정답과 해설

수학 Ⅰ

01 지수

8~19쪽

001 답 a^8

$a^3a^5=a^{3+5}=a^8$

002 답 a^5

$a^8\div a^3=a^{8-3}=a^5$

003 답 a^{10}

$(a^5)^2=a^{5\times 2}=a^{10}$

004 답 a^3b^6

$(ab^2)^3=a^3b^{2\times 3}=a^3b^6$

005 답 $\frac{4a^2}{b^2}$

$\left(\frac{2a}{b}\right)^2=\frac{(2a)^2}{b^2}=\frac{2^2a^2}{b^2}=\frac{4a^2}{b^2}$

006 답 $-9a^7b^{12}$

$(3a^2b^3)^2\times(-ab^2)^3=9a^4b^6\times(-a^3b^6)=-9a^7b^{12}$

007 답 $2a^4b$

$(2a^3b)^3\div 4a^5b^2=8a^9b^3\div 4a^5b^2=2a^4b$

008 답 b^{18}

$(a^2b^5)^2\div\left(\frac{a}{b^2}\right)^4=a^4b^{10}\div\frac{a^4}{b^8}=a^4b^{10}\times\frac{b^8}{a^4}=b^{18}$

009 답 $\frac{1}{2}a^9b^2$

$$(4a^3b^2)^2\times\left(\frac{1}{2}a^2b\right)^5\div(ab)^7=16a^6b^4\times\frac{1}{32}a^{10}b^5\div a^7b^7$$
$$=\frac{1}{2}a^9b^2$$

010 답 $\frac{a^{16}}{3b}$

$$\left(\frac{a}{3b}\right)^3\div\left(\frac{1}{3}ab^4\right)^2\times(a^3b^2)^5=\frac{a^3}{27b^3}\div\frac{1}{9}a^2b^8\times a^{15}b^{10}$$
$$=\frac{a^3}{27b^3}\times\frac{9}{a^2b^8}\times a^{15}b^{10}$$
$$=\frac{a^{16}}{3b}$$

011 답 $1,\ 1,\ i,\ i$

012 답 $-2,\ 1\pm\sqrt{3}i$

-8의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=-8$이므로

$x^3+8=0$

$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

013 답 $\pm3,\ \pm3i$

81의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=81$이므로

$x^4-81=0$

$(x^2-9)(x^2+9)=0$

$(x+3)(x-3)(x+3i)(x-3i)=0$

$\therefore\ x=\pm3$ 또는 $x=\pm3i$

014 답 -1

-1의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=-1$이므로

$x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 실수인 것은 -1이다.

015 답 4

64의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=64$이므로

$x^3-64=0$

$(x-4)(x^2+4x+16)=0$

$\therefore\ x=4$ 또는 $x=-2\pm2\sqrt{3}i$

따라서 실수인 것은 4이다.

016 답 $-2,\ 2$

16의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=16$이므로

$x^4-16=0$

$(x^2-4)(x^2+4)=0$

$(x+2)(x-2)(x+2i)(x-2i)=0$

$\therefore\ x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

따라서 실수인 것은 $-2,\ 2$이다.

017 답 $-\sqrt{7},\ \sqrt{7}$

49의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=49$이므로

$x^4-49=0$

$(x^2-7)(x^2+7)=0$

$(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}i)(x-\sqrt{7}i)=0$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{7}$ 또는 $x=\pm\sqrt{7}i$

따라서 실수인 것은 $-\sqrt{7},\ \sqrt{7}$이다.

018 답 ×

양수 a의 n제곱근은 n개이다.

019 답 ×

27의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{27}$이다.

020 답 ○

021 답 ×

8의 세제곱근 중 실수인 것은 2의 1개이다.

022 답 ○

023 답 ×

-9의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.

024 답 5

$\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$

025 답 -3

$\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$

026 답 0.2

$\sqrt[3]{0.008}=\sqrt[3]{0.2^3}=0.2$

027 답 5

$\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=5$

028 답 -3

$-\sqrt[4]{81}=-\sqrt[4]{3^4}=-3$

029 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt[4]{\frac{9}{16}}=\sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

030 답 2

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times 4}=\sqrt[3]{2^3}=2$

031 답 3

$\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3\times 27}=\sqrt[4]{3^4}=3$

032 답 3

$\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{9}}=\sqrt[3]{\frac{243}{9}}=\sqrt[3]{3^3}=3$

033 답 2

$\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\frac{32}{2}}=\sqrt[4]{2^4}=2$

034 답 11

$(\sqrt[7]{11})^7=\sqrt[7]{11^7}=11$

035 답 5

$(\sqrt[6]{25})^3=\sqrt[6]{25^3}=\sqrt[6]{5^6}=5$

036 답 4

$\sqrt{\sqrt{256}}=\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{4^4}=4$

037 답 2

$\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

038 답 49

$\sqrt[5]{7^{10}}=7^2=49$

039 답 125

$\sqrt[3]{5^9}=5^3=125$

040 답 $\sqrt{6}$

$(\sqrt[8]{6})^4=\sqrt[8]{6^4}=\sqrt{6}$

041 답 $\sqrt{2}$

$\sqrt[6]{4\times\sqrt[3]{8}}=\sqrt[6]{4\times\sqrt[3]{2^3}}=\sqrt[6]{4\times 2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$

042 답 81

$\sqrt[15]{3^{20}}\times\sqrt[3]{3^8}=\sqrt[3]{3^4}\times\sqrt[3]{3^8}=\sqrt[3]{3^{12}}=3^4=81$

043 답 6

$$\begin{aligned}\sqrt[12]{6^4}\times\sqrt[5]{\sqrt[3]{36^5}}&=\sqrt[3]{6}\times\sqrt[15]{36^5}=\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{36}\\&=\sqrt[3]{6^3}=6\end{aligned}$$

044 답 3

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{243}\div\sqrt{\sqrt[4]{9}}&=\sqrt[4]{243}\div\sqrt[4]{\sqrt{3^2}}=\sqrt[4]{243}\div\sqrt[4]{3}\\&=\sqrt[4]{3^4}=3\end{aligned}$$

045 답 5

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}\times\sqrt{\frac{\sqrt{625}}{\sqrt[3]{64}}}&=\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt{\frac{\sqrt{25^2}}{\sqrt[3]{4^3}}}=2\times\sqrt{\frac{25}{4}}\\&=2\times\frac{5}{2}=5\end{aligned}$$

046 답 6

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt[4]{256}}\div\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{81}&=\sqrt{\sqrt[4]{2^8}}\times\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\times\sqrt[3]{3^4}\\&=\sqrt{2^2}\times\sqrt[3]{3^3}=2\times 3=6\end{aligned}$$

047 답 a

$\sqrt[7]{a^3}\times\sqrt[7]{a^4}=\sqrt[7]{a^7}=a$

048 답 a^2

$\frac{\sqrt{a^5}}{\sqrt{a}}=\sqrt{a^4}=a^2$

049 답 a^6

$(\sqrt[3]{a^2})^9=\sqrt[3]{a^{18}}=a^6$

050 답 a^3

$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{36}}}=\sqrt[4]{a^{12}}=a^3$

051 답 a^2b^3

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{a^2b^{12}}\times\sqrt[3]{a^5b^3}&=\sqrt[3]{ab^6}\times\sqrt[3]{a^5b^3}\\&=\sqrt[3]{a^6b^9}=a^2b^3\end{aligned}$$

052 답 $\frac{a^2}{b}$

$$\begin{aligned}\sqrt{a^5b^3}\div\sqrt[4]{a^2b^{10}}&=\sqrt{a^5b^3}\div\sqrt{ab^5}\\&=\sqrt{\frac{a^4}{b^2}}=\frac{a^2}{b}\end{aligned}$$

053 답 1

054 답 $\frac{1}{16}$

$2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

055 답 $\frac{1}{5}$

$(\sqrt{5})^{-2}=\frac{1}{(\sqrt{5})^2}=\frac{1}{5}$

056 답 27

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=3^3=27$

057 답 $\frac{16}{81}$

$\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4}=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}$

058 답 $\frac{1}{a^{10}}$

$a^{-6}\times a^{-4}=a^{-6-4}=a^{-10}=\frac{1}{a^{10}}$

059 답 $\frac{1}{a^8}$

$a^{-2}\times a^4\div a^{10}=a^{-2+4-10}=a^{-8}=\frac{1}{a^8}$

060 답 a^2

$a^{11}\times(a^{-3})^3=a^{11}\times a^{-9}=a^{11-9}=a^2$

061 답 $\frac{1}{a^2}$

$$\begin{aligned}(a^2)^{-2}\times a^{-3}\div a^{-5}&=a^{-4}\times a^{-3}\div a^{-5}\\&=a^{-4-3-(-5)}\\&=a^{-2}=\frac{1}{a^2}\end{aligned}$$

062 답 $\frac{1}{a}$

$$\begin{aligned}\frac{(a^3)^4\times(a^{-3})^5}{(a^2)^{-7}\times(a^{-6})^{-2}}&=\frac{a^{12}\times a^{-15}}{a^{-14}\times a^{12}}\\&=\frac{a^{12-15}}{a^{-14+12}}=\frac{a^{-3}}{a^{-2}}\\&=\frac{a^2}{a^3}=\frac{1}{a}\end{aligned}$$

063 답 $3^{\frac{1}{2}}$

064 답 $2^{\frac{1}{3}}$

065 답 $5^{\frac{5}{4}}$

066 답 $2^{-\frac{3}{5}}$

067 답 $\sqrt{2}$

068 답 $\sqrt[5]{9}$

$3^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{3^2}=\sqrt[5]{9}$

069 답 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\begin{aligned}4^{-\frac{3}{4}}&=2^{2\times\left(-\frac{3}{4}\right)}=2^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2^3}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

070 답 $\sqrt{3}$

$\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{8}}=3^{-4\times\left(-\frac{1}{8}\right)}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

071 답 8

$(2^{\frac{5}{6}})^3\times2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{5}{2}}\times2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}=2^3=8$

072 답 2

$4^{\frac{3}{4}}\div4^{\frac{1}{4}}=4^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}=4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2$

073 답 7

$$\begin{aligned}(7^{\frac{5}{4}})^2\times\sqrt{7}\div(7^{\frac{1}{3}})^6&=7^{\frac{5}{2}}\times7^{\frac{1}{2}}\div7^2\\&=7^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}-2}=7\end{aligned}$$

074 답 4

$$\begin{aligned}16^{-\frac{3}{4}}\times64^{\frac{5}{6}}&=(2^4)^{-\frac{3}{4}}\times(2^6)^{\frac{5}{6}}=2^{-3}\times2^5\\&=2^{-3+5}=2^2=4\end{aligned}$$

075 답 9

$$\begin{aligned}9^{\frac{9}{8}}\div3^{\frac{1}{2}}\times27^{\frac{1}{12}}&=(3^2)^{\frac{9}{8}}\div3^{\frac{1}{2}}\times(3^3)^{\frac{1}{12}}=3^{\frac{9}{4}}\div3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{4}}\\&=3^{\frac{9}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=3^2=9\end{aligned}$$

076 답 $\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned}\left\{\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{5}{2}}\right\}^{-\frac{1}{5}}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}&=\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{1}{2}}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^3\right\}^{-\frac{1}{2}}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{3}{2}}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\\&=\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

077 답 a^2

$a^{\frac{3}{2}}\div a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}=a^2$

078 답 a

$a^{\frac{8}{3}}\div a^{\frac{1}{6}}\times a^{-\frac{3}{2}}=a^{\frac{8}{3}-\frac{1}{6}-\frac{3}{2}}=a$

079 답 $a^{\frac{13}{12}}$

$$(\sqrt{a^3}\times\sqrt[3]{a^2})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$$
$$=(a^{\frac{13}{6}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{13}{12}}$$

080 답 a^2

$$\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt{a^5}\div\sqrt[6]{a^7}=a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{5}{2}}\div a^{\frac{7}{6}}$$
$$=a^{\frac{2}{3}+\frac{5}{2}-\frac{7}{6}}=a^2$$

081 답 $a^{\frac{1}{4}}$

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt[4]{a}}=(\sqrt{a}\sqrt[4]{a})^{\frac{1}{3}}=(a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}=(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{4}}$$

082 답 $a^{\frac{7}{8}}$

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=(a\sqrt{a\sqrt{a}})^{\frac{1}{2}}=\{a(a\sqrt{a})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=\{a(a\times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}=\{a(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=(a\times a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{8}}$$

083 답 $a^{\frac{7}{4}}$

$$\sqrt{a\sqrt{a^3\sqrt{a^4}}}=(a\sqrt{a^3\sqrt{a^4}})^{\frac{1}{2}}=\{a(a^3\sqrt{a^4})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=\{a(a^3\times a^2)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}=\{a(a^5)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=(a\times a^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{4}}$$

084 답 $a^{\frac{7}{12}}$

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^6}}}=(\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^6}})^{\frac{1}{2}}=\{(a^2\sqrt[4]{a^6})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=\{(a^2\times a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}}=\{(a^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{12}}$$

085 답 ab

$$(a^3b^2)^{\frac{1}{6}}\times(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}})^2=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}$$
$$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=ab$$

086 답 $a^{\frac{5}{12}}b^{\frac{17}{6}}$

$$\sqrt[3]{a^2b}\div\sqrt[4]{a^3b^2}\times\sqrt{ab^6}=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\div a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}b^3$$
$$=a^{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+3}$$
$$=a^{\frac{5}{12}}b^{\frac{17}{6}}$$

087 답 $3^{2\sqrt{2}}$

$$3^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times3^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=3^{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}}=3^{2\sqrt{2}}$$

088 답 125

$$(25^{\sqrt{3}})^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=25^{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=25^{\frac{3}{2}}=(5^2)^{\frac{3}{2}}=5^3=125$$

089 답 $6^{\sqrt{7}}$

$$2^{\sqrt{7}}\times3^{\sqrt{7}}=(2\times3)^{\sqrt{7}}=6^{\sqrt{7}}$$

090 답 4

$$2^{\sqrt{3}+1}\div2^{\sqrt{3}-1}=2^{\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)}=2^2=4$$

091 답 243

$$(3^{\sqrt{20}}\div3^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}=(3^{2\sqrt{5}}\div3^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}=(3^{2\sqrt{5}-\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}$$
$$=(3^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}=3^{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=3^5=243$$

092 답 144

$$(2^{\sqrt{8}}\times3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=2^{\sqrt{8}\times\sqrt{2}}\times3^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$
$$=2^4\times3^2=144$$

093 답 $a^{2\sqrt{2}}$

$$a^{\sqrt{2}}\div a^{\sqrt{8}}\times a^{\sqrt{18}}=a^{\sqrt{2}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}}=a^{2\sqrt{2}}$$

094 답 $a^{4\sqrt{2}}$

$$a^{\frac{\sqrt{2}}{3}}\times a^{\frac{2\sqrt{2}}{3}}\div a^{-3\sqrt{2}}=a^{\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}-(-3\sqrt{2})}=a^{4\sqrt{2}}$$

095 답 $a^{\sqrt{7}}$

$$(a^{\frac{\sqrt{7}}{2}})^6\div a^{\sqrt{28}}=a^{\frac{\sqrt{7}}{2}\times6-2\sqrt{7}}=a^{\sqrt{7}}$$

096 답 a^6b^9

$$(a^{\sqrt{12}}\times b^{\sqrt{27}})^{\sqrt{3}}=a^{\sqrt{12}\times\sqrt{3}}\times b^{\sqrt{27}\times\sqrt{3}}=a^6b^9$$

097 답 ab^3

$$(a^{3\sqrt{6}}b^{2\sqrt{6}})^{\frac{1}{\sqrt{6}}}\times(a^{2\sqrt{6}}b^{-\sqrt{6}})^{-\frac{1}{\sqrt{6}}}=a^3b^2\times a^{-2}b=ab^3$$

098 답 a^{10}

$$(a^{\sqrt{2}})^{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}\div(a^3)^{2-\sqrt{5}}\times(a^{\sqrt{5}})^{\sqrt{20}-1}=a^{6-2\sqrt{5}}\div a^{6-3\sqrt{5}}\times a^{10-\sqrt{5}}$$
$$=a^{6-2\sqrt{5}-(6-3\sqrt{5})+10-\sqrt{5}}$$
$$=a^{10}$$

099 답 $a-a^{-1}$

$$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})=(a^{\frac{1}{2}})^2-(a^{-\frac{1}{2}})^2=a-a^{-1}$$

100 답 4

$$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2$$
$$=(a^{\frac{1}{2}})^2+2a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}+(a^{-\frac{1}{2}})^2-\{(a^{\frac{1}{2}})^2-2a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}+(a^{-\frac{1}{2}})^2\}$$
$$=2+2=4$$

101 답 $a+b$

$$(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=(a^{\frac{1}{3}})^3+(b^{\frac{1}{3}})^3=a+b$$

102 답 7

$$a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}})^2+(a^{-\frac{1}{2}})^2$$
$$=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2$$
$$=3^2-2=7$$

103 답 $3\sqrt{5}$

$$(a-a^{-1})^2=(a+a^{-1})^2-4$$
$$=7^2-4=45$$
$$\therefore a-a^{-1}=3\sqrt{5}\ (\because a>1)$$

104 답 18

$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}})^3+(a^{-\frac{1}{2}})^3$

$=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3-3(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})$

