일대일대응이므로 $f(3)=1,\ f(4)=4$

함수 h는 상수함수이므로 $h(3)=h(4)=g(3)=3$

$\therefore\ f(4)+h(3)=4+3=7$

4 함수의 개수

문제 189～190쪽

08-1 답 256, 24, 4

함수의 개수는 $4^4=256$

일대일대응의 개수는 $4!=4\times 3\times 2\times 1=24$

상수함수의 개수는 4

08-2 답 24

주어진 조건을 만족시키는 함수 f는 일대일함수이므로 구하는 함수 f의 개수는

${}_4P_3=4\times 3\times 2=24$

09-1 답 5

집합 Y의 원소 5, 6, 7, 8, 9 중 4개를 택하여 크기가 작은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수 f의 개수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$

09-2 답 120

$f(1)$의 값은 $f(1)\le 1$에서 1의 1가지

$f(2)$의 값은 $f(2)\le 2$에서 1, 2의 2가지

$f(3)$의 값은 $f(3)\le 3$에서 1, 2, 3의 3가지

$f(4)$의 값은 $f(4)\le 4$에서 1, 2, 3, 4의 4가지

$f(5)$의 값은 $f(5)\le 5$에서 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

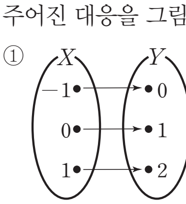
따라서 구하는 함수 f의 개수는

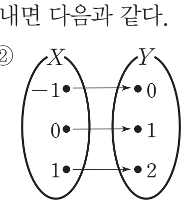
$1\times 2\times 3\times 4\times 5=120$

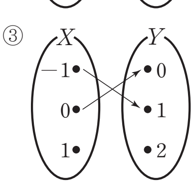
연습문제 191～193쪽

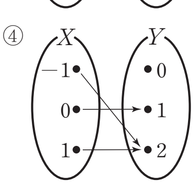
1 ③	**2** 3	**3** 3	**4** ①	**5** $\frac{3}{5}$
6 ②	**7** -1	**8** 3	**9** ④	**10** ③
11 ②	**12** $b<3$	**13** ⑤	**14** 3	**15** 120
16 ⑤	**17** 96	**18** ②	**19** 12	**20** 120

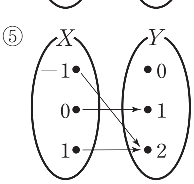
1 주어진 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


따라서 X에서 Y로의 함수가 아닌 것은 ③이다.

2 $\sqrt{2}+1$은 무리수이므로
$f(\sqrt{2}+1)=(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$
8은 유리수이므로
$f(8)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
$\therefore f(\sqrt{2}+1)-f(8)=3+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=3$

3 정의역이 $X=\{-1, 0, 1\}$이므로
$f(-1)=|-1-1|=2$
$f(0)=|0-1|=1$
$f(1)=|1-1|=0$
따라서 함수 f의 치역이 $\{0, 1, 2\}$이므로 치역의 모든 원소의 합은
$0+1+2=3$

4 주어진 함수는 일차함수이고 공역과 치역이 서로 같으므로
$f(-3)=-3$, $f(4)=4$ 또는 $f(-3)=4$, $f(4)=-3$이어야 한다.
(i) $a>0$일 때,
$f(-3)=-3$, $f(4)=4$이므로
$-3a+b=-3$, $4a+b=4$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$
그런데 $ab=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a<0$일 때,
$f(-3)=4$, $f(4)=-3$이므로
$-3a+b=4$, $4a+b=-3$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$
따라서 $ab=-1$이므로 조건을 만족시킨다.
(i), (ii)에서 $a=-1$, $b=1$
$\therefore a-b=-2$

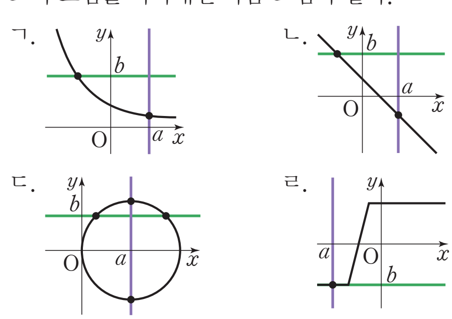
5 함수 $f(x)=ax+1$의 그래프는 점 $(0, 1)$을 지나고 공역이 $Y=\{y|1\le y\le 4\}$이므로
$a\ge 0$, $f(1)\le f(5)$
함수 f의 함숫값이 공역에 속해야 하므로
$1\le f(1)\le f(5)\le 4$
(i) $1\le f(1)$에서 $1\le a+1$ $\quad\therefore a\ge 0$
(ii) $f(1)\le f(5)$에서 $a+1\le 5a+1$ $\quad\therefore a\ge 0$
(iii) $f(5)\le 4$에서 $5a+1\le 4$ $\quad\therefore a\le \dfrac{3}{5}$
(i), (ii), (iii)에서 $0\le a\le \dfrac{3}{5}$
따라서 상수 a의 최댓값은 $\dfrac{3}{5}$, 최솟값은 0이므로 그 합은
$\dfrac{3}{5}+0=\dfrac{3}{5}$

6 정의역 X의 모든 원소 -1, 0, 1에 대하여 네 함수 f, g, h, k의 함숫값을 각각 구하면
$f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$
$g(-1)=1$, $g(0)=0$, $g(1)=1$
$h(-1)=1$, $h(0)=0$, $h(1)=-1$
$k(-1)=-1$, $k(0)=0$, $k(1)=1$
$\therefore f=k$

7 $f=g$에서
$f(0)=g(0)$, $f(a)=g(a)$, $f(a+3)=g(a+3)$
(i) $f(a)=g(a)$에서
$a^2+2a=a^3$, $a^3-a^2-2a=0$
$a(a+1)(a-2)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=0$ 또는 $a=2$
(ii) $f(a+3)=g(a+3)$에서
$(a+3)^2+2(a+3)=(a+3)^3$
$(a+3)\{(a+3)^2-(a+3)-2\}=0$
$(a+3)(a+4)(a+1)=0$
$\therefore a=-4$ 또는 $a=-3$ 또는 $a=-1$
(i), (ii)에서 $a=-1$

8 $f(x)=g(x)$이어야 하므로
$x^2+2=4x-1$, $x^2-4x+3=0$
$(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$
따라서 집합 X는 집합 $\{1, 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 구하는 집합 X의 개수는
$2^2-1=3$

9 주어진 그래프 위에 두 직선 $x=a$, $y=b$(a, b는 상수)를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.



함수의 그래프는 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만나므로 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. $\quad\therefore p=3$
일대일함수의 그래프는 직선 $y=b$와 오직 한 점에서 만나므로 ㄱ, ㄴ이다. $\quad\therefore q=2$
일대일대응의 그래프는 ㄴ이다. $\quad\therefore r=1$
$\therefore p+q+r=3+2+1=6$

10 ③ $x_1=-2$, $x_2=2$일 때, $-2\neq2$이지만

$f(-2)=f(2)=-2$이므로 함수 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$은 일대일대응이 아니다.

따라서 함수 f 중 일대일대응이 아닌 것은 ③이다.

11 함수 f가 항등함수이므로 $f(-3)=-3$, $f(1)=1$

$f(-3)=-3$에서

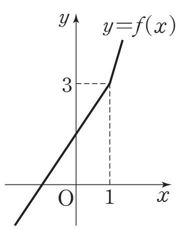
$-6+a=-3 \qquad \therefore a=3$

$f(1)=1$에서

$1-2+b=1 \qquad \therefore b=2$

$\therefore a\times b=3\times2=6$

12 함수 f가 일대일대응이려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 직선 $y=ax+b$가 점 $(1, 3)$을 지나고 기울기가 양수이어야 하므로

$a+b=3$, $a>0$

따라서 $a=3-b>0$에서

$b<3$

13 $f(x)=2ax+|4x+1|-3$에서

(i) $x\geq-\frac{1}{4}$일 때,

$f(x)=2ax+4x+1-3$

$=(2a+4)x-2$

(ii) $x<-\frac{1}{4}$일 때,

$f(x)=2ax-(4x+1)-3$

$=(2a-4)x-4$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}(2a+4)x-2 & \left(x\geq-\frac{1}{4}\right)\\(2a-4)x-4 & \left(x<-\frac{1}{4}\right)\end{cases}$$

이때 함수 f가 일대일대응이려면 $x\geq-\frac{1}{4}$, $x<-\frac{1}{4}$일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

따라서 두 직선의 기울기의 곱은 항상 양수이므로

$(2a+4)(2a-4)>0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>2$

14 함수 f는 항등함수이므로 $f(x)=x$

$\therefore f(4)=4$

함수 g는 상수함수이고 $g(3)=f(4)=4$이므로

$g(x)=4$

$\therefore h(7)=f(7)-g(7)=7-4=3$

15 주어진 조건을 만족시키는 함수 f는 일대일대응이므로 구하는 함수 f의 개수는

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

16 ㈎에서 $f(3)=3$이므로 ㈏를 만족시키려면

$f(1)>f(2)>f(3)=3>f(4)$

따라서 집합 Y의 원소 4, 5, 6, 7, 8 중 2개를 택하여 크기가 큰 것부터 순서대로 집합 X의 원소 1, 2에 대응시키고, 집합 Y의 원소 1, 2 중 1개를 택하여 집합 X의 원소 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수 f의 개수는

${}_5C_2\times{}_2C_1=\frac{5\times4}{2\times1}\times2=10\times2=20$

17 $1+f(1)\geq4$에서 $f(1)\geq3$이므로 $f(1)$의 값은

3, 4의 2가지

$2+f(2)\geq4$에서 $f(2)\geq2$이므로 $f(2)$의 값은

2, 3, 4의 3가지

$3+f(3)\geq4$에서 $f(3)\geq1$이므로 $f(3)$의 값은

1, 2, 3, 4의 4가지

$4+f(4)\geq4$에서 $f(4)\geq0$이므로 $f(4)$의 값은

1, 2, 3, 4의 4가지

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$2\times3\times4\times4=96$

18 $f(ab)=f(a)+f(b)$의 양변에 $a=2$, $b=1$을 대입하면

$f(2)=f(2)+f(1) \qquad \therefore f(1)=0$

$f(ab)=f(a)+f(b)$의 양변에 $a=2$, $b=\frac{1}{2}$을 대입하면

$f(1)=f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

$0=1+f\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

$\therefore f(1)+f\left(\frac{1}{2}\right)=0+(-1)=-1$

19 $3\leq n\leq5$인 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)f(n+2)$의 값이 짝수이므로 $f(3)\times f(5)$, $f(4)\times f(6)$, $f(5)\times f(7)$의 값은 모두 짝수이다.

집합 X의 원소 중 짝수인 것은 4, 6의 2개이다.

$f(4)\times f(6)$의 값이 짝수이려면 $f(4)$의 값과 $f(6)$의 값 중 적어도 하나는 짝수이고, $f(3)\times f(5)$의 값과 $f(5)\times f(7)$의 값이 모두 짝수이려면 $f(5)$의 값이 짝수이어야 한다.

따라서 $f(3)$, $f(7)$의 값은 모두 홀수이고 $f(3)+f(7)$의 최댓값은 $f(3)=5$, $f(7)=7$ 또는 $f(3)=7$, $f(7)=5$일 때이므로

$5+7=12$

20 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값은 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 3개를 택하여 크기가 작은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

또 함수 f는 일대일함수이므로 $f(1)$, $f(5)$의 값은 집합 Y의 남은 원소 3개 중 2개를 택하여 집합 X의 원소 1, 5에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$20\times6=120$

Ⅲ-1 02 합성함수

합성함수

개념 Check 195쪽

1 답 (1) **2** (2) **1** (3) $\boldsymbol{c}$ (4) $\boldsymbol{a}$

2 답 (1) **−4, 11** (2) **7, 23**

3 답 (1) $\boldsymbol{(f\circ g)(x)=-2x+4}$

(2) $\boldsymbol{(g\circ h)(x)=2x^2-1}$

(3) $\boldsymbol{((f\circ g)\circ h)(x)=2x^2}$

(4) $\boldsymbol{(f\circ(g\circ h))(x)=2x^2}$

(1) $(f\circ g)(x)=f(g(x))$
$=f(-2x+3)$
$=(-2x+3)+1$
$=-2x+4$

(2) $(g\circ h)(x)=g(h(x))$
$=g(-x^2+2)$
$=-2(-x^2+2)+3$
$=2x^2-1$

(3) $((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))$
$=(f\circ g)(-x^2+2)$
$=-2(-x^2+2)+4$
$=2x^2$

(4) $(f\circ(g\circ h))(x)=f((g\circ h)(x))$
$=f(2x^2-1)$
$=(2x^2-1)+1$
$=2x^2$

문제 196~200쪽

01-1 답 **6**

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(1)=3$

$(f\circ f\circ f)(3)=f(f(f(3)))=f(f(2))=f(1)=3$

$\therefore (f\circ f)(2)+(f\circ f\circ f)(3)=3+3=6$

01-2 답 **1**

$(f\circ g)(\sqrt{3})=f(g(\sqrt{3}))=f(2)=1$

$(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(-1)=0$

$\therefore (f\circ g)(\sqrt{3})+(g\circ f)(4)=1+0=1$

01-3 답 **6**

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=1$이고 $f(1)=2$이므로

$g(2)=1$

$(f\circ g)(3)=f(g(3))=1$이고 $g(3)=2$이므로

$f(2)=1$

이때 두 함수 f, g는 X에서 X로의 일대일대응이므로

$f(3)=3$, $g(1)=3$ $\therefore f(3)+g(1)=6$

02-1 답 **64**

$f(x)=2x$에서

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f(x))$
$=f(2x)=2\times2x=2^2x$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$
$=f(2^2x)=2\times2^2x=2^3x$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))$
$=f(2^3x)=2\times2^3x=2^4x$

⋮

$\therefore f^n(x)=2^nx$

따라서 $f^7(x)=2^7x$이므로 $f^7\left(\frac{1}{2}\right)=2^7\times\frac{1}{2}=64$

02-2 답 **1**

$f(x)=1-x$에서

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f(x))$
$=f(1-x)=1-(1-x)=x$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$
$=f(x)=1-x$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))$
$=f(1-x)=1-(1-x)=x$

⋮

$\therefore f^n(x)=\begin{cases}1-x & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

따라서 $f^{1000}(x)=x$, $f^{1001}(x)=1-x$이므로

$f^{1000}(3)+f^{1001}(3)=3+(-2)=1$

02-3 답 **6**

$f(1)=2,\ f(2)=1$이므로

$f^2(1)=(f\circ f^1)(1)=f(f(1))=f(2)=1$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(1)=2$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(2)=1$

$\vdots$

즉, $f^n(1)$의 값은 2, 1이 반복된다.

$\therefore f^{101}(1)=2$

$f(4)=3,\ f(3)=4$이므로

$f^2(4)=(f\circ f^1)(4)=f(f(4))=f(3)=4$

$f^3(4)=(f\circ f^2)(4)=f(f^2(4))=f(4)=3$

$f^4(4)=(f\circ f^3)(4)=f(f^3(4))=f(3)=4$

$\vdots$

즉, $f^n(4)$의 값은 3, 4가 반복된다.

$\therefore f^{104}(4)=4$

$\therefore f^{101}(1)+f^{104}(4)=2+4=6$

03-1 답 **-2**

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x+a)$

$=2(3x+a)-1=6x+2a-1$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)$

$=3(2x-1)+a=6x+a-3$

$f\circ g=g\circ f$에서 $6x+2a-1=6x+a-3$

즉, $2a-1=a-3$이므로 $a=-2$

03-2 답 **3**

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+b)$

$=ax+b+c$

즉, $ax+b+c=3x-2$이므로

$a=3,\ b+c=-2$ …… ㉠

따라서 $f(x)=3x+b$이므로 $f(1)=2$에서

$3+b=2$ $\therefore b=-1$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $c=-1$

$\therefore a-b+c=3-(-1)+(-1)=3$

03-3 답 **1**

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$

$=a(ax+b)+b=a^2x+b(a+1)$

이때 $f\circ f=f$이므로 $a^2x+b(a+1)=ax+b$

$\therefore a^2=a,\ b(a+1)=b$

$a^2=a$에서 $a(a-1)=0$ $\therefore a=0$ 또는 $a=1$

그런데 $f(x)=ax+b$가 일차함수이므로 $a=1$

이를 $b(a+1)=b$에 대입하면

$2b=b$ $\therefore b=0$

$\therefore a-b=1-0=1$

04-1 답 (1) $\boldsymbol{h(x)=x+1}$ (2) $\boldsymbol{h(x)=x+3}$

(1) $(f\circ h)(x)=f(h(x))=3h(x)-1$

이때 $f\circ h=g$에서

$3h(x)-1=3x+2$

$\therefore h(x)=x+1$

(2) $(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(3x-1)$

이때 $h\circ f=g$에서

$h(3x-1)=3x+2$

$3x-1=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t+1}{3}$

$\therefore h(t)=3\times\dfrac{t+1}{3}+2=t+3$

$\therefore h(x)=x+3$

04-2 답 $\boldsymbol{f(x)=4x-5}$

$f\left(\dfrac{x+3}{2}\right)=2x+1$에서 $\dfrac{x+3}{2}=t$로 놓으면 $x=2t-3$

$\therefore f(t)=2(2t-3)+1=4t-5$

$\therefore f(x)=4x-5$

04-3 답 $\boldsymbol{h(x)=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}}$

$(h\circ g\circ f)(x)=h(g(f(x)))$

$=h(g(-x))$

$=h(-4x-3)$

이때 $h\circ g\circ f=f$에서

$h(-4x-3)=-x$

$-4x-3=t$로 놓으면 $x=-\dfrac{t+3}{4}$

$\therefore h(t)=-\left(-\dfrac{t+3}{4}\right)=\dfrac{1}{4}t+\dfrac{3}{4}$

$\therefore h(x)=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$

05-1 답 **풀이 참조**

주어진 그래프에서

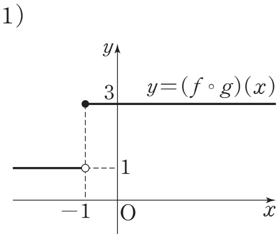
$f(x)=\begin{cases}1 & (x<1)\\ 3 & (x\ge 1)\end{cases},\ g(x)=x+2$

$\therefore (f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=\begin{cases}1 & (x+2<1)\\ 3 & (x+2\ge 1)\end{cases}$

$=\begin{cases}1 & (x<-1)\\ 3 & (x\ge -1)\end{cases}$

따라서 합성함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



05-2 답 풀이 참조

주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ -x+1 & (x\geq 0) \end{cases}$$

$$\therefore (f\circ f)(x)=f(f(x))=\begin{cases} f(x)+1 & (f(x)<0) \\ -f(x)+1 & (f(x)\geq 0) \end{cases}$$

이때 $f(0)=1$이므로 $f(x)$의 값이 0, 1이 되는 x의 값을 기준으로 구간을 나누어 $f\circ f$의 식을 구하면

(i) $x<-1$일 때,

$f(x)<0$이므로

$(f\circ f)(x)=f(x)+1$
$=(x+1)+1=x+2$

(ii) $-1\leq x<0$일 때,

$f(x)\geq 0$이므로

$(f\circ f)(x)=-f(x)+1$
$=-(x+1)+1=-x$

(iii) $0\leq x\leq 1$일 때,

$f(x)\geq 0$이므로

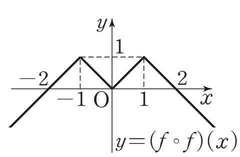
$(f\circ f)(x)=-f(x)+1$
$=-(-x+1)+1=x$

(iv) $x>1$일 때,

$f(x)<0$이므로

$(f\circ f)(x)=f(x)+1$
$=(-x+1)+1=-x+2$

(i)~(iv)에서 합성함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



연습문제 201~202쪽

1 ③	**2** 5	**3** ①	**4** 7	**5** ④
6 $\frac{3}{2}$	**7** ④	**8** 2	**9** ①	**10** ③
11 $\frac{3}{4}$	**12** ⑤	**13** 6		

1 $(g\circ f)(3)-(f\circ g)(3)=g(f(3))-f(g(3))$
$=g(4)-f(1)$
$=3-5=-2$

2 $(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=1$

$(f\circ f)(6)=f(f(6))=f(3)=4$

$\therefore (f\circ f)(1)+(f\circ f)(6)=1+4=5$

3 $(f\circ g\circ f)(\sqrt{3})=f(g(f(\sqrt{3})))$
$=f(g(3))=f(-2)$
$=-4$

4 $f(a)=b$ (b는 상수)라 하면

$(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(b)=2$

주어진 그래프에서 $f(b)=2$를 만족시키는 b의 값은

$b=2$ 또는 $b=4$

$\therefore f(a)=2$ 또는 $f(a)=4$

$f(a)=2$를 만족시키는 a의 값은 $a=2$ 또는 $a=4$

$f(a)=4$를 만족시키는 a의 값은 $a=1$

따라서 모든 a의 값의 합은 $2+4+1=7$

5 $f(x)=x+3$에서

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f(x))$
$=f(x+3)=x+3+3=x+3\times 2$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$
$=f(x+3\times 2)=x+3\times 2+3=x+3\times 3$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))$
$=f(x+3\times 3)=x+3\times 3+3=x+3\times 4$

$\vdots$

$\therefore f^n(x)=x+3n$

따라서 $f^k(2)=20$에서

$2+3k=20 \qquad \therefore k=6$

다른 풀이

$f(2)=2+3=5$

$f^2(2)=f(f(2))=f(5)=5+3=8$

$f^3(2)=f(f^2(2))=f(8)=8+3=11$

$f^4(2)=f(f^3(2))=f(11)=11+3=14$

$f^5(2)=f(f^4(2))=f(14)=14+3=17$

$f^6(2)=f(f^5(2))=f(17)=17+3=20$

$\therefore k=6$

6 $f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}$

$f^2\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

$f^3\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(f^2\left(\frac{3}{4}\right)\right)=f(1)=0$

$f^4\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(f^3\left(\frac{3}{4}\right)\right)=f(0)=0$

$\vdots$

$f^{10}\left(\frac{3}{4}\right)=0$

$\therefore f\left(\frac{3}{4}\right)+f^2\left(\frac{3}{4}\right)+f^3\left(\frac{3}{4}\right)+\cdots+f^{10}\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

7 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx-5)$

$=2(bx-5)+a$

$=2bx-10+a$

즉, $2bx-10+a=-4x-7$이므로

$2b=-4,\ -10+a=-7$

$\therefore\ a=3,\ b=-2$

따라서 $f(x)=2x+3$, $g(x)=-2x-5$이므로

$(g\circ f)(-4)=g(f(-4))=g(-5)=5$

8 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+a)$

$=a(bx+a)+b$

$=abx+a^2+b$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+b)$

$=b(ax+b)+a$

$=abx+b^2+a$

이때 $f\circ g=g\circ f$에서 $a^2+b=b^2+a$

$a^2-b^2-a+b=0,\ (a+b)(a-b)-(a-b)=0$

$(a-b)(a+b-1)=0$

그런데 f, g가 서로 다른 함수이므로

$a\neq b\qquad \therefore\ a+b=1$

따라서 $f(1)=a+b=1$, $g(1)=b+a=1$이므로

$f(1)+g(1)=2$

9 $(f\circ h)(x)=f(h(x))=\dfrac{1}{2}h(x)+1$

이때 $(f\circ h)(x)=g(x)$이므로

$\dfrac{1}{2}h(x)+1=-x^2+5$

$\therefore\ h(x)=-2x^2+8$

$\therefore\ h(3)=-18+8=-10$

10 $(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$

$=(h\circ g)(f(x))$

$=-f(x)+3$

따라서 $-f(x)+3=x^2+3x-2$이므로

$f(x)=-x^2-3x+5$

11 $f(2x-1)=x+3$에서 $2x-1=t$로 놓으면

$x=\dfrac{t+1}{2}$

$\therefore\ f(t)=\dfrac{t+1}{2}+3=\dfrac{1}{2}t+\dfrac{7}{2}$

t 대신 $\dfrac{1}{2}x-1$을 대입하면

$f\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)+\dfrac{7}{2}=\dfrac{1}{4}x+3$

따라서 $a=\dfrac{1}{4}$, $b=3$이므로 $ab=\dfrac{3}{4}$

12 ㄱ. $f(g(2))=f(2)=2$

ㄴ. $x>2$일 때, $g(f(x))=g(2)=2$

$|x|\le 2$일 때, $g(f(x))=g(x)=x^2-2$

$x<-2$일 때, $g(f(x))=g(-2)=2$

$\therefore\ (g\circ f)(x)=\begin{cases}2 & (|x|>2)\\ x^2-2 & (|x|\le 2)\end{cases}$ …… ㉠

$(g\circ f)(-x)=\begin{cases}2 & (|-x|>2)\\ (-x)^2-2 & (|-x|\le 2)\end{cases}$

$=\begin{cases}2 & (|x|>2)\\ x^2-2 & (|x|\le 2)\end{cases}$

$\therefore\ (g\circ f)(x)=(g\circ f)(-x)$

ㄷ. $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=\begin{cases}2 & (x^2-2>2)\\ x^2-2 & (|x^2-2|\le 2)\\ -2 & (x^2-2<-2)\end{cases}$

$x^2-2>2$에서

$x^2>4\qquad \therefore\ |x|>2$

$|x^2-2|\le 2$에서

$-2\le x^2-2\le 2,\ 0\le x^2\le 4$

$\therefore\ |x|\le 2$

$x^2-2<-2$에서 $x^2<0$이므로 이를 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $(f\circ g)(x)=\begin{cases}2 & (|x|>2)\\ x^2-2 & (|x|\le 2)\end{cases}$이므로

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ ($\because$ ㉠)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

13 $f(x)=\begin{cases}-x+3 & (0\le x\le 3)\\ 3x-9 & (3<x\le 4)\end{cases}$이므로

$(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=\begin{cases}-f(x)+3 & (0\le f(x)\le 3)\\ 3f(x)-9 & (3<f(x)\le 4)\end{cases}$

그런데 주어진 그래프에서 항상 $0\le f(x)\le 3$이므로

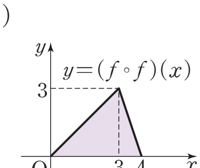
$(f\circ f)(x)=-f(x)+3\ (0\le f(x)\le 3)$

이때 $f(x)$의 값이 0, 3이 되는 x의 값을 기준으로 구간을 나누어 $f\circ f$의 식을 구하면

$(f\circ f)(x)=\begin{cases}-(-x+3)+3 & (0\le x\le 3)\\ -(3x-9)+3 & (3<x\le 4)\end{cases}$

$=\begin{cases}x & (0\le x\le 3)\\ -3x+12 & (3<x\le 4)\end{cases}$

따라서 $0\le x\le 4$에서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$\dfrac{1}{2}\times 4\times 3=6$

Ⅲ-1 03 역함수

1 역함수

개념 Check 205쪽

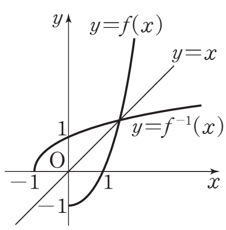
1 답 ㄴ, ㄹ

2 답 (1) **1** (2) **3** (3) **3** (4) **8**

3 답 (1) **5** (2) **7**

4 답 (1) **4** (2) **3** (3) **1** (4) **4**

5 답



문제 206~211쪽

01-1 답 **−1**

$f^{-1}(8)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=8$이므로

$-5k+3=8 \qquad \therefore k=-1$

$\therefore f^{-1}(8)=-1$

01-2 답 **−1**

$f(2)=1$에서 $2a+b=1$ ⋯⋯ ㉠

$f^{-1}(-5)=-1$에서 $f(-1)=-5$이므로

$-a+b=-5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

$\therefore a+b=-1$

01-3 답 **1**

$g^{-1}(1)=2$에서 $g(2)=1$이므로

$2+a=1 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-x+1$, $g(x)=x-1$

$\therefore g(3)=2$

$f^{-1}(2)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=2$이므로

$-k+1=2 \qquad \therefore k=-1 \qquad \therefore f^{-1}(2)=-1$

$\therefore f^{-1}(2)+g(3)=-1+2=1$

02-1 답 **2**

함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f는 일대일대응이어야 한다.

직선 $y=f(x)$의 기울기가 양수이므로 직선 $y=f(x)$가 두 점 $(2,\ b)$, $(a,\ 3)$을 지나야 한다.

$\therefore f(2)=b$, $f(a)=3$

$f(2)=b$에서 $b=-3$

$f(a)=3$에서 $2a-7=3 \qquad \therefore a=5$

$\therefore a+b=5+(-3)=2$

02-2 답 $\boldsymbol{a<-1}$

함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f는 일대일대응이어야 한다.

따라서 $x\ge1$, $x<1$일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$a+1<0 \qquad \therefore a<-1$

02-3 답 $\boldsymbol{a<-1}$ **또는** $\boldsymbol{a>1}$

$f(x)=|x-1|+ax-2$에서

(i) $x\ge1$일 때,

$f(x)=x-1+ax-2=(a+1)x-3$

(ii) $x<1$일 때,

$f(x)=-x+1+ax-2=(a-1)x-1$

함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f는 일대일대응이어야 하므로 (i), (ii)에서 $x\ge1$, $x<1$일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

따라서 $(a+1)(a-1)>0$이므로

$a<-1$ 또는 $a>1$

03-1 답 **−1**

$y=-2x+4$를 x에 대하여 풀면

$2x=-y+4 \qquad \therefore x=-\frac{1}{2}y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{2}x+2$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=2$이므로 $ab=-1$

03-2 답 $\boldsymbol{\frac{8}{3}}$

$y=ax+1$를 x에 대하여 풀면

$ax=y-1 \qquad \therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{1}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}$

즉, $\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}=\frac{1}{3}x+b$이므로

$\frac{1}{a}=\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{a}=b$

$\therefore a=3$, $b=-\frac{1}{3}$

$\therefore a+b=\frac{8}{3}$

03-**3** 답 $g(x)=2x-\frac{7}{3}$

$y=3x+1$이라 하고 x에 대하여 풀면

$3x=y-1 \qquad \therefore x=\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

$g\left(\frac{1}{6}x+1\right)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$이므로 $\frac{1}{6}x+1=t$로 놓으면

$x=6t-6$

$\therefore g(t)=\frac{1}{3}(6t-6)-\frac{1}{3}=2t-\frac{7}{3}$

$\therefore g(x)=2x-\frac{7}{3}$

04-**1** 답 12

$(f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=(g^{-1}\circ f)(3)$

$\qquad=g^{-1}(f(3))$

$\qquad=g^{-1}(5)$

$g^{-1}(5)=k$ (k는 상수)라 하면 $g(k)=5$이므로

$\frac{1}{2}k-1=5 \qquad \therefore k=12$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=g^{-1}(5)=12$

04-**2** 답 -8

$(g\circ(g\circ f)^{-1}\circ g)(1)$

$=(g\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ g)(1)$

$=(g\circ f^{-1})(1)$ ◀ $g^{-1}\circ g=I$

$=g(f^{-1}(1))$

$f^{-1}(1)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=1$이므로

$-4k-7=1 \qquad \therefore k=-2$

$\therefore f^{-1}(1)=-2$

$\therefore (g\circ(g\circ f)^{-1}\circ g)(1)=g(f^{-1}(1))$

$\qquad=g(-2)=-8$

04-**3** 답 0

$(f^{-1}\circ g^{-1})(2)=(g\circ f)^{-1}(2)$

$(g\circ f)^{-1}(2)=k$ (k는 상수)라 하면 $(g\circ f)(k)=2$이므로

$3k+2=2 \qquad \therefore k=0$

$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1})(2)=0$

05-**1** 답 4

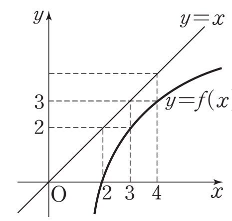
$(f\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ f^{-1})(2)$

$\qquad=f^{-1}(f^{-1}(2)) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f^{-1}(2)=k$ (k는 상수)라 하면

$f(k)=2$

오른쪽 그림에서 $f(3)=2$이므로 $k=3$



$\therefore f^{-1}(2)=3$

이를 ㉠에 대입하면

$(f\circ f)^{-1}(2)=f^{-1}(f^{-1}(2))$

$\qquad=f^{-1}(3)$

또 $f^{-1}(3)=l$ (l은 상수)이라 하면 $f(l)=3$

위의 그림에서 $f(4)=3$이므로 $l=4$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(2)=f^{-1}(3)=4$

05-**2** 답 ③

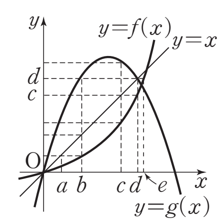
$h(c)=(f\circ g\circ f^{-1})(c)=f(g(f^{-1}(c))) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f^{-1}(c)=k$ (k는 상수)라 하면

$f(k)=c$

오른쪽 그림에서 $f(d)=c$이므로

$k=d \qquad \therefore f^{-1}(c)=d$



이를 ㉠에 대입하면

$h(c)=f(g(f^{-1}(c)))$

$\qquad=f(g(d))$ ($\because g(d)=d$)

$\qquad=f(d)=c$

06-**1** 답 -2

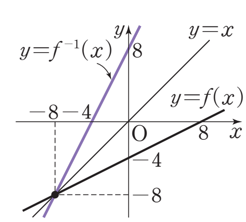
함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

교점의 x좌표가 2이므로 $2x+k=x$에 $x=2$를 대입하면

$4+k=2 \qquad \therefore k=-2$

06-**2** 답 -16

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\frac{1}{2}x-4=x$에서 $x=-8$

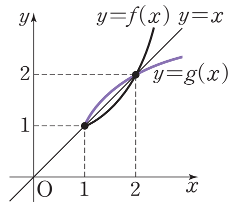
따라서 교점의 좌표는 $(-8, -8)$이므로

$a=-8$, $b=-8$

$\therefore a+b=-16$

06-3 답 $\sqrt{2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$(x-1)^2+1=x$에서 $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 두 교점의 좌표는 $(1, 1)$, $(2, 2)$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$

연습문제

212~214쪽

1 ①	2 ①	3 ②	4 ④	5 ③
6 ③	7 ⑤	8 ③	9 28	
10 $h(x)=3x-1$		11 ④	12 ②	13 ③
14 ①	15 ③	16 5	17 ③	18 ③
19 $-\frac{1}{4}<k<\frac{1}{4}$				

1 $f^{-1}(5)=2$에서 $f(2)=5$이므로

$2a+b=5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f^{-1}(6)=3$에서 $f(3)=6$이므로

$3a+b=6 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

$\therefore ab=3$

2 $f^{-1}(1)=k$(k는 상수)라 하면 $f(k)=1$

(i) $k\geq 0$일 때,

$k+5=1 \qquad \therefore k=-4$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k<0$일 때,

$-k^2+5=1$, $k^2=4 \qquad \therefore k=-2\ (\because k<0)$

(i), (ii)에서 $k=-2$

$\therefore f^{-1}(1)=-2$

3 $(f^{-1}\circ g)(4)=f^{-1}(g(4))=f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3)=k$(k는 상수)라 하면 $f(k)=3$이므로

$k=2$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(4)=f^{-1}(3)=2$

4 $(f\circ g^{-1})(a)=f(g^{-1}(a))=3g^{-1}(a)+1$

즉, $3g^{-1}(a)+1=1$이므로 $g^{-1}(a)=0$

$g^{-1}(a)=0$에서 $g(0)=a$이므로

$a=2$

5 함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f는 일대일대응이어야 한다.

직선 $y=f(x)$의 기울기가 양수이므로 직선 $y=f(x)$가 두 점 $(1, 1)$, $(4, 3)$을 지나야 한다.

$f(1)=1$에서 $a+b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(4)=3$에서 $4a+b=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$

$\therefore a-b=\frac{1}{3}$

6 $f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$

함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f는 일대일대응이어야 하므로

$a\geq 1$, $f(a)=a$

$f(a)=a$에서 $a^2-2a=a$

$a^2-3a=0$, $a(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a\geq 1)$

7 $y=x-3$이라 하고 x에 대하여 풀면 $x=y+3$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x+3$

$\therefore g^{-1}(x)=x+3$

$\therefore (f\circ g^{-1})(x)=f(g^{-1}(x))=f(x+3)$

$=2(x+3)+1=2x+7$

따라서 $a=2$, $b=7$이므로 $ab=14$

8 $(g\circ f)^{-1}(1)=k$(k는 상수)라 하면 $(g\circ f)(k)=1$이므로

$k=1$

$(f^{-1}\circ g)(3)=f^{-1}(g(3))=f^{-1}(1)=2$

$(g^{-1})^{-1}(2)=g(2)=2$

$\therefore (g\circ f)^{-1}(1)+(f^{-1}\circ g)(3)+(g^{-1})^{-1}(2)$

$=1+2+2=5$

9 $(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(a)=f^{-1}(a)$이므로

$f^{-1}(a)=3 \qquad \therefore f(3)=a$

$\therefore a=27+1=28$

10 $f\circ h=g$에서

$f^{-1}\circ f\circ h=f^{-1}\circ g \qquad \therefore h=f^{-1}\circ g$

$\therefore h(x)=(f^{-1}\circ g)(x)=f^{-1}(g(x))$

$=f^{-1}(6x+3)=\frac{6x+3-5}{2}=3x-1$

11 $(g^{-1}\circ(f\circ g^{-1})^{-1}\circ g)(x)$

$=(g^{-1}\circ g\circ f^{-1}\circ g)(x)$

$=(f^{-1}\circ g)(x)$ ◀ $g^{-1}\circ g=I$

$=f^{-1}(g(x))$

$=f^{-1}(2x+3)$ …… ㉠

$f(x)=x-1$에서 $y=x-1$이라 하고 x에 대하여 풀면

$x=y+1$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x+1$

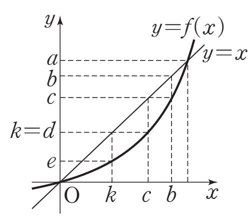
$\therefore f^{-1}(x)=x+1$

㉠에서 $f^{-1}(2x+3)=(2x+3)+1=2x+4$

따라서 $a=2$, $b=4$이므로

$a+b=6$

12 오른쪽 그림에서 $k=d$



$f^{-1}(k)=f^{-1}(d)$

$=p$ (p는 상수)

라 하면 $f(p)=d$

오른쪽 그림에서 $f(c)=d$이므로 $p=c$

$\therefore f^{-1}(d)=c$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(k)=f^{-1}(f^{-1}(d))=f^{-1}(c)$

$f^{-1}(c)=q$ (q는 상수)라 하면 $f(q)=c$

위의 그림에서 $f(b)=c$이므로 $q=b$

$\therefore f^{-1}(c)=b$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(k)=f^{-1}(c)=b$

13 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$x^2-x=x$에서 $x^2-2x=0$

$x(x-2)=0 \qquad \therefore x=2 \left(\because x\geq\frac{1}{2}\right)$

따라서 $\mathrm{P}(2,\ 2)$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

14 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 모두 점 $(3,\ -5)$를 지나므로

$f(3)=-5$, $f^{-1}(3)=-5$

$f(3)=-5$에서

$3a+b=-5$ …… ㉠

$f^{-1}(3)=-5$에서 $f(-5)=3$이므로

$-5a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$

$\therefore f(x)=-x-2$

$f^{-1}(1)=c$ (c는 상수)라 하면 $f(c)=1$이므로

$-c-2=1 \qquad \therefore c=-3$

$\therefore f^{-1}(1)=-3$

15 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같으므로

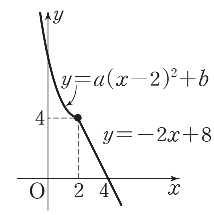
$x^2-2x+2=x$, $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 모든 근의 합은

$1+2=3$

16 함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f는 일대일대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 $y=a(x-2)^2+b$의 그래프가 점 $(2,\ 4)$를 지나야 하므로

$b=4$

$x\geq2$에서 직선 $y=-2x+8$의 기울기가 음수이므로 $x<2$에서 곡선 $y=a(x-2)^2+b$의 x^2의 계수가 양수이어야 한다.

$\therefore a>0$

따라서 정수 a의 최솟값은 1이므로 $a+b$의 최솟값은

$1+4=5$

17 $f(1)=1$, $f(2)=4$, $f(3)=3+a$, $f(4)=4+a$

함수 f의 역함수가 존재하려면 f는 일대일대응이어야 하므로

$3+a=2$, $4+a=3 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore f(1)=1$, $f(2)=4$, $f(3)=2$, $f(4)=3$

$g(1)=1$, $g(2)=3$, $g(3)=4$, $g(4)=2$이므로

$g^2(2)=g(g(2))=g(3)=4$,

$g^3(2)=g(g^2(2))=g(4)=2$,

$g^4(2)=g(g^3(2))=g(2)=3$,

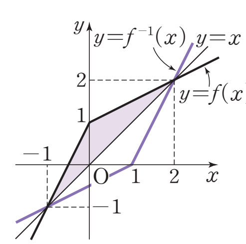
$\vdots$

따라서 $g^n(2)$의 값은 3, 4, 2가 이 순서대로 반복되므로

$g^{10}(2)=g(2)=3$, $g^{11}(2)=g^2(2)=4$

$\therefore a+g^{10}(2)+g^{11}(2)=-1+3+4=6$

18 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 다음과 같다.

(i) $x\geq0$일 때,

$\frac{1}{2}x+1=x$에서 $x=2$

(ii) $x<0$일 때,

$2x+1=x$에서 $x=-1$

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.

따라서 구하는 넓이는

$2\left(\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times1\times2\right)=3$

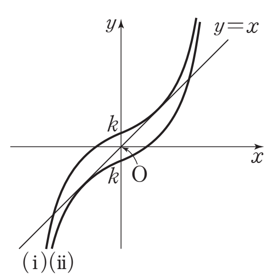
다른 풀이

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형은 마름모이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{1^2+(-1)^2}\times\sqrt{(2+1)^2+(2+1)^2}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=3$

19 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.



(i) $x\geq0$에서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 접하는 경우

$x^2+k=x$에서 $x^2-x+k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=1-4k=0\qquad\therefore\ k=\frac{1}{4}$

(ii) $x<0$에서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 접하는 경우

$-x^2+k=x$에서 $x^2+x-k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1+4k=0\qquad\therefore\ k=-\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는

$-\frac{1}{4}<k<\frac{1}{4}$

Ⅲ-2 01 유리함수

개념편

1 유리식

개념 Check 216쪽

1 답 (1) $\frac{a^2}{abc}$, $\frac{b^2}{abc}$, $\frac{c^2}{abc}$

(2) $\frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-1)(x-2)}$, $\frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$

2 답 (1) $\frac{2xy^2}{5a}$ (2) $\frac{x+4}{2x-3}$

문제 217~219쪽

01-**1** 답 (1) $\frac{2}{x-1}$ (2) 1

(1) $\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{2x^2+x}{x^3-1}$

$=\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+x+1)(x-1)}+\frac{2x^2+x}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\frac{x^2+x+1-(x^2-1)+2x^2+x}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\frac{2(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\frac{2}{x-1}$

(2) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4}\div\frac{x^2-4x+3}{2x^2+3x+1}\times\frac{x^2+3x-4}{2x^2-3x-2}$

$=\frac{(x-2)(x-3)}{(x+4)(x+1)}\times\frac{(x+1)(2x+1)}{(x-1)(x-3)}\times\frac{(x+4)(x-1)}{(2x+1)(x-2)}$

$=1$

01-**2** 답 $\frac{8}{x^8-1}$

$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}-\frac{4}{x^4+1}$

$=\frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{2}{x^2+1}-\frac{4}{x^4+1}$

$=\frac{2}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+1}-\frac{4}{x^4+1}$

$=\frac{2(x^2+1)-2(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}-\frac{4}{x^4+1}$

$=\frac{4}{x^4-1}-\frac{4}{x^4+1}$

$=\frac{4(x^4+1)-4(x^4-1)}{(x^4-1)(x^4+1)}=\frac{8}{x^8-1}$

02-**1** 답 $\boldsymbol{a=1,\ b=-2}$

주어진 식의 좌변을 통분하여 정리하면

$$\frac{a}{x+1}-\frac{bx+a}{x^2-x+1}=\frac{a(x^2-x+1)-(bx+a)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$=\frac{(a-b)x^2-(2a+b)x}{x^3+1}$$

이때 $\frac{(a-b)x^2-(2a+b)x}{x^3+1}=\frac{3x^2}{x^3+1}$이 x에 대한 항등식이므로 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a-b=3,\ 2a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-2$

02-**2** 답 **4**

주어진 식의 좌변을 통분하여 정리하면

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1}$$
$$=\frac{ax(x+1)+b(x-1)(x+1)+cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{(a+b+c)x^2+(a-c)x-b}{x(x^2-1)}$$

이때 $\frac{(a+b+c)x^2+(a-c)x-b}{x(x^2-1)}=\frac{5x^2-1}{x(x^2-1)}$이 x에 대한 항등식이므로 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a+b+c=5,\ a-c=0,\ b=1$

즉, $a+c=4,\ a-c=0$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ c=2$

$\therefore\ abc=2\times1\times2=4$

03-**1** 답 (1) $\boldsymbol{\frac{16(x+3)}{x(x+2)(x+4)(x+6)}}$

(2) $\boldsymbol{a+1}$

(3) $\boldsymbol{\frac{3}{(x+1)(x+7)}}$

(1) $$\frac{x+1}{x}-\frac{x+3}{x+2}-\frac{x+5}{x+4}+\frac{x+7}{x+6}$$
$$=\frac{x+1}{x}-\frac{(x+2)+1}{x+2}-\frac{(x+4)+1}{x+4}+\frac{(x+6)+1}{x+6}$$
$$=1+\frac{1}{x}-\left(1+\frac{1}{x+2}\right)-\left(1+\frac{1}{x+4}\right)+1+\frac{1}{x+6}$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+6}$$
$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)-\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)$$
$$=\frac{x+2-x}{x(x+2)}-\frac{x+6-(x+4)}{(x+4)(x+6)}$$
$$=\frac{2}{x(x+2)}-\frac{2}{(x+4)(x+6)}$$
$$=\frac{2(x+4)(x+6)-2x(x+2)}{x(x+2)(x+4)(x+6)}$$
$$=\frac{16(x+3)}{x(x+2)(x+4)(x+6)}$$

(2) $$\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{a}}}=\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{a+1}{a}}}=\frac{1}{1-\frac{a}{a+1}}$$
$$=\frac{1}{\frac{a+1-a}{a+1}}=a+1$$

(3) $$\frac{1}{(x+1)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+7)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+7}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+7}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{x+7-(x+1)}{(x+1)(x+7)}$$
$$=\frac{3}{(x+1)(x+7)}$$

03-**2** 답 $\boldsymbol{\frac{10}{x(x+10)}}$

$$\frac{1}{x^2+x}+\frac{2}{x^2+4x+3}+\frac{3}{x^2+9x+18}+\frac{4}{x^2+16x+60}$$
$$=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{(x+1)(x+3)}+\frac{3}{(x+3)(x+6)}+\frac{4}{(x+6)(x+10)}$$
$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+2\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)+3\times\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}\right)+4\times\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+10}=\frac{x+10-x}{x(x+10)}$$
$$=\frac{10}{x(x+10)}$$

2 유리함수의 그래프

개념 Check 222쪽

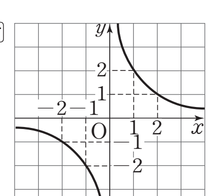
1 답 (1) $\boldsymbol{\{x\,|\,x\neq-2}$**인 실수**$\boldsymbol{\}}$

(2) $\boldsymbol{\{x\,|\,x\neq-4}$**인 실수**$\boldsymbol{\}}$

(3) $\boldsymbol{\{x\,|\,x\neq-5,\ x\neq5}$**인 실수**$\boldsymbol{\}}$

(4) $\boldsymbol{\{x\,|\,x}$**는 모든 실수**$\boldsymbol{\}}$

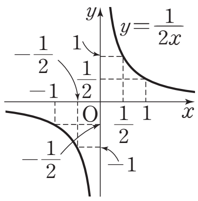
2 답

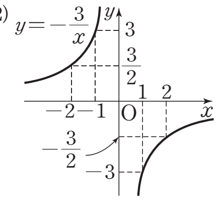


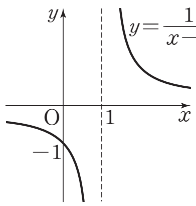
(1) $\boldsymbol{\{x\,|\,x\neq0}$**인 실수**$\boldsymbol{\}}$

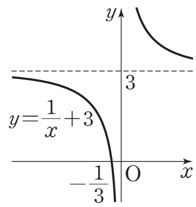
(2) $\boldsymbol{\{y\,|\,y\neq0}$**인 실수**$\boldsymbol{\}}$

(3) $\boldsymbol{x=0,\ y=0}$

3 답 (1)


(2)


(3)


(4)


4 답 (1) $\boldsymbol{y=-\frac{7}{x+2}+2}$

(2) $\boldsymbol{y=\frac{3}{x+1}-1}$

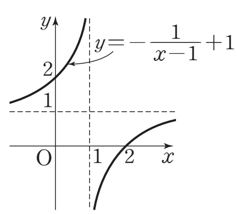
(3) $\boldsymbol{y=\frac{3}{x-1}+2}$

(4) $\boldsymbol{y=-\frac{7}{x-3}-3}$

문제 223~230쪽

04-**1** 답 (1)~(4) **풀이 참조**

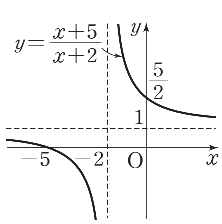
(1) $y=-\frac{1}{x-1}+1$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



∴ 정의역: $\{x|x\neq1$인 실수$\}$,
치역: $\{y|y\neq1$인 실수$\}$,
점근선의 방정식: $x=1$, $y=1$

(2) $y=\frac{x+5}{x+2}=\frac{(x+2)+3}{x+2}=\frac{3}{x+2}+1$

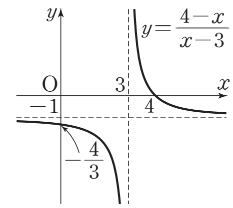
따라서 $y=\frac{x+5}{x+2}$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



∴ 정의역: $\{x|x\neq-2$인 실수$\}$,
치역: $\{y|y\neq1$인 실수$\}$,
점근선의 방정식: $x=-2$, $y=1$

(3) $y=\frac{4-x}{x-3}=\frac{-(x-3)+1}{x-3}=\frac{1}{x-3}-1$

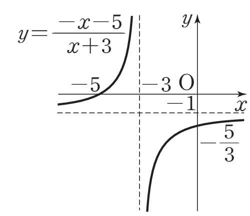
따라서 $y=\frac{4-x}{x-3}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



∴ 정의역: $\{x|x\neq3$인 실수$\}$,
치역: $\{y|y\neq-1$인 실수$\}$,
점근선의 방정식: $x=3$, $y=-1$

(4) $y=\frac{-x-5}{x+3}=\frac{-(x+3)-2}{x+3}=-\frac{2}{x+3}-1$

따라서 $y=\frac{-x-5}{x+3}$의 그래프는 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 위의 그림과 같다.



∴ 정의역: $\{x|x\neq-3$인 실수$\}$,
치역: $\{y|y\neq-1$인 실수$\}$,
점근선의 방정식: $x=-3$, $y=-1$

05-**1** 답 **3**

$y=\frac{ax+5}{x+1}=\frac{a(x+1)-a+5}{x+1}=\frac{-a+5}{x+1}+a$이므로

$y=\frac{ax+5}{x+1}$의 그래프는 $y=\frac{-a+5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

그래프를 평행이동하면 $y=\frac{2}{x}$의 그래프와 겹치므로

$-a+5=2$ ∴ $a=3$

05-**2** 답 **3**

$y=\frac{2x+3}{x+1}=\frac{2(x+1)+1}{x+1}=\frac{1}{x+1}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$y-b=\frac{1}{(x-a)+1}+2$

∴ $y=\frac{1}{x-a+1}+2+b$ ...... ㉠

$y=\frac{3x-2}{x-1}=\frac{3(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+3$의 그래프가 ㉠의 그래프와 같으므로

$-a+1=-1$, $2+b=3$ ∴ $a=2$, $b=1$

∴ $a+b=3$

05-3 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

ㄱ. $y=\dfrac{3}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\dfrac{2x+3}{x}=\dfrac{3}{x}+2$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\dfrac{3x+5}{x+3}=\dfrac{3(x+3)-4}{x+3}=-\dfrac{4}{x+3}+3$의 그래프는 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\dfrac{1-x}{x+2}=\dfrac{-(x+2)+3}{x+2}=\dfrac{3}{x+2}-1$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 보기의 함수에서 그 그래프가 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 평행이동하여 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

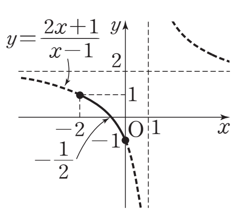
06-1 답 (1) **최댓값: 1, 최솟값: -1**

(2) **최댓값: 1, 최솟값: $-\dfrac{3}{2}$**

(1) $y=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+2$

$y=\dfrac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고 $x=-2$일 때 $y=1$, $x=0$일 때 $y=-1$이다.

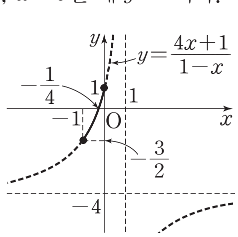
따라서 $-2\le x\le 0$에서 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 1이고 최솟값은 -1이다.



(2) $y=\dfrac{4x+1}{1-x}=\dfrac{4(x-1)+5}{-(x-1)}=-\dfrac{5}{x-1}-4$

$y=\dfrac{4x+1}{1-x}$의 그래프는 $y=-\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이고 $x=-1$일 때 $y=-\dfrac{3}{2}$, $x=0$일 때 $y=1$이다.

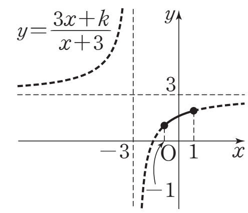
따라서 $-1\le x\le 0$에서 $y=\dfrac{4x+1}{1-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 1이고 최솟값은 $-\dfrac{3}{2}$이다.



06-2 답 1

$y=\dfrac{3x+k}{x+3}=\dfrac{3(x+3)+k-9}{x+3}=\dfrac{k-9}{x+3}+3$

$y=\dfrac{3x+k}{x+3}$의 그래프는 $y=\dfrac{k-9}{x}$ $(k<9)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 $-1\le x\le 1$에서 함수 $y=\dfrac{3x+k}{x+3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=\dfrac{3x+k}{x+3}$는 $x=1$에서 최댓값 2를 가지므로

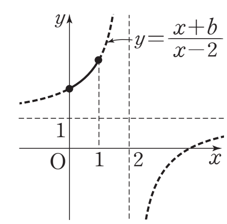
$\dfrac{3+k}{4}=2$, $3+k=8$ $\quad\therefore k=5$

따라서 함수 $y=\dfrac{3x+5}{x+3}$는 $x=-1$에서 최솟값을 가지므로 최솟값은 $\dfrac{-3+5}{-1+3}=1$

06-3 답 $a=0$, $b=-4$

$y=\dfrac{x+b}{x-2}=\dfrac{x-2+2+b}{x-2}=\dfrac{2+b}{x-2}+1$

$y=\dfrac{x+b}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{2+b}{x}$ $(b<-2)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 $a\le x\le 1$에서 $y=\dfrac{x+b}{x-2}$의 그래프는 위의 그림과 같다.



함수 $y=\dfrac{x+b}{x-2}$가 $x=1$에서 최댓값 3을 가지므로

$\dfrac{1+b}{-1}=3$ $\quad\therefore b=-4$

함수 $y=\dfrac{x-4}{x-2}$가 $x=a$에서 최솟값 2를 가지므로

$\dfrac{a-4}{a-2}=2$, $2a-4=a-4$ $\quad\therefore a=0$

07-1 답 1

$y=\dfrac{3x+1}{2x+1}=\dfrac{3\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=-\dfrac{1}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)}+\dfrac{3}{2}$

따라서 $y=\dfrac{3x+1}{2x+1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\dfrac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 점 $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.

즉, $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$이므로 $a+b=1$

07-**2** 답 **24**

$y=\dfrac{5x+2}{x-1}=\dfrac{5(x-1)+7}{x-1}=\dfrac{7}{x-1}+5$

따라서 $y=\dfrac{5x+2}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로 점 $(1,\ 5)$에 대하여 대칭이다.

이때 두 직선 $y=x+a$, $y=-x+b$가 점 $(1,\ 5)$를 지나므로

$5=1+a$, $5=-1+b$ $\quad\therefore a=4,\ b=6$

$\therefore ab=24$

07-**3** 답 $\boldsymbol{a=2,\ b=-1}$

$y=\dfrac{ax+1}{x+b}=\dfrac{a(x+b)-ab+1}{x+b}=\dfrac{-ab+1}{x+b}+a$

따라서 $y=\dfrac{ax+1}{x+b}$의 그래프는 $y=\dfrac{-ab+1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 점 $(-b,\ a)$에 대하여 대칭이다.

이때 두 직선 $y=x+1$, $y=-x+3$이 점 $(-b,\ a)$를 지나므로

$a=-b+1$, $a=b+3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

08-**1** 답 **3**

$y=\dfrac{ax+1}{x+b}=\dfrac{a(x+b)-ab+1}{x+b}=\dfrac{-ab+1}{x+b}+a$

따라서 함수 $y=\dfrac{ax+1}{x+b}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-b$인 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\neq a$인 실수$\}$이므로

$a=1$, $b=3$ $\quad\therefore ab=3$

08-**2** 답 **−1**

그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=2$인 유리함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x+1}+2\ (k\neq0)$

라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{1+1}+2$ $\quad\therefore k=-4$

따라서 $a=-4$, $b=1$, $c=2$이므로 $a+b+c=-1$

08-**3** 답 **2**

주어진 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-1}+2\ (k>0)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=-k+2$ $\quad\therefore k=1$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$y=\dfrac{1}{x-1}+2=\dfrac{1+2(x-1)}{x-1}=\dfrac{2x-1}{x-1}$

따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=-1$이므로

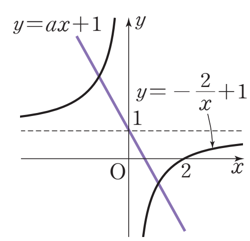
$abc=2$

09-**1** 답 $\boldsymbol{a<0}$

$y=-\dfrac{2}{x}+1$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=ax+1$은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

따라서 $y=-\dfrac{2}{x}+1$의 그래프와 직선 $y=ax+1$이 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$a<0$

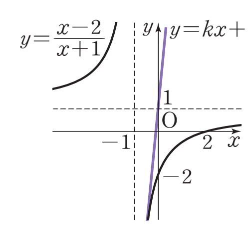


09-**2** 답 **12**

$y=\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{x+1-3}{x+1}=-\dfrac{3}{x+1}+1$이므로 $y=\dfrac{x-2}{x+1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

직선 $y=kx+1$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

이때 $y=\dfrac{x-2}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=kx+1$이 한 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $k=0$일 때,

직선 $y=1$은 점근선이므로 $y=\dfrac{x-2}{x+1}$의 그래프와 만나지 않는다.

(ii) $k\neq0$일 때,

$\dfrac{x-2}{x+1}=kx+1$에서

$x-2=(kx+1)(x+1)$

$x-2=kx^2+kx+x+1$

$\therefore kx^2+kx+3=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-12k=0$, $k(k-12)=0$

$\therefore k=12\ (\because k\neq0)$

(i), (ii)에서 $k=12$

10-**1** 답 **31**

$f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$에서

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f(x))$

$=f\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)=\dfrac{2\times\dfrac{2x}{x+1}}{\dfrac{2x}{x+1}+1}$

$=\dfrac{\dfrac{4x}{x+1}}{\dfrac{2x+(x+1)}{x+1}}=\dfrac{4x}{3x+1}$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$

$=f\left(\dfrac{4x}{3x+1}\right)=\dfrac{2\times\dfrac{4x}{3x+1}}{\dfrac{4x}{3x+1}+1}$

$=\dfrac{\dfrac{8x}{3x+1}}{\dfrac{4x+(3x+1)}{3x+1}}=\dfrac{8x}{7x+1}$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))$

$=f\left(\dfrac{8x}{7x+1}\right)=\dfrac{2\times\dfrac{8x}{7x+1}}{\dfrac{8x}{7x+1}+1}$

$=\dfrac{\dfrac{16x}{7x+1}}{\dfrac{8x+(7x+1)}{7x+1}}=\dfrac{16x}{15x+1}$

따라서 $a=16$, $b=0$, $c=15$이므로

$a+b+c=31$

10-**2** 답 $\dfrac{\mathbf{2025}}{\mathbf{2024}}$

$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$에서

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f(x))$

$=f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}$

$=\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x-(x-1)}{x-1}}=x$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$

$=f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

따라서 자연수 n에 대하여 $f^{2n}(x)=x$는 항등함수이므로

$f^{2025}(x)=f^{1012\times2+1}(x)=f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

$\therefore f^{2025}(2025)=\dfrac{2025}{2024}$

11-**1** 답 $\boldsymbol{g(x)=\dfrac{2x-3}{x-4}}$

$(f\circ g)(x)=x$에서 $g(x)=f^{-1}(x)$이므로 함수 g는 함수 f의 역함수이다.

$y=\dfrac{4x-3}{x-2}$이라 하고 x에 대하여 풀면

$y(x-2)=4x-3$, $x(y-4)=2y-3$

$\therefore x=\dfrac{2y-3}{y-4}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{2x-3}{x-4}\qquad\therefore g(x)=\dfrac{2x-3}{x-4}$

11-**2** 답 $\mathbf{-1}$

$y=\dfrac{-x+a+2}{x-a}$라 하고 x에 대하여 풀면

$y(x-a)=-x+a+2$

$x(y+1)=ay+a+2$

$\therefore x=\dfrac{ay+a+2}{y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{ax+a+2}{x+1}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{ax+a+2}{x+1}$

이때 $f=f^{-1}$에서

$\dfrac{-x+a+2}{x-a}=\dfrac{ax+a+2}{x+1}\qquad\therefore a=-1$

11-**3** 답 **7**

$f(x)=\dfrac{ax-1}{bx+2}$의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$f(2)=1$에서

$\dfrac{2a-1}{2b+2}=1\qquad\therefore 2a-2b=3\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또 $y=f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$f^{-1}(2)=1$에서 $f(1)=2$

$\dfrac{a-1}{b+2}=2\qquad\therefore a-2b=5\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=-\dfrac{7}{2}\qquad\therefore ab=7$

연습문제 231~233쪽

1 $\dfrac{1}{x+1}$	**2** ①	**3** $\dfrac{99}{100}$	**4** 7	**5** ③
6 ④	**7** ①	**8** ①	**9** ⑤	**10** 1
11 ⑤	**12** ③	**13** ③	**14** 4	**15** 3
16 ②	**17** $2\sqrt{3}+3$	**18** $\dfrac{3}{5}$	**19** $0\le k<1$	
20 ④	**21** 3			

1 $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2x-2}{x^2-2x-3}$

$=\dfrac{x+1+2(x-3)-(2x-2)}{(x-3)(x+1)}$

$=\dfrac{x-3}{(x-3)(x+1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}$

2 주어진 식의 좌변을 통분하여 정리하면

$\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{(x+1)^3}$

$=\dfrac{a(x+1)^2+b(x+1)+c}{(x+1)^3}$

$=\dfrac{ax^2+(2a+b)x+a+b+c}{(x+1)^3}$

이때 $\dfrac{ax^2+(2a+b)x+a+b+c}{(x+1)^3}=\dfrac{x^2+4x+2}{(x+1)^3}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=1,\ 2a+b=4,\ a+b+c=2$

$\therefore\ a=1,\ b=2,\ c=-1$

$\therefore\ abc=-2$

3 $f(x)=x^2+x$에서

$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

$\therefore\ \dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\cdots+\dfrac{1}{f(99)}$

$=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}\right)$

$=1-\dfrac{1}{100}=\dfrac{99}{100}$

4 $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{1+x+1}{1+x}}}$

$=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1+x}{2+x}}$

$=1+\dfrac{1}{\dfrac{2+x+1+x}{2+x}}$

$=1+\dfrac{2+x}{3+2x}$

$=\dfrac{3+2x+2+x}{3+2x}$

$=\dfrac{5+3x}{3+2x}$

따라서 $\dfrac{5+3x}{3+2x}=\dfrac{3x+a}{bx+3}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=5,\ b=2\qquad \therefore\ a+b=7$

5 $\dfrac{x+y}{4}=\dfrac{y+z}{7}=\dfrac{z+x}{5}=k\,(k\neq0)$로 놓으면

$x+y=4k$ …… ㉠

$y+z=7k$ …… ㉡

$z+x=5k$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(x+y+z)=16k$

$\therefore\ x+y+z=8k$ …… ㉣

㉣에서 ㉡, ㉢, ㉠을 각각 빼면

$x=k,\ y=3k,\ z=4k$

$\therefore\ \dfrac{xyz}{x^3+y^3+z^3}=\dfrac{k\times3k\times4k}{k^3+(3k)^3+(4k)^3}$

$=\dfrac{12k^3}{92k^3}=\dfrac{3}{23}$

6 $y=\dfrac{3x+1}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+4}{x-1}=\dfrac{4}{x-1}+3$이므로 $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

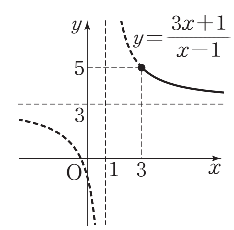
$x=a$일 때 $y=5$라 하면

$5=\dfrac{3a+1}{a-1}$, $5a-5=3a+1\qquad\therefore\ a=3$

따라서 $3<y\leq5$에서

$y=\dfrac{3x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은

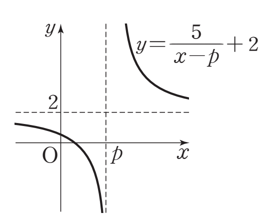
$\{x\,|\,x\geq3\}$



7 $y=\dfrac{5}{x-p}+2$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p,\ y=2$

(ⅰ) $p>0$일 때,

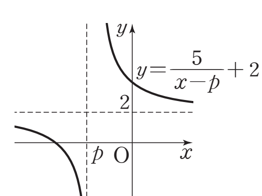
$y=\dfrac{5}{x-p}+2$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 하므로



$\dfrac{5}{-p}+2\geq0\qquad\therefore\ p\geq\dfrac{5}{2}$

(ⅱ) $p\leq0$일 때,

$y=\dfrac{5}{x-p}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 p의 값에 관계없이 항상 제3사분면을 지난다.



(ⅰ), (ⅱ)에서 $p\geq\dfrac{5}{2}$

따라서 정수 p의 최솟값은 3이다.

8 $y=\dfrac{1}{x+1}-3$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-a=\dfrac{1}{x+1}-3$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{x+1}-3+a$

이 그래프가 원점을 지나므로

$0=1-3+a$

$\therefore\ a=2$

9 ① $y=\dfrac{2x+2}{x}=\dfrac{2}{x}+2$

② $y=\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+2$

③ $y=\dfrac{3x-1}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+3$

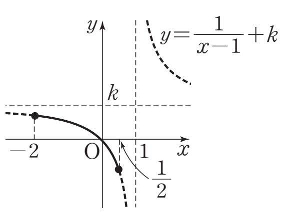
④ $y=\dfrac{-x+3}{x-1}=\dfrac{-(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}-1$

⑤ $y=\dfrac{-2x+3}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}-2$

따라서 ①, ②, ③, ④의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 평행이동한 것이므로 평행이동하여 서로 겹쳐질 수 있지만 ⑤의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 평행이동한 것이므로 겹쳐질 수 없다.

10 $y=\dfrac{1}{x-1}+k$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

이때 $-2\le x\le\dfrac{1}{2}$에서 함수 $y=\dfrac{1}{x-1}+k$의 최댓값이 $\dfrac{2}{3}$이려면 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 함수 $y=\dfrac{1}{x-1}+k$가 $x=-2$에서 최댓값 $\dfrac{2}{3}$를 가지므로

$\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{-2-1}+k$

$\therefore\ k=1$

11 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-1}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+2$이므로

$y=\dfrac{2x+1}{x+1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a>0$이므로 직선 $y=x$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

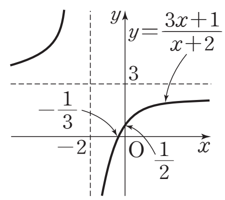
$y-2=x+1 \qquad \therefore\ y=x+3$

따라서 $a=1$, $b=3$이므로

$a+b=4$

12 $y=\dfrac{3x+1}{x+2}=\dfrac{3(x+2)-5}{x+2}=-\dfrac{5}{x+2}+3$

따라서 $y=\dfrac{3x+1}{x+2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



② 그래프는 기울기가 -1이고 점 $(-2,\ 3)$을 지나는 직선에 대하여 대칭이므로 직선 $y=-x+1$에 대하여 대칭이다.

③ $x=-1$일 때 $y=-2$, $x=3$일 때 $y=2$이므로 $-1\le x\le 3$에서 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

13 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{x-2}$의 그래프의 점근선 중 하나가 직선 $y=3$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-2}+3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(3,\ 10)$을 지나므로

$10=\dfrac{k}{3-2}+3 \qquad \therefore\ k=7$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$y=\dfrac{7}{x-2}+3=\dfrac{7+3(x-2)}{x-2}=\dfrac{3x+1}{x-2}$

따라서 $a=3$, $b=1$이므로

$ab=3$

14 $f(x)=1-\dfrac{1}{2x}=\dfrac{2x-1}{2x}$에서

$$\begin{aligned} f^2(x)&=(f\circ f^1)(x)=f(f(x))\\ &=f\left(\frac{2x-1}{2x}\right)=\frac{2\times\frac{2x-1}{2x}-1}{2\times\frac{2x-1}{2x}}\\ &=\frac{\frac{2x-1-x}{x}}{\frac{2x-1}{x}}=\frac{x-1}{2x-1}\end{aligned}$$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$

$=f\left(\dfrac{x-1}{2x-1}\right)=\dfrac{2\times\dfrac{x-1}{2x-1}-1}{2\times\dfrac{x-1}{2x-1}}$

$=\dfrac{\dfrac{2x-2-(2x-1)}{2x-1}}{\dfrac{2x-2}{2x-1}}=\dfrac{-1}{2x-2}$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))$

$=f\left(\dfrac{-1}{2x-2}\right)=\dfrac{2\times\dfrac{-1}{2x-2}-1}{2\times\dfrac{-1}{2x-2}}$

$=\dfrac{\dfrac{-1-(x-1)}{x-1}}{\dfrac{-1}{x-1}}=x$

따라서 $f^k(x)=x$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 4이다.

15 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(5)=(g^{-1}\circ f)(5)$

$=g^{-1}(f(5))$

$=g^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$

$g^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)=k$ (k는 상수)라 하면 $g(k)=\dfrac{2}{3}$이므로

$\dfrac{k+1}{2k}=\dfrac{2}{3}$, $3k+3=4k$ $\quad\therefore k=3$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(5)=g^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)=3$

16 $y=\dfrac{2x-1}{x-a}$을 x에 대하여 풀면

$y(x-a)=2x-1$, $(y-2)x=ay-1$ $\quad\therefore x=\dfrac{ay-1}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{ax-1}{x-2}$

함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-a}$과 그 역함수 $y=\dfrac{ax-1}{x-2}$의 그래프가 일치하므로

$a=2$

다른 풀이

$y=\dfrac{2x-1}{x-a}$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 일치하려면 $y=\dfrac{2x-1}{x-a}$의 그래프의 두 점근선의 교점이 직선 $y=x$ 위에 있어야 한다.

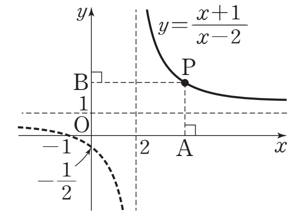
$y=\dfrac{2x-1}{x-a}=\dfrac{2(x-a)+2a-1}{x-a}=\dfrac{2a-1}{x-a}+2$이므로 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=2$

따라서 두 점근선의 교점의 좌표가 $(a, 2)$이므로

$a=2$

17 $y=\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{(x-2)+3}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x>2$에서 ㉠의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 ㉠의 그래프 위의 점 P의 좌표를

$\left(a, \dfrac{3}{a-2}+1\right)(a>2)$이라 하면

$\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{B}\left(0, \dfrac{3}{a-2}+1\right)$

즉, $\overline{\mathrm{PA}}=\dfrac{3}{a-2}+1$, $\overline{\mathrm{PB}}=a$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=\dfrac{3}{a-2}+1+a=a-2+\dfrac{3}{a-2}+3$

이때 $a-2>0$, $\dfrac{3}{a-2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=a-2+\dfrac{3}{a-2}+3$

$\geq 2\sqrt{(a-2)\times\dfrac{3}{a-2}}+3=2\sqrt{3}+3$

$\left(\text{단, 등호는 } a-2=\dfrac{3}{a-2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 $2\sqrt{3}+3$

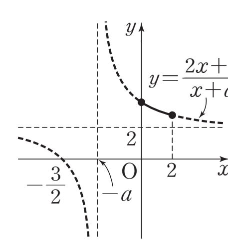
18 $y=\dfrac{2x+3}{x+a}=\dfrac{2(x+a)-2a+3}{x+a}$

$=\dfrac{-2a+3}{x+a}+2$ (단, $a>0$)

이므로 $y=\dfrac{2x+3}{x+a}$의 그래프는 $y=\dfrac{-2a+3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

(i) $-2a+3>0$, 즉 $0<a<\dfrac{3}{2}$일 때,

$0\leq x\leq 2$에서 함수 $y=\dfrac{2x+3}{x+a}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



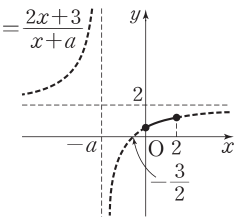
따라서 함수 $y=\dfrac{2x+3}{x+a}$은 $x=0$에서 최댓값 1을 가지므로

$\dfrac{3}{a}=1$ $\quad\therefore a=3$

그런데 $0<a<\dfrac{3}{2}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $-2a+3<0$, 즉 $a>\frac{3}{2}$일 때,

$0\le x\le 2$에서 함수 $y=\frac{2x+3}{x+a}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=\frac{2x+3}{x+a}$은 $x=2$에서 최댓값 1을 가지므로

$\frac{7}{2+a}=1 \qquad \therefore a=5$

(ⅲ) $-2a+3=0$, 즉 $a=\frac{3}{2}$일 때,

주어진 함수는 $y=2$로 상수함수이고, 최댓값이 1이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a=5$

따라서 함수 $y=\frac{2x+3}{x+5}\,(0\le x\le 2)$은 $x=0$에서 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은 $\frac{3}{5}$이다.

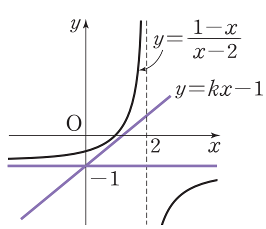
19 $A\cap B=\varnothing$이려면 유리함수 $y=\frac{1-x}{x-2}$의 그래프와 직선 $y=kx-1$이 만나지 않아야 한다.

$y=\frac{1-x}{x-2}=\frac{-(x-2)-1}{x-2}=-\frac{1}{x-2}-1$이므로

$y=\frac{1-x}{x-2}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

직선 $y=kx-1$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ -1)$을 지난다.

따라서 $y=\frac{1-x}{x-2}$의 그래프와 직선 $y=kx-1$이 만나지 않으려면 다음 그림과 같아야 한다.



(ⅰ) $k=0$일 때,

직선 $y=-1$은 점근선이므로 $y=\frac{1-x}{x-2}$의 그래프와 만나지 않는다.

(ⅱ) $k\ne 0$일 때,

$\frac{1-x}{x-2}=kx-1$에서 $1-x=(kx-1)(x-2)$

$1-x=kx^2-2kx-x+2$

$\therefore kx^2-2kx+1=0$

이 이차방정식의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-k<0$

$k(k-1)<0$

$\therefore 0<k<1$

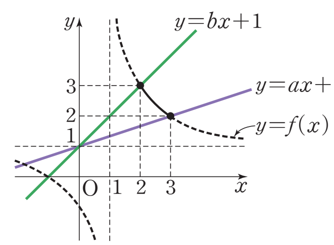
(ⅰ), (ⅱ)에서 $0\le k<1$

20 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$이라 하자.

$2\le x\le 3$에서 부등식 $ax+1\le f(x)\le bx+1$이 항상 성립해야 하므로 직선 $y=ax+1$은 $y=f(x)$의 그래프보다 아래쪽에, 직선 $y=bx+1$은 $y=f(x)$의 그래프보다 위쪽에 있어야 한다.

$f(x)=\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+1$

$f(2)=3$, $f(3)=2$이므로 $2\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 직선 $y=ax+1$은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 a의 값이 최대가 될 때는 직선 $y=ax+1$이 점 $(3,\ 2)$를 지날 때이다.

즉, $2=3a+1$이므로 $a=\frac{1}{3}$

또 직선 $y=bx+1$도 b의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 b의 값이 최소가 될 때는 직선 $y=bx+1$이 점 $(2,\ 3)$을 지날 때이다.

즉, $3=2b+1$이므로 $b=1$

따라서 구하는 합은

$\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

21 주어진 그래프에서 $f^{-1}(0)=3$, $f^{-1}(3)=0$이므로

$f(3)=0$, $f(0)=3$

$f^2(3)=(f\circ f^1)(3)=f(f(3))=f(0)=3$

$f^3(3)=(f\circ f^2)(3)=f(f^2(3))=f(3)=0$

$f^4(3)=(f\circ f^3)(3)=f(f^3(3))=f(0)=3$

$\vdots$

따라서 $f^n(3)=\begin{cases}0\ (n\text{은 홀수})\\3\ (n\text{은 짝수})\end{cases}$이므로

$f^{1002}(3)=3$

Ⅲ-2 02 무리함수

1 무리식

개념 Check 234쪽

1 답 (1) $-2\le x\le 1$ (2) $-3<x\le 2$

(1) $\sqrt{1-x}$의 값이 실수가 되려면

$1-x\ge 0 \quad \therefore x\le 1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\sqrt{2x+4}$의 값이 실수가 되려면

$2x+4\ge 0 \quad \therefore x\ge -2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-2\le x\le 1$

(2) $\sqrt{2-x}$의 값이 실수가 되려면

$2-x\ge 0 \quad \therefore x\le 2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$의 값이 실수가 되려면

$x+3>0 \quad \therefore x>-3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-3<x\le 2$

2 답 3

$$\begin{aligned}&\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+4x+4}\\&=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+2)^2}\\&=|x-1|+|x+2|\\&=-(x-1)+(x+2)\ (\because -2<x<1)\\&=3\end{aligned}$$

문제 235쪽

01-1 답 $\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x}}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}&=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})}\\&=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{-2}\\&=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}}&=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4})}\\&=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}}{-2}\\&=\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+6}}&=\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+6}}{(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+6})(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+6})}\\&=\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+6}}{-2}\\&=\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x+4}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}}+\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+6}}\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}+\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{x+4})\\&=\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x}}{2}\end{aligned}$$

01-2 답 $2+2\sqrt{2}$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$이므로

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}&=\frac{(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\\&=\frac{2(x+1)}{x-1}\\&=\frac{2(\sqrt{2}+1+1)}{\sqrt{2}+1-1} \quad \blacktriangleleft\ x=\sqrt{2}+1\text{ 대입}\\&=\frac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}\\&=2+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

01-3 답 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$x+y=2\sqrt{3},\ x-y=2,\ xy=2$이므로

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}&=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}\\&=\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}\\&=\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2}\\&=\sqrt{3}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

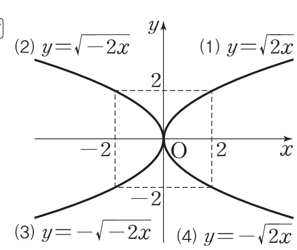
2 무리함수의 그래프

개념 Check 237쪽

1 답 (1) $\{x|x\ge 0\}$ (2) $\{x|x\ge 3\}$

(3) $\{x|x\le 0\}$ (4) $\left\{x\,\middle|\,x\le\dfrac{1}{2}\right\}$

2 답



(1) 정의역: $\{x|x\ge 0\}$, 치역: $\{y|y\ge 0\}$

(2) 정의역: $\{x|x\le 0\}$, 치역: $\{y|y\ge 0\}$

(3) 정의역: $\{x|x\le 0\}$, 치역: $\{y|y\le 0\}$

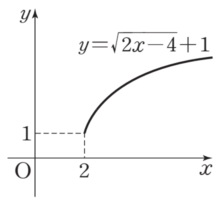
(4) 정의역: $\{x|x\ge 0\}$, 치역: $\{y|y\le 0\}$

문제 238~244쪽

02-1 답 (1)~(4) 풀이 참조

(1) $y=\sqrt{2x-4}+1=\sqrt{2(x-2)}+1$

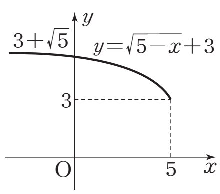
따라서 $y=\sqrt{2x-4}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x|x\geq 2\}$, 치역: $\{y|y\geq 1\}$

(2) $y=\sqrt{5-x}+3=\sqrt{-(x-5)}+3$

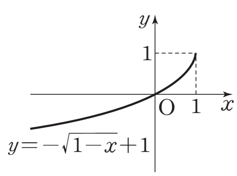
따라서 $y=\sqrt{5-x}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x|x\leq 5\}$, 치역: $\{y|y\geq 3\}$

(3) $y=-\sqrt{1-x}+1=-\sqrt{-(x-1)}+1$

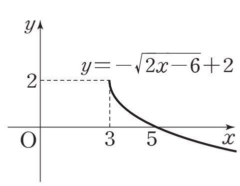
따라서 $y=-\sqrt{1-x}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x|x\leq 1\}$, 치역: $\{y|y\leq 1\}$

(4) $y=-\sqrt{2x-6}+2=-\sqrt{2(x-3)}+2$

따라서 $y=-\sqrt{2x-6}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

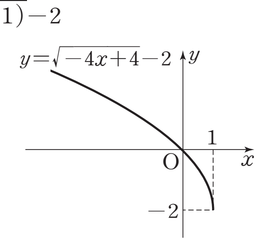


$\therefore$ 정의역: $\{x|x\geq 3\}$, 치역: $\{y|y\leq 2\}$

02-2 답 ㄴ, ㄷ

$y=\sqrt{-4x+4}-2=\sqrt{-4(x-1)}-2$

따라서 $y=\sqrt{-4x+4}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 정의역은 $\{x|x\leq 1\}$이다.

ㄴ. 치역은 $\{y|y\geq -2\}$이다.

ㄷ. 그래프는 원점을 지난다.

ㄹ. 그래프는 제2사분면, 제4사분면을 지난다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

03-1 답 -3

$y=\sqrt{-x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y+1=\sqrt{-(x-2)+1}$

$\therefore y=\sqrt{-x+3}-1$

이 함수의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=\sqrt{-x+3}-1$

$\therefore y=-\sqrt{-x+3}+1$

이 함수의 그래프가 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프와 겹쳐지므로

$a=-1,\ b=3,\ c=1$

$\therefore abc=-3$

03-2 답 -2

$y=\sqrt{4x+8}-2=\sqrt{4(x+2)}-2=2\sqrt{x+2}-2$이므로

$y=\sqrt{4x+8}-2$의 그래프는 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=2,\ m=-2,\ n=-2$이므로

$a+m+n=-2$

03-3 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $y=-\sqrt{-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. $y=\sqrt{-2x+4}=\sqrt{-2(x-2)}$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

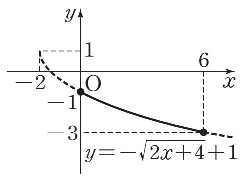
ㄷ. $y=\sqrt{x+3}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=-\sqrt{2-x}+1=-\sqrt{-(x-2)}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

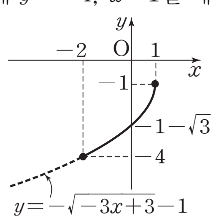
따라서 보기의 함수에서 그 그래프가 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

04-1 답 (1) **최댓값: -1, 최솟값: -3**
(2) **최댓값: -1, 최솟값: -4**

(1) $y=-\sqrt{2x+4}+1=-\sqrt{2(x+2)}+1$
$y=-\sqrt{2x+4}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고 $x=0$일 때 $y=-1$, $x=6$일 때 $y=-3$이다.
따라서 $0\le x\le 6$에서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 -1, 최솟값은 -3이다.