$=3^3-3\times3=18$

105 답 $2x$, 2, $\frac{1}{3}$

106 답 $\frac{9}{2}$

분모, 분자에 a^{3x}을 곱하면

$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{a^{6x}+1}{a^{4x}-a^{2x}}=\dfrac{(a^{2x})^3+1}{(a^{2x})^2-a^{2x}}$

$=\dfrac{2^3+1}{2^2-2}=\dfrac{9}{2}$

107 답 4

분모, 분자에 a^{5x}을 곱하면

$\dfrac{a^{5x}+a^{-x}}{a^x+a^{-5x}}=\dfrac{a^{10x}+a^{4x}}{a^{6x}+1}=\dfrac{(a^{2x})^5+(a^{2x})^2}{(a^{2x})^3+1}$

$=\dfrac{2^5+2^2}{2^3+1}=\dfrac{36}{9}=4$

108 답 $\frac{63}{20}$

분모, 분자에 a^{7x}을 곱하면

$\dfrac{a^{5x}-a^{-7x}}{a^x+a^{-3x}}=\dfrac{a^{12x}-1}{a^{8x}+a^{4x}}=\dfrac{(a^{2x})^6-1}{(a^{2x})^4+(a^{2x})^2}$

$=\dfrac{2^6-1}{2^4+2^2}=\dfrac{63}{20}$

109 답 2

$\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}=3$의 좌변의 분모, 분자에 2^x을 곱하면

$\dfrac{2^{2x}+1}{2^{2x}-1}=3$, $2^{2x}+1=3(2^{2x}-1)$

$2^{2x}+1=3\times2^{2x}-3$, $2\times2^{2x}=4$

$\therefore\ 2^{2x}=2$

110 답 $\frac{5}{2}$

$2^{2x}=2$이므로

$4^x+4^{-x}=2^{2x}+2^{-2x}=2^{2x}+\dfrac{1}{2^{2x}}$

$=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

111 답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$2^{2x}=2$에서 $2^x=\sqrt{2}$ ($\because\ 2^x>0$)

$\therefore\ 2^x+2^{-x}=2^x+\dfrac{1}{2^x}=\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

112 답 2

$\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\dfrac{1}{3}$의 좌변의 분모, 분자에 3^x을 곱하면

$\dfrac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1}=\dfrac{1}{3}$, $3(3^{2x}-1)=3^{2x}+1$

$3\times3^{2x}-3=3^{2x}+1$, $2\times3^{2x}=4$

$\therefore\ 3^{2x}=2$

113 답 $\frac{3}{2}$

$3^{2x}=2$이므로

$9^x-9^{-x}=3^{2x}-3^{-2x}=3^{2x}-\dfrac{1}{3^{2x}}$

$=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

114 답 $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

$3^{2x}=2$에서 $3^x=\sqrt{2}$ ($\because\ 3^x>0$)

$\therefore\ 27^x+27^{-x}=3^{3x}+3^{-3x}=(3^x)^3+(3^x)^{-3}$

$=(3^x)^3+\dfrac{1}{(3^x)^3}=(\sqrt{2})^3+\dfrac{1}{(\sqrt{2})^3}$

$=2\sqrt{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$

115 답 6, <, <

116 답 $\sqrt[4]{3}>\sqrt[6]{5}$

$\sqrt[4]{3}=3^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[6]{5}=5^{\frac{1}{6}}$이므로 지수의 분모를 4와 6의 최소공배수인 12로 통분하면

$\sqrt[4]{3}=3^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{12}}=(3^3)^{\frac{1}{12}}=27^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[6]{5}=5^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{2}{12}}=(5^2)^{\frac{1}{12}}=25^{\frac{1}{12}}$

이때 $27>25$이므로 $27^{\frac{1}{12}}>25^{\frac{1}{12}}$

$\therefore\ \sqrt[4]{3}>\sqrt[6]{5}$

117 답 $\sqrt{\sqrt{2}}<\sqrt[4]{\sqrt{6}}$

$\sqrt{\sqrt{2}}=2^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[4]{\sqrt{6}}=6^{\frac{1}{8}}$이므로 지수의 분모를 4와 8의 최소공배수인 8로 통분하면

$\sqrt{\sqrt{2}}=2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{2}{8}}=(2^2)^{\frac{1}{8}}=4^{\frac{1}{8}}$

이때 $4<6$이므로 $4^{\frac{1}{8}}<6^{\frac{1}{8}}$

$\therefore\ \sqrt{\sqrt{2}}<\sqrt[4]{\sqrt{6}}$

118 답 $\sqrt[6]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}}$이므로 지수의 분모를 2, 3, 6의 최소공배수인 6으로 통분하면

$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{6}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}}$

$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{6}}=(3^2)^{\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{6}}$

이때 $6<8<9$이므로 $6^{\frac{1}{6}}<8^{\frac{1}{6}}<9^{\frac{1}{6}}$

$\therefore\ \sqrt[6]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

119 답 $\sqrt[8]{10}<\sqrt{2}<\sqrt[4]{5}$

$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{5}=5^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[8]{10}=10^{\frac{1}{8}}$이므로 지수의 분모를 2, 4, 8의 최소공배수인 8로 통분하면

$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{4}{8}}=(2^4)^{\frac{1}{8}}=16^{\frac{1}{8}}$

$\sqrt[4]{5}=5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{2}{8}}=(5^2)^{\frac{1}{8}}=25^{\frac{1}{8}}$

이때 $10<16<25$이므로 $10^{\frac{1}{8}}<16^{\frac{1}{8}}<25^{\frac{1}{8}}$

$\therefore \sqrt[8]{10}<\sqrt{2}<\sqrt[4]{5}$

120 답 $\sqrt[4]{6}<\sqrt[3]{4}<\sqrt{3}$

$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{6}=6^{\frac{1}{4}}$이므로 지수의 분모를 2, 3, 4의 최소공배수인 12로 통분하면

$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{6}{12}}=(3^6)^{\frac{1}{12}}=729^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{4}{12}}=(4^4)^{\frac{1}{12}}=256^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[4]{6}=6^{\frac{1}{4}}=6^{\frac{3}{12}}=(6^3)^{\frac{1}{12}}=216^{\frac{1}{12}}$

이때 $216<256<729$이므로 $216^{\frac{1}{12}}<256^{\frac{1}{12}}<729^{\frac{1}{12}}$

$\therefore \sqrt[4]{6}<\sqrt[3]{4}<\sqrt{3}$

연산 유형 최종 점검하기

20~21쪽

1 ⑤	**2** ③	**3** 11	**4** ①	**5** ③	**6** ③
7 ③	**8** x^2-x^{-2}		**9** ④	**10** ①	**11** ②
12 ⑤					

1 ① 125의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{125}$이다.

② 16의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{16}$, $-\sqrt[4]{16}$이다.

③ -8의 세제곱근 중 실수인 것은 -2이다.

④ n이 짝수일 때, 3의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{3}$, $-\sqrt[n]{3}$이다.

⑤ n이 홀수일 때, 2의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{2}$의 한 개이다.

2 ③ $(\sqrt[6]{3})^3=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt{3}$

3 $\sqrt[5]{a^2}\times\sqrt[3]{a^4}=\sqrt[15]{a^6}\times\sqrt[15]{a^{20}}=\sqrt[15]{a^{26}}$

따라서 $m=15$, $n=26$이므로

$n-m=11$

4 $\left(\dfrac{a^2}{b^{-3}}\right)^2\div\left(-\dfrac{a}{b^2}\right)^{-4}\times\left(\dfrac{a^3}{b^{-2}}\right)^3=\dfrac{a^4}{b^{-6}}\div\dfrac{b^8}{a^4}\times\dfrac{a^9}{b^{-6}}$

$=\dfrac{a^4}{b^{-6}}\times\dfrac{a^4}{b^8}\times\dfrac{a^9}{b^{-6}}$

$=\dfrac{a^{4+4+9}}{b^{-6+8-6}}=\dfrac{a^{17}}{b^{-4}}$

따라서 $m=17$, $n=-4$이므로

$m+n=13$

5 $\left\{\left(\dfrac{64}{27}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{1}{3}}\times\sqrt[4]{\dfrac{4}{3}}=\left(\dfrac{64}{27}\right)^{-\frac{1}{4}}\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$

$=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-\frac{3}{4}}\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$

$=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6 $3^{\sqrt{5}+2}\div3^{\sqrt{5}-2}=3^{\sqrt{5}+2-(\sqrt{5}-2)}$

$=3^4=81$

7 $(2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}})^2-(2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{2}}-2^{-\frac{1}{2}})$

$=2+2+2^{-1}-(2-2^{-1})$

$=2+2+\dfrac{1}{2}-\left(2-\dfrac{1}{2}\right)$

$=3$

8 $(x^{\frac{1}{8}}-x^{-\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1})$

$=(x^{\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1})$

$=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1})$

$=(x-x^{-1})(x+x^{-1})$

$=x^2-x^{-2}$

9 $a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}})^2+(a^{-\frac{1}{2}})^2$

$=(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2+2$

$=3^2+2=11$

10 분모, 분자에 a^{3x}을 곱하면

$\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^{3x}+a^{-3x}}=\dfrac{a^{4x}+a^{2x}}{a^{6x}+1}=\dfrac{(a^{2x})^2+a^{2x}}{(a^{2x})^3+1}$

$=\dfrac{3^2+3}{3^3+1}=\dfrac{12}{28}=\dfrac{3}{7}$

11 $\dfrac{5^x+5^{-x}}{5^x-5^{-x}}=2$의 좌변의 분모, 분자에 5^x을 곱하면

$\dfrac{5^{2x}+1}{5^{2x}-1}=2$, $5^{2x}+1=2(5^{2x}-1)$

$5^{2x}+1=2\times5^{2x}-2$ $\quad\therefore 5^{2x}=3$

$\therefore 25^x+25^{-x}=5^{2x}+5^{-2x}$

$=5^{2x}+\dfrac{1}{5^{2x}}$

$=3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}$

12 $A=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$, $B=\sqrt[6]{5}=5^{\frac{1}{6}}$, $C=\sqrt[12]{10}=10^{\frac{1}{12}}$이므로 지수의 분모를 3, 6, 12의 최소공배수인 12로 통분하면

$A=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{4}{12}}=(3^4)^{\frac{1}{12}}=81^{\frac{1}{12}}$

$B=\sqrt[6]{5}=5^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{2}{12}}=(5^2)^{\frac{1}{12}}=25^{\frac{1}{12}}$

이때 $10<25<81$이므로 $10^{\frac{1}{12}}<25^{\frac{1}{12}}<81^{\frac{1}{12}}$

$\therefore C<B<A$

02 로그

24~35쪽

001 답 $3=\log_2 8$

002 답 $4=\log_3 81$

003 답 $-2=\log_5 \frac{1}{25}$

004 답 $\frac{1}{2}=\log_6 \sqrt{6}$

005 답 $-4=\log_{\frac{1}{2}} 16$

006 답 $2^5=32$

007 답 $7^2=49$

008 답 $3^{-3}=\frac{1}{27}$

009 답 $11^{\frac{1}{2}}=\sqrt{11}$

010 답 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$

011 답 27

$\log_3 x=3$에서

$x=3^3=27$

012 답 $\frac{1}{32}$

$\log_2 x=-5$에서

$x=2^{-5}=\frac{1}{32}$

013 답 2

$\log_4 16=x$에서

$4^x=16=4^2 \qquad \therefore x=2$

014 답 -3

$\log_5 \frac{1}{125}=x$에서

$5^x=\frac{1}{125}=5^{-3} \qquad \therefore x=-3$

015 답 -3

$\log_{\frac{1}{2}} 8=x$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=8,\ 2^{-x}=2^3 \qquad \therefore x=-3$

016 답 8

$\log_x 64=2$에서

$x^2=64=8^2 \qquad \therefore x=8$

017 답 10

$\log_x \frac{1}{10000}=-4$에서

$x^{-4}=\frac{1}{10000}=10^{-4} \qquad \therefore x=10$

018 답 81

$\log_2(\log_3 x)=2$에서

$\log_3 x=2^2=4 \qquad \therefore x=3^4=81$

019 답 $x>-2$

진수의 조건에서 $x+2>0 \qquad \therefore x>-2$

020 답 $x<1$ 또는 $x>2$

진수의 조건에서 $x^2-3x+2>0$

$(x-1)(x-2)>0 \qquad \therefore x<1$ 또는 $x>2$

021 답 $1<x<2$ 또는 $x>2$

밑의 조건에서 $x-1>0,\ x-1\neq1$

$\therefore 1<x<2$ 또는 $x>2$

022 답 $5<x<6$ 또는 $6<x<7$

밑의 조건에서 $7-x>0,\ 7-x\neq1$

$\therefore x<6$ 또는 $6<x<7$ …… ㉠

진수의 조건에서 $x-5>0 \qquad \therefore x>5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $5<x<6$ 또는 $6<x<7$

023 답 $x>3$

밑의 조건에서 $x>0,\ x\neq1$

$\therefore 0<x<1$ 또는 $x>1$ …… ㉠

진수의 조건에서 $x^2+x-12>0$

$(x+4)(x-3)>0 \qquad \therefore x<-4$ 또는 $x>3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x>3$

024 답 $1<x<3$

밑의 조건에서 $x+2>0,\ x+2\neq1$

$\therefore -2<x<-1$ 또는 $x>-1$ …… ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+4x-3>0$

$x^2-4x+3<0,\ (x-1)(x-3)<0$

$\therefore 1<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1<x<3$

025 답 0

026 답 1

027 답 2

$\log_3 3^2=2\log_3 3=2$

028 답 -4

$\log_2 \frac{1}{16}=\log_2 2^{-4}=-4\log_2 2=-4$

029 답 $\frac{2}{3}$

$\log_7 \sqrt[3]{49}=\log_7 7^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\log_7 7=\frac{2}{3}$

030 답 1

$2\log_3 \sqrt{3}=\log_3 (\sqrt{3})^2=\log_3 3=1$

031 답 1

$\log_{20} 4+\log_{20} 5=\log_{20}(4\times5)=\log_{20} 20=1$

032 답 2

$\log_6 4+\log_6 9=\log_6(4\times9)$
$=\log_6 36=\log_6 6^2=2$

033 답 3

$\log_3 108+\log_3 \frac{1}{4}=\log_3\left(108\times\frac{1}{4}\right)$
$=\log_3 27=\log_3 3^3=3$

034 답 3

$\log_2 \frac{4}{7}+2\log_2\sqrt{14}=\log_2\frac{4}{7}+\log_2 14$
$=\log_2\left(\frac{4}{7}\times14\right)$
$=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

035 답 1

$\log_5 100-\log_5 20=\log_5\frac{100}{20}=\log_5 5=1$

036 답 2

$\log_3 36-\log_3 4=\log_3\frac{36}{4}=\log_3 9$
$=\log_3 3^2=2$

037 답 2

$\log_4\frac{1}{2}-\log_4\frac{1}{32}=\log_4\frac{32}{2}=\log_4 16$
$=\log_4 4^2=2$

038 답 $\frac{1}{3}$

$\log_2\sqrt[3]{12}-\frac{1}{3}\log_2 6=\log_2 12^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\log_2 6$
$=\frac{1}{3}\log_2 12-\frac{1}{3}\log_2 6$
$=\frac{1}{3}\log_2\frac{12}{6}$
$=\frac{1}{3}\log_2 2=\frac{1}{3}$

039 답 1

$\log_3 12+\log_3 2-\log_3 8=\log_3\frac{12\times2}{8}$
$=\log_3 3=1$

040 답 2

$\log_7 3-\log_7\frac{6}{7}+\log_7 14=\log_7\left(3\times\frac{7}{6}\times14\right)$
$=\log_7 7^2=2$

041 답 $3a+2b$

$\log_{10} 72=\log_{10}(2^3\times3^2)$
$=\log_{10} 2^3+\log_{10} 3^2$
$=3\log_{10} 2+2\log_{10} 3$
$=3a+2b$

042 답 $2b-4a$

$\log_{10}\frac{9}{16}=\log_{10} 9-\log_{10} 16$
$=\log_{10} 3^2-\log_{10} 2^4$
$=2\log_{10} 3-4\log_{10} 2$
$=2b-4a$

043 답 $a+b+1$

$\log_{10} 60=\log_{10}(2\times3\times10)$
$=\log_{10} 2+\log_{10} 3+\log_{10} 10$
$=a+b+1$

044 답 $1-a$

$\log_{10} 5=\log_{10}\frac{10}{2}$
$=\log_{10} 10-\log_{10} 2$
$=1-a$

045 답 $3a+b-4$

$\log_{10} 0.0024=\log_{10}\frac{2^3\times3}{10^4}$
$=\log_{10} 2^3+\log_{10} 3-\log_{10} 10^4$
$=3\log_{10} 2+\log_{10} 3-4\log_{10} 10$
$=3a+b-4$

046 답 $\frac{-a+b+1}{5}$

$\log_{10}\sqrt[5]{15}=\log_{10} 15^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}\log_{10}\frac{30}{2}$
$=\frac{1}{5}\log_{10}\frac{3\times10}{2}$
$=\frac{1}{5}(\log_{10} 3+\log_{10} 10-\log_{10} 2)$
$=\frac{-a+b+1}{5}$

047 답 1

$\log_2 3\times\log_3 2=\log_2 3\times\frac{1}{\log_2 3}=1$

048 답 2

$\log_5 4\times\log_2 5=\log_5 2^2\times\log_2 5$
$=2\log_5 2\times\frac{1}{\log_5 2}=2$