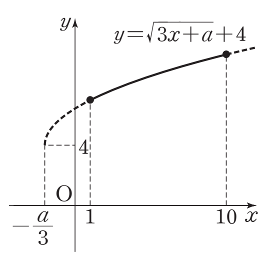


(2) $y=-\sqrt{-3x+3}-1=-\sqrt{-3(x-1)}-1$
$y=-\sqrt{-3x+3}-1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고 $x=-2$일 때 $y=-4$, $x=1$일 때 $y=-1$이다.
따라서 $-2\le x\le 1$에서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 -1, 최솟값은 -4이다.



04-2 답 **7**

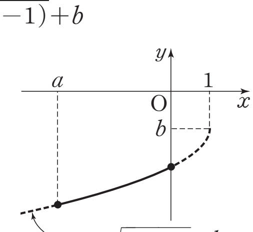
$y=\sqrt{3x+a}+4=\sqrt{3\left(x+\frac{a}{3}\right)}+4$
$y=\sqrt{3x+a}+4$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{a}{3}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=\sqrt{3x+a}+4$가 $x=10$에서 최댓값 10을 가지므로
$\sqrt{30+a}+4=10$, $\sqrt{30+a}=6$
$30+a=36$ $\therefore a=6$
따라서 함수 $y=\sqrt{3x+6}+4$는 $x=1$에서 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은
$\sqrt{3+6}+4=7$

04-3 답 **-4**

$y=-\sqrt{-x+1}+b=-\sqrt{-(x-1)}+b$
$y=-\sqrt{-x+1}+b$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=-\sqrt{-x+1}+b$가 $x=0$에서 최댓값 -2를 가지므로
$-2=-1+b$ $\therefore b=-1$
함수 $y=-\sqrt{-x+1}-1$이 $x=a$에서 최솟값 -3을 가지므로
$-3=-\sqrt{-a+1}-1$, $\sqrt{-a+1}=2$
$-a+1=4$ $\therefore a=-3$
$\therefore a+b=-3+(-1)=-4$

05-1 답 **5**

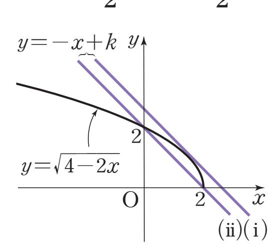
주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\,(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로
$y=-\sqrt{a(x+2)}-1$ …… ㉠
이 함수의 그래프가 점 $(0, -3)$을 지나므로
$-3=-\sqrt{2a}-1$, $\sqrt{2a}=2$
$2a=4$ $\therefore a=2$
이를 ㉠에 대입하여 정리하면
$y=-\sqrt{2(x+2)}-1=-\sqrt{2x+4}-1$
따라서 $a=2$, $b=4$, $c=-1$이므로
$a+b+c=5$

05-2 답 **2**

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\,(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을
$y=\sqrt{a(x+1)}-2$
라 하면 이 함수의 그래프가 원점을 지나므로
$0=\sqrt{a}-2$, $\sqrt{a}=2$
$\therefore a=4$
따라서 $y=\sqrt{4(x+1)}-2$의 그래프가 점 $(3, k)$를 지나므로
$k=\sqrt{4\times 4}-2=2$

06-1 답 (1) **$2\le k<\frac{5}{2}$** (2) **$k<2$ 또는 $k=\frac{5}{2}$** (3) **$k>\frac{5}{2}$**

$y=\sqrt{4-2x}=\sqrt{-2(x-2)}$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이므로 위치 관계는 위의 그림의 (i), (ii)를 기준으로 나누어 생각할 수 있다.



(ⅰ) 직선 $y=-x+k$와 $y=\sqrt{4-2x}$의 그래프가 접할 때,

$-x+k=\sqrt{4-2x}$에서 $x^2-2kx+k^2=4-2x$

$\therefore\ x^2-2(k-1)x+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-4)=0$

$-2k+5=0 \qquad \therefore\ k=\frac{5}{2}$

(ⅱ) 직선 $y=-x+k$가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때,

$0=-2+k \qquad \therefore\ k=2$

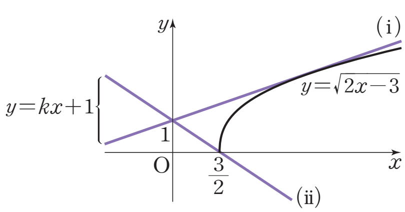
(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $2\le k<\frac{5}{2}$

(2) 한 점에서 만나려면 $k<2$ 또는 $k=\frac{5}{2}$

(3) 만나지 않으려면 $k>\frac{5}{2}$

06-2 답 $-\frac{2}{3}\le k\le\frac{1}{3}$

$y=\sqrt{2x-3}=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=kx+1$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 위치 관계는 다음 그림의 (ⅰ), (ⅱ)를 기준으로 나누어 생각할 수 있다.



(ⅰ) 직선 $y=kx+1$과 $y=\sqrt{2x-3}$의 그래프가 접할 때,

$kx+1=\sqrt{2x-3}$에서

$k^2x^2+2kx+1=2x-3$

$\therefore\ k^2x^2+2(k-1)x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-4k^2=0,\ 3k^2+2k-1=0$

$(k+1)(3k-1)=0 \qquad \therefore\ k=-1$ 또는 $k=\frac{1}{3}$

그런데 위의 그림에서 $k>0$이므로 $k=\frac{1}{3}$

(ⅱ) 직선 $y=kx+1$이 점 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지날 때,

$0=\frac{3}{2}k+1 \qquad \therefore\ k=-\frac{2}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 무리함수의 그래프와 직선이 만나려면

$-\frac{2}{3}\le k\le\frac{1}{3}$

07-1 답 $\frac{5}{2}$

$y=-\sqrt{2x-4}+1$의 치역이 $\{y|y\le1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\le1\}$이다.

$y=-\sqrt{2x-4}+1$에서

$y-1=-\sqrt{2x-4}$

양변을 제곱하여 x에 대하여 풀면

$y^2-2y+1=2x-4$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}y^2-y+\frac{5}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}\ (x\le1)$

따라서 $a=-1,\ b=\frac{5}{2},\ c=1$이므로

$a+b+c=\frac{5}{2}$

07-2 답 -12

$f^{-1}(1)=3$에서 $f(3)=1$이므로

$-\sqrt{-3-a}+2=1$

$\sqrt{-3-a}=1$

$-3-a=1 \qquad \therefore\ a=-4$

$\therefore\ f(x)=-\sqrt{-x+4}+2$

$f^{-1}(-2)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=-2$이므로

$-\sqrt{-k+4}+2=-2$

$\sqrt{-k+4}=4$

$-k+4=16 \qquad \therefore\ k=-12$

$\therefore\ f^{-1}(-2)=-12$

07-3 답 7

$g(13)=\sqrt{16}-1=3$이므로

$(g^{-1}\circ f)^{-1}(13)=(f^{-1}\circ g)(13)=f^{-1}(g(13))=f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=3$이므로

$\sqrt{2k+2}-1=3$

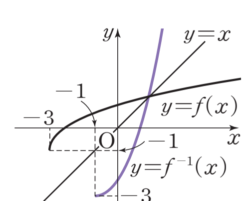
$\sqrt{2k+2}=4$

$2k+2=16 \qquad \therefore\ k=7$

$\therefore\ (g^{-1}\circ f)^{-1}(13)=f^{-1}(3)=7$

08-1 답 $(1,\ 1)$

$f(x)=\sqrt{x+3}-1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\sqrt{x+3}-1=x$, $\sqrt{x+3}=x+1$

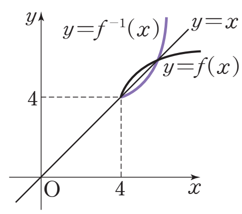
$x+3=x^2+2x+1$, $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0 \qquad \therefore x=1\ (\because x \geq -1)$

따라서 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.

08-2 답 $\sqrt{2}$

$f(x)=\sqrt{x-4}+4$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\sqrt{x-4}+4=x$, $\sqrt{x-4}=x-4$

$x-4=x^2-8x+16$, $x^2-9x+20=0$

$(x-4)(x-5)=0 \qquad \therefore x=4$ 또는 $x=5$

따라서 두 교점의 좌표는 $(4,\ 4)$, $(5,\ 5)$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(5-4)^2+(5-4)^2}=\sqrt{2}$

연습문제

245~247쪽

1 ④	**2** ⑤	**3** -3	**4** ①	**5** 5
6 3	**7** ②	**8** -1	**9** ⑤	**10** ③
11 ④	**12** 7	**13** ①	**14** ③	**15** 1
16 $\frac{25}{16}$	**17** ⑤	**18** $-2<k<-\frac{7}{4}$	**19** $\frac{1}{8}$	
20 ②				

1 $x+1 \geq 0$, $3-x>0$이어야 하므로

$-1 \leq x<3$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.

2 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$

$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

$=-\sqrt{1}+\sqrt{100}=9$

3 $y=\dfrac{ax+4}{x+b}=\dfrac{a(x+b)-ab+4}{x+b}=\dfrac{4-ab}{x+b}+a$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-b$, $y=a$이므로

$a=-3$, $b=-1$

$y=\sqrt{bx+a}=\sqrt{-x-3}$의 정의역은

$\{x \mid x \leq -3\}$

따라서 정의역에 속하는 실수의 최댓값은 -3이다.

4 $y=-\sqrt{x-a}+a+2$의 그래프가 점 $(a,\ -a)$를 지나므로

$-a=a+2 \qquad \therefore a=-1$

따라서 함수 $y=-\sqrt{x+1}+1$의 치역은

$\{y \mid y \leq 1\}$

5 함수 $y=\sqrt{-2x+a}+b$의 정의역은 $\left\{x \,\middle|\, x \leq \dfrac{a}{2}\right\}$, 치역은 $\{y \mid y \geq b\}$이므로

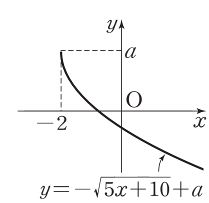
$\dfrac{a}{2}=1$, $b=3 \qquad \therefore a=2$

$\therefore a+b=5$

6 $y=-\sqrt{5x+10}+a=-\sqrt{5(x+2)}+a$이므로

$y=-\sqrt{5x+10}+a$의 그래프는 $y=-\sqrt{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

$y=-\sqrt{5x+10}+a$의 그래프가 제2, 3, 4사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $a>0$이어야 하고, $x=0$일 때 $y<0$이어야 하므로

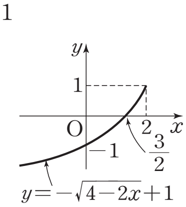
$-\sqrt{10}+a<0$

$\therefore 0<a<\sqrt{10}$

따라서 정수 a의 최댓값은 3이다.

7 $y=-\sqrt{4-2x}+1=-\sqrt{-2(x-2)}+1$

ㄱ. $y=-\sqrt{4-2x}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



ㄴ. $y=0$일 때, $0=-\sqrt{4-2x}+1$에서

$\sqrt{4-2x}=1$, $4-2x=1 \qquad \therefore x=\dfrac{3}{2}$

따라서 x축과 점 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$에서 만난다.

ㄷ. 제2사분면을 지나지 않는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

8 $y=\sqrt{ax}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$y+3=\sqrt{a(x+1)}+1$

$\therefore\ y=\sqrt{a(x+1)}-2$

이 함수의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면

$-y=\sqrt{a(-x+1)}-2$

$\therefore\ y=-\sqrt{-a(x-1)}+2$

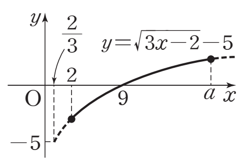
이 함수의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$1=-\sqrt{-a}+2,\ \sqrt{-a}=1$

$\therefore\ a=-1$

9 $y=\sqrt{3x-2}-5=\sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}-5$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{2}{3}$만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le a$에서 $y=\sqrt{3x-2}-5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=a$에서 최댓값 2를 가지므로

$2=\sqrt{3a-2}-5,\ \sqrt{3a-2}=7$

$3a-2=49\qquad \therefore\ a=17$

$x=2$에서 최솟값 m을 가지므로

$m=2-5=-3$

$\therefore\ a+m=17+(-3)=14$

10 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{-(x-2)}+1=\sqrt{-x+2}+1$

따라서 $a=2,\ b=1$이므로 $a+b=3$

11 $y=-\sqrt{a(x+b)}+c$의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이므로 주어진 그래프에서

$a<0,\ -b<0,\ c<0\qquad \therefore\ a<0,\ b>0,\ c<0$

12 $f(x)=\sqrt{ax+b}$라 하면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 두 점 $(2,\ 0)$, $(5,\ 7)$을 지나므로

$f^{-1}(2)=0,\ f^{-1}(5)=7\qquad \therefore\ f(0)=2,\ f(7)=5$

$f(0)=2$에서 $\sqrt{b}=2\qquad \therefore\ b=4$

$f(7)=5$에서 $\sqrt{7a+b}=5\qquad \therefore\ 7a+b=25$

$b=4$를 대입하면

$7a+4=25\qquad \therefore\ a=3$

$\therefore\ a+b=3+4=7$

13 $f(3)=\frac{3+3}{3-1}=3$이므로

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(3)$

$=(g^{-1}\circ f)(3)$

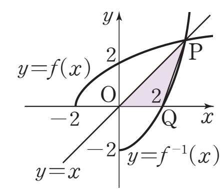
$=g^{-1}(f(3))=g^{-1}(3)$

$g^{-1}(3)=k$ (k는 상수)라 하면 $g(k)=3$이므로

$\sqrt{2k-1}=3,\ 2k-1=9\qquad \therefore\ k=5$

$\therefore\ (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(3)=5$

14 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



점 P는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\sqrt{2x+4}=x$

$2x+4=x^2,\ x^2-2x-4=0$

$\therefore\ x=1+\sqrt{5}\ (\because\ x\ge 0)$

$\therefore\ \mathrm{P}(1+\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5})$

한편 점 Q의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 $f^{-1}(a)=0$에서 $f(0)=a$이므로

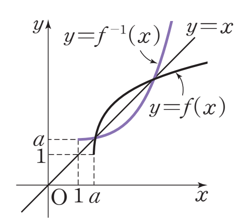
$\sqrt{4}=a\qquad \therefore\ a=2$

$\therefore\ \mathrm{Q}(2,\ 0)$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times(1+\sqrt{5})=1+\sqrt{5}$

15 $f(x)=\sqrt{x-a}+1$이라 하면 무리함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\sqrt{x-a}+1=x,\ \sqrt{x-a}=x-1$

$x-a=x^2-2x+1$

$\therefore\ x^2-3x+a+1=0$

함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 두 교점의 좌표를 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=a+1\qquad \cdots\cdots$ ㉠

두 교점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2}$

$(\alpha-\beta)^2=1,\ (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1$

㉠을 대입하면

$9-4(a+1)=1\qquad \therefore\ a=1$

16 점 C의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 $B(a,\ 5\sqrt{a})$

따라서 점 A의 y좌표가 $5\sqrt{a}$이므로

$\sqrt{5x}=5\sqrt{a}$, $5x=25a$ $\quad\therefore\ x=5a$

$\therefore\ A(5a,\ 5\sqrt{a})$

이때 정사각형 ABCD에서 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$4a=5\sqrt{a}$, $16a^2=25a$, $a(16a-25)=0$

$\therefore\ a=\dfrac{25}{16}$ ($\because\ a>0$)

따라서 점 C의 x좌표는 $\dfrac{25}{16}$이다.

17 $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이므로 주어진 함수의 그래프에서

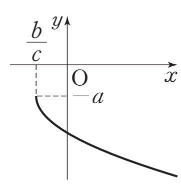
$a>0$, $-\dfrac{b}{a}>0$, $c>0$ $\quad\therefore\ b<0$

$y=-\sqrt{cx-b}-a=-\sqrt{c\left(x-\dfrac{b}{c}\right)}-a$의 그래프는

$y=-\sqrt{cx}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{b}{c}$만큼, y축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이고

$c>0$, $\dfrac{b}{c}<0$, $-a<0$이므로

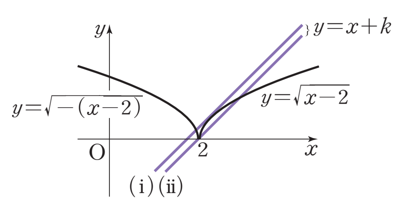
$y=-\sqrt{cx-b}-a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 무리함수 $y=-\sqrt{cx-b}-a$의 그래프의 개형은 ⑤이다.

18 $\sqrt{|x-2|}=\begin{cases}\sqrt{x-2} & (x\geq 2)\\ \sqrt{-(x-2)} & (x<2)\end{cases}$

$y=\sqrt{|x-2|}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 직선 $y=x+k$와 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프가 접할 때,

$x+k=\sqrt{x-2}$에서 $x^2+2kx+k^2=x-2$

$\therefore\ x^2+(2k-1)x+k^2+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2+2)=0$ $\quad\therefore\ k=-\dfrac{7}{4}$

(ii) 직선 $y=x+k$가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때,

$0=2+k$ $\quad\therefore\ k=-2$

(i), (ii)에서 구하는 상수 k의 값의 범위는 $-2<k<-\dfrac{7}{4}$

19 삼각형 OAP의 넓이는 점 P가 직선 OA와 평행한 접선 위의 접점일 때 최대이다.

직선 OA의 방정식은 $y=x$이므로 직선 OA와 평행한 접선의 방정식을 $y=x+k$라 하면

$\sqrt{x}=x+k$에서 $x=x^2+2kx+k^2$

$\therefore\ x^2+(2k-1)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4k^2=0$

$-4k+1=0$ $\quad\therefore\ k=\dfrac{1}{4}$

두 직선 $y=x$, $y=x+\dfrac{1}{4}$ 사이의 거리는 직선 $y=x$ 위의 점 $(1,\ 1)$과 직선 $y=x+\dfrac{1}{4}$, 즉 $4x-4y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|4-4+1|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

이때 $\overline{OA}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 삼각형 OAP의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{8}=\dfrac{1}{8}$

20 $f(x)=\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k$는 $x\geq 0$에서 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

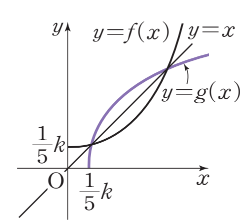
$y=\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k\,(x\geq 0)$라 하고 x에 대하여 풀면

$\dfrac{1}{5}x^2=y-\dfrac{1}{5}k$, $x^2=5y-k$

$\therefore\ x=\sqrt{5y-k}$ ($\because\ x\geq 0$)

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{5x-k}$

따라서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k=x$ $\quad\therefore\ x^2-5x+k=0$

이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

(i) $D=(-5)^2-4k>0$ $\quad\therefore\ k<\dfrac{25}{4}$

(ii) (두 근의 곱)≥ 0에서 $k\geq 0$

(i), (ii)에서 $0\leq k<\dfrac{25}{4}$

따라서 정수 k는 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6$의 7개이다.

유형편

정답과 해설

Ⅰ-1. 평면좌표

01 두 점 사이의 거리 4~6쪽

1 ②	**2** -10	**3** ①	**4** 2	**5** -7
6 8	**7** $(2,\ -2)$		**8** $\sqrt{13}$ km	**9** ④
10 -4	**11** $\frac{33}{2}$	**12** ②	**13** 4	**14** ②
15 ④	**16** ④	**17** ⑤		

18 (가) c (나) $2a^2+2b^2+9c^2-6ac$ (다) $2a^2+2b^2+9c^2-6ac$

19 풀이 참조

1 $\overline{OA}=\overline{OB}$이므로

$\sqrt{5^2+(-5)^2}=\sqrt{1^2+a^2}$

$50=1+a^2$, $a^2=49$ $\quad\therefore a=7\ (\because a>0)$

2 $\overline{AB}=5$이므로

$\sqrt{(-2-a)^2+(a+2-1)^2}=5$

$(a+2)^2+(a+1)^2=25$

$2a^2+6a+5=25$, $a^2+3a-10=0$

$(a+5)(a-2)=0$ $\quad\therefore a=-5$ 또는 $a=2$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$-5\times2=-10$

3 $2\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$2\sqrt{\{a-1-(-1)\}^2+(2-a-2)^2}$

$=\sqrt{\{5-(a-1)\}^2+\{4-(2-a)\}^2}$

$8a^2=(a-6)^2+(a+2)^2$

$8a^2=2a^2-8a+40$, $3a^2+4a-20=0$

$(3a+10)(a-2)=0$ $\quad\therefore a=2\ (\because a$는 정수)

4 $\overline{AB}\le5$이므로

$\sqrt{(-1-a)^2+(a-6)^2}\le5$

$(a+1)^2+(a-6)^2\le25$

$2a^2-10a+37\le25$, $a^2-5a+6\le0$

$(a-2)(a-3)\le0$ $\quad\therefore 2\le a\le3$

따라서 정수 a는 2, 3의 2개이다.

5 점 P의 좌표를 $(0,\ a)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(-2)^2+(4-a)^2=5^2+(3-a)^2$

$a^2-8a+20=a^2-6a+34$

$2a=-14$ $\quad\therefore a=-7$

따라서 점 P의 좌표는 $(0,\ -7)$이므로 점 P의 y좌표는 -7이다.

6 점 P의 좌표를 $(a,\ -a+4)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$\{a-(-1)\}^2+(-a+4-1)^2$

$=(a-3)^2+\{(-a+4)-(-1)\}^2$

$2a^2-4a+10=2a^2-16a+34$

$12a=24$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore b=-a+4=2$

$\therefore a^2+b^2=8$

7 삼각형 ABC의 외심을 $P(x,\ y)$라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(x-6)^2+(y-1)^2=\{x-(-1)\}^2+(y-2)^2$

$x^2+y^2-12x-2y+37=x^2+y^2+2x-4y+5$

$\therefore 7x-y=16$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{BP}=\overline{CP}$에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$\{x-(-1)\}^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y-3)^2$

$x^2+y^2+2x-4y+5=x^2+y^2-4x-6y+13$

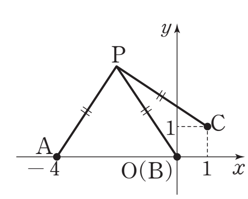
$\therefore 3x+y=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-2$

따라서 외심의 좌표는 $(2,\ -2)$이다.

8 오른쪽 그림과 같이 아파트 B가 원점, 아파트 A가 x축 위에 오도록 좌표평면을 잡으면

$A(-4,\ 0)$, $C(1,\ 1)$



이때 정류장을 만들려는 지점을 $P(x,\ y)$라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$\{x-(-4)\}^2+y^2=x^2+y^2$

$x^2+y^2+8x+16=x^2+y^2$

$8x+16=0$ $\quad\therefore x=-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{BP}=\overline{CP}$에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$x^2+y^2=(x-1)^2+(y-1)^2$

$x^2+y^2=x^2+y^2-2x-2y+2$

$\therefore x+y-1=0$

㉠을 대입하여 풀면 $y=3$

따라서 점 P의 좌표는 $(-2, 3)$이므로

$\overline{BP}=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$

즉, 정류장과 아파트 B 사이의 거리는 $\sqrt{13}$ km이다.

9 점 P의 좌표를 $(a, a+1)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a-1)^2+(a+1)^2+(a-3)^2+(a+1)^2$

$=4a^2-4a+12$

$=4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+11$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=\frac{1}{2}$일 때 최솟값을 갖고, 그때의 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$이다.

10 점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a-1)^2+(-4)^2+(a-3)^2+(-3)^2$

$=2a^2-8a+35$

$=2(a-2)^2+27$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=2$일 때 최솟값을 갖고, 그때의 점 P의 좌표는 $(2, 0)$이다.

점 P가 직선 $y=2x+k$ 위에 있으므로

$0=4+k \qquad \therefore k=-4$

11 변 BC 위를 움직이는 점 P는 y축 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(0, a)(-1\le a\le 3)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(-4)^2+(a-2)^2+(a-3)^2$

$=2a^2-10a+29$

$=2\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{33}{2}$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=\frac{5}{2}$일 때 최솟값 $\frac{33}{2}$을 갖는다.

12 $\overline{AB}=\sqrt{(-1-3)^2+\{-1-(-5)\}^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$\overline{BC}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+\{1-(-1)\}^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\overline{CA}=\sqrt{(3-1)^2+(-5-1)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

따라서 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로 삼각형 ABC는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

13 점 A의 좌표를 $(a, 2a)$라 하면

$\overline{AB}=\sqrt{(-a)^2+(3-2a)^2}=\sqrt{5a^2-12a+9}$

$\overline{BC}=\sqrt{4^2+(5-3)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\overline{CA}=\sqrt{(a-4)^2+(2a-5)^2}=\sqrt{5a^2-28a+41}$

이때 삼각형 ABC가 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$에서

$5a^2-12a+9+5a^2-28a+41=20$

$a^2-4a+3=0, (a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

따라서 두 점의 x좌표의 합은

$1+3=4$

14 $\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}$

$\overline{AC}=\sqrt{(a-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{a^2-2a+2}$

이때 $\overline{AB}=\overline{AC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$이므로

$10=a^2-2a+2, a^2-2a-8=0$

$(a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=4 \ (\because a>0)$

15 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소인 경우는 점 P가 선분 AB 위에 있을 때이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}\ge\overline{AB}$

$=\sqrt{\{5-(-3)\}^2+(2-8)^2}$

$=\sqrt{100}=10$

따라서 구하는 최솟값은 10이다.

16 $O(0, 0)$, $A(5, 12)$, $P(x, y)$라 하면

$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-12)^2}=\overline{OP}+\overline{AP}$

$\overline{OP}+\overline{AP}$의 값이 최소인 경우는 점 P가 선분 OA 위에 있을 때이므로

$\overline{OP}+\overline{AP}\ge\overline{OA}$

$=\sqrt{5^2+12^2}$

$=\sqrt{169}=13$

따라서 구하는 최솟값은 13이다.

17 $\sqrt{x^2+y^2+6x-10y+34}=\sqrt{(x+3)^2+(y-5)^2}$

$\sqrt{x^2+y^2-12x+2y+37}=\sqrt{(x-6)^2+(y+1)^2}$

$A(-3, 5)$, $B(6, -1)$, $P(x, y)$라 하면

$\sqrt{(x+3)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y+1)^2}=\overline{AP}+\overline{BP}$

$\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소인 경우는 점 P가 선분 AB 위에 있을 때이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}\ge\overline{AB}$

$=\sqrt{\{6-(-3)\}^2+(-1-5)^2}$

$=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$

따라서 구하는 최솟값은 $3\sqrt{13}$이다.

18 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(0,\ 0)$, $\mathrm{C}(3c,\ 0)$이라 하면 $\mathrm{M}(\boxed{^{(가)}\ c},\ 0)$, $\mathrm{N}(2c,\ 0)$이므로

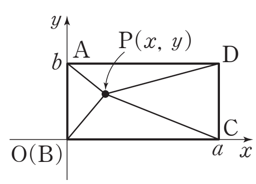
$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2&=(a^2+b^2)+\{(3c-a)^2+(-b)^2\}\\&=(a^2+b^2)+(9c^2-6ac+a^2+b^2)\\&=\boxed{^{(나)}\ 2a^2+2b^2+9c^2-6ac}\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{AN}}^2+4\overline{\mathrm{MN}}^2$

$$\begin{aligned}&=\{(c-a)^2+(-b)^2\}+\{(2c-a)^2+(-b)^2\}+4(2c-c)^2\\&=(c^2-2ac+a^2+b^2)+(4c^2-4ac+a^2+b^2)+4c^2\\&=\boxed{^{(다)}\ 2a^2+2b^2+9c^2-6ac}\end{aligned}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{AN}}^2+4\overline{\mathrm{MN}}^2$

19 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 B를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이 된다.



$\mathrm{A}(0,\ b)$, $\mathrm{C}(a,\ 0)$, $\mathrm{D}(a,\ b)$, $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2=\{x^2+(y-b)^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PD}}^2&=(x^2+y^2)+\{(x-a)^2+(y-b)^2\}\\&=\{x^2+(y-b)^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}\end{aligned}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PD}}^2$

02 선분의 내분점 7~10쪽

1 3	**2** $\left(\frac{7}{5},\ -\frac{8}{5}\right)$	**3** 160	**4** ④
5 ②	**6** 5	**7** $\left(-\frac{4}{3},\ 6\right)$	**8** -13
9 $8\sqrt{5}$	**10** ②	**11** $4\sqrt{5}$	**12** 4
13 ①	**14** C(10, 0), D(5, 4)	**15** 19	**16** $\frac{10\sqrt{2}}{3}$
17 ③	**18** -2	**19** ②	**20** 2
21 (8, -6)	**22** ③	**23** $8x+6y-29=0$	**24** ②

1 선분 AB의 중점 P의 좌표는

$\left(\frac{-2+5}{2},\ \frac{1+8}{2}\right)$

$\therefore\ \left(\frac{3}{2},\ \frac{9}{2}\right)$

선분 AB를 $4:3$으로 내분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{4\times5+3\times(-2)}{4+3},\ \frac{4\times8+3\times1}{4+3}\right)$

$\therefore\ (2,\ 5)$

따라서 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times2+2\times\frac{3}{2}}{1+2},\ \frac{1\times5+2\times\frac{9}{2}}{1+2}\right)$

$\therefore\ \left(\frac{5}{3},\ \frac{14}{3}\right)$

즉, $a=\frac{5}{3}$, $b=\frac{14}{3}$이므로

$b-a=3$

2 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(0,\ 0)$이므로

$\frac{2\times(b+1)+1\times2}{2+1}=0$, $\frac{2\times(-1)+1\times(a+1)}{2+1}=0$

$\therefore\ a=1,\ b=-2$

따라서 $\mathrm{B}(-1,\ -1)$, $\mathrm{C}(3,\ -2)$이므로 선분 BC를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times3+2\times(-1)}{3+2},\ \frac{3\times(-2)+2\times(-1)}{3+2}\right)$

$\therefore\ \left(\frac{7}{5},\ -\frac{8}{5}\right)$

3 두 점 A, B의 좌표를 각각 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$라 하면 선분 AB의 중점의 좌표가 $(1,\ 2)$이므로

$\frac{a+c}{2}=1$, $\frac{b+d}{2}=2$

$\therefore\ a+c=2$ ...... ㉠

$b+d=4$ ...... ㉡

선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(4,\ 3)$이므로

$\frac{3\times c+1\times a}{3+1}=4$, $\frac{3\times d+1\times b}{3+1}=3$

$\therefore\ a+3c=16$ ...... ㉢

$b+3d=12$ ...... ㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-5$, $c=7$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $b=0$, $d=4$

따라서 $\mathrm{A}(-5,\ 0)$, $\mathrm{B}(7,\ 4)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\{7-(-5)\}^2+4^2=160$

4 선분 AB를 $4:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{4\times(-9)+3\times a}{4+3},\ \frac{4\times0+3\times4}{4+3}\right)$

$\therefore\ \left(\frac{3a-36}{7},\ \frac{12}{7}\right)$

이 점이 y축 위에 있으므로

$\frac{3a-36}{7}=0$ $\quad\therefore\ a=12$

5 $t>0$, $1-t>0$이므로

$0<t<1$ ······ ㉠

선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{t\times5+(1-t)\times(-4)}{t+(1-t)}, \dfrac{t\times(-1)+(1-t)\times5}{t+(1-t)}\right)$

$\therefore$ $(9t-4, -6t+5)$

이 점이 제1사분면 위에 있으므로

$9t-4>0$, $-6t+5>0$

$\therefore \dfrac{4}{9}<t<\dfrac{5}{6}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\dfrac{4}{9}<t<\dfrac{5}{6}$

따라서 $\alpha=\dfrac{4}{9}$, $\beta=\dfrac{5}{6}$이므로

$3\alpha+2\beta=3\times\dfrac{4}{9}+2\times\dfrac{5}{6}=3$

6 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{m\times3+n\times2}{m+n}, \dfrac{m\times(-2)+n\times3}{m+n}\right)$

$\therefore \left(\dfrac{3m+2n}{m+n}, \dfrac{-2m+3n}{m+n}\right)$

이 점이 x축 위에 있으므로

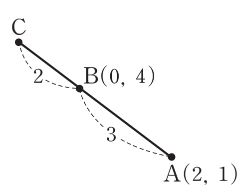
$\dfrac{-2m+3n}{m+n}=0$ $\quad\therefore 2m=3n$

따라서 m, n은 서로소인 자연수이므로

$m=3$, $n=2$ $\quad\therefore m+n=5$

7 $2\overline{AB}=3\overline{BC}$이므로 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:2$

따라서 점 B는 선분 AC를 $3:2$로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표를 (a, b)라 하면



$\dfrac{3\times a+2\times2}{3+2}=0$,

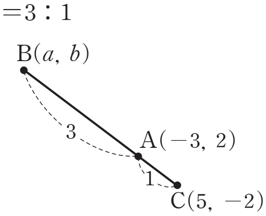
$\dfrac{3\times b+2\times1}{3+2}=4$

$\therefore a=-\dfrac{4}{3}$, $b=6$

따라서 점 C의 좌표는 $\left(-\dfrac{4}{3}, 6\right)$이다.

8 $\overline{AB}=3\overline{AC}$이므로 $\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$

따라서 점 A는 선분 BC를 $3:1$로 내분하는 점이므로



$\dfrac{3\times5+1\times a}{3+1}=-3$,

$\dfrac{3\times(-2)+1\times b}{3+1}=2$

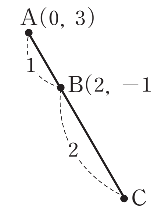
$\therefore a=-27$, $b=14$

$\therefore a+b=-13$

9 $2\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$

(i) 점 B가 선분 AC 위에 있을 때,

점 B는 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표를 (a, b)라 하면



$\dfrac{1\times a+2\times0}{1+2}=2$,

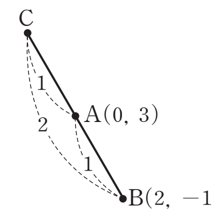
$\dfrac{1\times b+2\times3}{1+2}=-1$

$\therefore a=6$, $b=-9$

따라서 점 C의 좌표는 $(6, -9)$이다.

(ii) 점 B가 선분 AC의 연장선 위에 있을 때,

점 A는 선분 BC의 중점이므로 점 C의 좌표를 (a, b)라 하면



$\dfrac{2+a}{2}=0$, $\dfrac{-1+b}{2}=3$

$\therefore a=-2$, $b=7$

따라서 점 C의 좌표는 $(-2, 7)$이다.

(i), (ii)에서 구하는 두 점 사이의 거리는

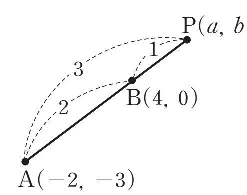
$\sqrt{(-2-6)^2+\{7-(-9)\}^2}=\sqrt{320}$

$=8\sqrt{5}$

10 $\triangle OAP=3\triangle OBP$이므로 $\overline{AP}=3\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}:\overline{BP}=3:1$

따라서 점 B는 선분 AP를 $2:1$로 내분하는 점이므로



$\dfrac{2\times a+1\times(-2)}{2+1}=4$,

$\dfrac{2\times b+1\times(-3)}{2+1}=0$

$\therefore a=7$, $b=\dfrac{3}{2}$

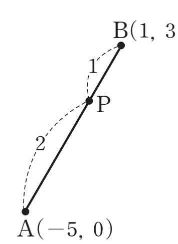
$\therefore a+b=\dfrac{17}{2}$

11 $\triangle OAP=2\triangle OBP$이므로 $\overline{AP}=2\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}:\overline{BP}=2:1$

(i) 점 P가 선분 AB 위에 있을 때,

점 P는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

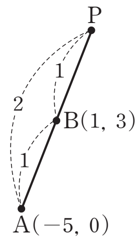


$\left(\dfrac{2\times1+1\times(-5)}{2+1}, \dfrac{2\times3+1\times0}{2+1}\right)$

$\therefore (-1, 2)$

(ii) 점 P가 선분 AB의 연장선 위에 있을 때,

점 B는 선분 AP의 중점이므로 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면



$\dfrac{-5+a}{2}=1,\ \dfrac{0+b}{2}=3$

$\therefore\ a=7,\ b=6$

(i), (ii)에서 $P_1(-1,\ 2),\ P_2(7,\ 6)$

또는 $P_1(7,\ 6),\ P_2(-1,\ 2)$이므로

$\overline{P_1P_2}=\sqrt{\{7-(-1)\}^2+(6-2)^2}=4\sqrt{5}$

12 삼각형 ABP에서 $\overline{AP}\,/\!/\,\overline{DC}$이므로

$\overline{BD}:\overline{DA}=\overline{BC}:\overline{CP}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-3-2)^2+(-7-5)^2}=13$

$\overline{AD}=\overline{AC}=\sqrt{(6-2)^2+(2-5)^2}=5$

$\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=13-5=8$이므로

$\overline{BC}:\overline{CP}=8:5$

따라서 점 C는 선분 BP를 $8:5$로 내분하는 점이므로

$\dfrac{8\times a+5\times(-3)}{8+5}=6,\ \dfrac{8\times b+5\times(-7)}{8+5}=2$

$\therefore\ a=\dfrac{93}{8},\ b=\dfrac{61}{8}$

$\therefore\ a-b=4$

13 점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 선분 AC의 중점과 선분 BD의 중점이 일치하므로

$\dfrac{3-1}{2}=\dfrac{4+a}{2},\ \dfrac{-2+3}{2}=\dfrac{5+b}{2}$

$\therefore\ a=-2,\ b=-4$

따라서 점 D의 좌표는 $(-2,\ -4)$이다.

14 두 대각선 AC, BD의 교점은 선분 AC, 선분 BD 각각의 중점과 일치한다.

점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 선분 AC의 중점의 좌표가 $\left(4,\ \dfrac{3}{2}\right)$이므로

$\dfrac{-2+a}{2}=4,\ \dfrac{3+b}{2}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ a=10,\ b=0$

$\therefore\ C(10,\ 0)$

점 D의 좌표를 $(c,\ d)$라 하면 선분 BD의 중점의 좌표가 $\left(4,\ \dfrac{3}{2}\right)$이므로

$\dfrac{3+c}{2}=4,\ \dfrac{-1+d}{2}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ c=5,\ d=4$

$\therefore\ D(5,\ 4)$

15 $\overline{OA}=\overline{OC}$에서 $\overline{OA}^2=\overline{OC}^2$이므로

$a^2+7^2=5^2+5^2,\ a^2=1$

$\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$

또 선분 AC의 중점과 선분 OB의 중점이 일치하므로

$\dfrac{1+5}{2}=\dfrac{b}{2},\ \dfrac{7+5}{2}=\dfrac{c}{2}$

$\therefore\ b=6,\ c=12$

$\therefore\ a+b+c=1+6+12=19$

16 선분 AD가 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$\overline{AB}=\sqrt{8^2+(-4-2)^2}=10$

$\overline{AC}=\sqrt{3^2+(6-2)^2}=5$

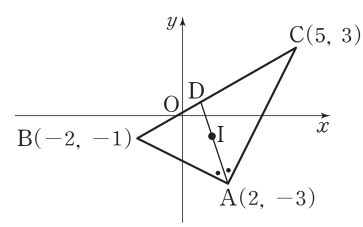
$\therefore\ \overline{BD}:\overline{CD}=10:5=2:1$

따라서 점 D는 변 BC를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times3+1\times8}{2+1},\ \dfrac{2\times6+1\times(-4)}{2+1}\right)\qquad\therefore\ \left(\dfrac{14}{3},\ \dfrac{8}{3}\right)$

$\therefore\ \overline{AD}=\sqrt{\left(\dfrac{14}{3}\right)^2+\left(\dfrac{8}{3}-2\right)^2}=\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$

17 점 I가 삼각형 ABC의 내심이므로 직선 AI와 변 BC가 만나는 점을 D라 하면 선분 AD가 $\angle A$의 이등분선이다.



$\therefore\ \overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+\{-1-(-3)\}^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{AC}=\sqrt{(5-2)^2+\{3-(-3)\}^2}=3\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{BD}:\overline{CD}=2\sqrt{5}:3\sqrt{5}=2:3$

따라서 점 D는 선분 BC를 $2:3$으로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times5+3\times(-2)}{2+3},\ \dfrac{2\times3+3\times(-1)}{2+3}\right)\qquad\therefore\ \left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$

즉, $a=\dfrac{4}{5},\ b=\dfrac{3}{5}$이므로 $a+b=\dfrac{7}{5}$

18 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(4,\ 1)$이므로

$\dfrac{4+a+b+5}{3}=4,\ \dfrac{-5+b-2-a+1}{3}=1$

$\therefore\ a+b=3,\ a-b=-9$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=6\qquad\therefore\ \dfrac{b}{a}=-2$

19 두 점 B, C의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하면 선분 BC의 중점의 좌표가 $(1, 2)$이므로

$\frac{x_1+x_2}{2}=1$, $\frac{y_1+y_2}{2}=2$

$\therefore x_1+x_2=2$, $y_1+y_2=4$ …… ㉠

또 삼각형 ABC의 무게중심이 원점이므로

$\frac{a+x_1+x_2}{3}=0$, $\frac{b+y_1+y_2}{3}=0$

$\frac{a+2}{3}=0$, $\frac{b+4}{3}=0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a=-2$, $b=-4$ $\quad\therefore a\times b=8$

20 D$(2, 0)$, E$(3, 5)$, F$(-1, 1)$이라 하면 삼각형 ABC의 무게중심은 삼각형 DEF의 무게중심과 일치하므로 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2+3-1}{3}, \frac{0+5+1}{3}\right)$ $\quad\therefore \left(\frac{4}{3}, 2\right)$

따라서 $a=\frac{4}{3}$, $b=2$이므로

$3a-b=3\times\frac{4}{3}-2=2$

21 점 B의 좌표를 (a, b)라 하면 ㈎, ㈏에서

$\frac{7+a}{2}=2$, $\frac{5+b}{2}=0$ $\quad\therefore a=-3$, $b=-5$

따라서 점 B의 좌표는 $(-3, -5)$이다.

점 C의 좌표를 (c, d)라 하면 ㈐에서

$\frac{7-3+c}{3}=4$, $\frac{5-5+d}{3}=-2$ $\quad\therefore c=8$, $d=-6$

따라서 점 C의 좌표는 $(8, -6)$이다.

22 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{AP}^2-\overline{BP}^2=2$에서

$(x-1)^2+y^2-\{(x-2)^2+(y-3)^2\}=2$

$2x+6y-14=0$ $\quad\therefore x+3y-7=0$

23 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$\{x-(-1)\}^2+(y-2)^2=(x-3)^2+(y-5)^2$

$x^2+y^2+2x-4y+5=x^2+y^2-6x-10y+34$

$\therefore 8x+6y-29=0$

24 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 P는 직선 $y=-3x-2$ 위에 있으므로

$b=-3a-2$ …… ㉠

선분 AP의 중점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{0+a}{2}$, $y=\frac{4+b}{2}$ $\quad\therefore a=2x$, $b=2y-4$

이를 ㉠에 대입하면

$2y-4=-3\times 2x-2$ $\quad\therefore 3x+y-1=0$

따라서 $m=3$, $n=-1$이므로 $m+n=2$

Ⅰ-2. 직선의 방정식

01 두 직선의 위치 관계 12~15쪽

1 ①	**2** $y=3x-3$	**3** $y=\frac{10}{3}x-\frac{31}{3}$	
4 $y=\frac{7}{2}x-7$	**5** $y=\frac{5}{6}x$	**6** ④	**7** ③
8 ⑤	**9** 1	**10** ③	**11** ④
12 $0\le k\le 1$	**13** ①	**14** ⑤	
15 $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)$	**16** ③	**17** $\frac{9}{2}$	**18** 4
19 $y=x-4$	**20** $-\frac{5}{8}$	**21** ①	**22** ②
23 ③	**24** 3	**25** 1	

1 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times 2+2\times(-4)}{1+2}, \frac{1\times(-3)+2\times 6}{1+2}\right)$

$\therefore (-2, 3)$

따라서 점 $(-2, 3)$을 지나고 기울기가 $\tan 45°=1$인 직선의 방정식은

$y-3=x-(-2)$ $\quad\therefore y=x+5$

즉, 이 직선의 x절편은 -5이다.

2 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{-1+5+2}{3}, \frac{1+2+6}{3}\right)$ $\quad\therefore (2, 3)$

선분 DE의 중점 M의 좌표는

$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+(-2)}{2}\right)$ $\quad\therefore (1, 0)$

따라서 직선 GM의 방정식은

$y=\frac{0-3}{1-2}(x-1)$ $\quad\therefore y=3x-3$

3 $\triangle$ABP : $\triangle$ACP$=2:1$이므로

$\overline{BP}:\overline{CP}=2:1$

따라서 점 P는 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\times 5+1\times(-1)}{2+1}, \frac{2\times(-1)+1\times 1}{2+1}\right)$

$\therefore \left(3, -\frac{1}{3}\right)$

따라서 두 점 A$(4, 3)$, P$\left(3, -\frac{1}{3}\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-\frac{1}{3}-3}{3-4}(x-4)$

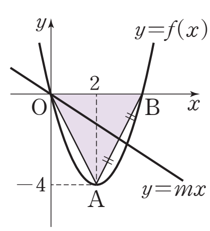
$\therefore y=\frac{10}{3}x-\frac{31}{3}$

유형편

4 점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 선분 BC의 중점을 지나야 한다.
선분 BC의 중점의 좌표는
$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-2+2}{2}\right)$ $\therefore (2, 0)$
따라서 두 점 A$(4, 7)$, $(2, 0)$을 지나는 직선의 방정식은
$y=\frac{7}{4-2}(x-2)$ $\therefore y=\frac{7}{2}x-7$

5 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.
직사각형의 두 대각선의 교점은 두 점 $(2, 1)$, $(4, 4)$를 이은 선분의 중점이므로 그 좌표는
$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+4}{2}\right)$ $\therefore \left(3, \frac{5}{2}\right)$
따라서 원점과 점 $\left(3, \frac{5}{2}\right)$를 지나는 직선의 방정식은
$y=\frac{\frac{5}{2}-0}{3-0}x$ $\therefore y=\frac{5}{6}x$

6 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나고 꼭짓점의 좌표가 $(2, -4)$이므로 점 B의 좌표는 $(4, 0)$
직선 $y=mx$가 원점 O를 지나므로 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하려면 선분 AB의 중점을 지나야 한다.



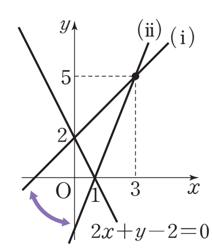
선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-4}{2}\right)$ $\therefore (3, -2)$
따라서 직선 $y=mx$가 점 $(3, -2)$를 지나므로
$-2=3m$ $\therefore m=-\frac{2}{3}$

7 $(k-1)x+(2k-3)y+4k-3=0$을 k에 대하여 정리하면
$-(x+3y+3)+k(x+2y+4)=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
$x+3y+3=0$, $x+2y+4=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=-6$, $y=1$
따라서 $a=-6$, $b=1$이므로
$a+b=-5$

8 $(x-2y+1)+k(2x-3y-1)=0$ (단, k는 실수) …… ㉠
직선 ㉠이 점 $(1, -2)$를 지나므로
$6+7k=0$ $\therefore k=-\frac{6}{7}$
이를 ㉠에 대입하면
$(x-2y+1)-\frac{6}{7}(2x-3y-1)=0$
$\therefore 5x-4y-13=0$
① $5\times(-2)-4\times\frac{3}{2}-13\neq0$
② $5\times(-1)-4\times2-13\neq0$
③ $5\times0-4\times3-13\neq0$
④ $5\times2-4\times(-1)-13\neq0$
⑤ $5\times3-4\times\frac{1}{2}-13=0$
따라서 이 직선 위의 점의 좌표는 ⑤이다.

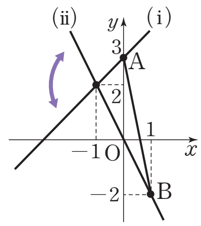
9 $(3+k)x+(k-1)y-5+k=0$을 k에 대하여 정리하면
$(3x-y-5)+k(x+y+1)=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
$3x-y-5=0$, $x+y+1=0$
두 식을 연립하여 풀면
$x=1$, $y=-2$
$\therefore$ P$(1, -2)$
이때 x절편이 3이므로 직선이 점 $(3, 0)$을 지난다.
따라서 구하는 직선의 기울기는
$\frac{0-(-2)}{3-1}=1$

10 $mx-y-3m+5=0$을 m에 대하여 정리하면
$(x-3)m-(y-5)=0$ …… ㉠
직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(3, 5)$를 지난다.
오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 직선 $2x+y-2=0$과 제1사분면에서 만나도록 직선 ㉠을 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $(0, 2)$를 지날 때,
$-3m+3=0$ $\therefore m=1$
(ii) 직선 ㉠이 점 $(1, 0)$을 지날 때,
$-2m+5=0$ $\therefore m=\frac{5}{2}$
(i), (ii)에서 m의 값의 범위는
$1<m<\frac{5}{2}$
따라서 $\alpha=1$, $\beta=\frac{5}{2}$이므로
$\beta-\alpha=\frac{3}{2}$

11 직선 $y=m(x+1)+2$는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 2)$를 지난다.



오른쪽 그림과 같이 직선이 선분 AB와 만나도록 직선을 움직여 보면

(i) 직선이 점 A$(0, 3)$을 지날 때,

$3=m+2 \qquad \therefore m=1$

(ii) 직선이 점 B$(1, -2)$를 지날 때,

$-2=2m+2 \qquad \therefore m=-2$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

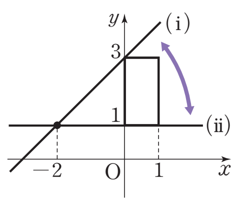
$-2\le m\le 1$

따라서 정수 m은 -2, -1, 0, 1의 4개이다.

12 $kx-y+2k+1=0$을 k에 대하여 정리하면

$(x+2)k-(y-1)=0$

이 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 1)$을 지난다.



오른쪽 그림과 같이 직선이 직사각형과 만나도록 직선을 움직여 보면

(i) 직선이 점 $(0, 3)$을 지날 때,

$2k-2=0 \qquad \therefore k=1$

(ii) 직선이 점 $(1, 1)$을 지날 때,

$3k=0 \qquad \therefore k=0$

(i), (ii)에서 k의 값의 범위는

$0\le k\le 1$

13 두 점 $(-1, 2)$, $(3, -6)$을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{-6-2}{3-(-1)}=-2$

따라서 기울기가 -2이고 점 $(-2, -4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-4)=-2\{x-(-2)\}$

$\therefore y=-2x-8$

이 직선이 점 $(2, a)$를 지나므로

$a=-4-8=-12$

14 $3x+2y-5=0$, $3x+y-1=0$을 연립하여 풀면

$x=-1$, $y=4$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(-1, 4)$

직선 $2x-y+4=0$, 즉 $y=2x+4$의 기울기는 2이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 2이다.

따라서 기울기가 2이고 점 $(-1, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=2\{x-(-1)\} \qquad \therefore y=2x+6$

즉, 이 직선의 y절편은 6이다.

15 직선 $x-2y-1=0$, 즉 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -2이다.

따라서 기울기가 -2이고 점 A$(-1, 1)$을 지나는 직선 AH의 방정식은

$y-1=-2\{x-(-1)\} \qquad \therefore 2x+y+1=0$

이때 두 직선 $2x+y+1=0$, $x-2y-1=0$의 교점이 점 H이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$x=-\dfrac{1}{5}$, $y=-\dfrac{3}{5}$

따라서 점 H의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$이다.

16 ㄱ. $x+ky-k+5=0$에서

$(y-1)k+x+5=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$y-1=0$, $x+5=0 \qquad \therefore x=-5$, $y=1$

따라서 직선 l은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-5, 1)$을 지난다.

ㄴ. 두 직선 $x+ky-k+5=0$, $(2k-1)x+y+4=0$이 서로 평행하려면

$\dfrac{1}{2k-1}=\dfrac{k}{1}\ne\dfrac{-k+5}{4}$

$\dfrac{1}{2k-1}=\dfrac{k}{1}$에서

$2k^2-k=1$, $2k^2-k-1=0$

$(2k+1)(k-1)=0$

$\therefore k=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $k=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{k}{1}\ne\dfrac{-k+5}{4}$에서

$4k\ne -k+5 \qquad \therefore k\ne 1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k=-\dfrac{1}{2}$

ㄷ. $k=\dfrac{1}{3}$일 때,

l: $x+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{14}{3}=0$, m: $-\dfrac{1}{3}x+y+4=0$

$1\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{3}\times 1=0$이므로 두 직선 l, m은 서로 수직이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17 두 직선 $(k-2)x-y+2=0$, $kx+3y-1=0$이 서로 평행하려면

$\dfrac{k-2}{k}=\dfrac{-1}{3}\ne\dfrac{2}{-1}$

$3k-6=-k \qquad \therefore k=\dfrac{3}{2}$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}$

또 두 직선이 서로 수직이려면

$(k-2)\times k+(-1)\times 3=0$

$k^2-2k-3=0$, $(k+1)(k-3)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=3$

$\therefore \beta=3$ ($\because \beta>0$)

$\therefore \alpha\beta=\frac{3}{2}\times 3=\frac{9}{2}$

18 직선 $2x+ay-4=0$이 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$-2+2a-4=0$ $\quad\therefore a=3$

직선 $bx+cy+7=0$이 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$-b+2c+7=0$ $\quad\therefore b-2c=7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

두 직선 $2x+3y-4=0$, $bx+cy+7=0$이 서로 수직이므로

$2b+3c=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=3$, $c=-2$

$\therefore a+b+c=3+3+(-2)=4$

19 직선 AB의 기울기는 $\frac{-2-2}{6-2}=-1$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 1이다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+6}{2}, \frac{2-2}{2}\right)$ $\quad\therefore (4, 0)$

따라서 기울기가 1이고 점 $(4, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=x-4$

20 직선 AB의 기울기는 $\frac{1-(-2)}{4-0}=\frac{3}{4}$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{-2+1}{2}\right)$ $\quad\therefore \left(2, -\frac{1}{2}\right)$

따라서 기울기가 $-\frac{4}{3}$이고 점 $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{4}{3}(x-2)$ $\quad\therefore y=-\frac{4}{3}x+\frac{13}{6}$

이 직선이 점 $(a, 3)$을 지나므로

$3=-\frac{4}{3}a+\frac{13}{6}$ $\quad\therefore a=-\frac{5}{8}$

21 직선 $2x+ay+b=0$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는

$A\left(-\frac{b}{2}, 0\right)$, $B\left(0, -\frac{b}{a}\right)$

직선 AB의 기울기는 $\dfrac{-\frac{b}{a}-0}{0-\left(-\frac{b}{2}\right)}=-\frac{2}{a}$

선분 AB의 수직이등분선 $x-2y+3=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$의 기울기가 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 $-\frac{2}{a}\times\frac{1}{2}=-1$이므로 $a=1$

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-\frac{b}{2}}{2}, \dfrac{-b}{2}\right)$ $\quad\therefore \left(-\frac{b}{4}, -\frac{b}{2}\right)$

이 점이 직선 $x-2y+3=0$ 위에 있으므로

$-\frac{b}{4}-2\times\left(-\frac{b}{2}\right)+3=0$ $\quad\therefore b=-4$

$\therefore ab=1\times(-4)=-4$

22 선분 AC의 길이가 $5\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(a-1)^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$

$a^2-2a+26=50$, $a^2-2a-24=0$

$(a+4)(a-6)=0$

$\therefore a=6$ ($\because a>0$)

$\therefore C(6, 0)$

마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 직선 BD는 선분 AC의 수직이등분선이다.

이때 직선 AC의 기울기는

$\frac{0-5}{6-1}=-1$

선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+6}{2}, \frac{5+0}{2}\right)$ $\quad\therefore \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$

따라서 기울기가 1이고 점 $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-\frac{5}{2}=x-\frac{7}{2}$ $\quad\therefore y=x-1$

즉, 이 직선의 y절편은 -1이다.

23 두 직선 $2x-3y-4=0$, $x+2y-5=0$이 한 점에서 만나므로 세 직선의 교점이 2개가 되려면 직선 $ax+y=0$이 직선 $2x-3y-4=0$과 평행하거나 직선 $x+2y-5=0$과 평행해야 한다.

(i) 두 직선 $ax+y=0$, $2x-3y-4=0$이 서로 평행할 때,

$\frac{a}{2}=\frac{1}{-3}\neq\frac{0}{-4}$ $\quad\therefore a=-\frac{2}{3}$

(ii) 두 직선 $ax+y=0$, $x+2y-5=0$이 서로 평행할 때,

$\frac{a}{1}=\frac{1}{2}\neq\frac{0}{-5}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 곱은

$-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$

24 $kx-y+k-6=0$ ...... ㉠

$2x-y-1=0$ ...... ㉡

$x-2y+4=0$ ...... ㉢

(i) 세 직선이 모두 평행할 때,

두 직선 ㉡, ㉢의 기울기는 각각 2, $\frac{1}{2}$이므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 없다.

(ii) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때,

두 직선 ㉠, ㉡이 서로 평행하면

$\frac{k}{2}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{k-6}{-1}$ $\quad\therefore k=2$

두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행하면

$\frac{k}{1}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{k-6}{4}$ $\quad\therefore k=\frac{1}{2}$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=3$

직선 ㉠이 점 $(2, 3)$을 지나야 하므로

$2k-3+k-6=0$ $\quad\therefore k=3$

(i), (ii), (iii)에서 모든 상수 k의 값의 곱은

$2\times\frac{1}{2}\times3=3$

25 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 4개의 영역으로 나누려면 세 직선이 모두 평행해야 한다.

(i) 두 직선 $ax+y+1=0$, $2x+y+5=0$이 서로 평행할 때,

$\frac{a}{2}=\frac{1}{1}\neq\frac{1}{5}$ $\quad\therefore a=2$

(ii) 두 직선 $x+by+3=0$, $2x+y+5=0$이 서로 평행할 때,

$\frac{1}{2}=\frac{b}{1}\neq\frac{3}{5}$ $\quad\therefore b=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $ab=2\times\frac{1}{2}=1$

02 점과 직선 사이의 거리 16~18쪽

1 ①	**2** ④	**3** ②	**4** ②	**5** ③
6 $8\sqrt{5}$m	**7** ③	**8** ④	**9** 10	
10 $3x-2y-8=0$		**11** ③	**12** ①	**13** ③
14 150	**15** $\frac{7}{2}$	**16** ①	**17** ①	
18 $4x-2y-5=0$ 또는 $4x+8y-5=0$				

1 점 $(3, 6)$과 직선 $3x+y-5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times3+6-5|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$

2 점 $(-1, 3)$과 직선 $x+ay+5=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$이므로

$\frac{|-1+a\times3+5|}{\sqrt{1^2+a^2}}=2\sqrt{5}$

$|3a+4|=2\sqrt{5(1+a^2)}$

$(3a+4)^2=20(a^2+1)$

$11a^2-24a+4=0$

$(11a-2)(a-2)=0$

$\therefore a=\frac{2}{11}$ 또는 $a=2$

그런데 a는 정수이므로 $a=2$

3 점 $(k, 2)$에서 두 직선 $x-2y+1=0$, $2x+y+3=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|k-2\times2+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|2\times k+2+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

$|k-3|=|2k+5|$

$k-3=\pm(2k+5)$

$\therefore k=-8$ 또는 $k=-\frac{2}{3}$

그런데 k는 정수이므로 $k=-8$

4 직선 $3x-4y-1=0$에 평행한 직선의 방정식을 $3x-4y+a=0\,(a\neq-1)$이라 하면 점 $(1, 2)$와 이 직선 사이의 거리가 3이므로

$\frac{|3\times1-4\times2+a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$

$|a-5|=15$, $a-5=\pm15$

$\therefore a=-10$ 또는 $a=20$

따라서 직선의 방정식은

$3x-4y-10=0$ 또는 $3x-4y+20=0$

이때 제4사분면을 지나지 않는 직선의 방정식은

$3x-4y+20=0$

따라서 이 직선의 x절편은 $-\frac{20}{3}$이다.

5 점 $(0, 2)$를 지나는 직선 l의 방정식을 $y=mx+2$라 하면 직선 l, 즉 $mx-y+2=0$과 점 $(1, 0)$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$|m+2|=\sqrt{5(m^2+1)}$

$(m+2)^2=5(m^2+1)$

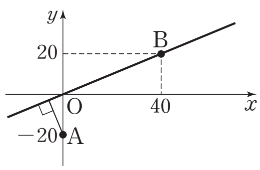
$4m^2-4m+1=0$

$(2m-1)^2=0$ $\quad\therefore m=\frac{1}{2}$

따라서 직선 l의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

6 다음 그림과 같이 교차로의 한 지점을 원점으로 하여 주어진 그림을 좌표평면 위에 나타내면

A$(0,\ -20)$, B$(40,\ 20)$



원점과 점 B$(40,\ 20)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{20}{40}x \qquad \therefore\ x-2y=0$

따라서 가로등을 보기 위하여 움직여야 할 최단 거리는 점 A$(0,\ -20)$과 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 최단 거리는

$\frac{|-2\times(-20)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=8\sqrt{5}(\text{m})$

7 두 직선 사이의 거리는 직선 $4x-3y+16=0$ 위의 한 점 $(-4,\ 0)$과 직선 $4x-3y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|4\times(-4)+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$

8 두 직선 $x+2y-1=0$, $x+ay+4=0$이 서로 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{2}{a}\neq\frac{-1}{4} \qquad \therefore\ a=2$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $x+2y-1=0$ 위의 한 점 $(1,\ 0)$과 직선 $x+2y+4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$

9 직선 $x-2y+5=0$ 위의 한 점 $(-5,\ 0)$과 직선 $x-2y+a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|-5+a|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$

$|a-5|=5,\ a-5=\pm5$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=10$

그런데 $a\neq0$이므로 $a=10$

10 직선 $3x-2y+5=0$에 평행한 직선의 방정식을 $3x-2y+k=0\ (k\neq5)$이라 하면 직선 $3x-2y+5=0$ 위의 한 점 $\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$와 이 직선 사이의 거리가 $\sqrt{13}$이므로

$\frac{\left|-2\times\frac{5}{2}+k\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\sqrt{13}$

$|-5+k|=13,\ -5+k=\pm13$

$\therefore\ k=-8$ 또는 $k=18$

따라서 직선의 방정식은

$3x-2y-8=0$ 또는 $3x-2y+18=0$

이때 제4사분면을 지나는 직선의 방정식은

$3x-2y-8=0$

11 두 직선 $ax+by=2$, $ax+by=-4$ 사이의 거리는 직선 $ax+by=2$ 위의 한 점 $\left(0,\ \frac{2}{b}\right)$와 직선 $ax+by=-4$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{\left|b\times\frac{2}{b}+4\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{6}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{6}{\sqrt{3}}\ (\because\ a^2+b^2=3)$

$=2\sqrt{3}$

12 직선 $y=ax+2$ 위의 한 점 $(0,\ 2)$와 직선 $y=ax+1$, 즉 $ax-y+1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-2+1|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$이고, 정사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{1}{5}$이므로

$\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2=\frac{1}{5},\ \frac{1}{a^2+1}=\frac{1}{5}$

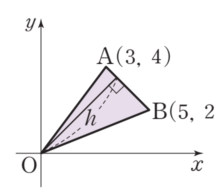
$a^2=4 \qquad \therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

13 $\overline{\text{AB}}=\sqrt{(5-3)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{2}$

직선 AB의 방정식은

$y-4=\frac{2-4}{5-3}(x-3)$

$\therefore\ x+y-7=0$



점 O$(0,\ 0)$과 직선 AB 사이의 거리를 h라 하면

$h=\frac{|-7|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \triangle\text{OAB}=\frac{1}{2}\times\overline{\text{AB}}\times h=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{7}{\sqrt{2}}=7$

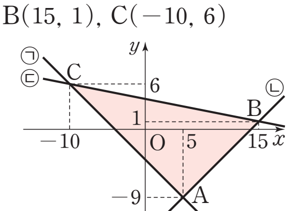
14 $x+y+4=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x-y-14=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

$x+5y-20=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

두 직선 ㉠과 ㉡, ㉡과 ㉢, ㉢과 ㉠의 교점을 각각 A, B, C라 하면

A$(5,\ -9)$, B$(15,\ 1)$, C$(-10,\ 6)$



$\overline{AB}=\sqrt{(15-5)^2+\{1-(-9)\}^2}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$

점 C$(-10,\ 6)$과 직선 ㉡ 사이의 거리를 h라 하면

$h=\dfrac{|-10-6-14|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{30}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times h=\dfrac{1}{2}\times 10\sqrt{2}\times\dfrac{30}{\sqrt{2}}=150$

15 직선 AB와 직선 $2x-3y-4=0$의 기울기가 $\dfrac{2}{3}$로 같으므로 두 직선은 서로 평행하다.

따라서 삼각형 APB에서 선분 AB를 밑변으로 하면 점 A와 직선 $2x-3y-4=0$ 사이의 거리가 높이가 된다.

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$

점 A와 직선 $2x-3y-4=0$ 사이의 거리를 h라 하면

$h=\dfrac{|-3\times1-4|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{13}}$

$\therefore\ \triangle APB=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times h=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{13}\times\dfrac{7}{\sqrt{13}}=\dfrac{7}{2}$

16 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 점 P에서 두 직선 $3x-4y+3=0$, $4x-3y+1=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\dfrac{|3x-4y+3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|4x-3y+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$

$|3x-4y+3|=|4x-3y+1|$

$3x-4y+3=\pm(4x-3y+1)$

$\therefore\ x+y-2=0$ 또는 $7x-7y+4=0$

따라서 점 $(1,\ 1)$을 지나는 도형의 방정식은

$x+y-2=0$

17 두 직선 $x+2y-3=0$, $2x+y+5=0$이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 P$(x,\ y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\dfrac{|x+2y-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|2x+y+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

$|x+2y-3|=|2x+y+5|$

$x+2y-3=\pm(2x+y+5)$

$\therefore\ x-y+8=0$ 또는 $3x+3y+2=0$

따라서 보기에서 각의 이등분선의 방정식인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

18 x축과 직선 $4x+3y-5=0$이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 P$(x,\ y)$라 하면 P에서 x축과 직선 $4x+3y-5=0$에 이르는 거리가 같으므로

$|y|=\dfrac{|4x+3y-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$|4x+3y-5|=5|y|$

$4x+3y-5=\pm5y$

$\therefore\ 4x-2y-5=0$ 또는 $4x+8y-5=0$

Ⅰ-3. 원의 방정식

01 원의 방정식 20~25쪽

1 ②	**2** $(x+1)^2+(y+1)^2=25$			**3** ③
4 ④	**5** ⑤	**6** -1	**7** ⑤	**8** ③
9 $(x+3)^2+(y-1)^2=10$			**10** ①	**11** 1
12 234π	**13** 6	**14** -81		
15 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$			**16** ④	**17** ③
18 3	**19** ④	**20** 4	**21** ②	**22** 3
23 1	**24** 10	**25** ③	**26** ④	**27** ①
28 $\dfrac{9}{4}$	**29** 4	**30** ②	**31** ④	**32** ②
33 ③	**34** ②	**35** ④	**36** ③	**37** ③
38 π				

1 중심의 좌표가 $(-1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은

$(x+1)^2+y^2=4$

따라서 $a=-1$, $b=0$, $c=4$이므로

$a+b+c=3$

2 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y+1)^2=r^2$

이 원이 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$(2+1)^2+(3+1)^2=r^2$

$\therefore\ r^2=25$

따라서 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y+1)^2=25$

3 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times4+1\times1}{2+1},\ \dfrac{2\times5+1\times(-4)}{2+1}\right)\qquad\therefore\ (3,\ 2)$

따라서 중심의 좌표가 $(3,\ 2)$이고 반지름의 길이가 4인 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=16$

4 원의 중심의 좌표는

$\left(\dfrac{4+2}{2},\ \dfrac{-3+1}{2}\right)\qquad\therefore\ (3,\ -1)$

원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\sqrt{(2-4)^2+\{1-(-3)\}^2}=\sqrt{5}$

따라서 $a=3$, $b=-1$, $r^2=5$이므로

$a+b+r^2=7$

5 $A(6, 0)$, $B(0, 4)$이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+4^2}=\sqrt{13}$

따라서 원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{13})^2=13\pi$

6 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{-5-1}{2}\right)$ $\quad\therefore (-1, -3)$

원의 넓이가 직선 $y=2x+k$에 의하여 이등분되려면 직선이 원의 중심을 지나야 하므로

$-3=-2+k$ $\quad\therefore k=-1$

7 원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+y^2=r^2$

이 원이 두 점 $(1, -3)$, $(-1, 5)$를 지나므로

$(1-a)^2+(-3)^2=r^2$, $(-1-a)^2+5^2=r^2$

$\therefore a^2-2a+10=r^2$, $a^2+2a+26=r^2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-4$, $r^2=34$

따라서 구하는 원의 넓이는 34π이다.

8 원의 중심의 좌표를 $(0, a)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$x^2+(y-a)^2=r^2$

이 원이 두 점 $(2, 0)$, $(-2, 4)$를 지나므로

$2^2+a^2=r^2$, $(-2)^2+(4-a)^2=r^2$

$\therefore a^2+4=r^2$, $a^2-8a+20=r^2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $r^2=8$

따라서 원의 방정식은

$x^2+(y-2)^2=8$

ㄱ. 중심의 좌표는 $(0, 2)$이다.

ㄴ. 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi$

ㄷ. $2^2+(4-2)^2=8$이므로 점 $(2, 4)$를 지난다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

9 원의 중심의 좌표를 $(a, 2a+7)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-2a-7)^2=r^2$

이 원이 두 점 $(0, 0)$, $(-4, 4)$를 지나므로

$a^2+(-2a-7)^2=r^2$, $(-4-a)^2+(-2a-3)^2=r^2$

$\therefore 5a^2+28a+49=r^2$, $5a^2+20a+25=r^2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $r^2=10$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-1)^2=10$

10 원의 중심의 좌표가 $(-3, 4)$이고 원이 y축에 접하면 반지름의 길이가 $|-3|=3$이므로 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-4)^2=9$

이 원이 점 $(a, 1)$을 지나므로

$(a+3)^2+(1-4)^2=9$, $(a+3)^2=0$

$\therefore a=-3$

11 원의 중심의 좌표가 $(1, 2a)$이고 이 원이 x축에 접하면 반지름의 길이가 $|2a|$이므로

$\sqrt{4a^2+b+1}=|2a|$

$4a^2+b+1=4a^2$ $\quad\therefore b=-1$

즉, 원 $(x-1)^2+(y-2a)^2=4a^2$이 점 $(-3, 4)$를 지나므로

$(-3-1)^2+(4-2a)^2=4a^2$

$\therefore a=2$

$\therefore a+b=2+(-1)=1$

12 원의 중심의 좌표를 (a, b)라 하면 반지름의 길이는 $|b|$이므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

원 ㉠이 점 $(1, 6)$을 지나므로

$(1-a)^2+(6-b)^2=b^2$

$\therefore a^2-2a-12b+37=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

원 ㉠이 점 $(4, 3)$을 지나므로

$(4-a)^2+(3-b)^2=b^2$

$a^2-8a-6b+25=0$

$\therefore 6b=a^2-8a+25$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$a^2-2a-2\times(a^2-8a+25)+37=0$

$a^2-14a+13=0$, $(a-1)(a-13)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=13$

이를 ㉢에 대입하여 풀면

$a=1$일 때 $b=3$, $a=13$일 때 $b=15$

따라서 두 원의 넓이의 합은

$\pi\times3^2+\pi\times15^2=234\pi$

13 원의 중심의 좌표를 $(a, -a+1)$이라 하면 반지름의 길이는 $|a|$이므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y+a-1)^2=a^2$

이 원이 점 $(1, -1)$을 지나므로

$(1-a)^2+(a-2)^2=a^2$

$a^2-6a+5=0$, $(a-1)(a-5)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=5$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은

$1+5=6$

14 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심이 제4사분면 위에 있고 반지름의 길이가 3이므로 중심의 좌표는 $(3,\ -3)$
따라서 $a=3$, $b=-3$, $c=9$이므로
$abc=-81$

15 원의 중심이 제4사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(r,\ -r)$
따라서 원의 방정식은
$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$
이때 원의 중심 $(r,\ -r)$가 직선 $x-2y-3=0$ 위에 있으므로
$r+2r-3=0 \qquad \therefore r=1$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y+1)^2=1$

16 주어진 조건을 만족시키는 두 원의 중심은 제1사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(r,\ r)$
따라서 원의 방정식은
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$
이 원이 점 $(4,\ 2)$를 지나므로
$(4-r)^2+(2-r)^2=r^2$
$r^2-12r+20=0$, $(r-2)(r-10)=0$
$\therefore r=2$ 또는 $r=10$
따라서 두 원의 넓이의 합은
$\pi\times2^2+\pi\times10^2=104\pi$

17 $x^2+y^2-3x+4y=0$을 변형하면
$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$
따라서 $a=\dfrac{3}{2}$, $b=-2$, $r=\dfrac{5}{2}$이므로 $a+b+r=2$

18 $x^2+y^2-2x+6y+k^2-k+8=0$을 변형하면
$(x-1)^2+(y+3)^2=-k^2+k+2$
이 방정식이 원을 나타내려면
$-k^2+k+2>0$
$k^2-k-2<0$, $(k+1)(k-2)<0$
$\therefore -1<k<2$
따라서 $\alpha=-1$, $\beta=2$이므로 $\beta-\alpha=3$

19 $x^2+y^2-4x-2ay-19=0$을 변형하면
$(x-2)^2+(y-a)^2=23+a^2$
직선 $y=2x+3$이 이 원의 중심 $(2,\ a)$를 지나므로
$a=4+3 \qquad \therefore a=7$

20 방정식 $x^2+y^2+axy-2x-4y+b=0$이 원을 나타내려면 xy항이 없어야 하므로 $a=0$
$\therefore x^2+y^2-2x-4y+b=0$
이 방정식을 변형하면
$(x-1)^2+(y-2)^2=5-b$
이 원의 반지름의 길이가 1이므로
$\sqrt{5-b}=1$
$5-b=1 \qquad \therefore b=4$
$\therefore a+b=0+4=4$

21 $x^2+y^2+14x-8y+k^2+2k+41=0$을 변형하면
$(x+7)^2+(y-4)^2=-k^2-2k+24$
이 방정식이 원을 나타내려면
$-k^2-2k+24>0$
$k^2+2k-24<0$, $(k+6)(k-4)<0$
$\therefore -6<k<4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
또 이 원이 제2사분면 위에만 있으려면 반지름의 길이가 4보다 작아야 하므로
$\sqrt{-k^2-2k+24}<4$
$-k^2-2k+24<16$
$k^2+2k-8>0$, $(k+4)(k-2)>0$
$\therefore k<-4$ 또는 $k>2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$-6<k<-4$ 또는 $2<k<4$
따라서 모든 정수 k의 값의 합은
$-5+3=-2$

22 주어진 원이 점 $(1,\ 8)$을 지나므로
$1+64-2-32a+b=0$
$\therefore b=32a-63 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
이를 $x^2+y^2-2x-4ay+b=0$에 대입하면
$x^2+y^2-2x-4ay+32a-63=0$
$\therefore (x-1)^2+(y-2a)^2=4a^2-32a+64$
이 원이 x축에 접하므로
$|2a|=\sqrt{4a^2-32a+64}$
$4a^2=4a^2-32a+64$
$32a=64 \qquad \therefore a=2$
이를 ㉠에 대입하면 $b=1$
$\therefore a+b=2+1=3$

23 원의 중심이 제2사분면 위에 있고 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(-r,\ r)$

유형편

이때 원의 중심이 곡선 $y=x^2-x-1$ 위에 있으므로

$r=(-r)^2-(-r)-1$

$r^2-1=0$, $r^2=1$

$\therefore r=1$ ($\because r>0$)

따라서 중심의 좌표가 $(-1, 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-1)^2=1$

$\therefore x^2+y^2+2x-2y+1=0$

따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=1$이므로

$a+b+c=1$

다른 풀이

원의 중심의 좌표를 $(a, a^2-a-1)(a<0)$이라 하면 이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$-a=a^2-a-1$

$a^2-1=0$, $a^2=1$

$\therefore a=-1$ ($\because a<0$)

이 원의 반지름의 길이는

$|a|=|-1|=1$

따라서 중심의 좌표가 $(-1, 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-1)^2=1$

$\therefore x^2+y^2+2x-2y+1=0$

따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=1$이므로

$a+b+c=1$

24 주어진 세 점을 $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(-4, 4)$라 하고 원의 중심을 $P(p, q)$라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$p^2+q^2=(p-6)^2+q^2$

$\therefore p=3$ ...... ㉠

$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$p^2+q^2=(p+4)^2+(q-4)^2$

$\therefore p-q=-4$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 풀면 $q=7$

$\therefore p+q=3+7=10$

다른 풀이

주어진 세 점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 0)$을 지나므로 $C=0$

$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0$ ...... ㉠

원 ㉠이 점 $(6, 0)$을 지나므로

$36+6A=0$ $\therefore A=-6$

원 ㉠이 점 $(-4, 4)$를 지나므로

$32-4A+4B=0$

$A=-6$을 대입하면

$32+24+4B=0$ $\therefore B=-14$

따라서 원의 방정식은

$x^2+y^2-6x-14y=0$

$\therefore (x-3)^2+(y-7)^2=58$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(3, 7)$이므로

$p=3$, $q=7$

$\therefore p+q=10$

25 세 점 $(0, 0)$, $(4, -2)$, $(6, 2)$를 지나는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 0)$을 지나므로 $C=0$

$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0$ ...... ㉠

원 ㉠이 점 $(4, -2)$를 지나므로

$20+4A-2B=0$

$\therefore 2A-B=-10$ ...... ㉡

원 ㉠이 점 $(6, 2)$를 지나므로

$40+6A+2B=0$

$\therefore 3A+B=-20$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$A=-6$, $B=-2$

따라서 원의 방정식은

$x^2+y^2-6x-2y=0$

이 원이 점 $(2, k)$를 지나므로

$4+k^2-12-2k=0$

$k^2-2k-8=0$, $(k+2)(k-4)=0$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$)

26 외접원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+3)^2+(b-3)^2=(a-4)^2+(b-10)^2$

$\therefore a+b=7$ ...... ㉠

$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$(a+3)^2+(b-3)^2=(a-7)^2+(b-7)^2$

$\therefore 5a+2b=20$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=5$

원의 중심은 $P(2, 5)$이므로 반지름의 길이는

$\overline{AP}=\sqrt{\{2-(-3)\}^2+(5-3)^2}=\sqrt{29}$

따라서 구하는 외접원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{29})^2=29\pi$

27 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-4+k(x^2+y^2-3x-6y-1)=0$ (단, $k\neq-1$) …… ㉠

이 원이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$-4-k=0 \qquad \therefore k=-4$

이를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-4-4(x^2+y^2-3x-6y-1)=0$

$\therefore x^2+y^2-4x-8y=0$

따라서 $a=-4$, $b=-8$이므로

$a+b=-12$

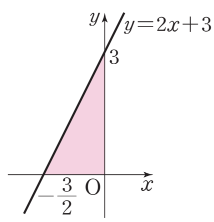
28 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+3x+6y+1-(x^2+y^2+x+7y-2)=0$

$\therefore 2x-y+3=0$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times3=\frac{9}{4}$



29 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-x+6y+4-(x^2+y^2-2x+ay+1)=0$

$\therefore x+(6-a)y+3=0$

이 직선이 직선 $y=2x-1$, 즉 $2x-y-1=0$과 수직이므로

$1\times2+(6-a)\times(-1)=0$

$\therefore a=4$

30 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-6x+2ay+8+k(x^2+y^2-4x)=0$ (단, $k\neq-1$) …… ㉠

이 원이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$3-3k=0 \qquad \therefore k=1$

이를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-6x+2ay+8+(x^2+y^2-4x)=0$

$x^2+y^2-5x+ay+4=0$

$\therefore \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2+9}{4}$

이 원의 넓이가 4π이므로

$\frac{a^2+9}{4}=4$, $a^2=7$

$\therefore a=\sqrt{7}$ ($\because a>0$)

31 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2+2ax+3ay+17+k(x^2+y^2-4x-2y+4)=0$

(단, $k\neq-1$) …… ㉠

이 원이 두 점 $(3, 0)$, $(0, 1)$을 지나므로

$26+6a+k=0$, $18+3a+3k=0$

$\therefore 6a+k=-26$, $a+k=-6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-4$, $k=-2$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

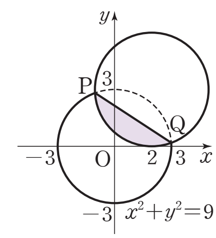
$x^2+y^2+8y-9=0$

따라서 $A=0$, $B=8$, $C=-9$이므로

$A-B-C=1$

32 오른쪽 그림과 같이 호 PQ는 반지름의 길이가 3인 원의 일부이다.

이 원의 중심이 점 $(2, 3)$이고 반지름의 길이가 3이므로 원의 방정식은



$(x-2)^2+(y-3)^2=9$

$\therefore x^2+y^2-4x-6y+4=0$

이때 직선 PQ는 두 원의 교점을 지나는 직선이므로

$x^2+y^2-9-(x^2+y^2-4x-6y+4)=0$

$\therefore y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{6}$

따라서 직선 PQ의 기울기는 $-\frac{2}{3}$이다.

33 $3\overline{BP}=2\overline{AP}$이므로 $9\overline{BP}^2=4\overline{AP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$9\{(x-1)^2+y^2\}=4\{(x+4)^2+y^2\}$

$x^2+y^2-10x-11=0$

$\therefore (x-5)^2+y^2=36$

34 $\frac{\overline{OP}}{\overline{AP}}=2$에서 $\overline{OP}=2\overline{AP}$이므로

$\overline{OP}^2=4\overline{AP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$x^2+y^2=4\{(x-3)^2+y^2\}$

$x^2+y^2-8x+12=0$

$\therefore (x-4)^2+y^2=4$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 길이는

$2\pi\times2=4\pi$

35 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$에서 $2\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$4\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

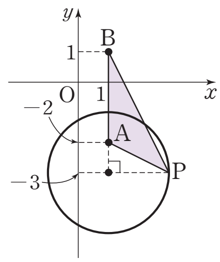
점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$4\{(x-1)^2+(y+2)^2\}=(x-1)^2+(y-1)^2$

$x^2+y^2-2x+6y+6=0$

$\therefore (x-1)^2+(y+3)^2=4$

따라서 점 P는 중심이 점 $(1,\ -3)$이고 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직이므로 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABP의 넓이는 $\overline{\mathrm{AB}}$가 밑변이고 높이가 원의 반지름의 길이와 같을 때 최대이다.



따라서 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times3\times2=3$

36 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=36$에서

$(x+2)^2+y^2+(x-4)^2+y^2=36$

$x^2+y^2-2x-8=0$

$\therefore\ (x-1)^2+y^2=9$

37 $x^2+y^2+6x-6y+9=0$을 변형하면

$(x+3)^2+(y-3)^2=9$

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 P는 이 원 위에 있으므로

$(a+3)^2+(b-3)^2=9$ ⋯⋯ ㉠

점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 점 Q는 선분 OP를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$x=\frac{2a}{2+1},\ y=\frac{2b}{2+1}$ $\therefore\ a=\frac{3}{2}x,\ b=\frac{3}{2}y$

이를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{3}{2}x+3\right)^2+\left(\frac{3}{2}y-3\right)^2=9$

$\therefore\ (x+2)^2+(y-2)^2=4$

따라서 점 Q가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 길이는

$2\pi\times2=4\pi$

38 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 P는 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=9$ ⋯⋯ ㉠

점 G의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 점 G는 삼각형 ABP의 무게중심이므로

$x=\frac{1+8+a}{3},\ y=\frac{-3+6+b}{3}$

$\therefore\ a=3x-9,\ b=3y-3$

이를 ㉠에 대입하면

$(3x-9)^2+(3y-3)^2=9$

$\therefore\ (x-3)^2+(y-1)^2=1$

따라서 점 G가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 넓이는

$\pi\times1^2=\pi$

02 원과 직선의 위치 관계 26~30쪽

1 ②	**2** ②	**3** 2	**4** 6	**5** ①
6 $\frac{35}{12}$	**7** ③	**8** ④	**9** ①	**10** $\frac{10}{3}$
11 $\sqrt{23}$	**12** ②	**13** ⑤	**14** ②	**15** ①
16 ③	**17** 2	**18** ④	**19** 22	**20** 18
21 5	**22** 8	**23** ⑤	**24** ⑤	**25** -1
26 ⑤	**27** ②	**28** ①	**29** $\frac{20}{3}$	**30** ⑤
31 18	**32** ⑤			

1 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$을 변형하면

$(x+1)^2+(y-1)^2=1$

이 원의 중심의 좌표는 $(-1,\ 1)$, 반지름의 길이는 1이므로 주어진 직선과 원의 중심 사이의 거리를 각각 구하여 반지름의 길이와 비교하자.