049 답 $\frac{1}{2}$

$$\log_7 3\times\log_3\sqrt{7}=\log_7 3\times\log_3 7^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{\log_3 7}\times\frac{1}{2}\log_3 7=\frac{1}{2}$$

050 답 $\frac{1}{2}$

$$\log_8 27\times\log_9 2=\frac{\log_{10} 27}{\log_{10} 8}\times\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 9}$$
$$=\frac{\log_{10} 3^3}{\log_{10} 2^3}\times\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3^2}$$
$$=\frac{3\log_{10} 3}{3\log_{10} 2}\times\frac{\log_{10} 2}{2\log_{10} 3}=\frac{1}{2}$$

051 답 1

$$\log_4 3\times\log_3 6\times\log_6 4=\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 4}\times\frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 3}\times\frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 6}=1$$

052 답 $\frac{2}{3}$

$$\log_8 5\times\log_{25} 7\times\log_7 16=\frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 8}\times\frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 25}\times\frac{\log_{10} 16}{\log_{10} 7}$$
$$=\frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2^3}\times\frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 5^2}\times\frac{\log_{10} 2^4}{\log_{10} 7}$$
$$=\frac{\log_{10} 5}{3\log_{10} 2}\times\frac{\log_{10} 7}{2\log_{10} 5}\times\frac{4\log_{10} 2}{\log_{10} 7}$$
$$=\frac{2}{3}$$

053 답 2

$$\log_9 3+\frac{1}{\log_{27} 9}=\log_9 3+\log_9 27$$
$$=\log_9 (3\times 27)=\log_9 81$$
$$=\log_9 9^2=2$$

054 답 3

$$\log_2 24-\frac{1}{\log_3 2}=\log_2 24-\log_2 3$$
$$=\log_2\frac{24}{3}=\log_2 8$$
$$=\log_2 2^3=3$$

055 답 1

$$\log_5\sqrt{3}+\frac{1}{\log_{25} 5}-\frac{1}{\log_{5\sqrt{3}} 5}=\log_5\sqrt{3}+\log_5 25-\log_5 5\sqrt{3}$$
$$=\log_5\frac{\sqrt{3}\times 25}{5\sqrt{3}}$$
$$=\log_5 5=1$$

056 답 2

$$(\log_2 15-\log_2 5)(\log_3 24-\log_3 6)=\log_2\frac{15}{5}\times\log_3\frac{24}{6}$$
$$=\log_2 3\times\log_3 4$$
$$=\log_2 3\times\log_3 2^2$$
$$=\frac{1}{\log_3 2}\times 2\log_3 2=2$$

057 답 1

$$\log_3(\log_3 2)+\log_3(\log_2 27)=\log_3(\log_3 2\times\log_2 27)$$
$$=\log_3(\log_3 2\times\log_2 3^3)$$
$$=\log_3\left(\frac{1}{\log_2 3}\times 3\log_2 3\right)$$
$$=\log_3 3=1$$

058 답 $\frac{b}{a}$

$$\log_2 3=\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}=\frac{b}{a}$$

059 답 $\frac{3a}{b}$

$$\log_3 8=\frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 3}=\frac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 3}$$
$$=\frac{3\log_{10} 2}{\log_{10} 3}=\frac{3a}{b}$$

060 답 $\frac{a}{2a+b}$

$$\log_{12} 2=\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 12}=\frac{\log_{10} 2}{\log_{10}(2^2\times 3)}$$
$$=\frac{\log_{10} 2}{2\log_{10} 2+\log_{10} 3}$$
$$=\frac{a}{2a+b}$$

061 답 $\frac{3a+b}{a+b}$

$$\log_6 24=\frac{\log_{10} 24}{\log_{10} 6}=\frac{\log_{10}(2^3\times 3)}{\log_{10}(2\times 3)}$$
$$=\frac{3\log_{10} 2+\log_{10} 3}{\log_{10} 2+\log_{10} 3}$$
$$=\frac{3a+b}{a+b}$$

062 답 $\frac{a+3b}{2b}$

$$\log_3\sqrt{54}=\frac{1}{2}\log_3 54=\frac{1}{2}\times\frac{\log_{10} 54}{\log_{10} 3}$$
$$=\frac{\log_{10}(2\times 3^3)}{2\log_{10} 3}$$
$$=\frac{\log_{10} 2+3\log_{10} 3}{2\log_{10} 3}$$
$$=\frac{a+3b}{2b}$$

063 답 $\frac{a+b}{1-a}$

$$\log_5 6=\frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 5}=\frac{\log_{10}(2\times 3)}{\log_{10}\frac{10}{2}}$$
$$=\frac{\log_{10} 2+\log_{10} 3}{\log_{10} 10-\log_{10} 2}$$
$$=\frac{a+b}{1-a}$$

064 답 $\dfrac{a+2b}{a}$

$3^a=x$, $3^b=y$, $3^c=z$에서

$\log_3 x=a$, $\log_3 y=b$, $\log_3 z=c$

$\therefore \log_x xy^2=\dfrac{\log_3 xy^2}{\log_3 x}=\dfrac{\log_3 x+2\log_3 y}{\log_3 x}$

$=\dfrac{a+2b}{a}$

065 답 $\dfrac{2b+c}{a+b}$

$\log_{xy} y^2z=\dfrac{\log_3 y^2z}{\log_3 xy}=\dfrac{2\log_3 y+\log_3 z}{\log_3 x+\log_3 y}$

$=\dfrac{2b+c}{a+b}$

066 답 $\dfrac{3a}{a+b+c}$

$\log_{xyz} x^3=\dfrac{\log_3 x^3}{\log_3 xyz}$

$=\dfrac{3\log_3 x}{\log_3 x+\log_3 y+\log_3 z}$

$=\dfrac{3a}{a+b+c}$

067 답 $\dfrac{a-3b+2c}{c}$

$\log_z \dfrac{xz^2}{y^3}=\dfrac{\log_3 \dfrac{xz^2}{y^3}}{\log_3 z}$

$=\dfrac{\log_3 x+2\log_3 z-3\log_3 y}{\log_3 z}$

$=\dfrac{a-3b+2c}{c}$

068 답 $\dfrac{3b+4c}{2b+2c}$

$\log_{yz}\sqrt{y^3z^4}=\dfrac{1}{2}\log_{yz} y^3z^4=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\log_3 y^3z^4}{\log_3 yz}$

$=\dfrac{3\log_3 y+4\log_3 z}{2\log_3 y+2\log_3 z}$

$=\dfrac{3b+4c}{2b+2c}$

069 답 $\dfrac{2a-c}{6a+3b}$

$\log_{x^2y}\dfrac{x}{\sqrt[3]{xz}}=\dfrac{\log_3 \dfrac{x}{\sqrt[3]{xz}}}{\log_3 x^2y}$

$=\dfrac{\log_3 x-\dfrac{1}{3}(\log_3 x+\log_3 z)}{2\log_3 x+\log_3 y}$

$=\dfrac{\dfrac{2}{3}\log_3 x-\dfrac{1}{3}\log_3 z}{2\log_3 x+\log_3 y}$

$=\dfrac{2\log_3 x-\log_3 z}{6\log_3 x+3\log_3 y}$

$=\dfrac{2a-c}{6a+3b}$

070 답 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 1

071 답 2

$4^x=12$에서 $x=\log_4 12$

$36^y=12$에서 $y=\log_{36} 12$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\log_4 12}+\dfrac{1}{\log_{36} 12}$

$=\log_{12} 4+\log_{12} 36$

$=\log_{12} 144$

$=\log_{12} 12^2=2$

072 답 3

$40^x=2$에서 $x=\log_{40} 2$

$5^y=2$에서 $y=\log_5 2$

$\therefore \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\log_{40} 2}-\dfrac{1}{\log_5 2}$

$=\log_2 40-\log_2 5$

$=\log_2 8$

$=\log_2 2^3=3$

073 답 2

$100^x=5$에서 $x=\log_{100} 5$

$4^y=5$에서 $y=\log_4 5$

$\therefore \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\log_{100} 5}-\dfrac{1}{\log_4 5}$

$=\log_5 100-\log_5 4$

$=\log_5 25$

$=\log_5 5^2=2$

074 답 1

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$

$\therefore \log_2(\alpha^{-1}+\beta^{-1})=\log_2\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)$

$=\log_2\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=\log_2\dfrac{4}{2}$

$=\log_2 2=1$

075 답 2

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=16$, $\alpha\beta=4$

$\therefore \log_2(\alpha^{-1}+\beta^{-1})=\log_2\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)$

$=\log_2\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=\log_2\dfrac{16}{4}$

$=\log_2 4$

$=\log_2 2^2=2$

076 답 **10**

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=6$, $\log_2 a\times\log_2 b=3$

$$\therefore \log_a b+\log_b a=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{\log_2 b}$$
$$=\frac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\times\log_2 b}$$
$$=\frac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\times\log_2 b}{\log_2 a\times\log_2 b}$$
$$=\frac{6^2-2\times3}{3}=10$$

077 답 **14**

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=4$, $\log_2 a\times\log_2 b=1$

$$\therefore \log_a b+\log_b a=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{\log_2 b}$$
$$=\frac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\times\log_2 b}$$
$$=\frac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\times\log_2 b}{\log_2 a\times\log_2 b}$$
$$=\frac{4^2-2\times1}{1}=14$$

078 답 **2**

$$\log_{5^2} 5^4=\frac{4}{2}\log_5 5=2$$

079 답 $\mathbf{\frac{8}{3}}$

$$\log_8 256=\log_{2^3} 2^8=\frac{8}{3}\log_2 2=\frac{8}{3}$$

080 답 $\mathbf{\frac{3}{2}}$

$$\log_9 27=\log_{3^2} 3^3=\frac{3}{2}\log_3 3=\frac{3}{2}$$

081 답 $\mathbf{\frac{3}{4}}$

$$\log_4 2\sqrt{2}=\log_{2^2} 2^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{3}{4}$$

082 답 **6**

$$7^{\log_7 6}=6^{\log_7 7}=6$$

083 답 **81**

$$16^{\log_2 3}=3^{\log_2 16}=3^{\log_2 2^4}=3^4=81$$

084 답 **5**

$$3^{\log_9 25}=25^{\log_9 3}=25^{\log_{3^2} 3}=25^{\frac{1}{2}}=5$$

085 답 **4**

$$9^{\log_{27} 8}=8^{\log_{27} 9}=8^{\log_{3^3} 3^2}=8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^2=4$$

086 답 $\mathbf{\frac{3}{4}}$

$$\log_9 3+\log_{81} 3=\log_{3^2} 3+\log_{3^4} 3=\frac{1}{2}\log_3 3+\frac{1}{4}\log_3 3$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

087 답 **−2**

$$\log_{\frac{1}{2}} 2+\log_5\frac{1}{5}=\log_{2^{-1}} 2+\log_5 5^{-1}=-\log_2 2-\log_5 5$$
$$=-1-1=-2$$

088 답 **2**

$$(\log_2 3+\log_4 3)(\log_3 2+\log_{27} 2)$$
$$=(\log_2 3+\log_{2^2} 3)(\log_3 2+\log_{3^3} 2)$$
$$=\left(\log_2 3+\frac{1}{2}\log_2 3\right)\left(\log_3 2+\frac{1}{3}\log_3 2\right)$$
$$=\frac{3}{2}\log_2 3\times\frac{4}{3}\log_3 2$$
$$=2\log_2 3\times\frac{1}{\log_2 3}=2$$

089 답 **5**

$$\log_5 49\times(\log_7\sqrt{5}-\log_{\frac{1}{49}} 625)$$
$$=\log_5 7^2\times(\log_7 5^{\frac{1}{2}}-\log_{7^{-2}} 5^4)$$
$$=2\log_5 7\times\left(\frac{1}{2}\log_7 5+\frac{4}{2}\log_7 5\right)$$
$$=2\log_5 7\times\frac{5}{2}\log_7 5$$
$$=5\log_5 7\times\frac{1}{\log_5 7}=5$$

090 답 **5**

$$2^{\log_2 25-\log_2 5}=2^{\log_2 5}=5^{\log_2 2}=5$$

091 답 **−3**

092 답 **2**

$$\log 100=\log 10^2=2$$

093 답 **−4**

$$\log\frac{1}{10000}=\log 10^{-4}=-4$$

094 답 **−5**

$$\log 0.00001=\log 10^{-5}=-5$$

095 답 $\mathbf{\frac{7}{3}}$

$$\log\sqrt[3]{10^7}=\log 10^{\frac{7}{3}}=\frac{7}{3}$$

096 답 $\mathbf{\frac{7}{2}}$

$$\log 1000\sqrt{10}=\log 10^{\frac{7}{2}}=\frac{7}{2}$$

097 답 **4**

$\log 10+\log 1000=\log 10+\log 10^3=1+3=4$

098 답 $\mathbf{\frac{1}{6}}$

$\log\sqrt{10}-\log\sqrt[3]{10}=\log 10^{\frac{1}{2}}-\log 10^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

099 답 $\mathbf{-\frac{5}{2}}$

$$\log 0.1+\log\sqrt{\frac{1}{1000}}=\log 10^{-1}+\log 10^{-\frac{3}{2}}$$
$$=-1-\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}$$

100 답 $\mathbf{-\frac{5}{6}}$

$$\log\sqrt{1000}-\log\sqrt[3]{10}+\log\frac{1}{100}=\log 10^{\frac{3}{2}}-\log 10^{\frac{1}{3}}+\log 10^{-2}$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{3}-2=-\frac{5}{6}$$

101 답 **10, 10, 0.5132, 1.5132**

102 답 **3.5132**

$\log 3260=\log(3.26\times 1000)$
$=\log 3.26+\log 10^3$
$=0.5132+3=3.5132$

103 답 **−0.4868**

$\log 0.326=\log\left(3.26\times\frac{1}{10}\right)$
$=\log 3.26+\log 10^{-1}$
$=0.5132-1=-0.4868$

104 답 **−2.4868**

$\log 0.00326=\log\left(3.26\times\frac{1}{1000}\right)$
$=\log 3.26+\log 10^{-3}$
$=0.5132-3=-2.4868$

105 답 **1.3522**

$\log 22.5=\log(2.25\times 10)$
$=\log 2.25+\log 10$
$=0.3522+1=1.3522$

106 답 **2.3655**

$\log 232=\log(2.32\times 100)$
$=\log 2.32+\log 10^2$
$=0.3655+2=2.3655$

107 답 **−1.6655**

$\log 0.0216=\log\left(2.16\times\frac{1}{100}\right)$
$=\log 2.16+\log 10^{-2}$
$=0.3345-2=-1.6655$

108 답 **−3.6517**

$\log 0.000223=\log\left(2.23\times\frac{1}{10000}\right)$
$=\log 2.23+\log 10^{-4}$
$=0.3483-4=-3.6517$

109 답 **1, 10, 13.2, 13.2**

110 답 **1320**

$\log 1.32=0.1206$이므로
$\log N=3.1206=3+0.1206$
$=\log 10^3+\log 1.32$
$=\log 1320$
$\therefore N=1320$

111 답 **0.132**

$\log 1.32=0.1206$이므로
$\log N=-0.8794=-1+0.1206$
$=\log 10^{-1}+\log 1.32$
$=\log 0.132$
$\therefore N=0.132$

112 답 **0.00132**

$\log 1.32=0.1206$이므로
$\log N=-2.8794=-3+0.1206$
$=\log 10^{-3}+\log 1.32$
$=\log 0.00132$
$\therefore N=0.00132$

113 답 **417**

$\log 4.17=0.6201$이므로
$\log N=2.6201=2+0.6201$
$=\log 10^2+\log 4.17$
$=\log 417$
$\therefore N=417$

114 답 **41700**

$\log 4.17=0.6201$이므로
$\log N=4.6201=4+0.6201$
$=\log 10^4+\log 4.17$
$=\log 41700$
$\therefore N=41700$

115 답 **0.0417**

$\log 4.17=0.6201$이므로
$\log N=-1.3799=-2+0.6201$
$=\log 10^{-2}+\log 4.17$
$=\log 0.0417$
$\therefore N=0.0417$

116 답 0.000417

$\log 4.17=0.6201$이므로

$$\begin{aligned}\log N&=-3.3799=-4+0.6201\\&=\log 10^{-4}+\log 4.17\\&=\log 0.000417\end{aligned}$$

$\therefore N=0.000417$

117 답 3, 3, 4

118 답 10자리

3^{20}에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log 3^{20}&=20\log 3\\&=20\times 0.4771\\&=9.542=9+0.542\end{aligned}$$

$\log 3^{20}$의 정수 부분이 9이므로 3^{20}은 10자리의 수이다.

119 답 16자리

2^{50}에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log 2^{50}&=50\log 2\\&=50\times 0.3010\\&=15.05=15+0.05\end{aligned}$$

$\log 2^{50}$의 정수 부분이 15이므로 2^{50}은 16자리의 수이다.

120 답 24자리

6^{30}에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log 6^{30}&=30\log(2\times 3)\\&=30(\log 2+\log 3)\\&=30\times(0.3010+0.4771)\\&=23.343=23+0.343\end{aligned}$$

$\log 6^{30}$의 정수 부분이 23이므로 6^{30}은 24자리의 수이다.