ㄱ. $\frac{|-1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$

원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

ㄴ. $\frac{|-1+2+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}>1$

원과 직선은 만나지 않는다.

ㄷ. $\frac{|-4+3+6|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$

원과 직선은 한 점에서 만난다.

ㄹ. $\frac{|-3-1-6|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}>1$

원과 직선은 만나지 않는다.

따라서 보기에서 원과 만나는 직선인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2 원의 중심 $(1,\ 0)$과 직선 $x+2y+5=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 r와 같으므로

$r=\frac{|1+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

3 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{2}$보다 커야 하므로

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}>\sqrt{2},\ |k|>2$

$\therefore\ k<-2$ 또는 $k>2$ ⋯⋯ ㉠

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$보다 작아야 하므로

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<2\sqrt{2},\ |k|<4$ $\therefore\ -4<k<4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4<k<-2$ 또는 $2<k<4$

따라서 정수 k는 $-3,\ 3$의 2개이다.

다른 풀이

$y=x+k$를 $x^2+y^2=2$에 대입하면

$x^2+(x+k)^2=2 \qquad \therefore 2x^2+2kx+k^2-2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=k^2-2(k^2-2)<0$

$-k^2+4<0,\ k^2-4>0,\ (k+2)(k-2)>0$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$y=x+k$를 $x^2+y^2=8$에 대입하면

$x^2+(x+k)^2=8 \qquad \therefore 2x^2+2kx+k^2-8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=k^2-2(k^2-8)>0$

$-k^2+16>0,\ k^2-16<0,\ (k+4)(k-4)<0$

$\therefore -4<k<4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4<k<-2$ 또는 $2<k<4$

따라서 정수 k는 -3, 3의 2개이다.

4 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $2x-y=k$, 즉 $2x-y-k=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같으므로

$\dfrac{|-k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5},\ |k|=5 \qquad \therefore k=5\ (\because k>0)$

$y=2x-5$를 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(2x-5)^2=5,\ x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0 \qquad \therefore x=2$

따라서 교점의 좌표는 $(2,\ -1)$이므로

$a=2,\ b=-1$

$\therefore k+a+b=5+2+(-1)=6$

5 원의 중심 $(2,\ k)$와 직선 $x+3y+9=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{10}$보다 작아야 하므로

$\dfrac{|2+3k+9|}{\sqrt{1^2+3^2}}<\sqrt{10},\ |3k+11|<10$

$-10<3k+11<10 \qquad \therefore -7<k<-\dfrac{1}{3}$

따라서 k의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

6 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(r,\ r)$

원의 중심 $(r,\ r)$와 직선 $3x+4y-5=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 r와 같아야 하므로

$\dfrac{|3r+4r-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=r,\ |7r-5|=5r$

$7r-5=\pm 5r \qquad \therefore r=\dfrac{5}{2}$ 또는 $r=\dfrac{5}{12}$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은

$\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{12}=\dfrac{35}{12}$

7 원의 중심의 좌표를 $(a,\ 2a)$라 하면 원의 반지름의 길이는 점 $(a,\ 2a)$에서 두 직선 $x+2y-3=0$, $x+2y-7=0$ 각각에 이르는 거리와 같으므로

$|r|=\dfrac{|a+4a-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|a+4a-7|}{\sqrt{1^2+2^2}} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$|5a-3|=|5a-7|$에서

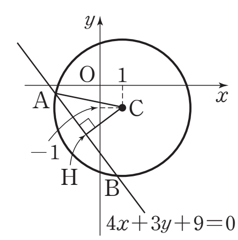
$5a-3=-(5a-7) \qquad \therefore a=1$

이를 ㉠에 대입하면 $|r|=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

또 $b=2a$이므로 $b=2$

$\therefore a+b+r^2=1+2+\dfrac{4}{5}=\dfrac{19}{5}$

8 원의 중심을 $C(1,\ -1)$, 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=\dfrac{|4-3+9|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$

삼각형 CAH는 직각삼각형이고 $\overline{CA}=3$이므로

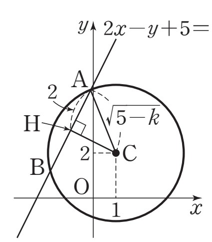
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

9 $x^2+y^2-2x-4y+k=0$을 변형하면

$(x-1)^2+(y-2)^2=5-k$

이 원의 중심을 $C(1,\ 2)$, 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times 4=2$

$\overline{CH}=\dfrac{|2-2+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

이때 $\overline{AC}=\sqrt{5-k}$이고 삼각형 AHC는 직각삼각형이므로

$\overline{AH}^2+\overline{CH}^2=\overline{AC}^2$

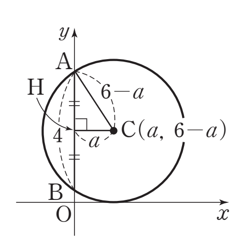
$2^2+(\sqrt{5})^2=(\sqrt{5-k})^2$

$9=5-k \qquad \therefore k=-4$

10 원의 중심이 직선 $x+y=6$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $C(a,\ 6-a)\,(0<a<6)$라 하면

$\overline{CA}=6-a$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times 4=2$

삼각형 AHC는 직각삼각형이므로

$\overline{AH}^2+\overline{CH}^2=\overline{CA}^2$

$2^2+a^2=(6-a)^2$, $12a=32$ $\quad\therefore a=\frac{8}{3}$

따라서 원의 반지름의 길이는

$6-a=6-\frac{8}{3}=\frac{10}{3}$

11 원의 중심 O(0, 0)에 대하여

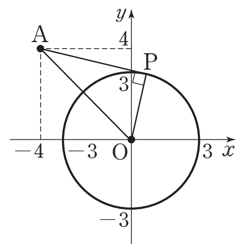
$\overline{OP}=3$

$\overline{OA}=\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2}$

이때 삼각형 AOP는 직각삼각형이므로

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}$

$=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-3^2}=\sqrt{23}$

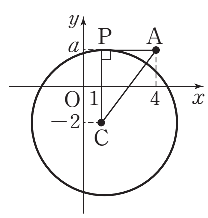


12 원의 중심을 C(1, −2), 점 A에서 이 원에 그은 접선의 접점을 P라 하면

$\overline{CP}=4$, $\overline{AP}=3$

$\overline{CA}=\sqrt{(4-1)^2+\{a-(-2)\}^2}$

$=\sqrt{a^2+4a+13}$



이때 삼각형 APC는 직각삼각형이므로

$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{CA}^2$

$3^2+4^2=a^2+4a+13$, $a^2+4a-12=0$

$(a+6)(a-2)=0$ $\quad\therefore a=2\ (\because a>0)$

13 $x^2+y^2-6x-8y+16=0$을 변형하면

$(x-3)^2+(y-4)^2=9$

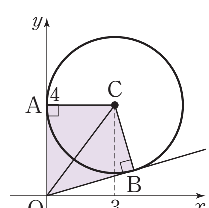
이 원의 중심이 C(3, 4)이므로

$\overline{OC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

또 반지름의 길이가 3이므로

$\overline{AC}=3$

이때 삼각형 OAC는 직각삼각형이므로



$\overline{OA}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\therefore \square OACB=2\triangle OAC=2\times\frac{1}{2}\times4\times3=12$

14 원의 중심 (−1, 3)과 직선 $3x+4y+1=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|-3+12+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=1$

$\therefore M=d+r=2+1=3$, $m=d-r=2-1=1$

$\therefore Mm=3$

15 $x^2+y^2+2x-6y+6=0$을 변형하면

$(x+1)^2+(y-3)^2=4$

이 원의 중심 (−1, 3)과 직선 $3x+4y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-3+12+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|k+9|}{5}$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원의 중심과 직선 사이의 거리는

$5-2=3$

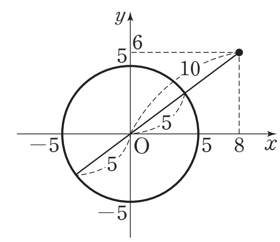
즉, $\frac{|k+9|}{5}=3$이므로 $|k+9|=15$

$\therefore k=6\ (\because k>0)$

16 원의 중심 (0, 0)과 점 (8, 6) 사이의 거리는

$\sqrt{8^2+6^2}=10$

이때 원의 반지름의 길이는 5이므로 점 P와 점 (8, 6) 사이의 거리를 d라 하면



$10-5\le d\le 10+5$ $\quad\therefore 5\le d\le 15$

이때 d가 될 수 있는 정수는 5, 6, 7, ⋯, 15이다.

$d=5$ 또는 $d=15$인 점 P는 각각 한 개씩 존재하고

$d=6$, $d=7$, ⋯, $d=14$인 점 P는 각각 2개씩 존재하므로 점 P의 개수는

$2\times1+9\times2=20$

17 $x^2+y^2-4x-5=0$을 변형하면

$(x-2)^2+y^2=9$

$x^2+y^2+2x-6y+9=0$을 변형하면

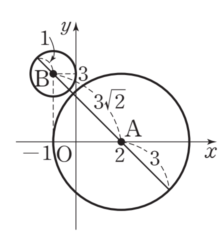
$(x+1)^2+(y-3)^2=1$

두 원의 중심을 각각 A(2, 0), B(−1, 3)이라 하면 중심 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(-1-2)^2+3^2}=3\sqrt{2}$

$\therefore M=3\sqrt{2}+3+1=3\sqrt{2}+4$,

$\quad m=3\sqrt{2}-1-3=3\sqrt{2}-4$



$\therefore Mm=(3\sqrt{2}+4)(3\sqrt{2}-4)=18-16=2$

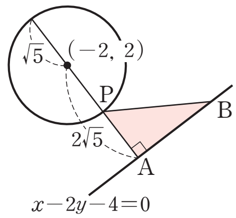
18 두 점 A(0, −2), B(4, 0)을 지나는 직선의 방정식은

$y+2=\frac{2}{4}x$ $\quad\therefore x-2y-4=0$

원의 중심 (−2, 2)와 직선 $x-2y-4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-2-4-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$

삼각형 ABP의 넓이가 최소일 때의 삼각형의 높이를 h라 하면



$h=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$

또 선분 AB의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

따라서 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times h=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$

19 점 $(3,\ 4)$를 지나면서 원점과의 거리가 최대인 직선 l은 원점과 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선에 수직이어야 한다.

원점과 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{4}{3}x$이므로 직선 l의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

따라서 직선 l의 방정식은

$y-4=-\frac{3}{4}(x-3)\qquad\therefore\ 3x+4y-25=0$

이때 원의 중심 $(7,\ 5)$와 직선 $3x+4y-25=0$ 사이의 거리는

$\frac{|21+20-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원 위의 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값 m은

$m=\frac{16}{5}-1=\frac{11}{5}$

$\therefore\ 10m=10\times\frac{11}{5}=22$

20 직선 $y=x+2$의 기울기가 1이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 1이다.

따라서 기울기가 1이고 원 $x^2+y^2=9$에 접하는 직선의 방정식은

$y=x\pm3\sqrt{1^2+1}\qquad\therefore\ y=x\pm3\sqrt{2}$

즉, $k=\pm3\sqrt{2}$이므로 $k^2=18$

21 직선 $x-2y-5=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -2이다.

따라서 기울기가 -2이고 원 $x^2+y^2=5$에 접하는 직선의 방정식은

$y=-2x\pm\sqrt{5}\times\sqrt{(-2)^2+1}$

$\therefore\ y=-2x\pm5$

따라서 두 직선의 x절편은 $-\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\left|\frac{5}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right|=5$

22 기울기가 3인 직선의 방정식을 $y=3x+n$, 즉 $3x-y+n=0$이라 하면 이 직선과 원의 중심 $(-1,\ 1)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$\frac{|-3-1+n|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$|n-4|=5\sqrt{2}\qquad\therefore\ n=4\pm5\sqrt{2}$

따라서 두 직선의 y절편의 합은

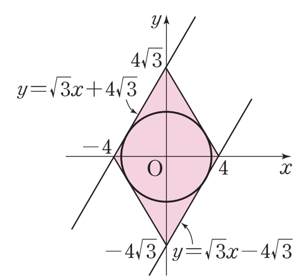
$(4-5\sqrt{2})+(4+5\sqrt{2})=8$

23 기울기가 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이고 원 $x^2+y^2=12$에 접하는 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{12}\times\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}\qquad\therefore\ y=\sqrt{3}x\pm4\sqrt{3}$

이 직선이 x축, y축과 만나는 네 점의 좌표는

$(-4,\ 0)$, $(4,\ 0)$, $(0,\ -4\sqrt{3})$, $(0,\ 4\sqrt{3})$



따라서 구하는 사각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times8\times8\sqrt{3}=32\sqrt{3}$

24 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$2x-y=5\qquad\therefore\ y=2x-5$

따라서 $a=2$, $b=\frac{5}{2}$이므로 $ab=5$

25 원의 중심 $(1,\ 2)$와 점 $(-2,\ 6)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{6-2}{-2-1}=-\frac{4}{3}$

접선은 원의 중심과 접점을 지나는 직선에 수직이므로 기울기가 $\frac{3}{4}$이고 점 $(-2,\ 6)$을 지나는 접선의 방정식은

$y-6=\frac{3}{4}(x+2)\qquad\therefore\ 3x-4y+30=0$

따라서 $a=3$, $b=-4$이므로 $a+b=-1$

26 점 P의 좌표를 $(a,\ b)(a>0,\ b>0)$라 하면 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$ax+by=1$

이 직선이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3b=1\qquad\therefore\ b=\frac{1}{3}\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=1$

㉠을 대입하면

$a^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1,\ a^2=\frac{8}{9}\qquad\therefore\ a=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ (\because\ a>0)$

따라서 점 P의 x좌표는 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

27 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=20$

이 접선이 직선 $2x+y-10=0$과 수직이므로

$2a+b=0 \qquad \therefore\ b=-2a \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=20$

㉠을 대입하면

$a^2+(-2a)^2=20,\ a^2=4 \qquad \therefore\ a=\pm 2$

이를 ㉠에 대입하면

$a=-2$일 때 $b=4$, $a=2$일 때 $b=-4$

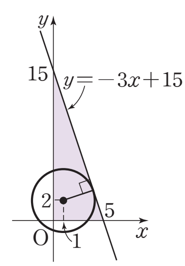
$\therefore\ ab=-8$

28 $x^2+y^2-2x-4y-5=0$을 변형하면

$(x-1)^2+(y-2)^2=10$

원의 중심 $(1,\ 2)$와 점 $(4,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{3-2}{4-1}=\dfrac{1}{3}$



접선은 원의 중심과 접점을 지나는 직선과 수직이므로 기울기가 -3이고 점 $(4,\ 3)$을 지나는 접선의 방정식은

$y-3=-3(x-4)$

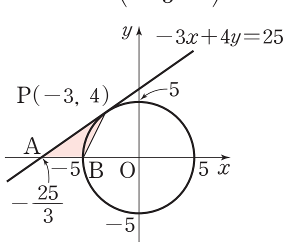
$\therefore\ y=-3x+15$

따라서 이 접선의 x절편은 5, y절편은 15이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 5\times 15=\dfrac{75}{2}$

29 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $\mathrm{P}(-3,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$-3x+4y=25 \qquad \therefore\ \mathrm{A}\left(-\dfrac{25}{3},\ 0\right)$



점 A에서 가장 가까운 원 위의 점은 $\mathrm{B}(-5,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\left|-5-\left(-\dfrac{25}{3}\right)\right|=\dfrac{10}{3}$

따라서 삼각형 ABP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{10}{3}\times 4=\dfrac{20}{3}$

30 점 $(2,\ 1)$을 지나고 주어진 원에 접하는 직선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-1=m(x-2) \qquad \therefore\ mx-y-2m+1=0$

원의 중심 $(4,\ 0)$과 이 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 1과 같으므로

$\dfrac{|4m-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\ |2m+1|=\sqrt{m^2+1}$

$(2m+1)^2=m^2+1,\ 3m^2+4m=0$

$m(3m+4)=0 \qquad \therefore\ m=0$ 또는 $m=-\dfrac{4}{3}$

따라서 접선의 방정식은

$y-1=0$ 또는 $4x+3y-11=0$

그런데 $a\neq 0$이므로 $a=4,\ b=3 \qquad \therefore\ a+b=7$

31 점 $(0,\ 3)$을 지나고 주어진 원에 접하는 직선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-3=mx \qquad \therefore\ mx-y+3=0$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 이 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 1과 같으므로

$\dfrac{|3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\ 3=\sqrt{m^2+1}$

$9=m^2+1,\ m^2=8 \qquad \therefore\ m=\pm 2\sqrt{2}$

(i) $m=-2\sqrt{2}$일 때,

접선의 방정식은 $y=-2\sqrt{2}x+3$

$-2\sqrt{2}x+3=0$에서 $x=\dfrac{3\sqrt{2}}{4} \qquad \therefore\ k=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

(ii) $m=2\sqrt{2}$일 때,

접선의 방정식은 $y=2\sqrt{2}x+3$

$2\sqrt{2}x+3=0$에서 $x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{4} \qquad \therefore\ k=-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

(i), (ii)에서 $16k^2=16\times\dfrac{9}{8}=18$

32 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=4$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(4,\ -2)$를 지나므로

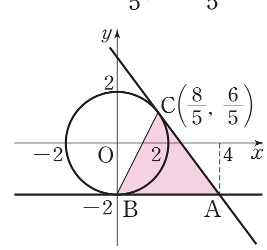
$4x_1-2y_1=4 \qquad \therefore\ y_1=2x_1-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$x_1{}^2+y_1{}^2=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x_1=0,\ y_1=-2$ 또는 $x_1=\dfrac{8}{5},\ y_1=\dfrac{6}{5}$



따라서 $\mathrm{B}(0,\ -2)$, $\mathrm{C}\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$이라 하면

$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times 4\times\left(\dfrac{6}{5}+2\right)=\dfrac{32}{5}$

I-4. 도형의 이동

01 평행이동 32~34쪽

1 (5, −1)		**2** ⑤	**3** ③	**4** 1
5 3	**6** ④	**7** 2	**8** 4	**9** ④
10 6	**11** ⑤	**12** ③	**13** ⑤	**14** ③
15 ⑤	**16** ⑤	**17** ②	**18** ③	**19** ②
20 45				

1 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(a-2,\ b+3)$이므로
$a-2=3,\ b+3=2$
$\therefore\ a=5,\ b=-1$
따라서 점 P의 좌표는 $(5,\ -1)$이다.

2 점 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$을 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는 $\left(a-\frac{1}{2},\ a^2+2\right)$
이 점이 직선 $y=4x$ 위에 있으므로
$a^2+2=4\left(a-\frac{1}{2}\right),\ a^2-4a+4=0$
$(a-2)^2=0 \qquad \therefore\ a=2$

3 주어진 평행이동은 $(x,\ y) \longrightarrow (x+2,\ y-2)$
이 평행이동에 의하여 점 $(a,\ b)$는 점 $(a+2,\ b-2)$로 옮겨지므로
$a+2=1-b,\ b-2=2a$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-1,\ b=0$
$\therefore\ ab=0$

4 점 $\mathrm{A}(2,\ 1)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점을 A'이라 하면 $\mathrm{A}'(4,\ 1+a)$
$\overline{\mathrm{OA}'}=2\overline{\mathrm{OA}}$에서 $\overline{\mathrm{OA}'}^2=4\overline{\mathrm{OA}}^2$이므로
$4^2+(1+a)^2=4(2^2+1^2)$
$a^2+2a-3=0,\ (a+3)(a-1)=0$
$\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$

5 직선 $y=3x-2$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y-4=3(x-a)-2 \qquad \therefore\ y=3x-3a+2$
이 직선이 점 $(2,\ -1)$을 지나므로
$-1=6-3a+2,\ 3a=9$
$\therefore\ a=3$

6 직선 $ax-y+4=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$a(x-m)-(y+2)+4=0$
$\therefore\ ax-y-am+2=0$
이 직선이 직선 $3x-y-1=0$과 일치하므로
$a=3,\ -am+2=-1$
$\therefore\ a=3,\ m=1$
$\therefore\ a+m=4$

7 직선 $2x-y-5=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$2(x-a)-(y-b)-5=0$
$\therefore\ 2x-y-2a+b-5=0$
이 직선이 원래의 직선과 일치하므로
$-2a+b-5=-5 \qquad \therefore\ b=2a$
$\therefore\ \frac{b}{a}=2$

8 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y+1=a(x-2)+b$
$\therefore\ y=ax-2a+b-1$
이 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 y절편이 1이므로
$a=\frac{1}{2},\ -2a+b-1=1$
$\therefore\ a=\frac{1}{2},\ b=3$
$\therefore\ 2a+b=2\times\frac{1}{2}+3=4$

9 원 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x-a-2)^2+(y-b+3)^2=4$
이 원이 원 $x^2+y^2-4y=0$, 즉 $x^2+(y-2)^2=4$와 일치하므로
$-a-2=0,\ -b+3=-2$
$\therefore\ a=-2,\ b=5$
$\therefore\ a+b=3$

다른 풀이
$x^2+y^2-4y=0$을 변형하면
$x^2+(y-2)^2=4$
따라서 원의 중심 $(2,\ -3)$을 평행이동한 점의 좌표가 $(0,\ 2)$이므로
$2+a=0,\ -3+b=2$
$\therefore\ a=-2,\ b=5$
$\therefore\ a+b=3$

유형편

10 $x^2+y^2+2x-4y+a=0$을 변형하면

$(x+1)^2+(y-2)^2=5-a$ …… ㉠

주어진 평행이동은 $(x, y) \longrightarrow (x+3, y-4)$

이 평행이동에 의하여 원 ㉠이 평행이동한 원의 방정식은

$(x-3+1)^2+(y+4-2)^2=5-a$

$\therefore (x-2)^2+(y+2)^2=5-a$

따라서 중심의 좌표가 $(2, -2)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{5-a}$ 이므로

$b=2$, $\sqrt{5-a}=3$ $\quad \therefore a=-4$, $b=2$

$\therefore b-a=6$

11 $x^2+y^2+bx+6y+c=0$을 변형하면

$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+(y+3)^2=\frac{b^2}{4}+9-c$ …… ㉠

주어진 평행이동은 $(x, y) \longrightarrow (x+4, y+a-5)$

이 평행이동에 의하여 원 $x^2+y^2=9$의 중심 $(0, 0)$은 원 ㉠의 중심 $\left(-\frac{b}{2}, -3\right)$으로 옮겨지므로

$4=-\frac{b}{2}$, $a-5=-3$ $\quad \therefore a=2$, $b=-8$

또 원은 평행이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로

$\frac{b^2}{4}+9-c=9$, $16+9-c=9$ ($\because b=-8$)

$\therefore c=16$

$\therefore a+b+c=2+(-8)+16=10$

12 $x^2+y^2-2x-6y+6=0$을 변형하면

$(x-1)^2+(y-3)^2=4$

$x^2+y^2+4x-2y+1=0$을 변형하면

$(x+2)^2+(y-1)^2=4$

원의 중심 $(1, 3)$을 원의 중심 $(-2, 1)$로 옮기는 평행이동은 $(x, y) \longrightarrow (x-3, y-2)$

이 평행이동에 의하여 직선 $3x+2y+5=0$이 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x+3)+2(y+2)+5=0$

$\therefore 3x+2y+18=0$

이 직선이 직선 $ax+2y+b=0$과 일치하므로

$a=3$, $b=18$ $\quad \therefore \frac{b}{a}=6$

13 원 C의 방정식은

$(x-3+1)^2+(y-a+2)^2=9$

$\therefore (x-2)^2+(y-a+2)^2=9$

이 원의 넓이가 직선 $3x+4y-7=0$에 의하여 이등분되려면 직선이 원의 중심 $(2, a-2)$를 지나야 하므로

$3\times2+4(a-2)-7=0$

$4a-9=0$ $\quad \therefore a=\frac{9}{4}$

14 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-2)^2+(y+1)^2=4$

이 원이 직선 $3x+4y-1=0$과 접하려면 원의 중심 $(a+2, -1)$과 직선 $3x+4y-1=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 2와 같아야 하므로

$\frac{|3(a+2)-4-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

$|3a+1|=10$ $\quad \therefore a=3$ ($\because a>0$)

15 포물선 $y=x^2+2x+a$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y+3=(x+2)^2+2(x+2)+a$

$\therefore y=x^2+6x+a+5$

이 포물선이 포물선 $y=x^2+bx+7$과 일치하므로

$6=b$, $a+5=7$

$\therefore a=2$, $b=6$

$\therefore ab=12$

16 포물선 $y=3x^2-4$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-k=3(x+3)^2-4$

$\therefore y=3(x+3)^2+k-4$

이 포물선이 점 $(-2, 8)$을 지나므로

$8=3+k-4$

$\therefore k=9$

17 포물선 $y=x^2+6x+13$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y+1=(x-2)^2+6(x-2)+13$

$\therefore y=x^2+2x+4=(x+1)^2+3$

따라서 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 3)$이므로

$a=-1$, $b=3$

$\therefore a+b=2$

다른 풀이

$y=x^2+6x+13=(x+3)^2+4$

이 포물선의 꼭짓점 $(-3, 4)$를 평행이동한 점의 좌표가 (a, b)이므로

$a=-3+2=-1$, $b=4-1=3$

$\therefore a+b=2$

18 $y=2x^2+4x+1=2(x+1)^2-1$

이 포물선을 평행이동한 포물선의 방정식은

$y+a=2(x-a+1)^2-1$

$\therefore y=2(x-a+1)^2-a-1$

이 포물선의 꼭짓점 $(a-1,\ -a-1)$이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로

$-a-1=a-1+1$

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{2}$

19 포물선 $y=x^2$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-3=(x+1)^2$

$\therefore\ y=x^2+2x+4$

$x^2+2x+4=6x+1$에서

$x^2-4x+3=0,\ (x-1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=3$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(1,\ 7)$, $(3,\ 19)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-1)^2+(19-7)^2}=2\sqrt{37}$

20 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$

$y=x^2-12x+30=(x-6)^2-6$

따라서 꼭짓점 $(1,\ -1)$을 꼭짓점 $(6,\ -6)$으로 옮기는 평행이동은 $(x,\ y) \longrightarrow (x+5,\ y-5)$이므로 직선 l'의 방정식은

$(x-5)-2(y+5)=0$

$\therefore\ x-2y-15=0$

두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l' 위의 점 $(5,\ -5)$와 직선 l 사이의 거리와 같으므로

$d=\dfrac{|5-2\times(-5)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=3\sqrt{5}$

$\therefore\ d^2=45$

02 대칭이동 35~40쪽

1 ①	**2** ①	**3** $2\sqrt{10}$	**4** ②	
5 제4사분면		**6** ②	**7** ④	
8 $y=2x+9$		**9** 4	**10** 56	**11** ⑤
12 ④	**13** $2\sqrt{5}+2$		**14** -3	**15** ⑤
16 ③	**17** ④	**18** 11	**19** ①	**20** -4
21 ②	**22** $\dfrac{3}{2}$	**23** $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$		**24** $\sqrt{65}$
25 ④	**26** 12	**27** ⑤	**28** 12	**29** ③
30 ④	**31** 2	**32** -3	**33** -4	**34** ①
35 ⑤	**36** 4	**37** ③	**38** $\sqrt{17}$	

1 점 $(-3,\ 1)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(3,\ 1)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-3,\ -1)$

2 점 $(1,\ a)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{A}(a,\ 1)$이므로 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a,\ -1)$

따라서 $a=2,\ b=-1$이므로

$a+b=1$

3 $\mathrm{P}(2,\ 4)$, $\mathrm{Q}(-4,\ 2)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-4-2)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{10}$

4 점 $(4,\ k)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-4,\ -k)$

이 점이 직선 $y=-3x+k$ 위에 있으므로

$-k=12+k,\ 2k=-12$

$\therefore\ k=-6$

5 점 $(a,\ b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a,\ -b)$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$a<0,\ -b>0 \qquad \therefore\ a<0,\ b<0$

점 $(a+b,\ ab)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a-b,\ -ab)$

이때 $a<0,\ b<0$이므로

$-a-b>0,\ -ab<0$

따라서 점 $(-a-b,\ -ab)$는 제4사분면 위에 있다.

6 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로

$b=a+2$

$\therefore\ \mathrm{A}(a,\ a+2)$

점 $\mathrm{A}(a,\ a+2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점은

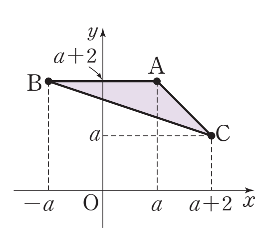
$\mathrm{B}(-a,\ a+2)$

점 $\mathrm{A}(a,\ a+2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은

$\mathrm{C}(a+2,\ a)$

$\therefore\ \triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times 2a\times 2$

$=2a$



따라서 $2a=4$이므로

$a=2$

유형편

7 직선 $y=mx+3$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$-y=mx+3$
$\therefore y=-mx-3$
이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$-y=mx-3$
$\therefore y=-mx+3$
이 직선이 점 $(2, 1)$을 지나므로
$1=-2m+3 \qquad \therefore m=1$

8 직선 $y=\frac{1}{2}x-5$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$y=-\frac{1}{2}x-5$
이 직선에 수직인 직선의 기울기는 2이므로 기울기가 2이고 점 $(-4, 1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-1=2(x+4)$
$\therefore y=2x+9$

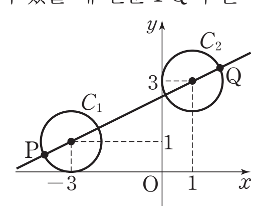
9 포물선 $y=x^2+ax+8$을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$-y=x^2+ax+8$
$\therefore y=-x^2-ax-8=-\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-8$
이 포물선의 꼭짓점 $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}-8\right)$이 직선 $2x-y=0$ 위에 있으므로
$2\times\left(-\frac{a}{2}\right)-\left(\frac{a^2}{4}-8\right)=0$
$a^2+4a-32=0$, $(a+8)(a-4)=0$
$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

10 C_1: $x^2+y^2-10x+12y+45=0$이므로
C_2: $x^2+y^2-10x-12y+45=0$
$\therefore (x-5)^2+(y-6)^2=16$
따라서 $a=5$, $b=6$이므로
$10a+b=10\times5+6=56$

11 포물선 $y=-x^2+x-2$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
$-y=-(-x)^2-x-2$
$\therefore y=x^2+x+2$
이차방정식 $x^2+x+2=kx-2$, 즉 $x^2+(1-k)x+4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(1-k)^2-16=0$
$k^2-2k-15=0$, $(k+3)(k-5)=0$
$\therefore k=5$ ($\because k>0$)

12 원 $x^2+y^2-6x+8y=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$x^2+y^2+8x-6y=0$
$y=0$을 대입하면 $x^2+8x=0$
$x(x+8)=0 \qquad \therefore x=-8$ 또는 $x=0$
따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(-8, 0)$, $(0, 0)$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=|-8|=8$

13 C_1: $(x+3)^2+(y-1)^2=1$이므로 중심의 좌표는 $(-3, 1)$
원 C_1을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-1)^2=1$
이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
C_2: $(x-1)^2+(y-3)^2=1$
원 C_2의 중심의 좌표는 $(1, 3)$
다음 그림과 같이 두 원 C_1, C_2의 중심을 지나는 직선 위에 두 점 P, Q가 있을 때 선분 PQ의 길이가 최대이다.



두 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{\{1-(-3)\}^2+(3-1)^2}=2\sqrt{5}$
따라서 선분 PQ의 길이의 최댓값은
$2\sqrt{5}+1+1=2\sqrt{5}+2$

14 점 $(a, -2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a, 2)$
이 점을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-a+4, -1)$
이 점이 점 $(1, b)$와 일치하므로
$-a+4=1$, $-1=b$
$\therefore a=3$, $b=-1 \qquad \therefore ab=-3$

15 원 $(x+2)^2+(y+5)^2=9$의 중심의 좌표는 $(-2, -5)$
이 점을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-2+a, -5+b)$
이 점을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(2-a, -5+b)$
이 점의 좌표가 $(-3, 2)$이므로
$2-a=-3$, $-5+b=2$
$\therefore a=5$, $b=7 \qquad \therefore a+b=12$

16 포물선 $y=x^2-x+a$를 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=(-x)^2-(-x)+a=x^2+x+a$

이 포물선을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-2=(x+1)^2+x+1+a$

$\therefore\ y=x^2+3x+a+4$

이 포물선이 포물선 $y=x^2+3x+10$과 일치하므로

$a+4=10 \qquad \therefore\ a=6$

17 $B(4,\ -3)$, $C(6,\ k-3)$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같으므로

$\dfrac{-3-4}{4-(-3)}=\dfrac{k-3-(-3)}{6-4}$

$-1=\dfrac{k}{2} \qquad \therefore\ k=-2$

18 포물선 $y=x^2-6x+5$를 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=-x^2+6x-5$

이 포물선을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-m=-x^2+6x-5$

$\therefore\ y=-x^2+6x-5+m$

$f(x)=-x^2+6x-5+m=-(x-3)^2+m+4$는 $x=3$일 때 최댓값 $m+4$를 가지므로

$m+4=15 \qquad \therefore\ m=11$

19 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x-3$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2}(x-a)-3$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$x=-\dfrac{1}{2}(y-a)-3$

$\therefore\ l$: $2x+y-a+6=0$

직선 l이 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=5$와 접하려면 원의 중심 $(-1,\ 3)$과 직선 l 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$\dfrac{|-2+3-a+6|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$

$|7-a|=5$, $7-a=\pm 5$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=12$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 $2+12=14$

20 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=36$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-a)^2+(-y-b)^2=36$

$\therefore\ (x-a)^2+(y+b)^2=36$

이 원을 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-4-a)^2+(y+b)^2=36$

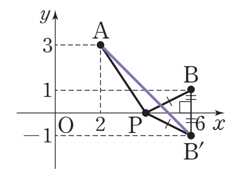
이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$|a+4|=|-b|=6$

$\therefore\ a=2,\ b=6\ (\because\ a>0,\ b>0)$

$\therefore\ a-b=-4$

21 점 $B(6,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면



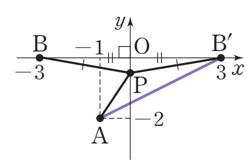
$B'(6,\ -1)$

이때 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{BP}&=\overline{AP}+\overline{B'P}\\&\ge \overline{AB'}\\&=\sqrt{(6-2)^2+(-1-3)^2}\\&=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $4\sqrt{2}$이다.

22 점 $B(-3,\ 0)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 $B'(3,\ 0)$



이때 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}\ge\overline{AB'}$

$\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소일 때의 점 P는 직선 AB'과 y축의 교점이다.

직선 AB'의 방정식은

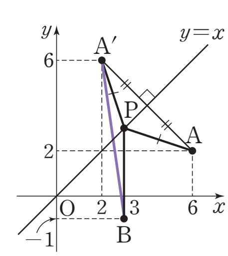
$y=\dfrac{0-(-2)}{3-(-1)}(x-3) \qquad \therefore\ y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ P\left(0,\ -\dfrac{3}{2}\right)$

따라서 $a=0$, $b=-\dfrac{3}{2}$이므로

$a-b=\dfrac{3}{2}$

23 점 $A(6,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 $A'(2,\ 6)$



이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\ge\overline{A'B}$

$\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소일 때의 점 P는 직선 $A'B$와 직선 $y=x$의 교점이다.

직선 A′B의 방정식은

$y-6=\dfrac{-1-6}{3-2}(x-2)$

$\therefore\ y=-7x+20$

$x=-7x+20$에서 $x=\dfrac{5}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$이다.

24 점 A(2, 3)을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

A′(−2, 3)

점 B(5, 1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

B′(5, −1)

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}&=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\\&\ge\overline{A'B'}\\&=\sqrt{\{5-(-2)\}^2+(-1-3)^2}\\&=\sqrt{65}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값은 $\sqrt{65}$이다.

25 점 A(2, 3)을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

A′(3, 2)

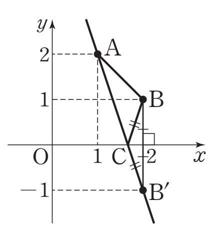
점 B(−3, 1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

B′(−3, −1)

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{AD}+\overline{CD}+\overline{BC}&=\overline{A'D}+\overline{CD}+\overline{B'C}\\&\ge\overline{A'B'}\\&=\sqrt{(-3-3)^2+(-1-2)^2}\\&=3\sqrt{5}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{BC}$의 최솟값은 $3\sqrt{5}$이다.

26 점 B(2, 1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면



B′(2, −1)

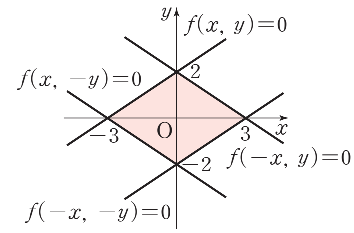
따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은

$$\begin{aligned}&\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}\\&=\overline{AB}+\overline{B'C}+\overline{CA}\\&\ge\overline{AB}+\overline{AB'}\\&=\sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2}+\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2}\\&=\sqrt{2}+\sqrt{10}\end{aligned}$$

$\therefore\ a+b=12$

27 방정식 $f(x+1,\ -y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 −1만큼 평행이동한 것이므로 ⑤이다.

28 방정식 $f(x,\ -y)=0$, $f(-x,\ y)=0$, $f(-x,\ -y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times6\times4=12$

29 [그림 2]의 도형은 [그림 1]의 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 −1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것으로 볼 수 있으므로

$$\begin{aligned}f(x,\ y)=0&\longrightarrow f(x,\ -y)=0\\&\longrightarrow f(x+1,\ -(y-2))=0\end{aligned}$$

$\therefore\ f(x+1,\ -y+2)=0$

또 [그림 1]의 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 −1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것으로도 볼 수 있으므로

$$\begin{aligned}f(x,\ y)=0&\longrightarrow f(-x,\ -y)=0\\&\longrightarrow f(-(x+1),\ -(y-2))=0\end{aligned}$$

$\therefore\ f(-x-1,\ -y+2)=0$

따라서 보기에서 [그림 2]의 도형을 나타내는 방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

30 방정식 $g(x,\ y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 −1만큼 평행이동한 것으로 볼 수 있으므로

$$\begin{aligned}f(x,\ y)=0&\longrightarrow f(-x,\ y)=0\\&\longrightarrow f(-x,\ y+1)=0\end{aligned}$$

$\therefore\ g(x,\ y)=f(-x,\ y+1)$

31 점 (1, 1)은 두 점 $(a,\ 3)$, $(4,\ b)$를 이은 선분의 중점이므로

$\dfrac{a+4}{2}=1,\ \dfrac{3+b}{2}=1$

$\therefore\ a=-2,\ b=-1 \qquad \therefore\ ab=2$

32 점 (−1, −1)은 두 원의 중심 (1, −2), $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점이므로

$\dfrac{1+a}{2}=-1,\ \dfrac{-2+b}{2}=-1$

$\therefore\ a=-3,\ b=0 \qquad \therefore\ a+b=-3$

33 포물선 $y=-x^2+6x-2=-(x-3)^2+7$의 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 7)$
포물선 $y=x^2-2ax+4=(x-a)^2+4-a^2$의 꼭짓점의 좌표는 $(a,\ 4-a^2)$
점 $(2,\ b)$가 두 포물선의 꼭짓점을 이은 선분의 중점이므로
$2=\dfrac{3+a}{2}$, $b=\dfrac{7+4-a^2}{2}$
$\therefore\ a=1,\ b=5$
$\therefore\ a-b=-4$

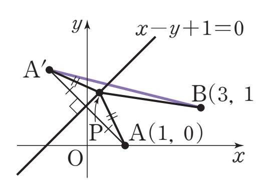
34 직선 $y=2x-3$ 위의 점 $(x,\ y)$를 점 $(-2,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(x',\ y')$이라 하면 두 점 $(x,\ y)$, $(x',\ y')$을 이은 선분의 중점이 점 $(-2,\ 1)$이므로
$\dfrac{x+x'}{2}=-2$, $\dfrac{y+y'}{2}=1$
$\therefore\ x=-4-x',\ y=2-y'$
이를 $y=2x-3$에 대입하면
$2-y'=2(-4-x')-3$
$\therefore\ y'=2x'+13$
따라서 대칭이동한 직선의 방정식은 $y=2x+13$이므로
$a=2,\ b=13$
$\therefore\ a-b=-11$

35 두 점 $(7,\ -3)$, $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점 $\left(\dfrac{7+a}{2},\ \dfrac{-3+b}{2}\right)$가 직선 $x-2y-3=0$ 위의 점이므로
$\dfrac{7+a}{2}-2\times\dfrac{-3+b}{2}-3=0$
$\therefore\ a-2b=-7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
또 두 점 $(7,\ -3)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선과 직선 $x-2y-3=0$, 즉 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$은 서로 수직이므로
$\dfrac{b+3}{a-7}\times\dfrac{1}{2}=-1$
$\therefore\ 2a+b=11$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=5$
$\therefore\ ab=15$

36 두 원의 중심 $(2,\ -1)$, $(-4,\ 3)$을 이은 선분의 중점 $\left(\dfrac{2-4}{2},\ \dfrac{-1+3}{2}\right)$, 즉 $(-1,\ 1)$이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로
$1=-a+b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
또 두 점 $(2,\ -1)$, $(-4,\ 3)$을 지나는 직선과 직선 $y=ax+b$는 서로 수직이므로
$\dfrac{3+1}{-4-2}\times a=-1\qquad\therefore\ a=\dfrac{3}{2}$
이를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=\dfrac{5}{2}$
$\therefore\ a+b=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}=4$

37 직선 $y=2x+1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=-x+3$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면 선분 PP'의 중점 $\left(\dfrac{x+x'}{2},\ \dfrac{y+y'}{2}\right)$이 직선 $y=-x+3$ 위의 점이므로
$\dfrac{y+y'}{2}=-\dfrac{x+x'}{2}+3$
$\therefore\ x+y=-x'-y'+6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
또 직선 PP'과 직선 $y=-x+3$은 서로 수직이므로
$\dfrac{y'-y}{x'-x}\times(-1)=-1$
$\therefore\ x-y=x'-y'$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 x, y에 대하여 풀면
$x=-y'+3,\ y=-x'+3$
점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로
$-x'+3=2(-y'+3)+1$
$\therefore\ x'-2y'+4=0$
따라서 대칭이동한 직선의 방정식이 $x-2y+4=0$이므로
$m=-2,\ n=4$
$\therefore\ m+n=2$

38 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$을 직선 $x-y+1=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A}'(a,\ b)$라 하면 선분 AA'의 중점 $\left(\dfrac{1+a}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$가 직선 $x-y+1=0$ 위의 점이므로



$\dfrac{1+a}{2}-\dfrac{b}{2}+1=0$
$\therefore\ a-b=-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
또 직선 AA'과 직선 $x-y+1=0$, 즉 $y=x+1$은 서로 수직이므로
$\dfrac{b}{a-1}\times1=-1$
$\therefore\ a+b=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-1,\ b=2$
즉, 점 A'의 좌표는 $(-1,\ 2)$이므로
$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}&=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PB}}\\&\geq\overline{\mathrm{A'B}}\\&=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(1-2)^2}\\&=\sqrt{17}\end{aligned}$$
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 $\sqrt{17}$이다.

Ⅱ-1. 집합

01 집합의 뜻과 집합 사이의 포함 관계 42～45쪽

1 ④	**2** ②	**3** ⑤	**4** ⑤	**5** ③
6 ④	**7** $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$		**8** ①	
9 $\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2)\}$				**10** 13
11 ③	**12** ③	**13** ①	**14** ④	**15** ①
16 1	**17** 4	**18** 1	**19** 4	**20** ③
21 8	**22** ④	**23** 16	**24** 8	**25** ③
26 ①				

1 ①, ②, ③, ⑤ '아름다운', '잘하는', '많이', '좋은'은 기준이 명확하지 않아 대상을 분명하게 정할 수 없다.
따라서 집합인 것은 ④이다.

2 ㄴ, ㄹ, ㅁ. '잘하는', '잘 치는', '인기가 많은'은 기준이 명확하지 않아 대상을 분명하게 정할 수 없다.
따라서 보기에서 집합인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3 ④ 5에 가장 가까운 자연수는 4, 6이므로 집합이다.
⑤ '가까운'은 기준이 명확하지 않아 대상을 분명하게 정할 수 없다.
따라서 집합이 아닌 것은 ⑤이다.

4 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$에 대하여 원소 1, 2, 4, 8은 8의 양의 약수이므로 조건제시법으로 나타내면 ⑤이다.

5 ③ $\{10,\ 9,\ 8,\ \cdots,\ 0,\ -1,\ -2,\ \cdots\}$
따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

6 ④ $\{\cdots,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ \cdots\}$

7 집합 A의 원소 a와 집합 B의 원소 b에 대하여 $a+b$의 값은 오른쪽 표와 같으므로 구하는 집합은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

a \ b	-1	0	1
1	0	1	2
2	1	2	3
3	2	3	4

8 $B=\{1,\ 2,\ 4\}$
집합 A의 원소 x와 집합 B의 원소 y에 대하여 xy의 값은 오른쪽 표와 같으므로
$-4,\ -2,\ -1,\ 2,\ 4,\ 8,\ a,\ 2a,\ 4a$

x \ y	1	2	4
-1	-1	-2	-4
2	2	4	8
a	a	$2a$	$4a$

이때 $C=\{-4,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8\}$이므로
$a=1$

9 집합 A의 원소 a, b에 대하여 $a+b$의 값은 오른쪽 표와 같다.
이때 $a+b$의 값 중에서 소수는 2, 3, 5이므로

a \ b	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

$B=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2)\}$

10 $A=\{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$이므로 $n(A)=7$
$B=\{13,\ 26,\ 39,\ 52,\ 65,\ 78\}$이므로 $n(B)=6$
$\therefore\ n(A)+n(B)=7+6=13$

11 ③ $n(\{20\})-n(\{17\})=1-1=0$
④ $A=\{1,\ 7,\ 49\}$이므로 $n(A)=3$
⑤ $B=\{2\}$이므로 $n(B)=1$
따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

12 ㄱ. $n(\{0\})=1$
ㄴ. $n(\{1\})=1$, $n(\{\varnothing\})=1$이므로 $n(\{1\})=n(\{\varnothing\})$
ㄷ. $n(\{0,\ 1,\ 2\})-n(\{1,\ 2\})=3-2=1$
ㄹ. $x^2-8x-9=0$에서 $(x+1)(x-9)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=9$
$\therefore\ n(\{x \mid x^2-8x-9=0\})=n(\{-1,\ 9\})=2$
ㅁ. $n(\{3,\ 4,\ 5\})=3$, $n(\{-3,\ -2,\ -1\})=3$이므로
$n(\{3,\ 4,\ 5\})=n(\{-3,\ -2,\ -1\})$
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

13 ① $\varnothing \notin A$, $\varnothing \subset A$

14 ④ $\{\varnothing\} \notin A$, $\{\varnothing\} \subset A$

15 ㄱ. $\varnothing \subset A$이므로 $\varnothing \in X(A)$
ㄴ. $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset X(A)$
ㄷ. $\{\varnothing\} \not\subset A$이므로 $\{\varnothing\} \notin X(A)$
ㄹ. $\{\{\varnothing\}\} \subset A$이므로 $\{\{\varnothing\}\} \in X(A)$
$\{\varnothing\} \notin X(A)$이므로 $\{\{\varnothing\}\} \not\subset X(A)$
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

16 $A=B$이려면 $a+2b=4$, $3b-2=7$
$3b-2=7$에서 $3b=9$ $\quad\therefore\ b=3$
이를 $a+2b=4$에 대입하면
$a+6=4$ $\quad\therefore\ a=-2$
$\therefore\ a+b=-2+3=1$

17 $A \subset B$, $B \subset A$에서 $A=B$
$4 \in A$이므로 $A=B$이려면 $4 \in B$에서
$2a-4=4$ 또는 $3a+4=4$
$\therefore\ a=0$ 또는 $a=4$

(ⅰ) $a=0$일 때,

$A=\{0,\ 4\}$, $B=\{-4,\ 4,\ 8\}$ $\therefore\ A\neq B$

(ⅱ) $a=4$일 때,

$A=\{4,\ 8,\ 16\}$, $B=\{4,\ 8,\ 16\}$ $\therefore\ A=B$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=4$

18 $-2\in A$이므로 $A\subset B$이려면 $-2\in B$에서

$a-3=-2$ 또는 $a=-2$ 또는 $a+1=-2$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=1$

(ⅰ) $a=-3$일 때,

$A=\{-2,\ 1,\ 8\}$, $B=\{-6,\ -3,\ -2,\ 0\}$

$\therefore\ A\not\subset B$

(ⅱ) $a=-2$일 때,

$A=\{-2,\ 1,\ 3\}$, $B=\{-5,\ -2,\ -1,\ 0\}$

$\therefore\ A\not\subset B$

(ⅲ) $a=1$일 때,

$A=\{-2,\ 0,\ 1\}$, $B=\{-2,\ 0,\ 1,\ 2\}$ $\therefore\ A\subset B$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $B=\{-2,\ 0,\ 1,\ 2\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$-2+0+1+2=1$

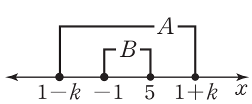
19 $|x-1|\leq k$에서 $-k\leq x-1\leq k$

$\therefore\ 1-k\leq x\leq 1+k$

$x^2-4x-5\leq 0$에서 $(x+1)(x-5)\leq 0$

$\therefore\ -1\leq x\leq 5$

$B\subset A$이도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$1-k\leq -1$, $1+k\geq 5$ $\therefore\ k\geq 4$

따라서 양수 k의 최솟값은 4이다.

20 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$이므로 진부분집합의 개수는

$2^6-1=63$

21 집합 A에서 1, 4, 6을 제외한 집합의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{6-3}=2^3=8$

22 집합 A의 부분집합의 개수에서 홀수 1, 3, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로

$2^5-2^{5-3}=2^5-2^2=32-4=28$

23 원소가 2개 이상인 부분집합 중에서

(ⅰ) 가장 작은 원소가 1인 부분집합

1을 반드시 원소로 갖는 부분집합 중에서 $\{1\}$을 제외해야 하므로 그 개수는

$2^{4-1}-1=7$

(ⅱ) 가장 작은 원소가 2인 부분집합

1은 원소로 갖지 않고 2는 반드시 원소로 갖는 부분집합 중에서 $\{2\}$를 제외해야 하므로 그 개수는

$2^{4-2}-1=3$

(ⅲ) 가장 작은 원소가 3인 부분집합

$\{3,\ 4\}$의 1개

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값은

$1\times 7+2\times 3+3\times 1=16$

24 $A=\{1,\ 2,\ 4\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

따라서 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 1, 2, 4를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{6-3}=2^3=8$

25 $A=\{1,\ 3\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$이므로 집합 X는 1, 3을 반드시 원소로 갖는 집합 B의 부분집합 중에서 집합 A와 집합 B를 제외한 것과 같다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{6-2}-2=2^4-2=14$

26 $B\subset X\subset A$에서

$\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$

따라서 집합 X의 개수는 집합 A의 부분집합 중에서 3, 6, 9, 12, 15, 18을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{n-6}=2^{12}$

즉, $n-6=12$이므로 $n=18$

02 집합의 연산 46~52쪽

1 17	**2** ③	**3** 8	**4** $\{4,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$	
5 ④	**6** ⑤	**7** ②	**8** ②	**9** ④
10 3	**11** 2	**12** 2	**13** 8	**14** ⑤
15 ㄱ, ㄷ, ㄹ		**16** ③	**17** $\frac{2}{3}$	**18** 16
19 16	**20** ②	**21** 2	**22** ⑤	**23** 36
24 ③	**25** ⑤	**26** ⑤	**27** $\{5,\ 6,\ 9\}$	
28 ③	**29** ②	**30** −18	**31** ㄱ, ㄴ, ㄹ	
32 ②	**33** ②	**34** ④	**35** ②	**36** ④
37 12	**38** 15	**39** 25	**40** 50	**41** 6
42 16	**43** 29	**44** 30	**45** ②	**46** ④
47 ③				

1 $A^C=\{4,\ 5\}$이므로 $A^C\cup B=\{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$

따라서 집합 $A^C\cup B$의 모든 원소의 합은

$2+4+5+6=17$

2 $A=\{2, 5, 8\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$

ㄱ. $A\cap B=\{2, 8\}=\{x|x=6k-4,\ k$는 자연수$\}$

ㄴ. $A-B=\{5\}=\{x|x=5k,\ k$는 자연수$\}$

ㄷ. $A^C=\{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$, $B^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로

$A^C\cap B^C=\{1, 3, 7, 9\}$

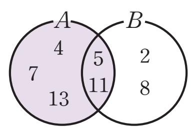
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

3 구하는 집합의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중에서 1, 2를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{5-2}=2^3=8$

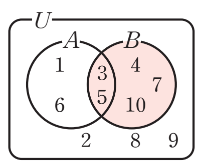
4 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$A=\{4, 5, 7, 11, 13\}$

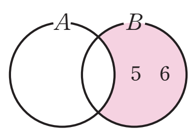


5 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

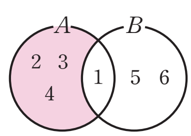
$B=\{3, 4, 5, 7, 10\}$



6 집합 $B-A$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 집합 B의 모든 원소의 합이 12이려면 $A\cap B=\{1\}$이다.

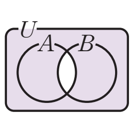


따라서 주어진 조건을 만족시키도록 벤 다이어그램을 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은

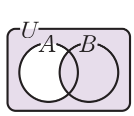


$2+3+4=9$

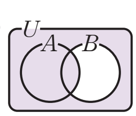
7 ①, ③



④

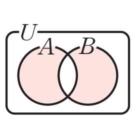


⑤



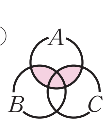
따라서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ②이다.

8 ㄴ, ㄹ.

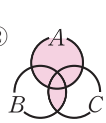


따라서 보기에서 색칠한 부분을 나타내는 집합인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

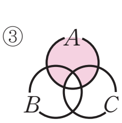
9 ①



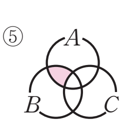
②



③



⑤



따라서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ④이다.

10 $A\cap B=\{2, 3\}$에서

$3\in A$이므로 $2a-3=3$ $\therefore a=3$

$2\in B$이므로 $b+1=2$ $\therefore b=1$

$\therefore ab=3\times1=3$

11 $x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$ $\therefore A=\{2, 3\}$

$x^2-ax-a-1=0$에서 $(x+1)\{x-(a+1)\}=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=a+1$ $\therefore B=\{-1, a+1\}$

이때 $A-B=\{2\}$에서 $3\in B$이므로

$a+1=3$ $\therefore a=2$

12 $A\cup B=\{1, 2, 4, 5, 7\}$에서 $1\in A$ 또는 $1\in B$이므로

$a^2+1=1$ 또는 $a-1=1$ 또는 $a+2=1$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=0$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$일 때, $A=\{2, 4\}$, $B=\{-2, 1, 7\}$

$\therefore A\cup B=\{-2, 1, 2, 4, 7\}$

(ii) $a=0$일 때, $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{-1, 2, 7\}$

$\therefore A\cup B=\{-1, 1, 2, 4, 7\}$

(iii) $a=2$일 때, $A=\{2, 4, 5\}$, $B=\{1, 4, 7\}$

$\therefore A\cup B=\{1, 2, 4, 5, 7\}$

(i), (ii), (iii)에서 $a=2$

13 $(A\cup B)-(A\cap B)=\{0, 1\}$이려면 $2\in(A\cap B)$이므로

$2\in A$에서

$a-1=2$ 또는 $a^2-2=2$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$

(i) $a=-2$일 때, $A=\{-3, 2, 3\}$, $B=\{-4, 2, 3\}$

$\therefore (A\cup B)-(A\cap B)=\{-4, -3\}$

(ii) $a=2$일 때, $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{0, 2, 3\}$

$\therefore (A\cup B)-(A\cap B)=\{0, 1\}$

(iii) $a=3$일 때, $A=\{2, 3, 7\}$, $B=\{1, 2, 3\}$

$\therefore (A\cup B)-(A\cap B)=\{1, 7\}$

(i), (ii), (iii)에서 $a=2$이고 $A=\{1, 2, 3\}$이므로

$b=1+2+3=6$

$\therefore a+b=2+6=8$

14 $A^C\subset B^C$이면 $B\subset A$

⑤ $A^C\cup B\neq U$

15 $A-B=A$이면 두 집합 A, B는 서로소이므로

$A\cap B=\varnothing$, $A\subset B^C$, $B\subset A^C$

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

16 ①, ②, ④, ⑤ 두 집합 A, B는 서로소이다.

③ $B\subset A$

따라서 포함 관계가 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

17 $x^2-x-2<0$에서 $(x+1)(x-2)<0$

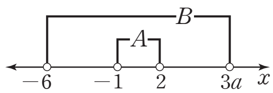
$\therefore\ -1<x<2\qquad\therefore\ A=\{x\,|\,-1<x<2\}$

$x^2-3(a-2)x-18a<0$에서 $(x+6)(x-3a)<0$

$\therefore\ B=\{x\,|\,(x+6)(x-3a)<0\}$

$A\cap B=A$에서 $A\subset B$

$A\subset B$이도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$3a\geq 2\qquad\therefore\ a\geq\frac{2}{3}$

따라서 a의 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다.

18 $X-A=X$에서 $X\cap A=\varnothing$

따라서 집합 X의 개수는 전체집합 U의 부분집합 중에서 1, 4, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{7-3}=2^4=16$

19 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

$(A\cup B)\cap X=X$에서 $X\subset(A\cup B)$

$(B-A)\cup X=X$에서 $(B-A)\subset X$

$\therefore\ (B-A)\subset X\subset(A\cup B)$

즉, $\{2,\ 4,\ 12\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 12\}$이므로 집합 X의 개수는 집합 $A\cup B$의 부분집합 중에서 2, 4, 12를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같다.

$\therefore\ 2^{7-3}=2^4=16$

20 $A\cup X=A$에서 $X\subset A$, $B\cap X=\varnothing$에서 $X\subset B^C$이므로

$X\subset(A-B)$

따라서 집합 X의 개수는 50 이하의 4의 배수가 아닌 6의 배수의 집합, 즉 집합 $A-B=\{6,\ 18,\ 30,\ 42\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^4=16$

21 $A\cap X=X$에서 $X\subset A$

$(A\cap B)\cup X=X$에서 $(A\cap B)\subset X$

$\therefore\ (A\cap B)\subset X\subset A$

즉, 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 집합 $A\cap B$의 원소를 모두 원소로 갖는 집합이다.

이때 $n(A\cap B)=k$라 하면 집합 X의 개수가 8이므로

$2^{5-k}=8=2^3$

즉, $5-k=3$이므로 $k=2$

$\therefore\ n(A\cap B)=2\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이때 a는 자연수이므로 집합 B의 원소는 연속하는 네 자연수이다.

따라서 ㉠을 만족시키려면 $B=\{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$이어야 하므로

$a+2=4\qquad\therefore\ a=2$

22 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$=\{3,\ 4,\ 5\}\cup\{3,\ 8,\ 9,\ 10\}$

$=\{3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 10\}$

23 $A=\{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$이므로

$(A^C\cup B)^C=A\cap B^C=A-B$

$=\{8,\ 12,\ 16\}$

따라서 집합 $(A^C\cup B)^C$의 모든 원소의 합은

$8+12+16=36$

24 ㄱ. $(A\cap B)\cup(A^C\cup B)^C=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$

$=A\cap(B\cup B^C)$

$=A\cap U=A$

ㄴ. $A-(B-C)=A\cap(B\cap C^C)^C=A\cap(B^C\cup C)$

$=(A\cap B^C)\cup(A\cap C)$

$=(A-B)\cup(A\cap C)$

ㄷ. $(A-B)-C=(A\cap B^C)\cap C^C=B^C\cap(A\cap C^C)$

$=B^C\cap(A-C)$

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

25 $\{A\cup(A^C\cap B)\}\cap\{B\cap(B\cup C)\}$

$=\{(A\cup A^C)\cap(A\cup B)\}\cap B$

$=\{U\cap(A\cup B)\}\cap B=(A\cup B)\cap B=B$

따라서 색칠한 부분이 주어진 집합을 나타내는 것은 ⑤이다.

26 $\{(A\cap B)\cup(A^C\cap B)\}\cup\{(B^C\cap C)\cup(B\cup C)^C\}$

$=\{(A\cup A^C)\cap B\}\cup\{(B^C\cap C)\cup(B^C\cap C^C)\}$

$=(U\cap B)\cup\{B^C\cap(C\cup C^C)\}$

$=B\cup(B^C\cap U)=B\cup B^C=U$

27 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$A\cup B=(A^C\cap B^C)^C=\{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$

$\{(A\cap B^C)\cup(B-A^C)\}\cap B^C$

$=\{(A\cap B^C)\cup(B\cap A)\}\cap B^C$

$=\{A\cap(B^C\cup B)\}\cap B^C$

$=(A\cap U)\cap B^C=A\cap B^C=A-B$

따라서 $A-B=\{2,\ 4,\ 8\}$이므로

$B=(A\cup B)-(A-B)=\{5,\ 6,\ 9\}$

28 $\{(A^C\cup B^C)\cap(A\cup B^C)\}\cap A=\{(A^C\cap A)\cup B^C\}\cap A$

$=(\varnothing\cup B^C)\cap A$

$=B^C\cap A=A\cap B^C$

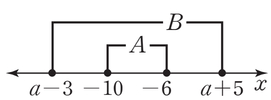
$=A-B$

즉, $A-B=\varnothing$이므로 $A\subset B$

이때 $A\subset B$이면 $A\cap B=A$, $A\cup B=B$이므로 항상 옳은 것은 ③이다.

29 $\{(A-B^C)\cup(A\cap B^C)\}\cup B$
$=\{(A\cap B)\cup(A\cap B^C)\}\cup B$
$=\{A\cap(B\cup B^C)\}\cup B$
$=(A\cap U)\cup B=A\cup B$
즉, $A\cup B=A$이므로 $B\subset A$
ㄱ. $B\subset A$이면 $A\cap B=B$
ㄴ. $B\subset A$이면 $A\cup B=A$
ㄷ. $B\subset A$이면 $A^C\subset B^C$
ㄹ. $B\subset A$이면 $A=B$인 경우를 제외하고 $A-B\neq\varnothing$
따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄷ이다.

30 $x^2+16x+60\leq 0$에서 $(x+10)(x+6)\leq 0$
$\therefore\ -10\leq x\leq -6$　　$\therefore\ A=\{x\mid -10\leq x\leq -6\}$
$A\cup(B\cap A^C)=(A\cup B)\cap(A\cup A^C)$
$=(A\cup B)\cap U=A\cup B$
즉, $A\cup B=B$이므로 $A\subset B$
$A\subset B$이도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

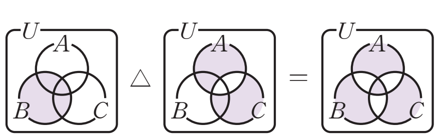


$a-3\leq -10$, $a+5\geq -6$
$\therefore\ -11\leq a\leq -7$
따라서 a의 최댓값은 -7, 최솟값은 -11이므로 그 합은 $-7+(-11)=-18$

31 ㄱ. $\varnothing\circledcirc A=(\varnothing\cup A)-(\varnothing\cap A)=A-\varnothing=A$
ㄴ. $U\circledcirc A=(U\cup A)-(U\cap A)=U-A=A^C$
ㄷ. $\varnothing\circledcirc U=(\varnothing\cup U)-(\varnothing\cap U)=U-\varnothing=U$
ㄹ. $A\circledcirc B=(A\cup B)-(A\cap B)$
$=(B\cup A)-(B\cap A)=B\circledcirc A$
따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

32 $A☆B=(A\cup B)\cap(A\cup B^C)$
$=A\cup(B\cap B^C)=A\cup\varnothing=A$
$\therefore\ (A☆B)☆A=A☆A=A$

33



B　　$A\triangle C$　　$B\triangle(A\triangle C)$
따라서 색칠한 부분이 $B\triangle(A\triangle C)$를 나타내는 것은 ② 이다.

34 $(A_2\cap A_3)\cap(A_6\cup A_{12})=A_6\cap A_6=A_6$

35 $A_4\cap(A_3\cup A_6)=A_4\cap A_3=A_{12}$
따라서 100 이하의 자연수 중에서 12의 배수는 8개이므로 구하는 집합의 원소의 개수는 8이다.

36 ㄱ. $A_8=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $A_4=\{1,\ 2,\ 4\}$이므로 $A_4\subset A_8$
ㄴ. 24와 36의 공약수는 두 수의 최대공약수인 12의 약수와 같다.　　$\therefore\ A_{24}\cap A_{36}=A_{12}$
ㄷ. $A_n-A_8=\varnothing$이면 $A_n\subset A_8$
따라서 n은 8의 양의 약수이므로 1, 2, 4, 8의 4개이다.
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

37 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=n(A)-\{n(B)-n(B-A)\}$
$=17-(15-10)=12$

38 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로
$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A^C\cap B^C)$
$=40-5=35$
$\therefore\ n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=20+30-35=15$

39 $A\cap B=\varnothing$에서 $n(A\cap B)=0$, $n(A\cap B\cap C)=0$이고
$n(C\cap A)=n(C)+n(A)-n(C\cup A)$
$=13+12-18=7$
이므로
$n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=12+10+13-0-3-7+0=25$

40 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=n((A-B)\cup(B-A))+n(A\cap B)$
즉, $30+40-n(A\cap B)=30+n(A\cap B)$이므로
$n(A\cap B)=20$
$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=30+40-20=50$

41 사과를 산 사람의 집합을 A, 복숭아를 산 사람의 집합을 B라 하면
$n(A)=26$, $n(B)=20$, $n(A\cup B)=40$
$\therefore\ n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=26+20-40=6$
따라서 구하는 사람 수는 6이다.

42 반 학생 전체의 집합을 U, 전주에 가 본 학생의 집합을 A, 경주에 가 본 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=35$, $n(A)=17$, $n(B)=5$, $n(A\cap B)=3$
$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=17+5-3=19$

$\therefore\ n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=35-19=16$

따라서 구하는 학생 수는 16이다.

43 조사한 학생 전체의 집합을 U, 동아리 A에 가입한 학생의 집합을 A, 동아리 B에 가입한 학생의 집합을 B라 하면

(가)에서 $A\cup B=U$ $\quad\therefore\ n(A\cup B)=56$

(나)에서 $n(A)=35$, $n(B)=27$

$\therefore\ n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$

$=56-27=29$

따라서 구하는 학생 수는 29이다.

44 체험 학습에 참가한 학생 전체의 집합을 U, 버스를 타고 온 학생의 집합을 A, 지하철을 타고 온 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=50$, $n(A)=31$, $n(A-B)=11$, $n((A\cup B)^C)=9$

$\therefore\ n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$

$=50-9=41$

$\therefore\ n(B)=n(A\cup B)-n(A-B)$

$=41-11=30$

따라서 구하는 학생 수는 30이다.

45 $B\subset A$일 때, $n(A\cap B)$가 최대이므로 최댓값은

$n(A\cap B)=n(B)=9$

$A\cup B=U$일 때, $n(A\cap B)$가 최소이므로 최솟값은

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=n(A)+n(B)-n(U)$

$=15+9-22=2$

따라서 $n(A\cap B)$의 최댓값은 9, 최솟값은 2이므로 그 곱은

$9\times2=18$

46 $n(A\cap B)\le n(A)$, $n(A\cap B)\le n(B)$이고, $n(A\cap B)\ge4$이므로 $4\le n(A\cap B)\le8$

$4\le n(A)+n(B)-n(A\cup B)\le8$

$4\le8+10-n(A\cup B)\le8$

$\therefore\ 10\le n(A\cup B)\le14$

따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은 14, 최솟값은 10이므로 그 합은

$14+10=24$

47 조사한 사람 전체의 집합을 U, A 제품을 구매한 사람의 집합을 A, B 제품을 구매한 사람의 집합을 B라 하면

$n(U)=30$, $n(A)=18$, $n(B)=27$

$A\subset B$일 때, $n(A\cap B)$가 최대이므로 최댓값은

$n(A\cap B)=n(A)=18$

따라서 A, B 두 제품을 모두 구매한 사람은 최대 18명이다.

Ⅱ-2. 명제

01 명제와 조건 54~57쪽

1 ①	**2** ③	**3** ②	**4** ④	
5 $2\le x\le3$		**6** ④	**7** ②	**8** ④
9 4	**10** $\{1\}$	**11** ⑤	**12** ③	**13** ③
14 ①	**15** 5	**16** ②	**17** ④	**18** ①
19 ①	**20** ①	**21** ①	**22** ③	**23** ③
24 ⑤	**25** 9			

1 ① x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

2 ㄱ, ㄹ. 거짓인 명제

ㄷ, ㅂ. 참인 명제

ㄴ, ㅁ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

따라서 보기에서 명제인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅂ의 4개이다.

3 ㄴ. 거짓인 명제

ㄷ. 명제가 아니다.

따라서 보기에서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

4 ① 부정: -3의 제곱은 9가 아니다. (거짓)

② 부정: $\sqrt{3}-1$은 무리수가 아니다. (거짓)

③ 부정: 5는 소수가 아니다. (거짓)

④ 부정: 3은 집합 $\{1, 2\}$의 원소가 아니다. (참)

⑤ 부정: 6의 양의 약수의 합은 12가 아니다. (거짓)

따라서 부정이 참인 명제인 것은 ④이다.

5 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은 'p 그리고 $\sim q$'

p: $0<x\le3$, $\sim q$: $x\ge2$이므로 구하는 조건의 부정은

$2\le x\le3$

6 ㄴ. p: $x^2=y^2$에서 $x=-y$ 또는 $x=y$

따라서 $\sim p$는 $x\ne-y$ 그리고 $x\ne y$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

7 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

이때 조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C이므로

$P^C=\{5, 7\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은 $5+7=12$

8 $P=\{x\,|\,x\ge3\}$, $Q=\{x\,|\,x\ge-2\}$이므로

$\{x\,|\,-2\le x<3\}=\{x\,|\,x\ge-2\}\cap\{x\,|\,x<3\}$

$=Q\cap P^C$

$=Q-P$

9 $|x-2|=2$에서 $x-2=\pm 2$
$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=4$
$x^2-4x+3\le 0$에서 $(x-1)(x-3)\le 0$
$\therefore$ $1\le x\le 3$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{4\}$, $Q=\{1, 2, 3\}$
따라서 조건 'p 또는 q'의 진리집합은
$P\cup Q=\{1, 2, 3, 4\}$
따라서 구하는 모든 원소의 개수는 4이다.

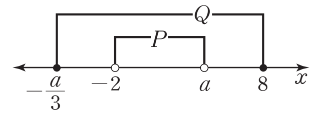
10 전체집합은
$U=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
$x^2+2x-3=0$에서 $(x+3)(x-1)=0$
$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=1$
$|x-1|>2$에서 $x-1<-2$ 또는 $x-1>2$
$\therefore$ $x<-1$ 또는 $x>3$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{-3, 1\}$, $Q=\{-3, -2\}$
따라서 조건 'p이고 $\sim q$'의 진리집합은
$P\cap Q^C=P-Q=\{1\}$

11 ⑤ $x(x+4)=8$에서 $x^2+4x-8=0$
$\therefore$ $x=-2\pm 2\sqrt{3}$
따라서 x는 유리수가 아니므로 거짓인 명제이다.

12 ㄱ. [반례] $a=b=\sqrt{2}$이면 ab는 정수이지만 a, b는 정수가 아니다.
ㄴ. [반례] $a=\sqrt{3}$, $b=-\sqrt{3}$이면 $a+b$는 유리수이지만 a, b는 모두 유리수가 아니다.
따라서 보기에서 참인 명제인 것은 ㄷ이다.

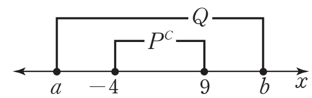
13 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
ㄱ. $P=\{x|x>2\}$, $Q=\{x|x<-2$ 또는 $x>2\}$
따라서 $P\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.
ㄴ. $P=\{(x, y)|x=0, y=0\}$,
$Q=\{(x, y)|x=0, y=0\}$
따라서 $P=Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.
ㄷ. $2x-4=2$에서 $2x=6$ $\quad\therefore$ $x=3$
$\therefore$ $P=\{3\}$
$x^2+2x-3=0$에서 $(x+3)(x-1)=0$
$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=1$
$\therefore$ $Q=\{-3, 1\}$
따라서 $P\not\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
따라서 보기에서 명제 $p \longrightarrow q$가 참인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|-2<x<a\}$, $Q=\left\{x\middle|-\frac{a}{3}\le x\le 8\right\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로



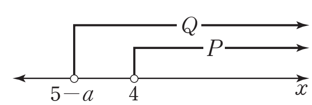
$-\frac{a}{3}\le -2$, $-2<a\le 8$ $\quad\therefore$ $6\le a\le 8$
따라서 자연수 a는 6, 7, 8의 3개이다.

15 $x^2-(a+b)x+ab\le 0$에서 $(x-a)(x-b)\le 0$
$\therefore$ $a\le x\le b$ ($\because$ $a<b$)
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P^C=\{x|-4\le x\le 9\}$, $Q=\{x|a\le x\le b\}$
명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C\subset Q$이어야 하므로

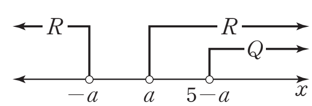


$a\le -4$, $b\ge 9$
따라서 a의 최댓값은 -4, b의 최솟값은 9이므로 그 합은
$-4+9=5$

16 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자.
$P=\{x|x>4\}$, $Q=\{x|x>5-a\}$이고, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로



$5-a\le 4$ $\quad\therefore$ $a\ge 1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$R=\{x|\underbrace{x<-a \text{ 또는 } x>a}_{\text{㉠에서 } a\ge 1}\}$이고, 명제 $q \longrightarrow r$가 참이 되려면 $Q\subset R$이어야 하므로



$a\le 5-a$ $\quad\therefore$ $a\le \frac{5}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $1\le a\le \frac{5}{2}$
따라서 a의 최댓값은 $\frac{5}{2}$이고 최솟값은 1이므로 그 합은
$\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}$

17 명제 $q \longrightarrow p$가 참이므로 $Q\subset P$이다.
① $P\cup Q=P$ $\quad$ ② $P\cap Q=Q$
③ $P\cap Q^C\ne P$ $\quad$ ⑤ $P^C\cap Q^C=P^C$
따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

18 명제 'q이면 $\sim p$이다.'가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $Q-P^C$의 원소이다.

$\therefore Q-P^C=Q\cap(P^C)^C=P\cap Q$

19 ① $P\not\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

② $P\subset R^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$는 참이다.

③ $R\subset Q$이므로 명제 $r \longrightarrow q$는 참이다.

④ $R\subset P^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$는 참이다.

⑤ $Q^C\subset R^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$는 참이다.

따라서 거짓인 명제는 ①이다.

20 $P\cup Q=Q$에서 $P\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

$P\cap R^C=P$에서 $P\subset R^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$는 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ①이다.

21 명제 'p이면 q 또는 r이다.'가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $P-(Q\cup R)$의 원소이므로 구하는 원소는 a이다.

22 ㄱ. 명제 $\sim p \longrightarrow r$가 참이므로 $P^C\subset R$ …… ㉠

ㄴ. 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 $R\subset Q^C$ …… ㉡

명제 $\sim r \longrightarrow q$가 참이므로 $R^C\subset Q$

$\therefore Q^C\subset R$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $Q^C=R$ …… ㉣

따라서 ㉠에서 $P^C\subset Q^C$이므로 $Q\subset P$이다.

ㄷ. $Q\subset P$이므로

$P\cap Q=Q=R^C$ ($\because$ ㉣)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

23 ㄷ. [반례] $x=1$이면 $x^2-1=0$이다.

따라서 보기에서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

24 ⑤ $3x-1=4x+(1-x)$를 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 거짓인 명제이다.

25 주어진 명제가 거짓이려면 이 명제의 부정

'모든 실수 x에 대하여 $x^2+8x+2k-1>0$이다.'

가 참이어야 한다.

이차방정식 $x^2+8x+2k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-1\times(2k-1)<0$

$\therefore k>\frac{17}{2}$

따라서 정수 k의 최솟값은 9이다.

02 명제의 역과 대우

58~61쪽

1 ④	**2** ④	**3** ①	**4** ④	**5** ①
6 ②	**7** ②	**8** ④	**9** ⑤	**10** ④
11 ①	**12** ②	**13** ②	**14** ⑤	**15** ①
16 ④	**17** -8	**18** ④	**19** 15	**20** ③
21 ⑤	**22** ㄱ, ㄴ			

1 ① 역: $a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$이면 $a^2+b^2\neq 0$이다. (참)

② 역: $a^2=a$이면 $a=0$ 또는 $a=1$이다. (참)

③ 역: $a-1>0$이면 $2a-1>0$이다. (참)

④ 역: $ab>b$이면 $a<0$이고 $b<0$이다. (거짓)

[반례] $a=2$, $b=1$

⑤ 역: $a=0$이고 $b=0$이면 $a+b=0$이고 $ab=0$이다. (참)

따라서 역이 거짓인 명제는 ④이다.

2 ① 대우: $x\neq 2$이면 $x^2\neq 4$이다. (거짓)

[반례] $x=-2$

② 대우: $x\leq y$이면 $x^2\leq y^2$이다. (거짓)

[반례] $x=-2$, $y=1$

③ 대우: $x\neq 0$이면 $x^2\neq 3x$이다. (거짓)

[반례] $x=3$

⑤ 대우: 삼각형 ABC가 정삼각형이 아니면 삼각형 ABC의 두 내각의 크기는 같지 않다. (거짓)

[반례] 삼각형 ABC가 이등변삼각형

따라서 대우가 참인 명제는 ④이다.

3 ㄱ. 역: $a=1$이면 $a^3=1$이다. (참)

대우: $a\neq 1$이면 $a^3\neq 1$이다. (참)

ㄴ. 역: $a^2+b^2=0$이면 $|a|+|b|=0$이다. (참)

대우: $a^2+b^2\neq 0$이면 $|a|+|b|\neq 0$이다. (참)

ㄷ. 역: $a<0$이고 $b<0$이면 $a+b<0$이다. (참)

대우: $a\geq 0$ 또는 $b\geq 0$이면 $a+b\geq 0$이다. (거짓)

[반례] $a=1$, $b=-2$

ㄹ. 역: $c-a<c-b$이면 $a<b$이다.

$c-a<c-b$의 양변에서 c를 빼면 $-a<-b$

$-a<-b$의 양변에 -1을 곱하면 $a>b$

따라서 $c-a<c-b$이면 $a>b$이다. (거짓)

대우: $c-a\geq c-b$이면 $a\geq b$이다.

마찬가지로 $c-a\geq c-b$이면 $a\leq b$이다. (거짓)

따라서 보기에서 역과 대우가 모두 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

4 주어진 명제의 대우 '$a\geq k$이고 $b\geq 3$이면 $a+b\geq 6$이다.'가 참이다.

$a \geq k$이고 $b \geq 3$에서 $a+b \geq k+3$이므로

$k+3 \geq 6 \qquad \therefore k \geq 3$

따라서 상수 k의 최솟값은 3이다.

5 주어진 명제가 참이므로 그 대우 '$x-a=0$이면 $x^2-6x+5=0$이다.'도 참이다.

$x=a$를 $x^2-6x+5=0$에 대입하면

$a^2-6a+5=0$, $(a-1)(a-5)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=5$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$1+5=6$

6 명제 $q \longrightarrow p$가 참이면 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 참이다.

$\sim p$: $|x-1|<2$에서 $-2<x-1<2$

$\therefore -1<x<3$

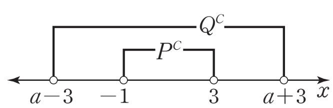
$\sim q$: $|x-a|<3$에서 $-3<x-a<3$

$\therefore a-3<x<a+3$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P^C=\{x \mid -1<x<3\}$, $Q^C=\{x \mid a-3<x<a+3\}$

명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이려면 $P^C \subset Q^C$이어야 하므로



$a-3 \leq -1$, $a+3 \geq 3$

$\therefore 0 \leq a \leq 2$

따라서 정수 a는 0, 1, 2의 3개이다.

7 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow r$도 참이다.

두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$와 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim p$가 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ②이다.

8 명제 $\sim s \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow s$도 참이다.

두 명제 $p \longrightarrow r$, $r \longrightarrow s$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow s$가 참이다.

세 명제 $p \longrightarrow r$, $r \longrightarrow s$, $s \longrightarrow q$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow q$가 참이다.

따라서 보기에서 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

9 명제 $\sim r \longrightarrow s$가 참이므로 그 대우 $\sim s \longrightarrow r$도 참이다.

두 명제 $p \longrightarrow q$, $\sim s \longrightarrow r$가 참이므로 명제 $q \longrightarrow \sim s$ 또는 그 대우 $s \longrightarrow \sim q$가 참이어야 명제 $p \longrightarrow r$가 참이다.

따라서 필요한 참인 명제는 ⑤이다.

10 명제 ㈎, ㈏에서

p: 과학을 좋아한다.,

q: 실험을 좋아한다.,

r: 호기심이 있다.

라 하자.

㈎에서 명제 $p \longrightarrow q$가 참이고 ㈏에서 명제 $\sim p \longrightarrow \sim r$와 그 대우 $r \longrightarrow p$가 참이다.

두 명제 $r \longrightarrow p$, $p \longrightarrow q$가 참이므로 명제 $r \longrightarrow q$가 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ④이다.

11 (i) a가 양수일 때,

㈏에 의하여 b도 양수이다.

b가 양수이면 ㈐에 의하여 c도 양수이다.

즉, a, b, c는 모두 양수이다.

(ii) a가 음수일 때,

㈏에 의하여 b도 음수이다.

a, b가 음수이면 ㈑에 의하여 c도 음수이다.

그런데 세 정수 a, b, c가 모두 음수이면 ㈎를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a>0$, $b>0$, $c>0$

12 $p \Longrightarrow q$이므로 $\sim q \Longrightarrow \sim p$

$r \Longrightarrow \sim q$이므로 $q \Longrightarrow \sim r$

$p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow \sim r$이므로

$p \Longrightarrow \sim r$, $r \Longrightarrow \sim p$

따라서 보기에서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㅁ, ㅂ이다.

13 ① q에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

② p에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

q에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

③ p에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

④ q에서 $x<-1$ 또는 $x>1$

$p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

⑤ p에서 $x<0$ 또는 $x>0$

$q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ②이다.

14 ㄱ. p에서 $x-3=-1$ 또는 $x-3=1$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

q에서 $x(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

$p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. p에서 $-4\le 2x\le 6$　　$\therefore\ -2\le x\le 3$

q에서 $(x+2)(x-1)\le 0$　　$\therefore\ -2\le x\le 1$

$q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. 명제 $p \longrightarrow q$: [반례] $x=-2$, $y=1$ (거짓)

$q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 보기에서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 ㄴ, ㄷ이다.

15 $|a|+|b|=0$에서 $a=b=0$

$a^2-b^2=0$에서 $(a+b)(a-b)=0$

$\therefore\ a=-b$ 또는 $a=b$

따라서 $|a|+|b|=0$은 $a^2-b^2=0$이기 위한 $\boxed{\text{(가) 충분}}$조건이다.

$ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$

$a+bi=0$에서 $a=b=0$

따라서 $ab=0$은 $a+bi=0$이기 위한 $\boxed{\text{(나) 필요}}$조건이다.