121 답 15자리

30^{10}에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log 30^{10}&=10\log(3\times 10)\\&=10(\log 3+\log 10)\\&=10\times(0.4771+1)\\&=14.771=14+0.771\end{aligned}$$

$\log 30^{10}$의 정수 부분이 14이므로 30^{10}은 15자리의 수이다.

122 답 14자리

5^{20}에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log 5^{20}&=20\log\frac{10}{2}\\&=20(\log 10-\log 2)\\&=20\times(1-0.3010)\\&=13.98=13+0.98\end{aligned}$$

$\log 5^{20}$의 정수 부분이 13이므로 5^{20}은 14자리의 수이다.

123 답 −4, −4, 4

124 답 소수점 아래 5째 자리

$\frac{1}{3^{10}}$에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log\frac{1}{3^{10}}&=\log 3^{-10}\\&=-10\log 3\\&=-10\times 0.4771\\&=-4.771=-5+0.229\end{aligned}$$

$\log\frac{1}{3^{10}}$의 정수 부분이 -5이므로 $\frac{1}{3^{10}}$은 소수점 아래 5째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

125 답 소수점 아래 7째 자리

2^{-20}에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log 2^{-20}&=-20\log 2\\&=-20\times 0.3010\\&=-6.02=-7+0.98\end{aligned}$$

$\log 2^{-20}$의 정수 부분이 -7이므로 2^{-20}은 소수점 아래 7째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

126 답 소수점 아래 24째 자리

6^{-30}에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log 6^{-30}&=-30\log(2\times 3)\\&=-30(\log 2+\log 3)\\&=-30\times(0.3010+0.4771)\\&=-23.343=-24+0.657\end{aligned}$$

$\log 6^{-30}$의 정수 부분이 -24이므로 6^{-30}은 소수점 아래 24째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

127 답 소수점 아래 33째 자리

$\left(\frac{2}{9}\right)^{50}$에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{2}{9}\right)^{50}&=50\log\frac{2}{3^2}\\&=50(\log 2-2\log 3)\\&=50\times(0.3010-2\times 0.4771)\\&=-32.66=-33+0.34\end{aligned}$$

$\log\left(\frac{2}{9}\right)^{50}$의 정수 부분이 -33이므로 $\left(\frac{2}{9}\right)^{50}$은 소수점 아래 33째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

128 답 소수점 아래 7째 자리

$\left(\frac{3}{5}\right)^{30}$에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{3}{5}\right)^{30}&=30\log\frac{6}{10}\\&=30\log\frac{2\times 3}{10}\\&=30(\log 2+\log 3-\log 10)\\&=30\times(0.3010+0.4771-1)\\&=-6.657=-7+0.343\end{aligned}$$

$\log\left(\frac{3}{5}\right)^{30}$의 정수 부분이 -7이므로 $\left(\frac{3}{5}\right)^{30}$은 소수점 아래 7째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

연산 유형 최종 점검하기

36~37쪽

1 ③	2 ③	3 ①	4 ⑤	5 ④	6 ④
7 ⑤	8 ①	9 ②	10 -0.2219		11 ②
12 13자리		13 소수점 아래 22째 자리			

1 $\log_a 3=2$, $\log_b 5=2$에서

$a^2=3$, $b^2=5$

$\therefore a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{5}$ ($\because a>0$, $b>0$)

$\therefore ab=\sqrt{15}$

2 $\log_2 \{\log_9 (\log_2 a)\}=-1$에서

$\log_9 (\log_2 a)=2^{-1}=\frac{1}{2}$

따라서 $\log_2 a=9^{\frac{1}{2}}=3$이므로

$a=2^3=8$

3 밑의 조건에서 $6-x>0$, $6-x\neq1$

$\therefore x<5$ 또는 $5<x<6$ ······ ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+4x+5>0$

$x^2-4x-5<0$, $(x+1)(x-5)<0$

$\therefore -1<x<5$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $-1<x<5$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$0+1+2+3+4=10$

4 ⑤ $\frac{1}{2}\log_7 \sqrt{7}=\frac{1}{2}\log_7 7^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\log_7 7=\frac{1}{4}$

5 $\log_2 24+\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\log_2 3=\log_2 24+\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}-\log_2 3\sqrt{3}$

$=\log_2 \left(24\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

$=\log_2 4$

$=\log_2 2^2$

$=2$

6 $108^x=6$에서 $x=\log_{108} 6$

$3^y=6$에서 $y=\log_3 6$

$\therefore \frac{y-x}{xy}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$

$=\frac{1}{\log_{108} 6}-\frac{1}{\log_3 6}$

$=\log_6 108-\log_6 3$

$=\log_6 36$

$=\log_6 6^2$

$=2$

7 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=\log_3 5+1=\log_3 5+\log_3 3=\log_3 15$

$b=\log_3 5\times1=\log_3 5$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\log_3 5}{\log_3 15}=\log_{15} 5$

8 $\left(\log_2 \sqrt{3}+\frac{3}{4}\log_{\sqrt{2}} 3\right)\times\log_{\frac{1}{27}} 2\sqrt{2}$

$=\left(\log_2 3^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{4}\log_{2^{\frac{1}{2}}} 3\right)\times\log_{3^{-3}} 2^{\frac{3}{2}}$

$=\left(\frac{1}{2}\log_2 3+\frac{3}{4}\times2\log_2 3\right)\times\left(-\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\log_3 2\right)$

$=2\log_2 3\times\left(-\frac{1}{2}\log_3 2\right)$

$=-1$

9 $\log_5 2=b$에서 $\log_2 5=\frac{1}{b}$

$\therefore \log_4 45=\log_{2^2} 45=\frac{1}{2}\log_2 (3^2\times5)$

$=\frac{1}{2}(2\log_2 3+\log_2 5)$

$=\log_2 3+\frac{1}{2}\log_2 5$

$=a+\frac{1}{2b}$

10 $\log\frac{3}{5}=\log\frac{6}{10}=\log\frac{2\times3}{10}$

$=\log 2+\log 3-\log 10$

$=0.3010+0.4771-1$

$=-0.2219$

11 $\log 4.28=0.6314$이므로

$a=\log 428=\log (4.28\times100)$

$=\log 4.28+\log 10^2$

$=0.6314+2$

$=2.6314$

$\log b=-1.3686=-2+0.6314$

$=\log 10^{-2}+\log 4.28$

$=\log 0.0428$

$\therefore b=0.0428$

$\therefore a+b=2.6742$

12 18^{10}에 상용로그를 취하면

$\log 18^{10}=10\log (2\times3^2)$

$=10(\log 2+2\log 3)$

$=10\times(0.3010+2\times0.4771)$

$=12.552$

$=12+0.552$

$\log 18^{10}$의 정수 부분이 12이므로 18^{10}은 13자리의 수이다.

13 12^{-20}에 상용로그를 취하면

$\log 12^{-20}=-20\log (2^2\times3)$

$=-20(2\log 2+\log 3)$

$=-20\times(2\times0.3010+0.4771)$

$=-21.582$

$=-22+0.418$

$\log 12^{-20}$의 정수 부분이 -22이므로 12^{-20}은 소수점 아래 22째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

03 지수함수와 로그함수

40~51쪽

001 답 ○

002 답 ×

003 답 ○

004 답 ×

005 답 ○

006 답 $\mathbf{4}$

$f(2)=2^2=4$

007 답 $\mathbf{\frac{1}{2}}$

$f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$

008 답 $\sqrt{\mathbf{2}}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

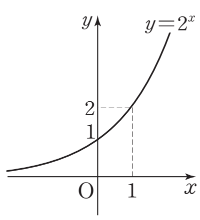
009 답 $\mathbf{128}$

$f(3)f(4)=2^3\times2^4=2^7=128$

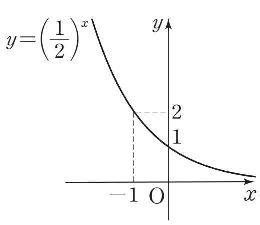
010 답 $\mathbf{8}$

$\frac{f(8)}{f(5)}=\frac{2^8}{2^5}=2^3=8$

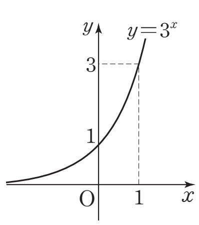
011 답



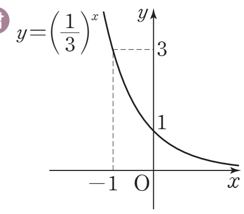
012 답



013 답



014 답



015 답 $\boldsymbol{y=2^{x-1}-2}$

016 답 $\boldsymbol{y=3^{x+2}+1}$

017 답 $\boldsymbol{y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}-1}$

018 답 $\boldsymbol{y=-2^{x+3}+5}$

019 답 $\boldsymbol{y=-2^{x-1}-1}$

$-y=2^{x-1}+1$에서 $y=-2^{x-1}-1$

020 답 $\boldsymbol{y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}+1}$

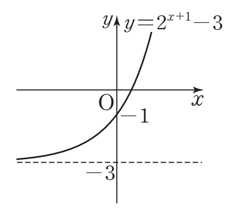
$y=2^{-x-1}+1$에서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}+1$

021 답 $\boldsymbol{y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-1}$

$-y=2^{-x-1}+1$에서 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-1$

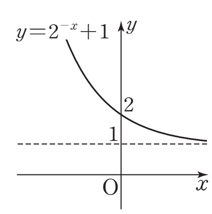
022 답 **그래프는 풀이 참고,**
점근선의 방정식: $\boldsymbol{y=-3}$

$y=2^{x+1}-3$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 점근선의 방정식은 $y=-3$이다.



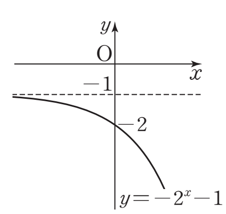
023 답 **그래프는 풀이 참고,**
점근선의 방정식: $\boldsymbol{y=1}$

$y=2^{-x}+1$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 점근선의 방정식은 $y=1$이다.



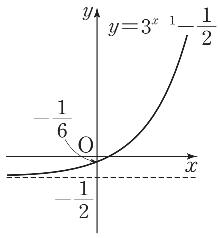
024 답 **그래프는 풀이 참고,**
점근선의 방정식: $\boldsymbol{y=-1}$

$y=-2^x-1=-(2^x+1)$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 점근선의 방정식은 $y=-1$이다.



025 답 그래프는 풀이 참고,
점근선의 방정식: $y=-\frac{1}{2}$

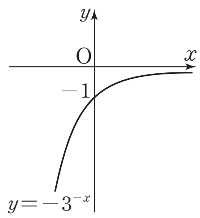
$y=3^{x-1}-\frac{1}{2}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 점근선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}$이다.

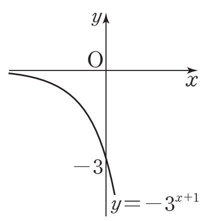
026 답 그래프는 풀이 참고,
점근선의 방정식: $y=0$

$y=-3^{-x}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 점근선의 방정식은 $y=0$이다.



027 답 그래프는 풀이 참고,
점근선의 방정식: $y=0$

$y=-3^{x+1}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 점근선의 방정식은 $y=0$이다.



028 답 ○

029 답 ×

밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

030 답 ○

031 답 ×

$x=0$일 때, $y=2^{-1}+3=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}$

따라서 점 $\left(0,\ \frac{7}{2}\right)$을 지난다.

032 답 ○

$y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=3^{-x}$ $\quad\therefore y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

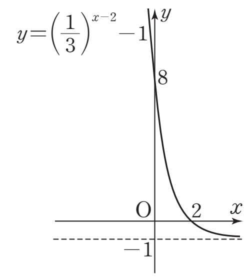
다시 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-1$

따라서 함수 $y=3^x$의 그래프를 평행이동, 대칭이동하여 일치할 수 있다.

033 답 ○

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 4사분면을 지난다.



034 답 ×

점근선의 방정식은 $y=-1$이다.

035 답 ×

$x=2$일 때, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^0-1=1-1=0$

따라서 점 $(2,\ 0)$을 지난다.

036 답 $4^{10}>8^6$

$4^{10}=2^{20}$, $8^6=2^{18}$

이때 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고 $20>18$이므로

$2^{20}>2^{18}$

$\therefore 4^{10}>8^6$

037 답 $\frac{1}{81}<\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^5$

$\frac{1}{81}=\left(\frac{1}{3}\right)^4$, $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^5=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$

이때 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고 $4>\frac{5}{2}$이므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^4<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$

$\therefore \frac{1}{81}<\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^5$

038 답 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}<16^{1.25}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=2^3$, $16^{1.25}=2^5$

이때 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고 $3<5$이므로

$2^3<2^5$

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}<16^{1.25}$

039 답 $\sqrt[3]{25}<0.2^{-\frac{3}{4}}<\sqrt{125}$

$\sqrt[3]{25}=5^{\frac{2}{3}}$, $0.2^{-\frac{3}{4}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{3}{4}}=5^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{125}=5^{\frac{3}{2}}$

이때 $y=5^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고

$\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{3}{2}$이므로

$5^{\frac{2}{3}}<5^{\frac{3}{4}}<5^{\frac{3}{2}}$

$\therefore \sqrt[3]{25}<0.2^{-\frac{3}{4}}<\sqrt{125}$

040 답 **최댓값: 9, 최솟값: $\frac{1}{3}$**

$x=-1$일 때, $y=3^{-1}=\frac{1}{3}$

$x=2$일 때, $y=3^2=9$

따라서 최댓값은 9, 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다.

041 답 **최댓값: 2, 최솟값: $\frac{1}{4}$**

$x=-1$일 때, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$

$x=2$일 때, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

따라서 최댓값은 2, 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

042 답 **최댓값: 5, 최솟값: $\frac{13}{4}$**

$x=-1$일 때, $y=2^{-1-1}+3=\frac{1}{4}+3=\frac{13}{4}$

$x=2$일 때, $y=2^{2-1}+3=2+3=5$

따라서 최댓값은 5, 최솟값은 $\frac{13}{4}$이다.

043 답 **최댓값: 26, 최솟값: 0**

$x=-1$일 때, $y=3^{2+1}-1=27-1=26$

$x=2$일 때, $y=3^{2-2}-1=1-1=0$

따라서 최댓값은 26, 최솟값은 0이다.

044 답 **3, -3, 1, 1, 2, -3, $\frac{1}{8}$**

045 답 **최댓값: 9, 최솟값: $\frac{1}{9}$**

$-x^2+6x-7=t$로 놓으면

$t=-(x-3)^2+2$

$1\le x\le 3$에서 $-2\le t\le 2$

이때 $y=3^t$의 밑이 1보다 크므로 $t=2$일 때 최댓값은 $3^2=9$,

$t=-2$일 때 최솟값은 $3^{-2}=\frac{1}{9}$이다.

046 답 **최댓값: 8, 최솟값: $\frac{1}{32}$**

$x^2+2x-3=t$로 놓으면

$t=(x+1)^2-4$

$0\le x\le 2$에서 $-3\le t\le 5$

이때 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$의 밑이 1보다 작으므로 $t=-3$일 때 최댓값은

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$, $t=5$일 때 최솟값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$이다.

047 답 **2^x, 2^x, $\frac{1}{2}$, 8, 1, 4, 8, 53, 1, 4**

048 답 **최댓값: 0, 최솟값: $-\frac{9}{4}$**

$y=9^x-3^{x+1}=(3^x)^2-3\times 3^x$

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $-1\le x\le 1$에서

$3^{-1}\le 3^x\le 3^1$

$\therefore \frac{1}{3}\le t\le 3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-3t=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

따라서 $t=3$일 때 최댓값은 0, $t=\frac{3}{2}$일 때 최솟값은 $-\frac{9}{4}$이다.