16 p에서 $x=y$ 또는 $y=z$

q에서 $x=y=z$

r에서 $x^2+y^2=2xz+2yz-2z^2$

$(x-z)^2+(y-z)^2=0$　　$\therefore\ x=y=z$

ㄱ. $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $r \Longrightarrow p$이므로 p는 r이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $q \Longleftrightarrow r$이므로 q는 r이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

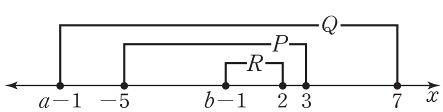
17 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자.

p가 q이기 위한 충분조건이려면 $p \Longrightarrow q$에서 $P\subset Q$

p가 r이기 위한 필요조건이려면 $r \Longrightarrow p$에서 $R\subset P$

$\therefore\ R\subset P\subset Q$

세 집합 P, Q, R를 수직선 위에 나타내면



$a-1\le -5$, $-5\le b-1\le 2$

$\therefore\ a\le -4$, $-4\le b\le 3$

따라서 a의 최댓값은 -4, b의 최솟값은 -4이므로 그 합은

$-4+(-4)=-8$

18 $|x|\le n$에서 $-n\le x\le n$

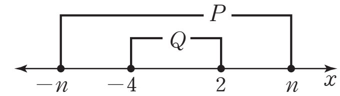
$x^2+2x-8\le 0$에서 $(x+4)(x-2)\le 0$

$\therefore\ -4\le x\le 2$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,-n\le x\le n\}$, $Q=\{x\,|\,-4\le x\le 2\}$

p가 q이기 위한 필요조건이려면 $q \Longrightarrow p$에서 $Q\subset P$이어야 하므로



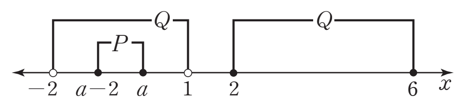
$-n\le -4$, $n\ge 2$　　$\therefore\ n\ge 4$

따라서 자연수 n의 최솟값은 4이다.

19 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

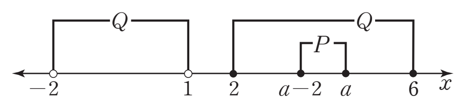
p가 q이기 위한 충분조건이려면 $p \Longrightarrow q$에서 $P\subset Q$

(i) 다음 그림에서



$a-2>-2$, $a<1$　　$\therefore\ 0<a<1$

(ii) 다음 그림에서



$a-2\ge 2$, $a\le 6$　　$\therefore\ 4\le a\le 6$

(i), (ii)에서 정수 a는 4, 5, 6이므로 그 합은

$4+5+6=15$

20 p는 q이기 위한 필요조건이므로 $q \Longrightarrow p$에서 $Q\subset P$

p는 r이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow r$에서 $P\subset R$

$\therefore\ Q\subset P\subset R$

21 ①, ② $R\subset P$이므로 $r \Longrightarrow p$

따라서 p는 r이기 위한 필요조건이고, r는 p이기 위한 충분조건이다.

③ $Q\subset R^C$이므로 $q \Longrightarrow \sim r$

따라서 q는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

④ $R\subset Q^C$이므로 $r \Longrightarrow \sim q$

따라서 $\sim q$는 r이기 위한 필요조건이다.

⑤ $R\subset P$에서 $P^C\subset R^C$이므로 $\sim p \Longrightarrow \sim r$

따라서 $\sim r$는 $\sim p$이기 위한 필요조건이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

22 $P\cap Q=Q$에서 $Q\subset P$

$Q^C\cup R=Q^C$에서 $R\subset Q^C$

ㄱ. $Q\subset P$이므로 $q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $R\subset Q^C$에서 $Q\subset R^C$이므로 $q \Longrightarrow \sim r$

따라서 q는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. $Q\subset P$에서 $P^C\subset Q^C$이므로 $\sim p \Longrightarrow \sim q$

따라서 $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

03 명제의 증명 62~66쪽

1 (가) n (나) n^2 (다) $5k^2$ **2** (가) $3k$ (나) k^2+k **3** ⑤
4 풀이 참조 **5** ②
6 (가) 홀수 (나) $2k^2+2l^2-2l$ (다) 1 **7** 풀이 참조
8 풀이 참조 **9** ④
10 (가) $b(1+a)$ (나) $a-b$
11 (가) $a-b$ (나) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ **12** ④ **13** ②
14 ④ **15** ① **16** 40 **17** ② **18** 17
19 6 **20** ① **21** ② **22** 16 **23** ②
24 2 **25** $75\,\text{m}^2$ **26** ① **27** $\frac{6}{5}$

1 주어진 명제의 대우 '자연수 n에 대하여 $\boxed{\text{(가)}\ n}$이 5의 배수이면 $\boxed{\text{(나)}\ n^2}$은 5의 배수이다.'가 참임을 보이면 된다.
$n=5k$(k는 자연수)라 하면
$n^2=5\times\boxed{\text{(다)}\ 5k^2}$
이때 $\boxed{\text{(다)}\ 5k^2}$은 자연수이므로 n^2은 5의 배수이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

2 주어진 명제의 대우 '자연수 n에 대하여 n이 3의 배수이면 n^2+3n이 9의 배수이다.'가 참임을 보이면 된다.
$n=\boxed{\text{(가)}\ 3k}$(k는 자연수)라 하면
$n^2+3n=(\boxed{\text{(가)}\ 3k})^2+3\times\boxed{\text{(가)}\ 3k}=9(\boxed{\text{(나)}\ k^2+k})$
이때 $\boxed{\text{(나)}\ k^2+k}$는 자연수이므로 n^2+3n은 9의 배수이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

3 주어진 명제의 대우 '자연수 a, b에 대하여 a, b가 모두 홀수이거나 모두 짝수이면 a^2+b^2은 $\boxed{\text{(가) 짝수}}$이다.'가 참임을 보이면 된다.
(i) a, b가 모두 홀수일 때,
$a=2k-1$, $b=2l-1$(k, l은 자연수)이라 하면
$a^2+b^2=(2k-1)^2+(2l-1)^2$
$=2(\boxed{\text{(나)}\ 2k^2-2k+2l^2-2l+1})$
이때 $\boxed{\text{(나)}\ 2k^2-2k+2l^2-2l+1}$은 자연수이므로
a^2+b^2은 $\boxed{\text{(가) 짝수}}$이다.
(ii) a, b가 모두 짝수일 때,
$a=2k$, $b=2l$(k, l은 자연수)이라 하면
$a^2+b^2=(2k)^2+(2l)^2=2(\boxed{\text{(다)}\ 2k^2+2l^2})$
이때 $\boxed{\text{(다)}\ 2k^2+2l^2}$은 자연수이므로 a^2+b^2은 $\boxed{\text{(가) 짝수}}$이다.
(i), (ii)에서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

4 주어진 명제의 대우 '실수 a, b에 대하여 $a\neq0$ 또는 $b\neq0$이면 $a^2+b^2\neq0$이다.'가 참임을 보이면 된다.
(i) $a\neq0$일 때,
$a^2>0$, $b^2\geq0$이므로 $a^2+b^2>0$
(ii) $b\neq0$일 때,
$a^2\geq0$, $b^2>0$이므로 $a^2+b^2>0$
(i), (ii)에서 $a\neq0$ 또는 $b\neq0$이면 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2\neq0$이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

5 주어진 명제의 결론을 부정하여 $\sqrt{3}$이 $\boxed{\text{(가) 유리수}}$라 가정하면
$\sqrt{3}=\frac{n}{m}$(m, n은 서로소인 자연수) …… ㉠
으로 나타낼 수 있다.
㉠의 양변을 제곱하면
$3=\frac{n^2}{m^2}$ $\therefore\ n^2=\boxed{\text{(나)}\ 3m^2}$ …… ㉡
이때 n^2이 3의 배수이므로 n도 3의 배수이다.
n이 3의 배수이면 $n=3k$(k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로 ㉡에 대입하면
$9k^2=3m^2$ $\therefore\ m^2=\boxed{\text{(다)}\ 3k^2}$
이때 m^2이 3의 배수이므로 m도 3의 배수이다.
그런데 m, n이 모두 3의 배수이면 m, n이 서로소라는 가정에 모순이다.
따라서 $\sqrt{3}$은 무리수이다.

6 주어진 명제의 결론을 부정하여 $a+b$가 $\boxed{\text{(가) 홀수}}$라 가정하면 a, b 중에서 하나는 짝수이고 하나는 홀수이어야 한다.
$a=2k$, $b=2l-1$(k, l은 자연수)
로 나타내면
$a^2+b^2=(2k)^2+(2l-1)^2$
$=4k^2+4l^2-4l+1$
$=2(\boxed{\text{(나)}\ 2k^2+2l^2-2l})+\boxed{\text{(다)}\ 1}$
이때 a^2+b^2이 홀수이므로 a^2+b^2이 짝수라는 가정에 모순이다.
따라서 자연수 a, b에 대하여 a^2+b^2이 짝수이면 $a+b$가 짝수이다.

7 주어진 명제의 결론을 부정하여 $b\neq0$이라 가정하면
$b\sqrt{3}=-a$ $\therefore\ \sqrt{3}=-\frac{a}{b}$
이때 a, b는 유리수이고 $-\frac{a}{b}$가 유리수이므로 $\sqrt{3}$도 유리수이다.

그런데 $\sqrt{3}$은 무리수이므로 가정에 모순이다.
따라서 $b=0$이고, $a+b\sqrt{3}=0$에 대입하여 풀면 $a=0$
따라서 유리수 a, b에 대하여 $a+b\sqrt{3}=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다.

8 주어진 명제의 결론을 부정하여 a, b가 모두 음수가 아니라고 가정하면
$a\geq 0$, $b\geq 0$ $\quad\therefore a+b\geq 0$
이는 $a+b<0$이라는 가정에 모순이다.
따라서 실수 a, b에 대하여 $a+b<0$이면 a, b 중 적어도 하나는 음수이다.

9 $a^2+b^2-ab=\left(\boxed{^{(가)}\ a-\frac{b}{2}}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$
$\therefore a^2+b^2\geq ab$
이때 등호는 $a-\frac{b}{2}=0$, $\frac{3}{4}b^2=0$, 즉 $\boxed{^{(나)}\ a=b=0}$일 때 성립한다.

10 $\frac{a}{1+a}-\frac{b}{1+b}=\frac{a(1+b)-\boxed{^{(가)}\ b(1+a)}}{(1+a)(1+b)}$
$=\frac{\boxed{^{(나)}\ a-b}}{(1+a)(1+b)}>0$ ($\because a>b>0$)
$\therefore \frac{a}{1+a}>\frac{b}{1+b}$

11 $(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$
$=\boxed{^{(가)}\ a-b}-(a-2\sqrt{ab}+b)$
$=2\sqrt{ab}-2b$
$=2\sqrt{b}(\boxed{^{(나)}\ \sqrt{a}-\sqrt{b}})>0$ ($\because a>b>0$)
$\therefore (\sqrt{a-b})^2>(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$
그런데 $\sqrt{a-b}>0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$이므로
$\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$

12 $(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$
$=a^2+\boxed{^{(가)}\ 2|ab|}+b^2-(a^2+2ab+b^2)$
$=2(\boxed{^{(나)}\ |ab|-ab})\geq 0$ ($\because |ab|\geq ab$)
$\therefore (|a|+|b|)^2\geq(|a+b|)^2$
그런데 $|a|+|b|\geq 0$, $|a+b|\geq 0$이므로
$|a|+|b|\geq|a+b|$
이때 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $\boxed{^{(다)}\ ab\geq 0}$일 때 성립한다.

13 $a>0$, $b>0$이므로
$2a+3b\geq 2\sqrt{2a\times 3b}=2\sqrt{6ab}=2\sqrt{36}=12$
(단, 등호는 $2a=3b$일 때 성립)
따라서 구하는 최솟값은 12이다.

14 $3a>0$, $b>0$이므로 $3a+b\geq 2\sqrt{3ab}$
$6\geq 2\sqrt{3ab}$ $\quad\therefore \sqrt{3ab}\leq 3$
양변을 제곱하면 $3ab\leq 9$ $\quad\therefore ab\leq 3$
이때 ab는 등호가 성립할 때, 즉 $3a=b$일 때 최댓값 3을 갖는다.
$\therefore M=3$
$b=3a$일 때 최댓값을 가지므로 이를 $3a+b=6$에 대입하면
$3a+3a=6$ $\quad\therefore a=1$
이를 $b=3a$에 대입하면 $b=3$
$\therefore \alpha=1$, $\beta=3$
$\therefore M+\alpha-\beta=3+1-3=1$

15 $\frac{a^2-1}{a}+\frac{b^2-1}{b}=a-\frac{1}{a}+b-\frac{1}{b}$
$=a+b-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$
$=a+b-\frac{a+b}{ab}$
$=4-\frac{4}{ab}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$a>0$, $b>0$이므로 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$
$4\geq 2\sqrt{ab}$ $\quad\therefore \sqrt{ab}\leq 2$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)
양변을 제곱하면 $ab\leq 4$
㉠에서 $\frac{a^2-1}{a}+\frac{b^2-1}{b}=4-\frac{4}{ab}\leq 3$
따라서 구하는 최댓값은 3이다.

16 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 점 $(2, 5)$를 지나므로
$\frac{2}{a}+\frac{5}{b}=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$\frac{2}{a}>0$, $\frac{5}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$\frac{2}{a}+\frac{5}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2}{a}\times\frac{5}{b}}=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{ab}}$
$1\geq\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{ab}}$ ($\because$ ㉠)
$\therefore \sqrt{ab}\geq 2\sqrt{10}$ (단, 등호는 $5a=2b$일 때 성립)
양변을 제곱하면 $ab\geq 40$
따라서 구하는 최솟값은 40이다.

17 $x>0$, $y>0$이므로
$\left(4x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+16y\right)=20+64xy+\frac{1}{xy}$
$\geq 20+2\sqrt{64xy\times\frac{1}{xy}}$
$=20+16=36$
$\left(\text{단, 등호는 } xy=\frac{1}{8}\text{일 때 성립}\right)$
따라서 구하는 최솟값은 36이다.

유형편

18 $a>4$에서 $a-4>0$이므로

$$2a+\frac{2}{a-4}=2(a-4)+\frac{2}{a-4}+8$$
$$\ge 2\sqrt{2(a-4)\times\frac{2}{a-4}}+8$$
$$=4+8=12$$

이때 등호는 $2(a-4)=\frac{2}{a-4}$일 때 성립하므로

$(a-4)^2=1$ $\quad\therefore a=5$ ($\because a>4$)

따라서 $m=12$, $n=5$이므로 $m+n=17$

19 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$$
$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$$
$$\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}+2\sqrt{\frac{b}{c}\times\frac{c}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\times\frac{a}{c}}$$

$=2+2+2=6$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 6이다.

20 $x\ne0$이므로 $\frac{x}{x^2+4x+4}=\frac{1}{x+4+\frac{4}{x}}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $x>0$이므로

$$x+4+\frac{4}{x}\ge 2\sqrt{x\times\frac{4}{x}}+4$$

$=4+4=8$ (단, 등호는 $x=2$일 때 성립)

㉠에서 $\frac{x}{x^2+4x+4}\le\frac{1}{8}$

따라서 구하는 최댓값은 $\frac{1}{8}$이다.

21 x, y가 실수이므로

$(4^2+3^2)(x^2+y^2)\ge(4x+3y)^2$, $25^2\ge(4x+3y)^2$

$\therefore -25\le 4x+3y\le 25$ (단, 등호는 $4y=3x$일 때 성립)

따라서 구하는 최댓값은 25이다.

22 x, y가 실수이므로

$\left(1^2+\frac{1}{4^2}\right)(x^2+y^2)\ge\left(x+\frac{y}{4}\right)^2$, $\frac{17}{16}(x^2+y^2)\ge17$

$\therefore x^2+y^2\ge16$ (단, 등호는 $4y=x$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 16이다.

23 x, y가 실수이므로

$(2^2+3^2)(x^2+y^2)\ge(2x+3y)^2$, $13a\ge(2x+3y)^2$

$\therefore -\sqrt{13a}\le 2x+3y\le\sqrt{13a}$

(단, 등호는 $2y=3x$일 때 성립)

따라서 $2x+3y$의 최댓값은 $\sqrt{13a}$이므로

$\sqrt{13a}=13$ $\quad\therefore a=13$

24 $x+y+z=2$에서 $y+z=2-x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2+y^2+z^2=4$에서 $y^2+z^2=4-x^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

y, z가 실수이므로

$(1^2+1^2)(y^2+z^2)\ge(y+z)^2$

㉠, ㉡을 대입하면

$2(4-x^2)\ge(2-x)^2$

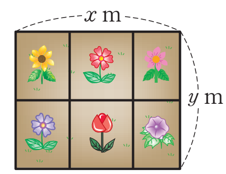
$8-2x^2\ge4-4x+x^2$, $3x^2-4x-4\le0$

$(3x+2)(x-2)\le0$

$\therefore -\frac{2}{3}\le x\le2$ (단, 등호는 $y=z$일 때 성립)

따라서 구하는 최댓값은 2이다.

25 꽃밭 전체의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면



$3x+4y=60$

이때 $x>0$, $y>0$이므로

$3x+4y\ge2\sqrt{3x\times4y}$

$60\ge2\sqrt{12xy}$

$\therefore \sqrt{12xy}\le30$ (단, 등호는 $3x=4y$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $12xy\le900$

$\therefore xy\le75$

따라서 구하는 넓이의 최댓값은 75 m^2이다.

26 직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 6, a, b라 하고 직육면체의 대각선의 길이를 l이라 하면

$l^2=6^2+a^2+b^2$

직육면체의 부피가 108이므로

$6ab=108$ $\quad\therefore ab=18$

$a>0$, $b>0$이므로

$a^2+b^2\ge2\sqrt{a^2\times b^2}$

$=2ab=36$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\therefore l^2=6^2+a^2+b^2\ge36+36=72$

$\therefore l\ge6\sqrt{2}$

따라서 구하는 대각선의 길이의 최솟값은 $6\sqrt{2}$이다.

27 △ABC=△ABP+△BCP+△CAP이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=\frac{1}{2}\times4\times a+\frac{1}{2}\times4\times b+\frac{1}{2}\times4\times2a$$

$\therefore 3a+b=2\sqrt{3}$

a, b가 실수이므로

$(3^2+1^2)(a^2+b^2)\ge(3a+b)^2$

$10(a^2+b^2)\ge12$

$\therefore a^2+b^2\ge\frac{6}{5}$ (단, 등호는 $3b=a$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{6}{5}$이다.

Ⅲ-1. 함수

01 함수의 뜻과 그래프 68~73쪽

1 ③	**2** ②	**3** ③	**4** ③	**5** -1
6 1	**7** 21	**8** ①	**9** $\frac{5}{4}$	**10** ⑤
11 ⑤	**12** ④	**13** $\{0\}$, $\{3\}$, $\{0, 3\}$	**14** ③	
15 ③	**16** ㄴ, ㄹ	**17** ③	**18** ③	**19** 5
20 ②	**21** ②	**22** ④	**23** ①	**24** ⑤
25 $-1<a<1$		**26** 17	**27** ①	**28** ①
29 5	**30** 126	**31** 120	**32** ④	**33** 100
34 25	**35** ②	**36** 24		

1 ㄱ. 집합 X의 원소 -1에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
ㄹ. 집합 X의 원소 -1, 1에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
따라서 보기에서 X에서 Y로의 함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

2 ① 집합 X의 원소 2에 대응하는 집합 X의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
③ 집합 X의 원소 -1, 1에 대응하는 집합 X의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
④ 집합 X의 원소 0에 대응하는 원소가 2개이므로 함수가 아니다.
⑤ 집합 X의 원소 -2에 대응하는 집합 X의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
따라서 X에서 X로의 함수인 것은 ②이다.

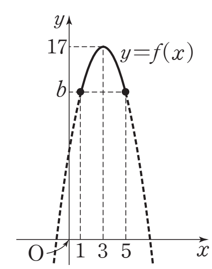
3 $X=\{0, 1\}$, $Y=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
③ 집합 X의 원소 1에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

4 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$이므로
$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=2$, $f(4)=3$, $f(5)=2$,
$f(6)=4$, $f(7)=2$, $f(8)=4$, $f(9)=3$
따라서 함수 f의 치역은 $\{1, 2, 3, 4\}$이므로 치역의 모든 원소의 합은 $1+2+3+4=10$

5 $f(1)=f(3)=f(5)=\cdots=f(19)=-1$
$f(2)=f(4)=f(6)=\cdots=f(18)=1$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(19)$
$=\underbrace{\{f(1)+f(2)\}}_{=0}+\{f(3)+f(4)\}+\cdots+\{f(17)+f(18)\}+f(19)$
$=f(19)=-1$

6 함수 $f(x)=-ax^2+ax+1$이 X에서 X로의 함수이므로 $f(-1)\in X$, $f(0)\in X$, $f(1)\in X$이어야 한다.
이때 $f(1)=1\in X$, $f(0)=1\in X$이므로
$f(-1)=-1$ 또는 $f(-1)=0$ 또는 $f(-1)=1$
(i) $f(-1)=-1$일 때,
$-2a+1=-1 \quad \therefore a=1$
(ii) $f(-1)=0$일 때,
$-2a+1=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$
(iii) $f(-1)=1$일 때,
$-2a+1=1 \quad \therefore a=0$
(i), (ii), (iii)에서 a는 자연수이므로 $a=1$

7 $f(x)=-x^2+6x+a$
$=-(x-3)^2+a+9$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore f(1)=f(5)=b$, $f(3)=17$
$f(1)=b$에서 $-1+6+a=b$
$\therefore a-b=-5 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$f(3)=17$에서 $-9+18+a=17 \quad \therefore a=8$
이를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=13$
$\therefore a+b=8+13=21$

8 주어진 식의 양변에 $a=1$, $b=1$을 대입하면
$f(1)=f(1)+f(1) \quad \therefore f(1)=0$
주어진 식의 양변에 $a=6$, $b=\frac{1}{6}$을 대입하면
$f(1)=f(6)+f\left(\frac{1}{6}\right)$, $0=2+f\left(\frac{1}{6}\right)$
$\therefore f\left(\frac{1}{6}\right)=-2$

9 주어진 식의 양변에 $a=1$, $b=0$을 대입하면
$f(1)=f(1)f(0)$, $2=2f(0) \quad \therefore f(0)=1$
주어진 식의 양변에 $a=1$, $b=1$을 대입하면
$f(2)=f(1)f(1) \quad \therefore f(2)=4$
주어진 식의 양변에 $a=2$, $b=-2$를 대입하면
$f(0)=f(2)f(-2)$, $1=4f(-2) \quad \therefore f(-2)=\frac{1}{4}$
$\therefore f(-2)+f(0)=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

10 ㄱ. 주어진 식의 양변에 $a=0$, $b=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$
ㄴ. 주어진 식의 양변에 $a=1$, $b=1$을 대입하면
$f(2)=f(1)+f(1)$, $8=2f(1) \quad \therefore f(1)=4$

ㄷ. 주어진 식의 양변에 $a=x$, $b=x$를 대입하면
$f(2x)=f(x)+f(x)$ $\quad\therefore f(2x)=2f(x)$
주어진 식의 양변에 $a=2x$, $b=x$를 대입하면
$f(3x)=f(2x)+f(x)$ $\quad\therefore f(3x)=3f(x)$
$\vdots$
$\therefore f(kx)=kf(x)$
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 정의역 X의 모든 원소 -1, 0, 1에 대하여 두 함수 f, g의 함숫값을 구하면
ㄱ. $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$
$g(-1)=1$, $g(0)=0$, $g(1)=1$
$\therefore f\neq g$
ㄴ. $f(-1)=-2$, $f(0)=-1$, $f(1)=0$
$g(-1)=0$, $g(0)=1$, $g(1)=2$
$\therefore f\neq g$
ㄷ. $f(-1)=1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$
$g(-1)=1$, $g(0)=0$, $g(1)=1$
$\therefore f=g$
ㄹ. $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$
$g(-1)=-1$, $g(0)=0$, $g(1)=1$
$\therefore f=g$
따라서 보기에서 $f=g$인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

12 두 함수 f와 g가 서로 같으려면
$f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$
$f(0)=g(0)$, $f(2)=g(2)$에서 $3=a+b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$f(1)=g(1)$에서 $2-4+3=b$ $\quad\therefore b=1$
이를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=2$
$\therefore 2a-b=4-1=3$

13 $f(x)=g(x)$에서 $2x^2-x=x^2+2x$
$x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=3$
따라서 집합 X는 집합 $\{0, 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로
$\{0\}$, $\{3\}$, $\{0, 3\}$

14 y축에 평행한 직선 $x=k$(k는 상수)와 한 점에서 만나는 그래프는 ③이다.

15 보기에서 y축에 평행한 직선 $x=k$(k는 상수)와 한 점에서 만나는 그래프는 ㄴ, ㄷ이다.

16 보기에서 x축에 평행한 직선 $y=k$(k는 상수)와 한 점에서 만나고 치역이 실수 전체의 집합인 함수의 그래프는 ㄴ, ㄹ이다.

17 ① $f(-1)=1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$
② $f(-1)=1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$
③ $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$
④ $f(-1)=1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$
⑤ $f(-1)=1$, $f(0)=1$, $f(1)=1$
따라서 항등함수인 것은 ③이다.

18 ㄴ. $1\neq-1$이지만 $f(1)=f(-1)=1$이므로 일대일함수가 아니다.
ㄷ. $x_1\neq x_2$일 때, $f(x_1)=f(x_2)=4$이므로 일대일함수가 아니다.
따라서 보기에서 일대일함수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

19 ㄱ. $-1 \longrightarrow -1$, $0 \longrightarrow 0$, $1 \longrightarrow 1$
ㄴ. $-1 \longrightarrow 0$, $1 \longrightarrow 0$ ◀ 0에 대응하는 원소가 없다.
ㄷ. $-1 \longrightarrow 0$, $0 \longrightarrow -1$, $1 \longrightarrow 0$
ㄹ. $-1 \longrightarrow 1$, $0 \longrightarrow 0$, $1 \longrightarrow -1$
따라서 보기에서 함수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이고 일대일대응인 것은 ㄱ, ㄹ이므로
$a=3$, $b=2$ $\quad\therefore a+b=5$

20 $f(x)=x$에서 $x^3-2x+2=x$, $x^3-3x+2=0$
$(x-1)^2(x+2)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=1$
따라서 공집합이 아닌 집합 X의 개수는
$2^2-1=3$

21 $a<0$이므로 $f(-2)=5$, $f(1)=-1$에서
$-2a+b=5$, $a+b=-1$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-2$, $b=1$ $\quad\therefore ab=-2$

22 일대일대응이려면 $x<0$, $x\geq0$일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.
따라서 두 직선의 기울기의 곱은 항상 양수이므로
$(a+3)(2-a)>0$, $(a+3)(a-2)<0$
$\therefore -3<a<2$
따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1의 4개이다.

23 $f(x)=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1$
함수 f가 일대일대응이려면 $f(5)=1$이어야 하므로
$15+k=1$ $\quad\therefore k=-14$

24 $f(x)=x^2-6x+12=(x-3)^2+3$
함수 f가 일대일대응이려면
$a\geq3$, $f(a)=a$
$f(a)=a$에서 $a^2-6a+12=a$, $a^2-7a+12=0$
$(a-3)(a-4)=0$ $\quad\therefore a=3$ 또는 $a=4$
따라서 모든 a의 값의 합은 $3+4=7$

25 $f(x)=a|x-1|+x-2$에서

(i) $x\geq1$일 때,

$f(x)=a(x-1)+x-2=(a+1)x-a-2$

(ii) $x<1$일 때,

$f(x)=-a(x-1)+x-2=(1-a)x+a-2$

(i), (ii)에서

$f(x)=\begin{cases}(a+1)x-a-2 & (x\geq1)\\(1-a)x+a-2 & (x<1)\end{cases}$

이때 일대일대응이려면 $x\geq1$, $x<1$일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

따라서 두 직선의 기울기의 곱은 항상 양수이므로

$(a+1)(1-a)>0$, $(a+1)(a-1)<0$

$\therefore\ -1<a<1$

26 $f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

함수 f가 일대일대응이려면

$a\geq2$, $f(a)=b$

$\therefore\ a-b=a-f(a)=a-(a^2-4a+3)$

$=-a^2+5a-3$

$=-\left(a-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{13}{4}$

따라서 $a-b$의 최댓값은 $a=\dfrac{5}{2}$일 때, $\dfrac{13}{4}$이므로

$p=4$, $q=13$ $\quad\therefore\ p+q=17$

27 함수 f는 항등함수이므로 $f(x)=x$ $\quad\therefore\ f(3)=3$

$g(2)=2$이고 함수 g는 상수함수이므로

$g(x)=2$ $\quad\therefore\ g(4)=2$

$\therefore\ f(3)+g(4)=3+2=5$

28 함수 f가 일대일대응이고 $f(1)=7$이므로

$f(2)-f(3)=3$이려면 $f(2)=8$, $f(3)=5$

$\therefore\ f(4)=6$

$\therefore\ f(3)+f(4)=5+6=11$

29 함수 g는 항등함수이므로 $g(x)=x$

$f(1)=g(3)+h(3)$에서 $f(1)=3+h(3)$

$X=\{1, 2, 3, 4\}$에서 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 4이므로 $f(1)=4$, $h(3)=1$

이때 함수 h는 상수함수이므로 $h(4)=h(3)=1$

또 $f(4)=f(2)+2$에서 $f(4)>2$이고 함수 f는 일대일대응이므로

$f(4)=3$, $f(2)=1$

따라서 $f(3)=2$이므로

$f(3)+g(2)+h(4)=2+2+1=5$

30 일대일대응의 개수는 $a=5!=120$

상수함수의 개수는 $b=5$

항등함수의 개수는 $c=1$

$\therefore\ a+b+c=120+5+1=126$

31 '$f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다.'의 대우는

'$x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다.'

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f는 일대일함수이므로 구하는 함수 f의 개수는

${}_5P_4=120$

32 집합 Y의 원소의 개수를 a라 하면 일대일함수의 개수는 ${}_aP_3$이므로

$a\times(a-1)\times(a-2)=24$

이때 $24=4\times3\times2$이므로 $a=4$

따라서 X에서 Y로의 상수함수의 개수는 4이다.

33 (가)를 만족시키려면 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 3개를 택하여 크기가 작은 것부터 순서대로 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로

${}_5C_3={}_5C_2=10$

(나)를 만족시키려면 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 2개를 택하여 크기가 작은 것부터 순서대로 정의역의 원소 4, 5에 대응시키면 되므로

${}_5C_2=10$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$10\times10=100$

34 $f(0)=-f(0)$에서

$2f(0)=0$ $\quad\therefore\ f(0)=0$

$f(-2)=-f(2)$, $f(-1)=-f(1)$이므로 $f(-2)$, $f(-1)$의 값은 $f(2)$, $f(1)$의 값에 따라 1가지로 결정된다.

$f(1)$, $f(2)$의 값은 각각 -2, -1, 0, 1, 2의 5가지 중 하나이므로 구하는 함수 f의 개수는

$5\times5=25$

35 $f(1)=a$, $f(2)=b$ $(a\in Y,\ b\in Y)$라 하면 $a+b$가 4의 배수가 되도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

(i) $a+b=4$일 때,

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3개

(ii) $a+b=8$일 때,

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5개

(iii) $a+b=12$일 때,

(6, 6)의 1개

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$3+5+1=9$

36 ㈏를 만족시키려면 $f(n)=1$, $f(n+1)=5$

(i) $f(1)=1$, $f(2)=5$일 때,
㈎를 만족시키는 함수 f의 개수는
$3!=6$

(ii) $f(2)=1$, $f(3)=5$일 때,
㈎를 만족시키는 함수 f의 개수는
$3!=6$

(iii) $f(3)=1$, $f(4)=5$일 때,
㈎를 만족시키는 함수 f의 개수는
$3!=6$

(iv) $f(4)=1$, $f(5)=5$일 때,
㈎를 만족시키는 함수 f의 개수는
$3!=6$

(i)~(iv)에서 구하는 함수 f의 개수는
$6+6+6+6=24$

02 합성함수 74~76쪽

1 ②	**2** ④	**3** ①	**4** ②	**5** 10
6 ②	**7** 3000	**8** ④	**9** 30	**10** -2
11 ④	**12** ⑤	**13** 5	**14** ②	
15 $f(x)=12x-13$		**16** -11	**17** $h(x)=2x-9$	
18 풀이 참조		**19** ⑤		

1 $(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(3)=1$
$(f\circ f\circ f)(2)=f(f(f(2)))=f(f(3))=f(1)=2$
$\therefore\ (f\circ f)(2)+(f\circ f\circ f)(2)=1+2=3$

2 $(f\circ f)(5)=f(f(5))=f(9)=17$

3 $(f\circ g)(-3)=f(g(-3))=f(3)=8$
$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(3)=0$
$\therefore\ (f\circ g)(-3)+(g\circ f)(2)=8+0=8$

4 $(h\circ(g\circ f))(3)=((h\circ g)\circ f)(3)$
$=(h\circ g)(f(3))$
$=(h\circ g)(12)=6$

5 $(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(2a-10)$
$=(2a-10)^2+3=4a^2-40a+103$
$(f\circ g)(a)=103$에서 $4a^2-40a+103=103$
$4a^2-40a=0$, $4a(a-10)=0$
$\therefore\ a=10\ (\because\ a>0)$

6 함수 g가 항등함수이므로 $g(x)=x$
㈎의 $f(g(1))=g(2)$에서 $f(1)=2$
또 $h(g(3))=g(2)$에서 $h(3)=2$
함수 h는 상수함수이므로 $h(x)=2$
㈏에서 $h(h(2))+g(1)=f(h(3))$
$2+1=f(2)\qquad\therefore\ f(2)=3$
함수 f는 일대일대응이고 $f(1)=2$, $f(2)=3$이므로
$f(3)=1$
$\therefore\ f(3)g(3)h(1)=1\times3\times2=6$

7 $f(x)=x+4$에서
$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f(x))$
$=f(x+4)=x+4\times2$
$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$
$=f(x+4\times2)=x+4\times3$
$\vdots$
$\therefore\ f^n(x)=x+4n$
따라서 $f^{1000}(x)=x+4000$이므로
$f^{1000}(-1000)=3000$

8 $f(80)=40$이므로
$f^2(80)=(f\circ f^1)(80)=f(f(80))=f(40)=20$
$f^3(80)=(f\circ f^2)(80)=f(f^2(80))=f(20)=10$
$f^4(80)=(f\circ f^3)(80)=f(f^3(80))=f(10)=5$
$f^5(80)=(f\circ f^4)(80)=f(f^4(80))=f(5)=3$
$f^6(80)=(f\circ f^5)(80)=f(f^5(80))=f(3)=2$
$f^7(80)=(f\circ f^6)(80)=f(f^6(80))=f(2)=1$
따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 7이다.

9 $f^1(2)=f(2)=2-1=1$
$f^2(2)=f(f(2))=f(1)=3$
$f^3(2)=f(f^2(2))=f(3)=3-1=2$
$f^4(2)=f(f^3(2))=f(2)=2-1=1$
$\vdots$
$f^n(2)$의 값은 1, 3, 2가 이 순서대로 반복되므로
$f^1(2)+f^2(2)+f^3(2)+\cdots+f^{15}(2)$
$=5(1+3+2)=30$

10 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-1)$
$=a(2x-1)+3=2ax-a+3$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+3)$
$=2(ax+3)-1=2ax+5$
이때 $f\circ g=g\circ f$에서 $2ax-a+3=2ax+5$
즉, $-a+3=5$이므로 $a=-2$

11 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$

$\qquad\qquad=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

즉, $a^2x+ab+b=9x-8$이므로

$a^2=9,\ ab+b=-8$

$a^2=9$에서 $a=3\ (\because a>0)$

이를 $ab+b=-8$에 대입하면

$4b=-8 \qquad \therefore b=-2$

$\therefore a+b=3+(-2)=1$

12 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+2)$

$\qquad\qquad=ax+2-1=ax+1$

이때 $(f\circ g)(2)=5$에서

$2a+1=5 \qquad \therefore a=2$

따라서 $g(x)=2x+2$이므로

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(1)=4$

13 $g(x)=ax+b\ (a\neq 0)$라 하면

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+b)$

$\qquad\qquad=3(ax+b)-2=3ax+3b-2$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x-2)$

$\qquad\qquad=a(3x-2)+b=3ax-2a+b$

이때 $f\circ g=g\circ f$에서 $3ax+3b-2=3ax-2a+b$

즉, $3b-2=-2a+b$이므로 $a+b=1$ …… ㉠

한편 $g(2)=-1$에서 $2a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=3$

따라서 $g(x)=-2x+3$이므로

$g(-1)=2+3=5$

14 $(f\circ h)(x)=f(h(x))=h(x)-1$

이때 $f\circ h=g$에서 $h(x)-1=-x+2$

$\therefore h(x)=-x+3$

15 $\dfrac{x+4}{3}=t$로 놓으면 $x=3t-4$이므로

$f(t)=4(3t-4)+3=12t-13$

$\therefore f(x)=12x-13$

16 $h(f(x))=g(x)$이므로

$h(2x+4)=3x-2$

$2x+4=-2$에서 $x=-3$

$\therefore h(-2)=-9-2=-11$

17 $((h\circ g)\circ f)(x-2)=(h\circ(g\circ f))(x-2)$

$\qquad\qquad=h((g\circ f)(x-2))$

$\qquad\qquad=h(-(x-2)+3)$

$\qquad\qquad=h(-x+5)$

$\therefore h(-x+5)=-2x+1$

$-x+5=t$로 놓으면 $x=5-t$이므로

$h(t)=-2(5-t)+1=2t-9$

$\therefore h(x)=2x-9$

18 (ⅰ) $x<1$일 때,

$f(x)=2$이므로

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2)=0$

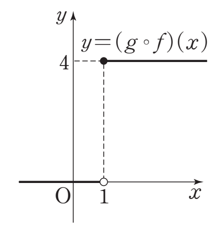
(ⅱ) $x\geq 1$일 때,

$f(x)=1$이므로

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(1)=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $(g\circ f)(x)=\begin{cases}0 & (x<1)\\ 4 & (x\geq 1)\end{cases}$

따라서 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



19 주어진 그래프에서

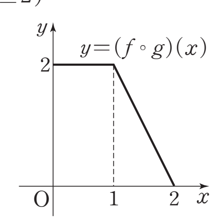
$f(x)=2x\ (0\leq x\leq 2),\ g(x)=\begin{cases}1 & (0\leq x<1)\\ -x+2 & (1\leq x\leq 2)\end{cases}$

$\therefore (f\circ g)(x)=f(g(x))=2g(x)$

$\qquad\qquad=\begin{cases}2 & (0\leq x<1)\\ -2x+4 & (1\leq x\leq 2)\end{cases}$

따라서 합성함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(1+2)\times 2=3$



03 역함수

77~80쪽

1 ②	**2** 4	**3** ⑤	**4** ②	**5** ①
6 ③	**7** ④	**8** ③	**9** 4	**10** ①
11 ②	**12** -1	**13** 8	**14** $-\frac{7}{3}$	**15** ④
16 $h(x)=\begin{cases}x-1 & (x\geq 2)\\ 2x-3 & (x<2)\end{cases}$			**17** ①	**18** ①
19 ⑤	**20** ①	**21** ②	**22** ③	**23** ④
24 40				

1 $g^{-1}(3)=k$(k는 상수)라 하면 $g(k)=3$이므로

$k=5$

$(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(7)=2$

$\therefore g^{-1}(3)+(g\circ f)(4)=5+2=7$

유형편

2 $f^{-1}(3)=-1$에서 $f(-1)=3$이므로

$-a+b=3$ ...... ㉠

$f^{-1}(6)=2$에서 $f(2)=6$이므로

$2a+b=6$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=4$

$\therefore ab=1\times4=4$

3 $(f^{-1}\circ g)(a)=f^{-1}(g(a))=1$에서

$f(1)=g(a)$

$2-1=3a-2 \quad \therefore a=1$

4 $\frac{x+2}{5}=t$로 놓으면 $x=5t-2$이므로

$f(t)=-(5t-2)+4=-5t+6$

$\therefore f(x)=-5x+6$

$f^{-1}(1)=k$(k는 상수)라 하면 $f(k)=1$이므로

$-5k+6=1 \quad \therefore k=1$

$\therefore f^{-1}(1)=1$

다른 풀이

$f^{-1}(1)=k$(k는 상수)라 하면 $f(k)=1$이므로

$-x+4=1 \quad \therefore x=3$

$f\left(\frac{x+2}{5}\right)=-x+4$의 양변에 $x=3$을 대입하면 $f(1)=1$

$\therefore k=1 \quad \therefore f^{-1}(1)=1$

5 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+a)$

$\qquad\qquad =2x+a+a=2x+2a$

즉, $2x+2a=2x+6$이므로

$2a=6 \quad \therefore a=3$

$\therefore f(x)=x+3$, $g(x)=2x+3$

$(g\circ f^{-1})(-1)=g(f^{-1}(-1))$에서

$f^{-1}(-1)=k$(k는 상수)라 하면 $f(k)=-1$이므로

$k+3=-1 \quad \therefore k=-4$

$\therefore (g\circ f^{-1})(-1)=g(f^{-1}(-1))=g(-4)=-5$

6 $f^{-1}(4)=2$에서 $f(2)=4$

함수 f는 일대일대응이므로 $f(4)=3$

$(f\circ f)(4)=f(f(4))=f(3)=1$

$(f\circ f\circ f)(1)=f(f(f(1)))=f(f(2))=f(4)=3$

$\therefore (f\circ f)(4)+(f\circ f\circ f)(1)=1+3=4$

7 함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f는 일대일대응이어야 한다.