049 답 **최댓값: 23, 최솟값: $\frac{1}{4}$**

$y=2^{-2x}+2^{-x+1}-1$

$=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $-2\le x\le 1$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^1\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$\therefore \frac{1}{2}\le t\le 4$

이때 주어진 함수는

$y=t^2+2t-1=(t+1)^2-2$

따라서 $t=4$일 때 최댓값은 23, $t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

050 답 **$y=\log_2 x\ (x>0)$**

051 답 **$y=\log_{\frac{1}{3}} x\ (x>0)$**

052 답 **$y=\log_5 x-1\ (x>0)$**

$y=5^{x+1}$에서 $x+1=\log_5 y$

$\therefore x=\log_5 y-1$

이때 x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\log_5 x-1\ (x>0)$

053 답 **$y=3^x$**

054 답 **$y=2^x+1$**

$y=\log_2(x-1)$에서 $x-1=2^y$

$\therefore x=2^y+1$

이때 x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=2^x+1$

055 답 **4**

$f(81)=\log_3 81=\log_3 3^4=4$

056 답 **-2**

$f\left(\frac{1}{9}\right)=\log_3\frac{1}{9}=\log_3 3^{-2}=-2$

057 답 **4**

$f(3)+f(27)=\log_3 3+\log_3 27$

$=1+\log_3 3^3$

$=1+3=4$

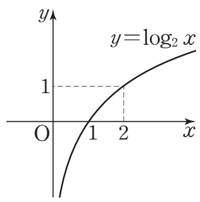
058 답 **2**

$$f(6)+f\left(\frac{3}{2}\right)=\log_3 6+\log_3 \frac{3}{2}$$
$$=\log_3\left(6\times\frac{3}{2}\right)$$
$$=\log_3 3^2=2$$

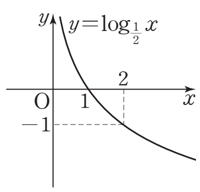
059 답 **1**

$$f(12)-f(4)=\log_3 12-\log_3 4$$
$$=\log_3 \frac{12}{4}$$
$$=\log_3 3=1$$

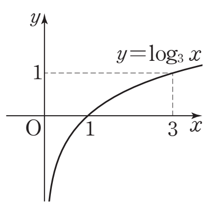
060 답



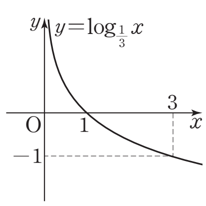
061 답



062 답



063 답



064 답 $\boldsymbol{y=\log_2(x-2)+1}$

065 답 $\boldsymbol{y=\log_3(x+1)+2}$

066 답 $\boldsymbol{y=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)-2}$

067 답 $\boldsymbol{y=-\log_4(x+2)+5}$

068 답 $\boldsymbol{y=-\log_3(x+1)+1}$

$-y=\log_3(x+1)-1$에서 $y=-\log_3(x+1)+1$

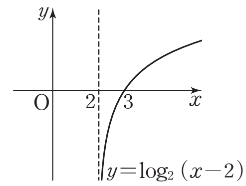
069 답 $\boldsymbol{y=\log_3(1-x)-1}$

070 답 $\boldsymbol{y=-\log_3(1-x)+1}$

$-y=\log_3(1-x)-1$에서 $y=-\log_3(1-x)+1$

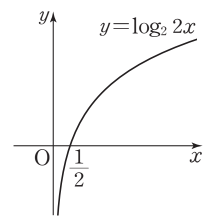
071 답 **그래프는 풀이 참고,**
점근선의 방정식: $x=2$

$y=\log_2(x-2)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 점근선의 방정식은 $x=2$이다.



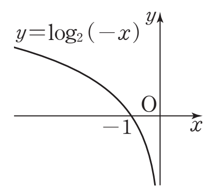
072 답 **그래프는 풀이 참고,**
점근선의 방정식: $x=0$

$y=\log_2 2x=\log_2 x+1$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 점근선의 방정식은 $x=0$이다.



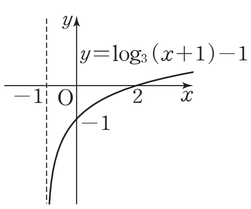
073 답 **그래프는 풀이 참고,**
점근선의 방정식: $x=0$

$y=\log_2(-x)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 점근선의 방정식은 $x=0$이다.



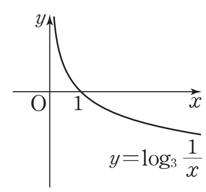
074 답 **그래프는 풀이 참고,**
점근선의 방정식: $x=-1$

$y=\log_3(x+1)-1$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 점근선의 방정식은 $x=-1$이다.



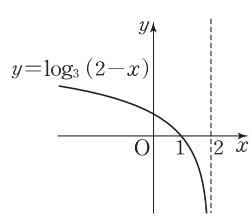
075 답 **그래프는 풀이 참고,**
점근선의 방정식: $x=0$

$y=\log_3 \dfrac{1}{x}=-\log_3 x$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 점근선의 방정식은 $x=0$이다.



076 답 **그래프는 풀이 참고,**
점근선의 방정식: $x=2$

$y=\log_3(2-x)=\log_3\{-(x-2)\}$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 점근선의 방정식은 $x=2$이다.



077 답 ×

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

078 답 ○

밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

079 답 ×

$x-1>0$에서 $x>1$이므로 정의역은 $\{x|x>1\}$이다.

080 답 ○

$x=2$일 때, $y=\log_2 1-3=0-3=-3$

따라서 점 $(2, -3)$을 지난다.

081 답 ×

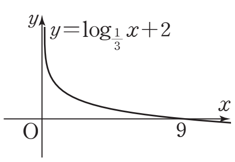
$y=\log_{\frac{1}{3}} x+2=-\log_3 x+2$이므로 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

082 답 ○

밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

083 답 ○

$y=\log_{\frac{1}{3}} x+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 4사분면을 지난다.



084 답 ×

점근선의 방정식은 $x=0$이다.

085 답 $\log_{\frac{1}{3}} 5>\log_{\frac{1}{3}} 7$

$y=\log_{\frac{1}{3}} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고 $5<7$이므로

$\log_{\frac{1}{3}} 5>\log_{\frac{1}{3}} 7$

086 답 $2\log_2 3>\log_4 64$

$2\log_2 3=\log_2 9$, $\log_4 64=\log_2 8$

이때 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고 $9>8$이므로

$\log_2 9>\log_2 8$

$\therefore 2\log_2 3>\log_4 64$

087 답 $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{7}<-\log_{\frac{1}{5}} 8$

$-\log_{\frac{1}{5}} 8=\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8}$

이때 $y=\log_{\frac{1}{5}} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고 $\frac{1}{7}>\frac{1}{8}$이므로

$\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{7}<\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8}$

$\therefore \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{7}<-\log_{\frac{1}{5}} 8$

088 답 $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}<\frac{1}{2}\log_3 5<\log_9 16$

$\frac{1}{2}\log_3 5=\log_3 \sqrt{5}$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}=\log_3 2$, $\log_9 16=\log_3 4$

이때 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고 $2<\sqrt{5}<4$이므로

$\log_3 2<\log_3 \sqrt{5}<\log_3 4$

$\therefore \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}<\frac{1}{2}\log_3 5<\log_9 16$

089 답 최댓값: 4, 최솟값: 1

$x=2$일 때, $y=\log_2 2=1$

$x=16$일 때, $y=\log_2 16=4$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 1이다.

090 답 최댓값: -2, 최솟값: -3

$x=-1$일 때, $y=\log_{\frac{1}{3}} 3-1=-1-1=-2$

$x=5$일 때, $y=\log_{\frac{1}{3}} 9-1=-2-1=-3$

따라서 최댓값은 -2, 최솟값은 -3이다.

091 답 최댓값: 7, 최솟값: 5

$x=2$일 때, $y=\log_2 4+3=2+3=5$

$x=6$일 때, $y=\log_2 16+3=4+3=7$

따라서 최댓값은 7, 최솟값은 5이다.

092 답 최댓값: 3, 최솟값: 1

$x=-7$일 때, $y=\log_3 9+1=2+1=3$

$x=1$일 때, $y=\log_3 1+1=0+1=1$

따라서 최댓값은 3, 최솟값은 1이다.

093 답 2, 4, 64, 64, 6, 4, 2

094 답 최댓값: 2, 최솟값: $\log_3 5$

$-x^2+2x+8=t$로 놓으면

$t=-(x-1)^2+9$

$-1\le x\le 3$에서 $5\le t\le 9$

이때 $y=\log_3 t$의 밑이 1보다 크므로 $t=9$일 때 최댓값은 $\log_3 9=2$, $t=5$일 때 최솟값은 $\log_3 5$이다.

095 답 최댓값: 0, 최솟값: -1

$x^2-6x+10=t$로 놓으면

$t=(x-3)^2+1$

$1\le x\le 4$에서 $1\le t\le 5$

이때 $y=\log_{\frac{1}{5}} t$의 밑이 1보다 작으므로 $t=1$일 때 최댓값은 $\log_{\frac{1}{5}} 1=0$, $t=5$일 때 최솟값은 $\log_{\frac{1}{5}} 5=-1$이다.

096 답 0, 3, 1, 8, 3, 12, 1, 8

097 답 최댓값: 14, 최솟값: 5

$\log_2 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 16$에서

$\log_2 1\le\log_2 x\le\log_2 16$ $\quad\therefore 0\le t\le 4$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t+6=(t-1)^2+5$

따라서 $t=4$일 때 최댓값은 14, $t=1$일 때 최솟값은 5이다.

098 답 **최댓값: 6, 최솟값: -9**

$\log_{\frac{1}{3}} x=t$로 놓으면 $\frac{1}{9} \le x \le 3$에서

$\log_{\frac{1}{3}} 3 \le \log_{\frac{1}{3}} x \le \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$ $\quad\therefore -1 \le t \le 2$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-6t-1=(t-3)^2-10$

따라서 $t=-1$일 때 최댓값은 6, $t=2$일 때 최솟값은 -9이다.

연산 유형 최종 점검하기 52~53쪽

1 ③	**2** $m=-1$, $n=4$	**3** $a=3$, $b=-2$	**4** ③
5 ①	**6** ⑤	**7** ②	**8** ①
9 ⑤	**10** $a=-1$, $b=-4$	**11** ④	**12** ④

1 ㄱ. 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

ㄹ. 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면

(i) $a>1$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$

(ii) $0<a<1$일 때, $f(x_1)>f(x_2)$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

2 $y=8\times 2^{3x}+4=2^{3x+3}+4=2^{3(x+1)}+4$이므로 함수 $y=8^x=2^{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 함수 $y=8\times 2^{3x}+4$의 그래프와 일치한다.

$\therefore m=-1$, $n=4$

3 그래프의 점근선의 방정식이 $y=-2$이므로

$b=-2$

따라서 $f(x)=a\times 3^x-2$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$a-2=1$ $\quad\therefore a=3$

4 $\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{7}{9}}=2^{\frac{7}{3}}$,

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{1024}}}=2^{\frac{5}{4}}$, $(2^{\frac{1}{3}}\times 16^{\frac{5}{6}})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{11}{6}}$

이때 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고

$\frac{2}{3}<\frac{5}{4}<\frac{11}{6}<\frac{7}{3}$이므로

$2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{5}{4}}<2^{\frac{11}{6}}<2^{\frac{7}{3}}$

$\therefore \sqrt[3]{4}<\sqrt{\sqrt{\sqrt{1024}}}<(2^{\frac{1}{3}}\times 16^{\frac{5}{6}})^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{7}{9}}$

따라서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱은

$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{7}{9}}\times\sqrt[3]{4}=2^{\frac{7}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}}=2^3=8$

5 $x=-1$일 때, 최댓값이 3이므로

$2^4+k=3$, $16+k=3$

$\therefore k=-13$

6 $y=2^{2x}-2^{x+1}+3=(2^x)^2-2\times 2^x+3$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면 $0\le x\le 3$에서

$2^0\le 2^x\le 2^3$ $\quad\therefore 1\le t\le 8$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$

따라서 $t=8$일 때 최댓값은 51, $t=1$일 때 최솟값은 2이므로 구하는 합은

$51+2=53$

7 $y=\log_2(x+1)-3$에서

$y+3=\log_2(x+1)$

$x+1=2^{y+3}$

$\therefore x=2^{y+3}-1$

이때 x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=2^{x+3}-1$

따라서 $a=2$, $b=3$, $c=-1$이므로

$a+b+c=4$

8 $f(2)=4$에서

$\log_a 3+3=4$, $\log_a 3=1$

$\therefore a=3$

따라서 $f(x)=\log_3(2x-1)+3$이므로

$f(5)=\log_3 9+3=2+3=5$

9 ⑤ 그래프는 함수 $y=\log_a \frac{1}{x}=-\log_a x$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

10 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} 4x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$\begin{aligned} y&=\log_{\frac{1}{2}} 4(x-1)-2\\ &=-\log_2 4(x-1)-2\\ &=-\log_2 4-\log_2(x-1)-2\\ &=-2-\log_2(x-1)-2\\ &=-\log_2(x-1)-4 \end{aligned}$$

$\therefore a=-1$, $b=-4$

11 $A=\log_{\frac{1}{5}} 3$, $B=-1=\log_{\frac{1}{5}} 5$, $C=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{5}} 16=\log_{\frac{1}{5}} 4$

이때 $y=\log_{\frac{1}{5}} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고 $3<4<5$이므로

$\log_{\frac{1}{5}} 5<\log_{\frac{1}{5}} 4<\log_{\frac{1}{5}} 3$

$\therefore B<C<A$

12 $x=-1$일 때, 최솟값이 2이므로

$\log_3 3+k=2$, $1+k=2$

$\therefore k=1$

04 지수함수와 로그함수의 활용

56~65쪽

001 답 $\boldsymbol{x=2}$

$9^x=81$에서 $9^x=9^2$

$\therefore x=2$

002 답 $\boldsymbol{x=-4}$

$2^{x-1}=\frac{1}{32}$에서 $2^{x-1}=2^{-5}$

따라서 $x-1=-5$이므로

$x=-4$

003 답 $\boldsymbol{x=3}$

$5^{-x}=\frac{1}{125}$에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^x=\left(\frac{1}{5}\right)^3$

$\therefore x=3$

004 답 $\boldsymbol{x=-\frac{7}{2}}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}=3\sqrt{3}$에서 $3^{-x-2}=3^{\frac{3}{2}}$

따라서 $-x-2=\frac{3}{2}$이므로

$x=-\frac{7}{2}$

005 답 $\boldsymbol{x=-3}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=64\times 2^x$에서 $2^{-x}=2^{x+6}$

따라서 $-x=x+6$이므로

$2x=-6 \qquad \therefore x=-3$

006 답 $\boldsymbol{x=-2}$

$27^x=\left(\frac{1}{9}\right)^{1-x}$에서 $3^{3x}=3^{2x-2}$

따라서 $3x=2x-2$이므로

$x=-2$

007 답 $\boldsymbol{x=1}$

$25^{x+1}=0.2^{2x-6}$에서

$5^{2x+2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-6}$, $5^{2x+2}=5^{-2x+6}$

따라서 $2x+2=-2x+6$이므로

$4x=4 \qquad \therefore x=1$

008 답 $\boldsymbol{x=-1}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-2x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}$에서 $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-2x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-x+2}$

따라서 $x^2-2x=-x+2$이므로

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

009 답 $\boldsymbol{2^x,\ 2^x,\ 4,\ 5,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0}$

010 답 $\boldsymbol{x=2}$

$9^x-6\times 3^x-27=0$에서

$(3^x)^2-6\times 3^x-27=0$

$3^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-6t-27=0$, $(t+3)(t-9)=0$

$\therefore t=9 \ (\because t>0)$

따라서 $3^x=9=3^2$이므로

$x=2$

011 답 $\boldsymbol{x=2}$

$5^{2x}=20\times 5^x+5^{x+1}$에서

$(5^x)^2=20\times 5^x+5\times 5^x$, $(5^x)^2-25\times 5^x=0$

$5^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-25t=0$, $t(t-25)=0$

$\therefore t=25 \ (\because t>0)$

따라서 $5^x=25=5^2$이므로

$x=2$

012 답 $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=-1}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+8=0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+8=0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-6t+8=0$, $(t-4)(t-2)=0$

$\therefore t=4$ 또는 $t=2$

따라서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=4=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 또는 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$이므로

$x=-2$ 또는 $x=-1$

013 답 $\boldsymbol{1,\ 0,\ 4,\ 4}$

014 답 $\boldsymbol{x=1}$ **또는** $\boldsymbol{x=4}$

$(x^x)^4=x^x\times x^{12}$에서 $x^{4x}=x^{x+12}$

밑이 같으므로

(i) $x=1$

(ii) $4x=x+12$에서

$3x=12 \qquad \therefore x=4$

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=4$

015 답 $\boldsymbol{x=3}$ **또는** $\boldsymbol{x=4}$

밑이 같으므로

(i) $x-2=1$에서 $x=3$

(ii) $x^2=3x+4$에서

$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=4 \ (\because x>2)$

(i), (ii)에서 $x=3$ 또는 $x=4$

016 답 $\boldsymbol{6,\ 0,\ 2,\ 6}$

017 답 $x=2$

$x^{2x-4}=4^{x-2}$에서 $x^{2x-4}=2^{2x-4}$

지수가 같으므로

(ⅰ) $x=2$

(ⅱ) $2x-4=0$에서

$2x=4 \qquad \therefore x=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=2$

018 답 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

지수가 같으므로

(ⅰ) $2x+3=x+2$에서 $x=-1$

(ⅱ) $2x-1=0$에서

$2x=1 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

019 답 $x>3$

$5^x>125$에서 $5^x>5^3$

밑이 1보다 크므로

$x>3$

020 답 $x>\frac{2}{3}$

$27^{2-x}<81$에서 $3^{6-3x}<3^4$

밑이 1보다 크므로

$6-3x<4, \ -3x<-2$

$\therefore x>\frac{2}{3}$

021 답 $x\le 6$

$8\times 2^x\le 512$에서 $2^{x+3}\le 2^9$

밑이 1보다 크므로

$x+3\le 9 \qquad \therefore x\le 6$

022 답 $x\le -9$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}\ge 64$에서 $2^{-x-3}\ge 2^6$

밑이 1보다 크므로

$-x-3\ge 6 \qquad \therefore x\le -9$

023 답 $x<2$

$8^x<4^{x+1}$에서 $2^{3x}<2^{2x+2}$

밑이 1보다 크므로

$3x<2x+2 \qquad \therefore x<2$

024 답 $x\ge -5$

$9^x\ge\left(\frac{1}{3}\right)^{x+15}$에서 $3^{2x}\ge 3^{-x-15}$

밑이 1보다 크므로

$2x\ge -x-15, \ 3x\ge -15$

$\therefore x\ge -5$

025 답 $x>1$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{2-x}>\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2x}$에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-x}>\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$

밑이 1보다 작으므로

$2-x<x, \ 2x>2 \qquad \therefore x>1$

026 답 $x\ge\frac{5}{4}$

$0.3^{2x}\le 0.09^{5-3x}$에서 $0.3^{2x}\le 0.3^{10-6x}$

밑이 1보다 작으므로

$2x\ge 10-6x, \ 8x\ge 10 \qquad \therefore x\ge\frac{5}{4}$

027 답 3^x, 3^x, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 2

028 답 $x\ge 1$

$3\times 4^x-2^{x+1}-8\ge 0$에서

$3\times(2^x)^2-2\times 2^x-8\ge 0$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$3t^2-2t-8\ge 0, \ (3t+4)(t-2)\ge 0$

$\therefore t\le -\frac{4}{3}$ 또는 $t\ge 2$

그런데 $t>0$이므로 $t\ge 2$

따라서 $2^x\ge 2$이고 밑이 1보다 크므로

$x\ge 1$

029 답 $-1<x<1$

$2^{2x+1}-2^x-2^{x+2}+2<0$에서

$2\times(2^x)^2-2^x-4\times 2^x+2<0$

$2\times(2^x)^2-5\times 2^x+2<0$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$2t^2-5t+2<0, \ (2t-1)(t-2)<0$

$\therefore \frac{1}{2}<t<2$

따라서 $\frac{1}{2}<2^x<2$이고 밑이 1보다 크므로

$-1<x<1$

030 답 $>$, 2, 1, 1, 2, 1, 2

031 답 $0<x\le\frac{2}{3}$ 또는 $x\ge 1$

(ⅰ) $0<x<1$일 때

$2x+1\le 3-x$에서 $3x\le 2 \qquad \therefore x\le\frac{2}{3}$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x\le\frac{2}{3}$

(ⅱ) $x=1$일 때

부등식은 성립한다.

(ⅲ) $x>1$일 때

$2x+1\ge 3-x$에서 $3x\ge 2 \qquad \therefore x\ge\frac{2}{3}$

그런데 $x>1$이므로 $x>1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $0<x\le\frac{2}{3}$ 또는 $x\ge 1$

032 답 $1\le x\le 4$

(ⅰ) $0<x<1$일 때

$x^2\ge 3x+4$에서 $x^2-3x-4\ge 0$

$(x+1)(x-4)\ge 0$ $\quad\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 4$

그런데 $0<x<1$이므로 해가 없다.

(ⅱ) $x=1$일 때

부등식은 성립한다.

(ⅲ) $x>1$일 때

$x^2\le 3x+4$에서 $x^2-3x-4\le 0$

$(x+1)(x-4)\le 0$ $\quad\therefore -1\le x\le 4$

그런데 $x>1$이므로 $1<x\le 4$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $1\le x\le 4$

033 답 4년

n년 후에 제품의 가치가 50만 원이 된다고 하면

$100(2\sqrt{2})^{-\frac{1}{6}n}=50$

$(2\sqrt{2})^{-\frac{1}{6}n}=\frac{1}{2}$, $2^{-\frac{1}{4}n}=2^{-1}$

$-\frac{1}{4}n=-1$ $\quad\therefore n=4$

따라서 제품의 가치가 50만 원이 되는 것은 4년 후이다.

034 답 8년

투자한 5000만 원이 n년 후에 2억 원 이상이 된다고 하면

$5000\times 2^{\frac{n}{4}}\ge 20000$

$2^{\frac{n}{4}}\ge 4$, $2^{\frac{n}{4}}\ge 2^2$

$\frac{n}{4}\ge 2$ $\quad\therefore n\ge 8$

따라서 투자한 5000만 원이 2억 원 이상이 되는 것은 최소 8년 후이다.

035 답 4, 4, 4, 4, 80

036 답 6시간

처음에 20마리였던 박테리아가 4시간 후에 1620마리가 되었으므로

$20\times a^4=1620$

$a^4=81=3^4$ $\quad\therefore a=3$

20마리였던 박테리아가 n시간 후에 14580마리가 된다고 하면

$20\times 3^n=14580$

$3^n=729=3^6$ $\quad\therefore n=6$

따라서 20마리였던 박테리아가 14580마리가 되는 것은 6시간 후이다.

037 답 $x=3$

진수의 조건에서 $2x+1>0$

$\therefore x>-\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\log_2(2x+1)=\log_2 7$에서

$2x+1=7$, $2x=6$ $\quad\therefore x=3$

이것은 ㉠을 만족하므로 구하는 해이다.

038 답 $x=2$

진수의 조건에서 $3x-1>0$, $7-x>0$

$\therefore \frac{1}{3}<x<7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)=\log_{\frac{1}{2}}(7-x)$에서

$3x-1=7-x$, $4x=8$ $\quad\therefore x=2$

이것은 ㉠을 만족하므로 구하는 해이다.

039 답 $x=-1$

진수의 조건에서 $x+2>0$, $2x+3>0$

$\therefore x>-\frac{3}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2\log_5(x+2)=\log_5(2x+3)$에서

$\log_5(x+2)^2=\log_5(2x+3)$

따라서 $(x+2)^2=2x+3$이므로

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$ $\quad\therefore x=-1$

이것은 ㉠을 만족하므로 구하는 해이다.

040 답 $x=7$

진수의 조건에서 $5x+7>0$, $x>0$, $x-1>0$

$\therefore x>1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\log_7(5x+7)=\log_7 x+\log_7(x-1)$에서

$\log_7(5x+7)=\log_7 x(x-1)$

따라서 $5x+7=x(x-1)$이므로

$x^2-6x-7=0$, $(x+1)(x-7)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=7$

이때 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=7$

041 답 $x=7$

진수의 조건에서 $2x-5>0$

$\therefore x>\frac{5}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$-\log_{\frac{1}{5}}(2x-5)=\log_5 9$에서

$\log_5(2x-5)=\log_5 9$

따라서 $2x-5=9$이므로

$2x=14$ $\quad\therefore x=7$

이것은 ㉠을 만족하므로 구하는 해이다.

042 답 $x=3$

진수의 조건에서 $x-1>0$, $x+1>0$

$\therefore x>1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\log_2(x-1)=\log_4(x+1)$에서

$\log_2(x-1)=\frac{1}{2}\log_2(x+1)$

$2\log_2(x-1)=\log_2(x+1)$

$\log_2(x-1)^2=\log_2(x+1)$

따라서 $(x-1)^2=x+1$이므로

$x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

이때 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=3$

043 답 $x=3$

진수의 조건에서 $x>0$, $x-2>0$

$\therefore x>2$ ...... ㉠

$\log_3 x+\log_3 (x-2)=1$에서

$\log_3 x(x-2)=\log_3 3$

따라서 $x(x-2)=3$이므로

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

이때 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x=3$

044 답 $x=0$ 또는 $x=3$

진수의 조건에서 $x+3>0$, $x+1>0$

$\therefore x>-1$ ...... ㉠

$\log_{\sqrt{3}} (x+3)=\log_3 (x+1)+2$에서

$2\log_3 (x+3)=\log_3 (x+1)+\log_3 9$

$\log_3 (x+3)^2=\log_3 9(x+1)$

따라서 $(x+3)^2=9(x+1)$이므로

$x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

이것은 ㉠을 만족하므로 구하는 해이다.

045 답 $\log_2 x$, 6, 2, 2, 2, 4

046 답 $x=\frac{1}{27}$ 또는 $x=3$

$(\log_3 x)^2+\log_3 x^2-3=0$에서

$(\log_3 x)^2+2\log_3 x-3=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2+2t-3=0$, $(t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

따라서 $\log_3 x=-3$ 또는 $\log_3 x=1$이므로

$x=\frac{1}{27}$ 또는 $x=3$

047 답 $x=2$ 또는 $x=32$

$(1+\log_2 x)^2-\log_2 x^8+4=0$에서

$(\log_2 x)^2+2\log_2 x+1-8\log_2 x+4=0$

$(\log_2 x)^2-6\log_2 x+5=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-6t+5=0$, $(t-1)(t-5)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=5$

따라서 $\log_2 x=1$ 또는 $\log_2 x=5$이므로

$x=2$ 또는 $x=32$

048 답 2, $2x+1$, 2, $2x+1$, $\frac{\log 2+\log 3}{\log 2-2\log 3}$

049 답 $x=\frac{\log 3+2\log 5}{4\log 3-\log 5}$

$3^{4x-1}=5^{x+2}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 3^{4x-1}=\log 5^{x+2}$

$(4x-1)\log 3=(x+2)\log 5$

$(4\log 3-\log 5)x=\log 3+2\log 5$

$\therefore x=\frac{\log 3+2\log 5}{4\log 3-\log 5}$

050 답 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1, -1, -1, $\frac{1}{3}$

051 답 $x=5$ 또는 $x=25$

$x^{\log_5 x}=\frac{x^3}{25}$의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$\log_5 x^{\log_5 x}=\log_5 \frac{x^3}{25}$

$(\log_5 x)^2=\log_5 x^3-\log_5 25$

$(\log_5 x)^2-3\log_5 x+2=0$

$\log_5 x=t$로 놓으면

$t^2-3t+2=0$, $(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

따라서 $\log_5 x=1$ 또는 $\log_5 x=2$이므로

$x=5$ 또는 $x=25$

052 답 $x>6$

진수의 조건에서 $2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}$ ...... ㉠

$\log_3 (2x-1)>\log_3 11$에서 밑이 1보다 크므로

$2x-1>11$, $2x>12$ $\therefore x>6$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$x>6$

053 답 $\frac{3}{2}<x<4$

진수의 조건에서 $x+1>0$, $2x-3>0$

$\therefore x>\frac{3}{2}$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{5}} (x+1)<\log_{\frac{1}{5}} (2x-3)$에서 밑이 1보다 작으므로

$x+1>2x-3$ $\therefore x<4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{3}{2}<x<4$

054 답 $1<x\le 3$

진수의 조건에서 $x>0$, $x-1>0$, $9-x>0$

$\therefore 1<x<9$ ...... ㉠

$\log_2 x+\log_2 (x-1)\le\log_2 (9-x)$에서

$\log_2 x(x-1)\le\log_2 (9-x)$

밑이 1보다 크므로

$x(x-1)\le 9-x$

$x^2-9\le 0$, $(x+3)(x-3)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 3$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x\le 3$

055 답 $x>-\frac{2}{3}$

진수의 조건에서 $x+3>0$, $x^2+5>0$

$\therefore x>-3$ ...... ㉠

$\log_7 (x+3)>\log_{49} (x^2+5)$에서

$\log_7 (x+3)>\frac{1}{2}\log_7 (x^2+5)$

$2\log_7 (x+3)>\log_7 (x^2+5)$

$\log_7 (x+3)^2>\log_7 (x^2+5)$

밑이 1보다 크므로

$(x+3)^2>x^2+5$

$6x>-4$

$\therefore x>-\frac{2}{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$x>-\frac{2}{3}$

056 답 $0\le x<1$

진수의 조건에서 $x+1>0$, $1-x>0$

$\therefore -1<x<1$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{3}} (x+1)\le\log_{\frac{1}{9}} (1-x)$에서

$\log_{\frac{1}{3}} (x+1)\le\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} (1-x)$

$2\log_{\frac{1}{3}} (x+1)\le\log_{\frac{1}{3}} (1-x)$

$\log_{\frac{1}{3}} (x+1)^2\le\log_{\frac{1}{3}} (1-x)$

밑이 1보다 작으므로

$(x+1)^2\ge 1-x$

$x^2+3x\ge 0$, $x(x+3)\ge 0$

$\therefore x\le -3$ 또는 $x\ge 0$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0\le x<1$

057 답 $x\ge 8$

진수의 조건에서 $x-2>0$, $x+1>0$

$\therefore x>2$ ...... ㉠

$\log_2 (x-2)\ge\log_4 (x+1)+1$에서

$\log_2 (x-2)\ge\log_4 (x+1)+\log_4 4$

$\log_2 (x-2)\ge\log_4 4(x+1)$

$\log_2 (x-2)\ge\frac{1}{2}\log_2 4(x+1)$

$2\log_2 (x-2)\ge\log_2 4(x+1)$

$\log_2 (x-2)^2\ge\log_2 4(x+1)$

밑이 1보다 크므로

$(x-2)^2\ge 4(x+1)$

$x^2-8x\ge 0$, $x(x-8)\ge 0$

$\therefore x\le 0$ 또는 $x\ge 8$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$x\ge 8$

058 답 $\log_3 x$, 3, 1, 1, 1, $\frac{1}{81}$, 3, $\frac{1}{81}$, 3

059 답 $0<x\le\frac{1}{64}$ 또는 $x\ge 4$

진수의 조건에서 $x>0$, $x^4>0$

$\therefore x>0$ ...... ㉠

$(\log_2 x)^2+\log_2 x^4-12\ge 0$에서

$(\log_2 x)^2+4\log_2 x-12\ge 0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2+4t-12\ge 0$

$(t+6)(t-2)\ge 0$

$\therefore t\le -6$ 또는 $t\ge 2$

따라서 $\log_2 x\le -6$ 또는 $\log_2 x\ge 2$이고 밑이 1보다 크므로

$x\le\frac{1}{64}$ 또는 $x\ge 4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x\le\frac{1}{64}$ 또는 $x\ge 4$

060 답 $0<x<2$ 또는 $x>32$

진수의 조건에서 $x>0$ ...... ㉠

주어진 부등식에서 $\log_{\frac{1}{2}} x=t$로 놓으면

$t^2+6t+5>0$

$(t+5)(t+1)>0$

$\therefore t<-5$ 또는 $t>-1$

따라서 $\log_{\frac{1}{2}} x<-5$ 또는 $\log_{\frac{1}{2}} x>-1$이고 밑이 1보다 작으므로

$x>32$ 또는 $x<2$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<2$ 또는 $x>32$

061 답 2, x, 2, x, 2, 2, $\frac{\log 2}{\log 2-\log 5}$

062 답 $x>\frac{3}{\log 3-1}$

$3^x<10^{x+3}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 3^x<\log 10^{x+3}$

$x\log 3<x+3$, $(\log 3-1)x<3$

$\therefore x>\frac{3}{\log 3-1}$

063 답 2, 2, 2, x, x, $\log_2 x$, 1, -1, -1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$

064 답 $0<x<\frac{1}{10}$ 또는 $x>1000$

진수의 조건에서 $x>0$ ...... ㉠

$x^{\log x}>1000x^2$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}>\log 1000x^2$

$(\log x)^2>\log 1000+\log x^2$

$(\log x)^2-2\log x-3>0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2-2t-3>0$, $(t+1)(t-3)>0$

$\therefore t<-1$ 또는 $t>3$

따라서 $\log x<-1$ 또는 $\log x>3$이고 밑이 1보다 크므로

$x<\frac{1}{10}$ 또는 $x>1000$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<\frac{1}{10}$ 또는 $x>1000$

065 답 10^{-7} 몰/L

$-\log x=7$에서 $\log x=-7$

$\therefore x=10^{-7}$

따라서 pH 7인 용액의 수소 이온 농도는 10^{-7} 몰/L이다.

066 답 $\frac{1}{100}$기압 이상 $\frac{1}{10}$기압 이하

평균 해수면에서 높이가 3320 m 이상 6640 m 이하인 곳의 기압을 x기압이라고 하면

$3.32\le -3.32\log x\le 6.64$

$-2\le \log x\le -1$

밑이 1보다 크므로

$\frac{1}{100}\le x\le \frac{1}{10}$

따라서 구하는 기압은 $\frac{1}{100}$기압 이상 $\frac{1}{10}$기압 이하이다.

067 답 0.05, 0.05, 0.05, 2, 2, 2, 0.3, 15, 15

068 답 8번

처음 불순물의 양을 a라고 하면 여과기를 한 번 통과할 때 불순물의 20 %, 즉 $\frac{1}{5}$이 걸러지므로 n번 통과한 후 남아 있는 불순물의 양은 $a\left(\frac{4}{5}\right)^n$이다.

여과기를 n번 통과한 후 남아 있는 불순물의 양이 처음의 20 %, 즉 $\frac{1}{5}$ 이하가 된다고 하면

$a\left(\frac{4}{5}\right)^n\le \frac{1}{5}a$

양변을 a로 나누고 양변에 상용로그를 취하면

$\log\left(\frac{4}{5}\right)^n\le \log\frac{1}{5}$

$n\log\frac{8}{10}\le \log\frac{2}{10}$

$n(3\log 2-1)\le \log 2-1$

$\therefore n\ge \frac{\log 2-1}{3\log 2-1}=\frac{0.301-1}{3\times 0.301-1}=7.2\times\times$

따라서 남아 있는 불순물의 양이 처음의 20 % 이하가 되려면 여과기를 최소 8번 통과해야 한다.