직선 $y=f(x)$의 기울기가 음수이므로

$f(-1)=b$, $f(3)=a$

따라서 $a=-5$, $b=3$이므로

$a-b=-8$

8 $f(x)=ax+|2x-2|$에서

(i) $x\geq1$일 때,

$f(x)=ax+2x-2=(a+2)x-2$

(ii) $x<1$일 때,

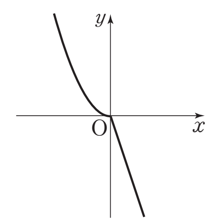
$f(x)=ax-(2x-2)=(a-2)x+2$

함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f는 일대일대응이어야 하므로 (i), (ii)에서 $x\geq1$, $x<1$일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

따라서 $(a+2)(a-2)>0$이므로

$a<-2$ 또는 $a>2$

9 함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f는 일대일대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$\therefore a-1<0$, $f(0)=0$

$f(0)=0$에서 $a^2-4=0$, $a^2=4$

$\therefore a=\pm2$

이때 $a-1<0$에서 $a<1$이므로 $a=-2$

$\therefore f(a)=f(-2)=(-2)^2=4$

10 $y=-\frac{1}{2}x+3$에서 $x=-2y+6$이므로 역함수는

$y=-2x+6$

따라서 $a=-2$, $b=6$이므로

$ab=-12$

11 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+b)$

$\qquad\qquad =2(ax+b)-1$

$\qquad\qquad =2ax+2b-1$

$y=2ax+2b-1$이라 하면

$2ax=y-2b+1 \quad \therefore x=\frac{1}{2a}y-\frac{2b-1}{2a}$

따라서 역함수는 $y=\frac{1}{2a}x-\frac{2b-1}{2a}$

즉, $\frac{1}{2a}=-\frac{1}{4}$, $-\frac{2b-1}{2a}=\frac{1}{4}$이므로

$2a=-4$, $2b-1=1 \quad \therefore a=-2$, $b=1$

$\therefore a+b=-1$

12 $2x+1=t$로 놓으면 $x=\frac{t-1}{2}$

$\therefore f(t)=6\times\frac{t-1}{2}+12=3t+9$

$\therefore f(x)=3x+9$

$y=3x+9$라 하면 $x=\frac{1}{3}y-3$이므로 역함수는

$y=\frac{1}{3}x-3$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-3$이므로 $a=\frac{1}{3}$, $b=-3$

$\therefore ab=-1$

13 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(2)$
$=(g^{-1}\circ f)(2)$
$=g^{-1}(f(2))$
$=g^{-1}(7)$

$g^{-1}(7)=k$(k는 상수)라 하면 $g(k)=7$이므로

$k-1=7$　　$\therefore k=8$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)=g^{-1}(7)=8$

14 $(g^{-1}\circ f)^{-1}(1)=(f^{-1}\circ g)(1)$
$=f^{-1}(g(1))$
$=f^{-1}(2)$

$f^{-1}(2)=a$(a는 상수)라 하면 $f(a)=2$이므로

$a+4=2$　　$\therefore a=-2$

$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(1)=f^{-1}(2)=-2$

$(f\circ g)^{-1}(2)=(g^{-1}\circ f^{-1})(2)$
$=g^{-1}(f^{-1}(2))$
$=g^{-1}(-2)$

$g^{-1}(-2)=b$(b는 상수)라 하면 $g(b)=-2$이므로

$3b-1=-2$　　$\therefore b=-\frac{1}{3}$

$\therefore (f\circ g)^{-1}(2)=g^{-1}(-2)=-\frac{1}{3}$

$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(1)+(f\circ g)^{-1}(2)=-2+\left(-\frac{1}{3}\right)$
$=-\frac{7}{3}$

15 함수 $y=f(2x+3)$에서 $h(x)=2x+3$이라 하면 함수 $y=f(h(x))=(f\circ h)(x)$의 역함수는

$(f\circ h)^{-1}(x)=(h^{-1}\circ f^{-1})(x)$
$=h^{-1}(f^{-1}(x))$
$=h^{-1}(g(x))$　　$\cdots\cdots$ ㉠

$h(x)=2x+3$에서 $y=2x+3$이라 하면

$2x=y-3$　　$\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$

따라서 역함수는 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

$\therefore h^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

㉠에서

$(f\circ h)^{-1}(x)=h^{-1}(g(x))=\frac{1}{2}g(x)-\frac{3}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$이므로

$a+b=-1$

16 $f\circ h=g^{-1}$에서

$f^{-1}\circ f\circ h=f^{-1}\circ g^{-1}$　　$\therefore h=(g\circ f)^{-1}$

(i) $x\geq 1$일 때,

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x)$
$=\frac{1}{2}\times 2x+1=x+1$

$y=x+1$이라 하면 $y\geq 2$이고 $x=y-1$이므로 역함수는

$(g\circ f)^{-1}(x)=x-1$ (단, $x\geq 2$)

(ii) $x<1$일 때,

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)$
$=\frac{1}{2}(x+1)+1=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$이라 하면 $y<2$이고 $x=2y-3$이므로 역함수는

$(g\circ f)^{-1}(x)=2x-3$ (단, $x<2$)

(i), (ii)에서

$$h(x)=(g\circ f)^{-1}(x)=\begin{cases} x-1 & (x\geq 2) \\ 2x-3 & (x<2) \end{cases}$$

17 $(f\circ f)(x)=x$에서 $f(x)=f^{-1}(x)$

$\therefore f(1)=f^{-1}(1)=-2$

다른 풀이

$f^{-1}(1)=-2$에서 $f(-2)=1$이므로

$(f\circ f)(x)=x$의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$f(f(-2))=-2$　　$\therefore f(1)=-2$

18 $f=f^{-1}$이면 $(f\circ f)(x)=x$

ㄱ. $f(x)=-x$이므로

$f(f(x))=f(-x)=-(-x)=x$

ㄴ. $f(x)=-x+4$이므로

$f(f(x))=f(-x+4)=-(-x+4)+4=x$

ㄷ. $f(x)=3x$이므로

$f(f(x))=f(3x)=3\times 3x=9x$

ㄹ. $f(x)=\frac{1}{4}x$이므로

$f(f(x))=f\left(\frac{1}{4}x\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}x=\frac{1}{16}x$

따라서 보기에서 $f=f^{-1}$를 만족시키는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

19 $f=f^{-1}$이면 $(f\circ f)(x)=x$

$f(f(x))=f(ax+2)=a(ax+2)+2$
$=a^2x+2a+2$

즉, $a^2x+2a+2=x$이므로

$a^2=1$, $2a+2=0$　　$\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-x+2$이므로

$f(-1)=3$

유형편

20 $(f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$

$f^{-1}(c)=k$(k는 상수)라

하면 $f(k)=c$이므로

$k=b$

$f^{-1}(b)=l$(l은 상수)이라

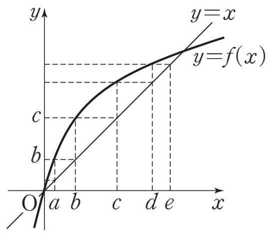
하면 $f(l)=b$이므로

$l=a$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(c)$

$=f^{-1}(f^{-1}(c))$

$=f^{-1}(b)=a$



21 $f^{-1}(b)=k$ (k는 상수)라

하면 $f(k)=b$이므로

$k=c$

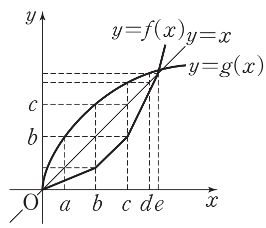
$g^{-1}(c)=l$ (l은 상수)이라

하면 $g(l)=c$이므로

$l=b$

$\therefore g^{-1}(f^{-1}(b))=g^{-1}(c)$

$=b$



22 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$-2x+6=x$에서 $x=2$

따라서 교점의 좌표는 $(2, 2)$이므로

$a=2$, $b=2$ $\quad\therefore a+b=4$

23 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

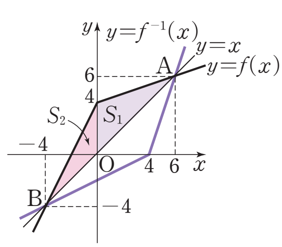
$x^2-6x+12=x$에서 $x^2-7x+12=0$

$(x-3)(x-4)=0 \quad \therefore x=3$ 또는 $x=4$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(3, 3)$, $(4, 4)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4-3)^2+(4-3)^2}=\sqrt{2}$

24 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면 S는 $-4\le x\le 6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.

위의 그림에서 $S_1=\dfrac{1}{2}\times4\times6=12$, $S_2=\dfrac{1}{2}\times4\times4=8$이므로

$S=2(S_1+S_2)=2(12+8)=40$

III-2. 유리함수와 무리함수

01 유리함수 82~88쪽

1 $\dfrac{2}{x^2-4}$	**2** $\dfrac{x+2}{x+4}$	**3** 1	**4** ③	**5** -12
6 ④	**7** ①	**8** $\dfrac{2x+3}{(x+2)(x+1)}$	**9** -96	
10 ①	**11** ③	**12** $\dfrac{1}{2}$	**13** ②	**14** 3
15 $\dfrac{11}{14}$	**16** ③	**17** ④	**18** 제3사분면	
19 ③	**20** 11	**21** 1	**22** ⑤	**23** -6
24 ①	**25** ③	**26** $\dfrac{13}{2}$	**27** 1	**28** ②
29 ②	**30** -5	**31** ②	**32** -1	**33** 3
34 ⑤	**35** ③	**36** 5	**37** $m\le0$	**38** ②
39 3	**40** $\dfrac{2}{21}$	**41** 0	**42** -3	**43** 2
44 ⑤	**45** -1			

1 $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x}{x^2-4}=\dfrac{x+2-x}{(x-2)(x+2)}$

$=\dfrac{2}{x^2-4}$

2 $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+x-6}\times\dfrac{x+3}{x+2}\div\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-4}$

$=\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-2)}\times\dfrac{x+3}{x+2}\times\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+4)(x-1)}$

$=\dfrac{x+2}{x+4}$

3 $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$=\dfrac{-a^2}{(a-b)(c-a)}+\dfrac{-b^2}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{-c^2}{(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

분자를 a에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$

$=-(b-c)a^2+(b^2-c^2)a-b^2c+bc^2$

$=-(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c)$

$=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=-(b-c)(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$

$\therefore \dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$=\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=1$

4 $\dfrac{a^2+1}{bc}+\dfrac{b^2+1}{ca}+\dfrac{c^2+1}{ab}$

$=\dfrac{a(a^2+1)+b(b^2+1)+c(c^2+1)}{abc}$

$=\dfrac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}$

$=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}$ ($\because$ $a+b+c=0$)

$=\dfrac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{abc}$

$=\dfrac{3abc}{abc}$ ($\because$ $a+b+c=0$)

$=3$

5 우변을 통분하여 정리하면

$\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}=\dfrac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{(a+b)x-2a-b}{x^2-3x+2}$

이때 $\dfrac{2x+3}{x^2-3x+2}=\dfrac{(a+b)x-2a-b}{x^2-3x+2}$가 x에 대한 항등식이므로

$a+b=2$, $-2a-b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=7$

$\therefore$ $a-b=-12$

6 좌변을 통분하여 정리하면

$\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{ax+1}{x^2+x+1}$

$=\dfrac{2(x^2+x+1)+(ax+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\dfrac{(a+2)x^2+(3-a)x+1}{x^3-1}$

이때 $\dfrac{(a+2)x^2+(3-a)x+1}{x^3-1}=\dfrac{bx+1}{x^3-1}$이 x에 대한 항등식이므로

$a+2=0$, $3-a=b$

$\therefore$ $a=-2$, $b=5$

$\therefore$ $b-a=7$

7 좌변을 통분하여 정리하면

$\dfrac{a}{x+1}-\dfrac{b}{x-2}-\dfrac{c}{x}$

$=\dfrac{ax(x-2)-bx(x+1)-c(x+1)(x-2)}{x(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{(a-b-c)x^2-(2a+b-c)x+2c}{x(x+1)(x-2)}$

이때

$\dfrac{(a-b-c)x^2-(2a+b-c)x+2c}{x(x+1)(x-2)}=\dfrac{2-4x}{x(x+1)(x-2)}$

가 x에 대한 항등식이므로

$a-b-c=0$, $2a+b-c=4$, $2c=2$

$c=1$이므로 $a-b=1$, $2a+b=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore$ $abc=2\times1\times1=2$

8 $\dfrac{2x^2+4x+1}{x+2}-\dfrac{2x^2+2x-1}{x+1}$

$=\dfrac{2x(x+2)+1}{x+2}-\dfrac{2x(x+1)-1}{x+1}$

$=2x+\dfrac{1}{x+2}-2x+\dfrac{1}{x+1}$

$=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+1}$

$=\dfrac{2x+3}{(x+2)(x+1)}$

9 $\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{x-5}{x-4}$

$=1+\dfrac{1}{x}-\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)-\left(1-\dfrac{1}{x-3}\right)+1-\dfrac{1}{x-4}$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}$

$=\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{(x-3)(x-4)}$

$=\dfrac{-8x+12}{x(x+1)(x-3)(x-4)}$

따라서 $a=-8$, $b=12$이므로

$ab=-96$

10 $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}$

$=1-\dfrac{1}{\dfrac{-1}{x-1}}=1+x-1=x$

11 $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{4}{(x+1)(x+5)}+\dfrac{6}{(x+5)(x+11)}$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+11}$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+11}=\dfrac{11}{x(x+11)}$

따라서 $a=11$, $b=11$이므로 $a+b=22$

12 $\dfrac{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}}=\dfrac{\dfrac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{x(x-1)+x+1}{(x+1)(x-1)}}=\dfrac{2x}{x^2+1}$

이때 $x^2-4x+1=0$에서 $x^2+1=4x$이므로 대입하면 구하는 식의 값은

$\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{2x}{4x}=\dfrac{1}{2}$

13 $\dfrac{67}{29}=2+\dfrac{9}{29}=2+\dfrac{1}{\dfrac{29}{9}}$

$=2+\dfrac{1}{3+\dfrac{2}{9}}=2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{\dfrac{9}{2}}}$

$=2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{2}}}$

따라서 $a=2$, $b=3$, $c=4$, $d=2$이므로

$a+b+c+d=11$

14 $x:y:z=2:3:4$이므로

$x=2k$, $y=3k$, $z=4k\,(k\neq 0)$로 놓으면

$\dfrac{xyz}{x^2y-y^2z+xz^2}=\dfrac{2k\times 3k\times 4k}{(2k)^2\times 3k-(3k)^2\times 4k+2k\times(4k)^2}$

$=\dfrac{24k^3}{8k^3}=3$

15 $\dfrac{a+b}{3}=\dfrac{b+c}{4}=\dfrac{c+a}{5}=k\,(k\neq 0)$로 놓으면

$a+b=3k$, $b+c=4k$, $c+a=5k$

각 변끼리 더하면

$2(a+b+c)=12k$

$\therefore a+b+c=6k$

따라서 $a=2k$, $b=k$, $c=3k$이므로

$\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{2k\times k+k\times 3k+3k\times 2k}{(2k)^2+k^2+(3k)^2}$

$=\dfrac{11k^2}{14k^2}=\dfrac{11}{14}$

16 $3b+2c=ak$, $2c+a=3bk$, $a+3b=2ck$ …… ㉠

각 변끼리 더하면

$2(a+3b+2c)=(a+3b+2c)k$

(i) $a+3b+2c\neq 0$일 때,

$k=2$

(ii) $a+3b+2c=0$일 때,

$3b+2c=-a$, $2c+a=-3b$, $a+3b=-2c$

이를 ㉠에 대입하면 $k=-1$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은

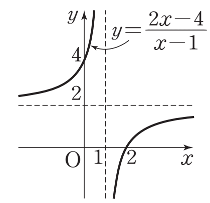
$2+(-1)=1$

17 $y=\dfrac{1-4x}{2x+2}=\dfrac{-4(x+1)+5}{2(x+1)}=\dfrac{5}{2(x+1)}-2$

$y=\dfrac{1-4x}{2x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{5}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 ④와 같다.

18 $y=\dfrac{2x-4}{x-1}=\dfrac{2(x-1)-2}{x-1}=-\dfrac{2}{x-1}+2$

$y=\dfrac{2x-4}{x-1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

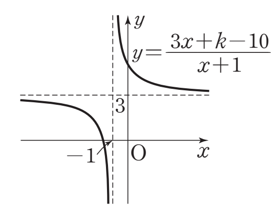


따라서 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.

19 $y=\dfrac{3x+k-10}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+k-13}{x+1}=\dfrac{k-13}{x+1}+3$

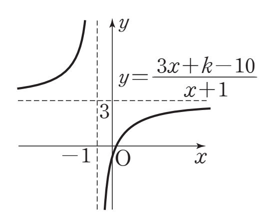
(i) $k-13>0$, 즉 $k>13$일 때,

$y=\dfrac{3x+k-10}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 k의 값에 관계없이 제4사분면을 지나지 않는다.



(ii) $k-13<0$, 즉 $k<13$일 때,

$y=\dfrac{3x+k-10}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나려면 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작아야 한다.



즉, $k-10<0$이므로 $k<10$

(iii) $k-13=0$, 즉 $k=13$일 때,

$y=3$이므로 제4사분면을 지나지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $k<10$

따라서 모든 자연수 k는 1, 2, 3, …, 9의 9개이다.

20 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y=\dfrac{3}{x+2}+2=\dfrac{2x+7}{x+2}$

따라서 $a=2$, $b=7$, $c=2$이므로 $a+b+c=11$

21 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면

$y=-\dfrac{1}{x-p+1}+2+q$

이 함수의 그래프가 $y=\dfrac{-x+2}{x-3}=-\dfrac{1}{x-3}-1$의 그래프와 겹쳐지므로

$-p+1=-3$, $2+q=-1$

$\therefore p=4$, $q=-3$ $\quad\therefore p+q=1$

22 ㄴ. $y=\dfrac{x-2}{x}=-\dfrac{2}{x}+1$

ㄷ. $y=\dfrac{-2x+2}{x+1}=\dfrac{4}{x+1}-2$

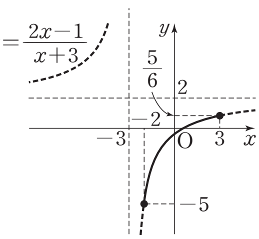
ㄹ. $y=\dfrac{x-5}{x-3}=-\dfrac{2}{x-3}+1$

따라서 보기의 함수에서 그 그래프가 유리함수 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 평행이동하여 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

23 $y=\dfrac{2x-1}{x+3}=\dfrac{2(x+3)-7}{x+3}=-\dfrac{7}{x+3}+2$

$x=3$일 때 $y=\dfrac{5}{6}$, $x=-2$일 때 $y=-5$

따라서 $-2\le x\le 3$에서 함수 $y=\dfrac{2x-1}{x+3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

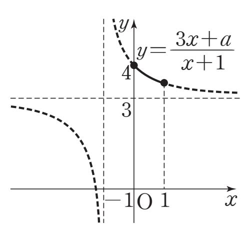


$M=\dfrac{5}{6}$, $m=-5$

$\therefore \dfrac{m}{M}=-6$

24 $y=\dfrac{3x+a}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+a-3}{x+1}=\dfrac{a-3}{x+1}+3$

$0\le x\le 1$에서 $y=\dfrac{3x+a}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=\dfrac{3x+a}{x+1}$가 $x=0$에서 최댓값 a를 갖는다.

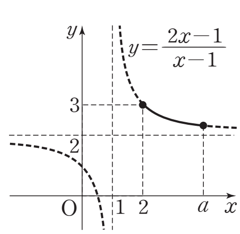


$\therefore a=4$

25 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+2$

$2\le x\le a$에서 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$이 $x=2$에서 최댓값 3을 가지므로



$b=3$

따라서 함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$이 $x=a$에서 최솟값 $\dfrac{7}{3}$을 가지므로

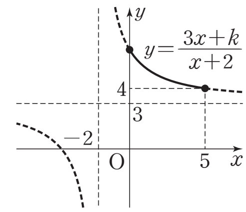
$\dfrac{2a-1}{a-1}=\dfrac{7}{3}$

$6a-3=7a-7 \qquad \therefore a=4$

$\therefore a+b=4+3=7$

26 $y=\dfrac{3x+k}{x+2}=\dfrac{3(x+2)+k-6}{x+2}=\dfrac{k-6}{x+2}+3$

이때 $0\le x\le 5$에서 함수 $y=\dfrac{3x+k}{x+2}$의 최솟값이 4이려면 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



함수 $y=\dfrac{3x+k}{x+2}$가 $x=5$에서 최솟값 4를 가지므로

$\dfrac{15+k}{7}=4$

$\therefore k=13$

따라서 함수 $y=\dfrac{3x+13}{x+2}$은 $x=0$에서 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은 $\dfrac{13}{2}$이다.

27 $y=\dfrac{3x+4}{x+2}=-\dfrac{2}{x+2}+3$

따라서 이 함수의 그래프는 점 $(-2,\ 3)$에 대하여 대칭이므로

$a=-2$, $b=3$

$\therefore a+b=1$

28 $y=\dfrac{ax+2}{x-1}=\dfrac{a(x-1)+a+2}{x-1}=\dfrac{a+2}{x-1}+a$

따라서 이 함수의 그래프는 점 $(1,\ a)$에 대하여 대칭이므로

$a=-1$, $b=1$

$\therefore ab=-1$

29 $y=\dfrac{7-6x}{2x-2}=\dfrac{-6(x-1)+1}{2(x-1)}=\dfrac{1}{2(x-1)}-3$

이 함수의 그래프는 두 직선 $y=(x-1)-3$, $y=-(x-1)-3$, 즉 두 직선 $y=x-4$, $y=-x-2$에 대하여 대칭이다.

따라서 $a=-4$, $b=-1$, $c=-2$이므로

$a+b+c=-7$

30 $y=\dfrac{ax+4}{x+3}=\dfrac{a(x+3)-3a+4}{x+3}=\dfrac{-3a+4}{x+3}+a$

이 함수의 그래프는 점 $(-3,\ a)$에 대하여 대칭이다.

이때 두 직선 $y=x+2$, $y=-x+b$는 점 $(-3,\ a)$를 지나므로

$a=-3+2=-1$, $a=3+b$

$\therefore b=-4$

$\therefore a+b=-1+(-4)=-5$

유형편

31 $f(x)=\dfrac{ax+1}{x+b}=\dfrac{a(x+b)+1-ab}{x+b}=\dfrac{1-ab}{x+b}+a$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=3$이므로

$b=-2$, $a=3$

따라서 $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$이므로

$f(4)=\dfrac{13}{2}$

32 주어진 함수의 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=1$이므로

$y=\dfrac{k}{x-1}+1\,(k>0)$

이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=-k+1 \qquad \therefore k=2$

따라서 $y=\dfrac{2}{x-1}+1=\dfrac{x+1}{x-1}$이므로

$a=1$, $b=1$, $c=-1$

$\therefore abc=-1$

33 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표가 $(2,\ -3)$인 유리함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-2}-3\,(k\neq 0)$

이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1=\dfrac{k}{1-2}-3 \qquad \therefore k=-4$

따라서 $y=\dfrac{-4}{x-2}-3=\dfrac{-3x+2}{x-2}=\dfrac{3x-2}{2-x}$이므로

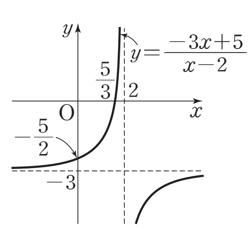
$a=3$, $b=-2$, $c=2$

$\therefore a+b+c=3$

34 $y=\dfrac{-3x+5}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}-3$

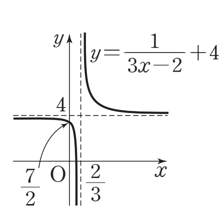
의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1, 3, 4사분면을 지난다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.



35 $y=\dfrac{1}{3x-2}+4=\dfrac{1}{3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)}+4$

ㄷ. $y=\dfrac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{2}{3}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

36 $-\dfrac{3}{x}-1=3x+m$에서

$3x^2+(m+1)x+3=0$

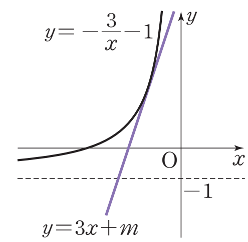
이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(m+1)^2-36=0$

$m^2+2m-35=0$

$(m+7)(m-5)=0$

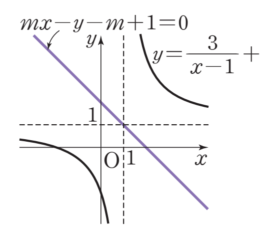
$\therefore m=5\ (\because m>0)$



37 $y=\dfrac{3}{x-1}+1$의 그래프는 점 $(1,\ 1)$에 대하여 대칭이고, 직선 $mx-y-m+1=0$, 즉, $y=m(x-1)+1$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

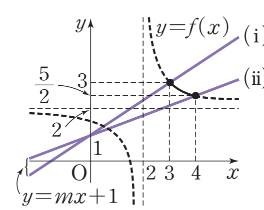
따라서 $y=\dfrac{3}{x-1}+1$의 그래프와 직선 $mx-y-m+1=0$이 만나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$m\leq 0$



38 $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+2$

이고 직선 $y=mx+1$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 이 직선과 $y=f(x)$의 그래프가 $3\leq x\leq 4$에서 만나려면 위의 그림과 같아야 한다.



(i) 직선 $y=mx+1$이 점 $(3,\ 3)$을 지날 때,

$3=3m+1 \qquad \therefore m=\dfrac{2}{3}$

(ii) 직선 $y=mx+1$이 점 $\left(4,\ \dfrac{5}{2}\right)$를 지날 때,

$\dfrac{5}{2}=4m+1 \qquad \therefore m=\dfrac{3}{8}$

(i), (ii)에서 $\dfrac{3}{8}\leq m\leq\dfrac{2}{3}$이므로

$a=\dfrac{3}{8}$, $b=\dfrac{2}{3} \qquad \therefore ab=\dfrac{1}{4}$

39 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$에서

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f(x))$

$$=f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-1}=x$$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$

$=f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

$\vdots$

따라서 $f^2(x)=f^4(x)=\cdots=f^{2n}(x)=x$이므로

$f^{100}(x)=f^{2\times 50}(x)=x$

$\therefore\ f^{100}(3)=3$

40 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$에서

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f(x))$

$=f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1}=\dfrac{x}{2x+1}$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$

$=f\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)=\dfrac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1}+1}=\dfrac{x}{3x+1}$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))$

$=f\left(\dfrac{x}{3x+1}\right)=\dfrac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{x}{3x+1}+1}=\dfrac{x}{4x+1}$

$\vdots$

따라서 $f^n(x)=\dfrac{x}{nx+1}$이므로

$f^{10}(x)=\dfrac{x}{10x+1}$ $\quad\therefore\ f^{10}(2)=\dfrac{2}{21}$

41 주어진 그래프에서 $f(0)=1$, $f(1)=0$이므로

$f^2(1)=(f\circ f^1)(1)=f(f(1))=f(0)=1$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(1)=0$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(0)=1$

$\vdots$

따라서 $f^n(1)=\begin{cases}0\ (n\text{은 홀수})\\1\ (n\text{은 짝수})\end{cases}$이므로

$f^{99}(1)=0$

42 $(f\circ f)(x)=x$에서 $f(x)=f^{-1}(x)$

$y=\dfrac{ax+3}{3-x}$이라 하고 x에 대하여 풀면

$(3-x)y=ax+3$, $(y+a)x=3y-3$

$\therefore\ x=\dfrac{3y-3}{y+a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $f^{-1}(x)=\dfrac{3x-3}{x+a}$

따라서 $\dfrac{ax+3}{3-x}=\dfrac{3x-3}{x+a}$이므로

$a=-3$

43 $(f\circ f^{-1}\circ f^{-1})(1)=((f\circ f^{-1})\circ f^{-1})(1)$

$=f^{-1}(1)$

$f^{-1}(1)=k$(k는 상수)라 하면 $f(k)=1$이므로

$\dfrac{k+1}{2k-1}=1$

$k+1=2k-1$ $\quad\therefore\ k=2$

$\therefore\ (f\circ f^{-1}\circ f^{-1})(1)=f^{-1}(1)=2$

44 $y=\dfrac{2x+5}{x+3}$라 하고 x에 대하여 풀면

$(x+3)y=2x+5$, $(y-2)x=-3y+5$

$\therefore\ x=\dfrac{-3y+5}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$f^{-1}(x)=\dfrac{-3x+5}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}-3$

$y=f^{-1}(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-3$이므로 점 $(2, -3)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $p=2$, $q=-3$이므로

$p-q=5$

45 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$의 그래프가 점 $(3, 5)$를 지나므로

$f(3)=5$에서 $3a+b=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f=f^{-1}$이므로 $f^{-1}(3)=5$에서 $f(5)=3$

$\dfrac{5a+b}{3}=3$ $\quad\therefore\ 5a+b=9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-1$

따라서 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-2}$이므로

$f(1)=-1$

다른 풀이

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$의 그래프가 점 $(3, 5)$를 지나므로

$3a+b=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$y=\dfrac{ax+b}{x-2}$라 하고 x에 대하여 풀면

$(x-2)y=ax+b$, $(y-a)x=2y+b$

$\therefore\ x=\dfrac{2y+b}{y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면

$f^{-1}(x)=\dfrac{2x+b}{x-a}$

$f=f^{-1}$이므로

$\dfrac{ax+b}{x-2}=\dfrac{2x+b}{x-a}$ $\quad\therefore\ a=2$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-1$

따라서 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-2}$이므로

$f(1)=-1$

02 무리함수 89~94쪽

1 -4	**2** ④	**3** ⑤	**4** ②	**5** $-x\sqrt{x}$
6 $\frac{2x+2y}{x-y}$	**7** ③	**8** $2(\sqrt{3}+1)$		**9** $\sqrt{2}$
10 ④	**11** ②	**12** 제4사분면		**13** 2
14 -5	**15** 4	**16** ③	**17** 11	**18** ①
19 ③	**20** $(1, 0)$	**21** 2	**22** -3	
23 제3사분면		**24** ④	**25** ④	**26** ⑤
27 ①	**28** $-1\le k<-\frac{3}{4}$		**29** ③	**30** 27
31 10	**32** 2	**33** -8	**34** ⑤	**35** ②
36 $a=\frac{3}{4}$ 또는 $a>1$				

1 $6x^2-7x-3\ge 0$이어야 하므로

$(3x+1)(2x-3)\ge 0$

$\therefore\ x\le -\frac{1}{3}$ 또는 $x\ge \frac{3}{2}$

따라서 $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{3}{2}$이므로

$3a-2b=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)-2\times\frac{3}{2}=-4$

2 $4-x\ge 0$, $x+2>0$이어야 하므로

$-2<x\le 4$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3, 4의 6개이다.

3 $x-1\ge 0$, $3-x\ge 0$이어야 하므로

$1\le x\le 3$

$\therefore\ \sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{(x+2)^2}=x+2$

4 $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}$

$=\frac{x+1-2\sqrt{x^2-1}+x-1}{x+1-(x-1)}$

$=x-\sqrt{x^2-1}$

5 $\frac{x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$

$=\frac{x(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})-x(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}$

$=\frac{x\sqrt{x+2}-x\sqrt{x}-x\sqrt{x+2}-x\sqrt{x}}{x+2-x}$

$=-x\sqrt{x}$

6 $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\frac{x-2\sqrt{xy}+y+x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}$

$=\frac{2x+2y}{x-y}$

7 $x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=2\sqrt{2}+3$이므로

$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\frac{x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x-1}$

$=\frac{2x}{x-1}$

$=\frac{2(2\sqrt{2}+3)}{2\sqrt{2}+3-1}$

$=\frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}+1}$

$=\frac{(2\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$=\sqrt{2}+1$

8 $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$

$=\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}$

$+\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}$

$=\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x^2-(x^2-1)}+\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x^2-(x^2-1)}$

$=2x$

$=2(\sqrt{3}+1)$

9 $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=x+y-2\sqrt{xy}$ ...... ㉠

$x=\frac{4}{3-\sqrt{5}}=\frac{4(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=3+\sqrt{5}$,

$y=\frac{4}{3+\sqrt{5}}=\frac{4(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=3-\sqrt{5}$

이므로 $x+y=6$, $xy=4$

이를 ㉠에 대입하면

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=6-2\times 2=2$

$\therefore\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{2}$ ($\because\ x>y$)

10 $f(n)=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$이므로

$\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$

$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$\therefore\ \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(48)}$

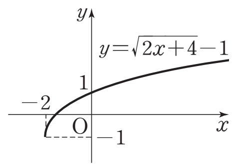
$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})$

$+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})$

$=-\sqrt{1}+\sqrt{49}=6$

11 $y=-\sqrt{3x-9}-2=-\sqrt{3(x-3)}-2$의 그래프는 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 ②와 같다.

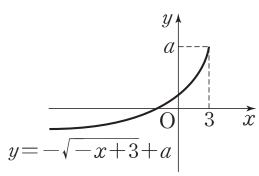
12 $y=\sqrt{2x+4}-1=\sqrt{2(x+2)}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 제4사분면을 지나지 않는다.

13 $y=-\sqrt{-x+3}+a=-\sqrt{-(x-3)}+a$

이 함수의 그래프가 제1, 2, 3사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $x=0$일 때 $y>0$이어야 하므로

$-\sqrt{3}+a>0$ $\quad\therefore a>\sqrt{3}$

따라서 정수 a의 최솟값은 2이다.

14 $y=\sqrt{a(x+1)}+5$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{a(x-b+1)}+5+c$

이 함수의 그래프가 $y=\sqrt{6-3x}=\sqrt{-3(x-2)}$의 그래프와 겹쳐지므로

$a=-3,\ -b+1=-2,\ 5+c=0$

$\therefore b=3,\ c=-5$

$\therefore a+b+c=-5$

15 $y=\sqrt{-x+2}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{-(x-3)+2}-2=\sqrt{-x+5}-2$

이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=\sqrt{x+5}-2$

따라서 $a=1,\ b=5,\ c=-2$이므로

$a+b+c=4$

16 ㄱ. $y=-\sqrt{2x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. $y=\sqrt{3-4x}=\sqrt{-4\left(x-\frac{3}{4}\right)}$의 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{4}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=2\sqrt{1-x}+2=\sqrt{-4(x-1)}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\sqrt{2x-1}-1=\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 보기의 함수에서 그래프가 무리함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

17 $f(x)=\sqrt{2x+a}+7=\sqrt{2\left(x+\frac{a}{2}\right)}+7$은 $x=-\frac{a}{2}$에서 최솟값 7을 가지므로

$-\frac{a}{2}=-2,\ 7=m$

따라서 $a=4,\ m=7$이므로

$a+m=11$

18 $y=-\sqrt{4x+a}+2$는 $-2\le x\le 2$에서 $x=-2$일 때 최댓값 2를 가지므로

$-\sqrt{-8+a}+2=2$

$\sqrt{-8+a}=0$ $\quad\therefore a=8$

따라서 $y=-\sqrt{4x+8}+2$는 $x=2$에서 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은

$-\sqrt{8+8}+2=-2$

19 $y=-\sqrt{4-x}+5$는 $a\le x\le b$에서 $x=b$일 때 최댓값 5를 갖고, $x=a$일 때 최솟값 4를 가지므로

$-\sqrt{4-b}+5=5,\ -\sqrt{4-a}+5=4$

$\therefore a=3,\ b=4$

$\therefore b^2-a^2=4^2-3^2=7$

20 함수 $y=-\sqrt{a-x}+b=-\sqrt{-(x-a)}+b$의 정의역은 $\{x|x\le a\}$, 치역은 $\{y|y\le b\}$이므로

$a=5,\ b=2$

$y=-\sqrt{5-x}+2$에 $y=0$을 대입하면

$\sqrt{5-x}=2,\ 5-x=4$ $\quad\therefore x=1$

따라서 x축과 만나는 점의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.

21 $y=\sqrt{a(x+2)}-1$의 그래프가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=\sqrt{a}-1$ $\quad\therefore a=1$

따라서 $y=\sqrt{x+2}-1$이므로

$a=1,\ b=2,\ c=-1$

$\therefore a+b+c=2$

22 $y=-\sqrt{a(x+4)}+3\,(a>0)$이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=-\sqrt{4a}+3$

$\sqrt{4a}=4 \qquad \therefore\ a=4$

따라서 $y=-\sqrt{4(x+4)}+3$의 그래프가 점 $(5,\ k)$를 지나므로

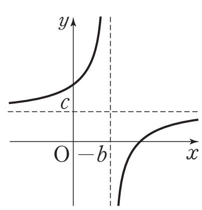
$k=-\sqrt{4(5+4)}+3=-3$

23 $y=\sqrt{a(x+b)}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이므로 주어진 그래프에서

$a<0,\ -b>0,\ c>0$

$y=\dfrac{a}{x+b}+c$의 그래프는

$y=\dfrac{a}{x}\,(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이고, $-b>0,\ c>0$이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 유리함수 $y=\dfrac{a}{x+b}+c$의 그래프가 지나지 않는 사분면은 제3사분면이다.

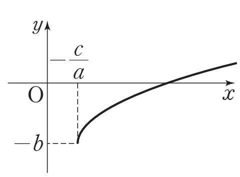
24 $y=\dfrac{bx+c}{x-a}=\dfrac{b(x-a)+ab+c}{x-a}=\dfrac{ab+c}{x-a}+b$

따라서 $y=\dfrac{bx+c}{x-a}$의 그래프는 $y=\dfrac{ab+c}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로 주어진 그래프에서 $a>0,\ b>0,\ ab+c<0$

$ab+c<0$에서 $ab>0$이므로 $c<0$

$y=\sqrt{ax+c}-b=\sqrt{a\left(x+\dfrac{c}{a}\right)}-b$의 그래프는

$y=\sqrt{ax}\,(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{c}{a}$만큼, y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 것이고, $-\dfrac{c}{a}>0,\ -b<0$이므로 $y=\sqrt{ax+c}-b$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

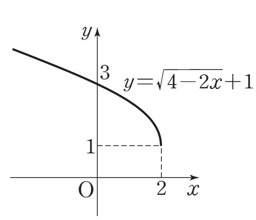


따라서 무리함수 $y=\sqrt{ax+c}-b$의 그래프의 개형은 ④이다.

25 $y=\sqrt{4-2x}+1$

$=\sqrt{-2(x-2)}+1$

④ 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1, 2사분면을 지난다.

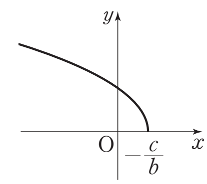


26 $y=a\sqrt{bx+c}=a\sqrt{b\left(x+\dfrac{c}{b}\right)}$

ㄴ. $a>0,\ b<0,\ c>0$이면

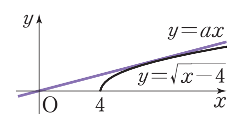
$-\dfrac{c}{b}>0$

따라서 $y=a\sqrt{bx+c}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1, 2사분면을 지난다.



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

27 $ax=\sqrt{x-4}$에서



$a^2x^2=x-4$

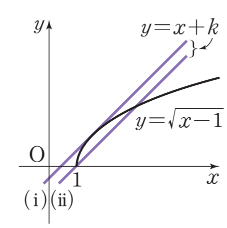
$\therefore\ a^2x^2-x+4=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1-16a^2=0$

$16a^2=1 \qquad \therefore\ a=\dfrac{1}{4}\ (\because\ a>0)$

28 (i) 직선 $y=x+k$와 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프가 접할 때,



$x+k=\sqrt{x-1}$에서

$x^2+2kx+k^2=x-1$

$\therefore\ x^2+(2k-1)x+k^2+1=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2+1)=0$

$4k=-3 \qquad \therefore\ k=-\dfrac{3}{4}$

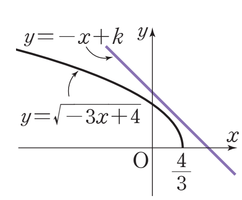
(ii) 직선 $y=x+k$가 점 $(1,\ 0)$을 지날 때,

$0=1+k \qquad \therefore\ k=-1$

(i), (ii)에서 $-1\le k<-\dfrac{3}{4}$

29 $n(A\cap B)=0$이려면

$y=\sqrt{-3x+4}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 만나지 않아야 한다.



$-x+k=\sqrt{-3x+4}$에서

$x^2-2kx+k^2=-3x+4$

$\therefore\ x^2-(2k-3)x+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-3)^2-4(k^2-4)<0$

$12k>25 \qquad \therefore\ k>\dfrac{25}{12}$

따라서 정수 k의 최솟값은 3이다.

30 $f^{-1}(7)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=7$이므로

$\sqrt{k-2}+2=7$

$k-2=25 \quad \therefore k=27$

$\therefore f^{-1}(7)=27$

31 무리함수 $y=\sqrt{x+2}+4$의 치역은 $\{y \mid y \geq 4\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x \mid x \geq 4\}$이다.

$y=\sqrt{x+2}+4$를 x에 대하여 풀면

$y-4=\sqrt{x+2}$

$x+2=(y-4)^2$

$\therefore x=(y-4)^2-2$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=(x-4)^2-2=x^2-8x+14\ (x \geq 4)$

따라서 $a=-8$, $b=14$, $c=4$이므로

$a+b+c=10$

32 $(f \circ g)^{-1}(3)=(g^{-1} \circ f^{-1})(3)=g^{-1}(f^{-1}(3))$

$f^{-1}(3)=a$ (a는 상수)라 하면 $f(a)=3$이므로

$\sqrt{2a-4}+1=3 \qquad \therefore a=4$

$\therefore f^{-1}(3)=4$

$g^{-1}(4)=b$ (b는 상수)라 하면 $g(b)=4$이므로

$\sqrt{b+2}+2=4 \qquad \therefore b=2$

$\therefore g^{-1}(4)=2$

$\therefore (f \circ g)^{-1}(3)=g^{-1}(f^{-1}(3))=g^{-1}(4)=2$

33 $f(x)=\sqrt{ax+b}+1$이라 하자.

$y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(1, 3)$을 지나므로 $f(1)=3$, $f^{-1}(1)=3$

$f(1)=3$에서 $\sqrt{a+b}+1=3$

$\therefore a+b=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f^{-1}(1)=3$에서 $f(3)=1$이므로

$\sqrt{3a+b}+1=1 \qquad \therefore 3a+b=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=6$

$\therefore a-b=-8$

34 함수 $y=\sqrt{2x+8}$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\sqrt{2x+8}=x$

$2x+8=x^2$, $x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=4\ (\because x \geq 0)$

따라서 교점의 좌표는 $(4, 4)$이므로

$a=4$, $b=4$

$\therefore ab=16$

35 함수 $y=\sqrt{x-2}+2$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\sqrt{x-2}+2=x$, $\sqrt{x-2}=x-2$

$x-2=x^2-4x+4$

$x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$

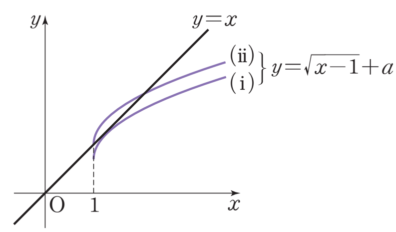
$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(2, 2)$, $(3, 3)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$

36 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 한 점에서 만나려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 한 점에서 만나야 한다.

이때 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 위치 관계는 다음 그림의 (i), (ii)를 기준으로 나누어 생각할 수 있다.



(i) 직선 $y=x$와 $y=\sqrt{x-1}+a$의 그래프가 접할 때,

$x=\sqrt{x-1}+a$에서

$x-a=\sqrt{x-1}$

$x^2-2ax+a^2=x-1$

$\therefore x^2-(2a+1)x+a^2+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2a+1)^2-4(a^2+1)=0$

$4a=3 \qquad \therefore a=\frac{3}{4}$

(ii) $y=\sqrt{x-1}+a$의 그래프가 점 $(1, 1)$을 지날 때,

$a=1$

(i), (ii)에서 상수 a의 값 또는 범위는

$a=\frac{3}{4}$ 또는 $a>1$

MEMO