연산 유형 **최종 점검하기** 66~67쪽

1 ③	**2** ④	**3** 9	**4** 2	**5** ⑤	**6** ②
7 $0<x<1$ 또는 $x>3$			**8** 4년	**9** $x=1$	**10** ③
11 ⑤	**12** ①	**13** $1<x\le 8$		**14** ③	**15** 4

1 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1}\times(\sqrt{3})^x-27^x=0$에서

$3^{-x^2-1}\times 3^{\frac{1}{2}x}-3^{3x}=0$

$3^{-x^2+\frac{1}{2}x-1}=3^{3x}$

$-x^2+\frac{1}{2}x-1=3x$이므로

$2x^2+5x+2=0,\ (x+2)(2x+1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

따라서 두 근의 차는

$-\frac{1}{2}-(-2)=\frac{3}{2}$

2 $2^x-2^{2-x}=3$에서

$2^x-\frac{4}{2^x}=3$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t-\frac{4}{t}=3$

$t^2-4=3t,\ t^2-3t-4=0$

$(t+1)(t-4)=0$

$\therefore t=4\ (\because t>0)$

즉, $2^x=4=2^2$이므로

$x=2$

따라서 $a=2$이므로

$\log_2 a=\log_2 2=1$

3 $x^x\times x^8-(x^x)^2=0$에서 $x^{x+8}=x^{2x}$

밑이 같으므로

(i) $x=1$

(ii) $x+8=2x$에서 $x=8$

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=8$

따라서 모든 근의 합은

$1+8=9$

4 지수가 같으므로

(i) $x+2=8$에서 $x=6$

(ii) $3x-1=0$에서 $x=\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=6$

따라서 모든 근의 곱은

$\frac{1}{3}\times 6=2$

5 $\left(\frac{1}{7}\right)^{x-1}<\left(\frac{1}{49}\right)^{2-x}$에서

$\left(\frac{1}{7}\right)^{x-1}<\left(\frac{1}{7}\right)^{4-2x}$

밑이 1보다 작으므로

$x-1>4-2x,\ 3x>5$

$\therefore x>\frac{5}{3}$

6 $2^{2x+1}-9\times2^x+4<0$에서

$2\times(2^x)^2-9\times2^x+4<0$

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$2t^2-9t+4<0$

$(2t-1)(t-4)<0 \qquad \therefore \frac{1}{2}<t<4$

즉, $\frac{1}{2}<2^x<4$이고 밑이 1보다 크므로

$-1<x<2$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$0+1=1$

7 (i) $0<x<1$일 때

$3x-1<x+5$에서 $2x<6 \qquad \therefore x<3$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

(ii) $x=1$일 때

부등식은 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때

$3x-1>x+5$에서 $2x>6 \qquad \therefore x>3$

(i), (ii), (iii)에서 $0<x<1$ 또는 $x>3$

8 n년 후에 전자 기기의 가치가 256만 원이 된다고 하면

$625(1-0.2)^n=256$

$\left(\frac{4}{5}\right)^n=\left(\frac{4}{5}\right)^4 \qquad \therefore n=4$

따라서 전자 기기의 가치가 처음으로 256만 원이 되는 것은 구매한 지 4년 후이다.

9 진수의 조건에서 $x>0$, $x\neq-8$

$\therefore x>0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\log_3 x+\log_9 (x+8)^2=2$에서

$\log_3 x+\log_3 (x+8)=2$

$\log_3 x(x+8)=\log_3 9$

따라서 $x(x+8)=9$이므로

$x^2+8x-9=0$, $(x+9)(x-1)=0$

$\therefore x=-9$ 또는 $x=1$

이때 ㉠에 의하여 구하는 해는

$x=1$

10 $(\log_2 4x)^2-2\log_2 8x^2=14$에서

$(2+\log_2 x)^2-2(3+2\log_2 x)=14$

$(\log_2 x)^2-16=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-16=0$, $(t+4)(t-4)=0$

$\therefore t=-4$ 또는 $t=4$

즉, $\log_2 x=-4$ 또는 $\log_2 x=4$이므로

$x=\frac{1}{16}$ 또는 $x=16$

따라서 모든 근의 곱은

$\frac{1}{16}\times16=1$

11 $x^{\log_2 x}=16x^3$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 16x^3$

$(\log_2 x)^2=4+3\log_2 x$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-3t-4=0$, $(t+1)(t-4)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

즉, $\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=4$이므로

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=16$

따라서 모든 근의 곱은

$\frac{1}{2}\times16=8$

12 진수의 조건에서 $x+2>0$, $x-1>0$

$\therefore x>1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\log_2 (x+2)+\log_2 (x-1)<2$에서

$\log_2 (x+2)(x-1)<\log_2 4$

밑이 1보다 크므로

$(x+2)(x-1)<4$

$x^2+x-6<0$, $(x+3)(x-2)<0$

$\therefore -3<x<2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로 $\beta-\alpha=1$

13 진수의 조건에서 $\log_2 x>0$, $x>0$

$\therefore x>1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\log_3 (\log_2 x)\le1$에서 $\log_2 x\le3$

$\therefore x\le8 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x\le8$

14 진수의 조건에서 $x>0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\log_{\frac{1}{3}} 3x\times\log_3 \frac{x}{9}>0$에서

$-\log_3 3x\times(\log_3 x-2)>0$

$(\log_3 x+1)(\log_3 x-2)<0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$(t+1)(t-2)<0 \qquad \therefore -1<t<2$

따라서 $-1<\log_3 x<2$이고 밑이 1보다 크므로

$\frac{1}{3}<x<9 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{3}<x<9$

따라서 $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=9$이므로 $\alpha\beta=3$

15 $2^x<10^{6-x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 2^x<\log 10^{6-x}$

$x\log 2<6-x$, $(\log 2+1)x<6$

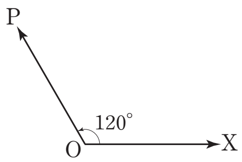
$\therefore x<\frac{6}{\log 2+1}=\frac{6}{0.3+1}=4.6\times\times$

따라서 부등식을 만족하는 가장 큰 정수 x의 값은 4이다.

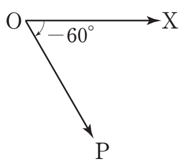
05 삼각함수

70~79쪽

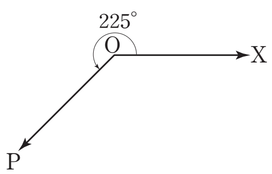
001 답



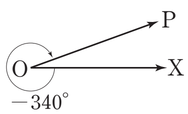
002 답



003 답



004 답



005 답 $\theta=360^\circ\times n+30^\circ$ (단, n은 정수)

006 답 $\theta=360^\circ\times n+125^\circ$ (단, n은 정수)

007 답 $\theta=360^\circ\times n-50^\circ$ (단, n은 정수)
또는 $\theta=360^\circ\times n+310^\circ$ (단, n은 정수)

008 답 $360^\circ\times n+120^\circ$

$480^\circ=360^\circ\times1+120^\circ$이므로
$360^\circ\times n+120^\circ$

009 답 $360^\circ\times n+45^\circ$

$765^\circ=360^\circ\times2+45^\circ$이므로
$360^\circ\times n+45^\circ$

010 답 $360^\circ\times n+30^\circ$

$-1050^\circ=360^\circ\times(-3)+30^\circ$이므로
$360^\circ\times n+30^\circ$

011 답 75°, 1

012 답 제3사분면

$930^\circ=360^\circ\times2+210^\circ$이므로 930°를 나타내는 동경은 제3사분면에 있다.

013 답 제2사분면

$-580^\circ=360^\circ\times(-2)+140^\circ$이므로 -580°를 나타내는 동경은 제2사분면에 있다.

014 답 제4사분면

$-1145^\circ=360^\circ\times(-4)+295^\circ$이므로 -1145°를 나타내는 동경은 제4사분면에 있다.

015 답 $\frac{\pi}{180}$, $\frac{\pi}{6}$

016 답 $\frac{\pi}{3}$

$60^\circ=60\times1^\circ=60\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$

017 답 $\frac{5}{12}\pi$

$75^\circ=75\times1^\circ=75\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{12}\pi$

018 답 $\frac{\pi}{2}$

$90^\circ=90\times1^\circ=90\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{2}$

019 답 $\frac{5}{6}\pi$

$150^\circ=150\times1^\circ=150\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{6}\pi$

020 답 $\frac{7}{4}\pi$

$315^\circ=315\times1^\circ=315\times\frac{\pi}{180}=\frac{7}{4}\pi$

021 답 180°, 45°

022 답 120°

$\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=120^\circ$

023 답 330°

$\frac{11}{6}\pi=\frac{11}{6}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=330^\circ$

024 답 105°

$\frac{7}{12}\pi=\frac{7}{12}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=105^\circ$

025 답 468°

$\frac{13}{5}\pi=\frac{13}{5}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=468^\circ$

026 답 -54°

$-\frac{3}{10}\pi=-\frac{3}{10}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=-54^\circ$

027 답 $2n\pi+\pi$

$5\pi=2\pi\times2+\pi$이므로
$2n\pi+\pi$

05

028 답 $2n\pi+\frac{3}{2}\pi$

$\frac{7}{2}\pi=2\pi\times1+\frac{3}{2}\pi$이므로

$2n\pi+\frac{3}{2}\pi$

029 답 $2n\pi+\frac{2}{3}\pi$

$\frac{14}{3}\pi=2\pi\times2+\frac{2}{3}\pi$이므로

$2n\pi+\frac{2}{3}\pi$

030 답 $2n\pi+\frac{11}{6}\pi$

$\frac{23}{6}\pi=2\pi\times1+\frac{11}{6}\pi$이므로

$2n\pi+\frac{11}{6}\pi$

031 답 $2n\pi+\pi$

$-7\pi=2\pi\times(-4)+\pi$이므로

$2n\pi+\pi$

032 답 $2n\pi+\frac{7}{5}\pi$

$-\frac{3}{5}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{7}{5}\pi$이므로

$2n\pi+\frac{7}{5}\pi$

033 답 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{16}{3}\pi$

034 답 $l=\frac{3}{2}\pi$, $S=\frac{3}{2}\pi$

$l=2\times\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

$S=\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

035 답 $l=6\pi$, $S=27\pi$

$l=9\times\frac{2}{3}\pi=6\pi$

$S=\frac{1}{2}\times9^2\times\frac{2}{3}\pi=27\pi$

036 답 $l=16\pi$, $S=96\pi$

$240°=\frac{4}{3}\pi$이므로

$l=12\times\frac{4}{3}\pi=16\pi$

$S=\frac{1}{2}\times12^2\times\frac{4}{3}\pi=96\pi$

037 답 $r=8$, $S=8\pi$

$2\pi=r\times\frac{\pi}{4}$이므로 $r=8$

$\therefore S=\frac{1}{2}\times8\times2\pi=8\pi$

038 답 $\theta=\frac{\pi}{3}$, $l=\pi$

$\frac{3}{2}\pi=\frac{1}{2}\times3^2\times\theta$이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$

$\therefore l=3\times\frac{\pi}{3}=\pi$

039 답 $r=5$, $\theta=\frac{4}{5}$

$10=\frac{1}{2}\times r\times4$이므로 $r=5$

따라서 $4=5\times\theta$이므로 $\theta=\frac{4}{5}$

040 답 36

부채꼴의 반지름의 길이가 6이고 둘레의 길이가 24이므로 호의 길이를 l이라고 하면

$6\times2+l=24 \qquad \therefore l=12$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times12=36$

041 답 $2r$, $2r$, 3, 9, 9, 3

042 답 5

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

$2r+l=20 \qquad \therefore l=20-2r$

$\therefore S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(20-2r)$

$\quad=-(r-5)^2+25$

따라서 부채꼴의 넓이의 최댓값은 25이고 그때의 반지름의 길이는 5이다.

043 답 1600 m^2

부채꼴의 반지름의 길이를 r m, 호의 길이를 l m, 넓이를 S m^2라고 하면

$2r+l=160 \qquad \therefore l=160-2r$

$\therefore S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(160-2r)$

$\quad=-(r-40)^2+1600$

따라서 꽃밭의 넓이의 최댓값은 1600 m^2이다.

044 답 3, 5, $-\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $-\frac{4}{3}$

045 답 $\sin\theta=\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$, $\tan\theta=-\frac{12}{5}$

$\overline{OP}=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$이므로

$\sin\theta=\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$, $\tan\theta=-\frac{12}{5}$

046 답 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{3}{4}$

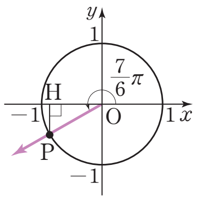
$\overline{OP}=\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}=10$이므로

$\sin\theta=\frac{-6}{10}=-\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{-8}{10}=-\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{-6}{-8}=\frac{3}{4}$

047 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1

048 답 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{7}{6}\pi$를 나타내는 동경과 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{PH}=\overline{OP}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,

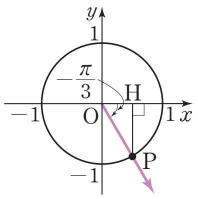
$\overline{OH}=\overline{OP}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$이므로

$\sin\theta=-\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

049 답 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 $-\frac{\pi}{3}$를 나타내는 동경과 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{PH}=\overline{OP}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\overline{OH}=\overline{OP}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$

050 답 1, >, >, >

051 답 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

$\frac{8}{3}\pi$는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

052 답 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

$-\frac{3}{4}\pi$는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

053 답 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

$-\frac{5}{12}\pi$는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

054 답 제2사분면

055 답 제3사분면

056 답 제4사분면

057 답 제1사분면 또는 제3사분면

$\sin\theta\cos\theta>0$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이면 θ는 제1사분면의 각이고

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이면 θ는 제3사분면의 각이므로

θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

058 답 제3사분면 또는 제4사분면

$\cos\theta\tan\theta<0$에서

$\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

$\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$이면 θ는 제4사분면의 각이고

$\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$이면 θ는 제3사분면의 각이므로

θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

059 답 제2사분면

(i) $\sin\theta\cos\theta<0$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이면 θ는 제2사분면의 각이고

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이면 θ는 제4사분면의 각이므로

θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\sin\theta\tan\theta<0$에서

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$이면 θ는 제2사분면의 각이고

$\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$이면 θ는 제3사분면의 각이므로

θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제2사분면의 각이다.

060 답 1, 1, 1, $\frac{16}{25}$, <, $-\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{4}$

061 답 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

이때 θ가 제1사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$

$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

062 답 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\theta=-2\sqrt{2}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$

$\therefore \sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}}=-2\sqrt{2}$

063 답 $\cos\theta=\frac{5}{13}$, $\tan\theta=-\frac{12}{5}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2=\frac{25}{169}$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로 $\cos\theta>0$

$\therefore \cos\theta=\frac{5}{13}$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}=-\frac{12}{5}$

064 답 2

$(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$+(\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$=2\times1=2$

065 답 $\frac{1}{\cos\theta}$

$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}-\tan\theta=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta-\sin\theta(1-\sin\theta)}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$

$=\frac{\cos^2\theta-\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$

$=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$

$=\frac{1}{\cos\theta}$

066 답 $\frac{2}{\sin\theta}$

$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$=\frac{\sin\theta(1+\cos\theta)+\sin\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

$=\frac{\sin\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$

$=\frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\sin\theta}$

067 답 $\frac{1}{4}$, 1, 1, $\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{8}$

068 답 $-\frac{4}{3}$

$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}}=-\frac{4}{3}$

069 답 $-\frac{8}{3}$

$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{-\frac{3}{8}}=-\frac{8}{3}$

070 답 $\frac{11}{16}$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}=\frac{11}{16}$

071 답 $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\times\frac{2}{5}=\frac{9}{5}$

이때 θ가 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$

072 답 $-\sqrt{2}$

$(\cos\theta-\sin\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta-\sin\theta=-\sqrt{2}$

073 답 $-\frac{4}{3}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{3}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$이므로

$\frac{1}{9}=1+2\times\frac{k}{3}$, $\frac{2}{3}k=-\frac{8}{9}$

$\therefore k=-\frac{4}{3}$

074 답 $-\frac{7}{4}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)=-\frac{1}{2}$ ······ ㉠

$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=\frac{k}{2}$ ······ ㉡

㉠에서 $2\sin\theta=-\frac{1}{2}$ $\therefore \sin\theta=-\frac{1}{4}$

㉡에서 $\sin^2\theta-\cos^2\theta=\frac{k}{2}$

$\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)=\frac{k}{2}$

$2\sin^2\theta-1=\frac{k}{2}$

$\sin\theta=-\frac{1}{4}$을 대입하면

$2\times\frac{1}{16}-1=\frac{k}{2}$, $\frac{k}{2}=-\frac{7}{8}$

$\therefore k=-\frac{7}{4}$

연산 유형 **최종 점검하기** 80~81쪽

1 ⑤ **2** ③ **3** 4π **4** ④ **5** $-\frac{19}{20}$ **6** ③
7 ④ **8** ⑤ **9** ② **10** ⑤ **11** $\frac{2\sqrt{10}}{5}$
12 ①

1 ① $550°=360°\times1+190°$이므로 $550°$를 나타내는 동경은 제3사분면에 있다.
② $735°=360°\times2+15°$이므로 $735°$를 나타내는 동경은 제1사분면에 있다.
③ $1020°=360°\times2+300°$이므로 $1020°$를 나타내는 동경은 제4사분면에 있다.
④ $-510°=360°\times(-2)+210°$이므로 $-510°$를 나타내는 동경은 제3사분면에 있다.
⑤ $-920°=360°\times(-3)+160°$이므로 $-920°$를 나타내는 동경은 제2사분면에 있다.

2 ③ $220°=220\times1°=220\times\frac{\pi}{180}=\frac{11}{9}\pi$

3 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라고 하면
$12\pi=\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{2}{3}\pi$
$r^2=36$ $\quad\therefore r=6\ (\because r>0)$
$\therefore l=6\times\frac{2}{3}\pi=4\pi$

4 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면
$2r+l=24$ $\quad\therefore l=24-2r$
$\therefore S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(24-2r)$
$=-(r-6)^2+36$
따라서 부채꼴의 넓이의 최댓값은 36이고 그때의 반지름의 길이는 6이다.

5 $\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$이므로
$\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$, $\tan\theta=-\frac{3}{4}$
$\therefore \sin\theta+\cos\theta+\tan\theta=-\frac{19}{20}$

6 $\sin\theta\cos\theta>0$, $\sin\theta+\cos\theta<0$을 모두 만족하려면
$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이어야 한다.
따라서 θ는 제3사분면의 각이다.

7 θ가 제4사분면의 각이므로
$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$
$\therefore |\sin\theta-\cos\theta|-\sqrt{\sin^2\theta}=-(\sin\theta-\cos\theta)-(-\sin\theta)$
$=-\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta$
$=\cos\theta$

8 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로
$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$
이때 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$
$\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{15}}{4}$
$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}}=\sqrt{15}$
$\therefore \sin\theta+\tan\theta=\frac{3\sqrt{15}}{4}$

9 $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+(1-\sin\theta)^2}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$
$=\frac{\cos^2\theta+(1-2\sin\theta+\sin^2\theta)}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$
$=\frac{2(1-\sin\theta)}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$
$=\frac{2}{\cos\theta}$

10 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면
$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$
$\therefore \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$
$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{9}{4}$

11 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$
$=1-2\times\left(-\frac{3}{10}\right)=\frac{8}{5}$
이때 θ가 제2사분면의 각이므로
$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$
$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

12 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(\cos\theta+\sin\theta)+(\cos\theta-\sin\theta)=\frac{1}{4}$ ······ ㉠
$(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=\frac{k}{4}$ ······ ㉡
㉠에서 $2\cos\theta=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore \cos\theta=\frac{1}{8}$
㉡에서 $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{k}{4}$
$\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)=\frac{k}{4}$
$2\cos^2\theta-1=\frac{k}{4}$
$\cos\theta=\frac{1}{8}$을 대입하면
$2\times\frac{1}{64}-1=\frac{k}{4}$, $\frac{k}{4}=-\frac{31}{32}$
$\therefore k=-\frac{31}{8}$

06 삼각함수의 그래프

84~93쪽

001 답 $1,\ -\pi,\ \frac{\pi}{2},\ 2\pi$

002 답 $-1,\ 1$

003 답 원점

004 답 2π

005 답 $-\frac{\pi}{2},\ \pi,\ -1$

006 답 $-1,\ 1$

007 답 y축

008 답 2π

009 답 $-\frac{\pi}{2}$

010 답 $-\pi,\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$

011 답 $n\pi+\frac{\pi}{2}$

012 답 원점

013 답 π

014 답 $n\pi+\frac{\pi}{2}$

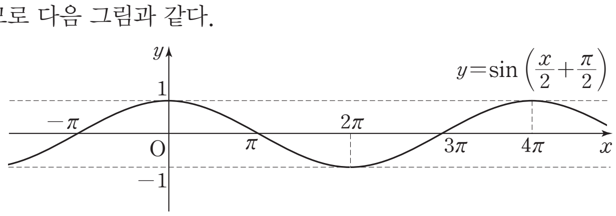
015 답 $-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \pi,\ \pi,\ \frac{1}{2},\ \pi$

016 답 **최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: 4π, 그래프는 풀이 참고**

$-1\le\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\le1$이므로 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

또 $\sin\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)=\sin\frac{1}{2}(x+4\pi)$이므로 주기는 4π이다.

따라서 함수 $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{1}{2}(x+\pi)$의 그래프는 함수 $y=\sin\frac{x}{2}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\pi$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

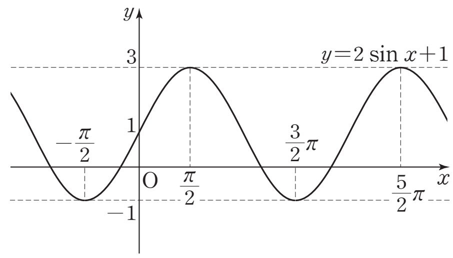


017 답 **최댓값: 3, 최솟값: -1, 주기: 2π, 그래프는 풀이 참고**

$-1\le\sin x\le1$에서 $-1\le2\sin x+1\le3$이므로 최댓값은 3, 최솟값은 -1이다.

또 $\sin x=\sin(x+2\pi)$이므로 주기는 2π이다.

따라서 함수 $y=2\sin x+1$의 그래프는 함수 $y=2\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

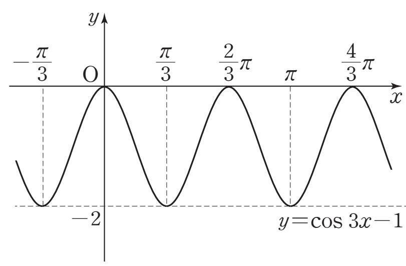


018 답 **최댓값: 0, 최솟값: -2, 주기: $\frac{2}{3}\pi$, 그래프는 풀이 참고**

$-1\le\cos3x\le1$에서 $-2\le\cos3x-1\le0$이므로 최댓값은 0, 최솟값은 -2이다.

또 $\cos3x=\cos(3x+2\pi)=\cos3\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$이므로 주기는 $\frac{2}{3}\pi$이다.

따라서 함수 $y=\cos3x-1$의 그래프는 함수 $y=\cos3x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

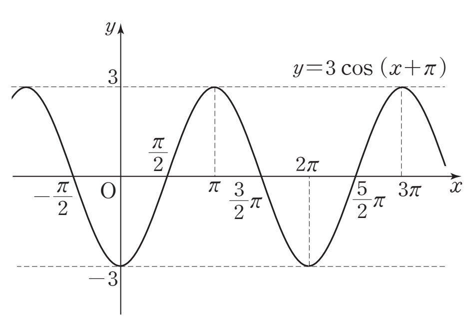


019 답 **최댓값: 3, 최솟값: -3, 주기: 2π, 그래프는 풀이 참고**

$-1\le\cos(x+\pi)\le1$에서 $-3\le3\cos(x+\pi)\le3$이므로 최댓값은 3, 최솟값은 -3이다.

또 $\cos x=\cos(x+2\pi)$이므로 주기는 2π이다.

따라서 함수 $y=3\cos(x+\pi)$의 그래프는 함수 $y=3\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\pi$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

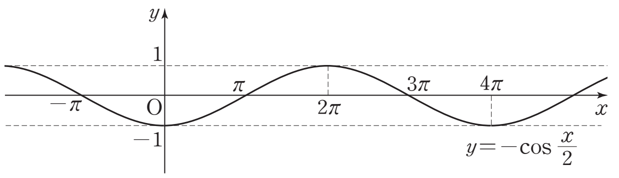


020 답 **최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: 4π, 그래프는 풀이 참고**

$-1\le\cos\frac{x}{2}\le1$에서 $-1\le-\cos\frac{x}{2}\le1$이므로 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

또 $\cos\frac{x}{2}=\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)=\cos\frac{1}{2}(x+4\pi)$이므로 주기는 4π이다.

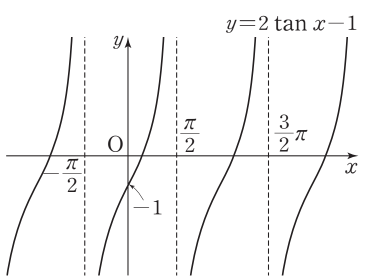
따라서 함수 $y=-\cos\frac{x}{2}$의 그래프는 함수 $y=\cos\frac{x}{2}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



021 답 **2π, 2π, π, 2π**

022 답 **주기: π, 그래프는 풀이 참고**

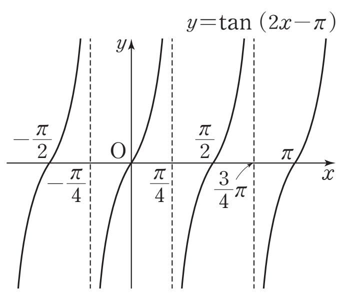
$\tan x=\tan(x+\pi)$이므로 주기는 π이다.
따라서 함수 $y=2\tan x-1$의 그래프는 함수 $y=2\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



023 답 **주기: $\frac{\pi}{2}$, 그래프는 풀이 참고**

$\tan 2x=\tan(2x+\pi)=\tan 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$이므로 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

따라서 함수 $y=\tan(2x-\pi)=\tan 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



024 답 **$\frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2}$**

025 답 **$\frac{\sqrt{2}}{2}$**

$$\cos\frac{17}{4}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

026 답 **$\sqrt{3}$**

$$\tan\frac{13}{3}\pi=\tan\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

027 답 **$-\frac{\sqrt{3}}{2}$**

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

028 답 **$\frac{\sqrt{3}}{2}$**

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

029 답 **-1**

$$\tan(-45^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$$

030 답 **$-\frac{\sqrt{2}}{2}$**

$$\sin\frac{5}{4}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

031 답 **$\frac{1}{2}$**

$$\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

032 답 **$-\frac{\sqrt{3}}{2}$**

$$\cos\frac{7}{6}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

033 답 **$-\frac{1}{2}$**

$$\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

034 답 **1**

$$\tan\frac{5}{4}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

035 답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\tan\frac{5}{6}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

036 답 $-\frac{1}{2}$

$$\sin(-390^\circ)=\sin(-360^\circ-30^\circ)$$
$$=\sin(-30^\circ)$$
$$=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

037 답 $\frac{1}{2}$

$$\cos(-780^\circ)=\cos(-720^\circ-60^\circ)$$
$$=\cos(-60^\circ)$$
$$=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

038 답 $-\sqrt{3}$

$$\tan\left(-\frac{10}{3}\pi\right)=\tan\left(-3\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$$

039 답 ○

040 답 ○

041 답 ×

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}$$

042 답 ×

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}$$

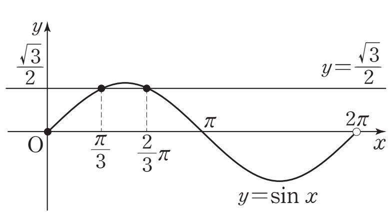
043 답 ×

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$$

044 답 ○

045 답 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

$0\le x<2\pi$에서 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$은 다음 그림과 같다.



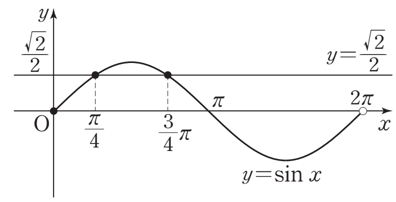
따라서 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$이므로 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

046 답 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

$2\sin x=\sqrt{2}$에서 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$는 다음 그림과 같다.



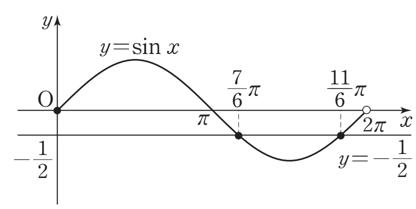
따라서 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$이므로 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

047 답 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

$2\sin x+1=0$에서 $\sin x=-\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$은 다음 그림과 같다.

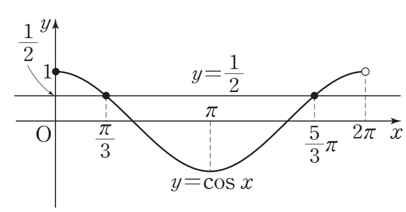


따라서 교점의 x좌표는 $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$이므로 방정식의 해는

$x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

048 답 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

$0\le x<2\pi$에서 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 다음 그림과 같다.



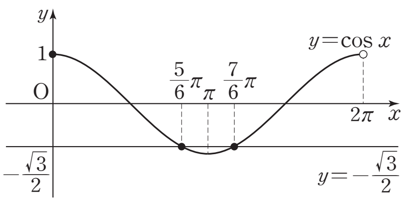
따라서 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$이므로 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

049 답 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

$2\cos x=-\sqrt{3}$에서 $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$은 다음 그림과 같다.



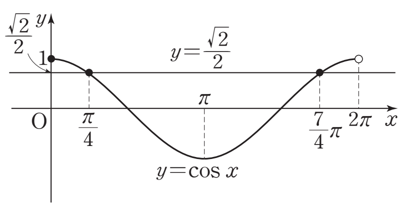
따라서 교점의 x좌표는 $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$이므로 방정식의 해는

$x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

050 답 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

$\sqrt{2}\cos x-1=0$에서 $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$는 다음 그림과 같다.



따라서 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{4}\pi$이므로 방정식의 해는

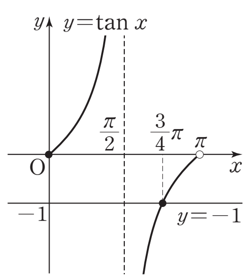
$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

051 답 $x=\frac{3}{4}\pi$

$0\le x<\pi$에서 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-1$은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점의 x좌표는 $\frac{3}{4}\pi$이므로 방정식의 해는

$x=\frac{3}{4}\pi$



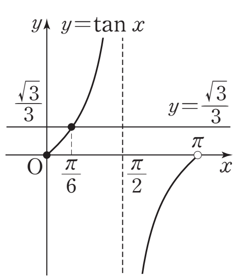
052 답 $x=\frac{\pi}{6}$

$\sqrt{3}\tan x=1$에서 $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$0\le x<\pi$에서 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{6}$이므로 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{6}$



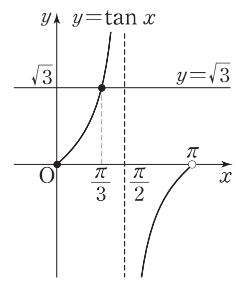
053 답 $x=\frac{\pi}{3}$

$\tan x-\sqrt{3}=0$에서 $\tan x=\sqrt{3}$

$0\le x<\pi$에서 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{3}$이므로 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{3}$



054 답 1, 1, 1, 1, 1, 1, $\frac{4}{3}\pi$, 0, $\frac{4}{3}\pi$, 0, $\frac{4}{3}\pi$

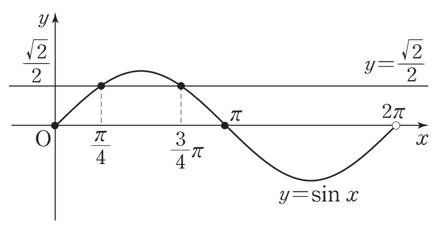
055 답 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\pi$

$\sqrt{2}\sin^2 x-\sin x=0$에서

$\sin x(\sqrt{2}\sin x-1)=0$

$\therefore \sin x=0$ 또는 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=0$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$는 다음 그림과 같다.



따라서 교점의 x좌표는 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, π이므로 방정식의 해는

$x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\pi$

056 답 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로

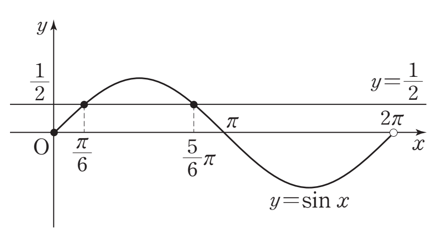
$2(1-\sin^2 x)-5\sin x+1=0$

$2\sin^2 x+5\sin x-3=0$

$(2\sin x-1)(\sin x+3)=0$

$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$ ($\because -1\le\sin x\le 1$)

$0\le x<2\pi$에서 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 다음 그림과 같다.

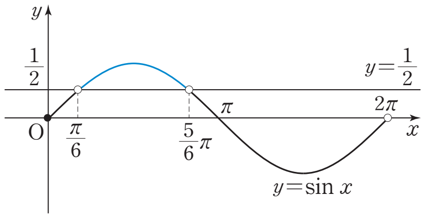


따라서 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$이므로 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

057 답 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$

$0\le x<2\pi$에서 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 다음 그림과 같다.



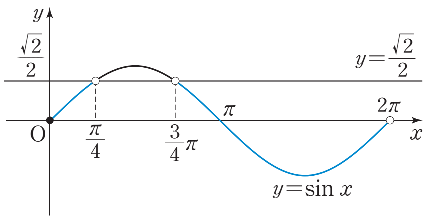
따라서 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하면 부등식의 해는

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$

058 답 $0\le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi<x<2\pi$

$\sqrt{2}\sin x<1$에서 $\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$는 다음 그림과 같다.



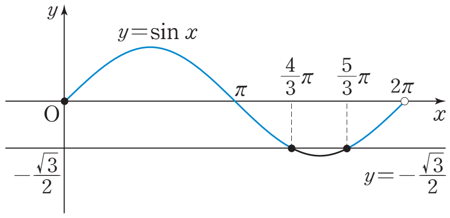
따라서 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하면 부등식의 해는

$0\le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi<x<2\pi$

059 답 $0\le x\le\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{5}{3}\pi\le x<2\pi$

$2\sin x+\sqrt{3}\ge 0$에서 $\sin x\ge-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$은 다음 그림과 같다.

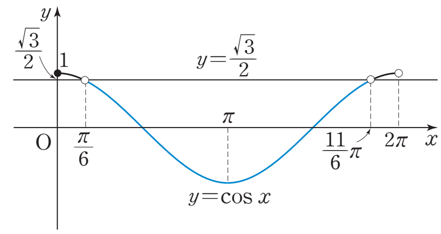


따라서 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$과 만나거나 위쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하면 부등식의 해는

$0\le x\le\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{5}{3}\pi\le x<2\pi$

060 답 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{11}{6}\pi$

$0\le x<2\pi$에서 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$은 다음 그림과 같다.



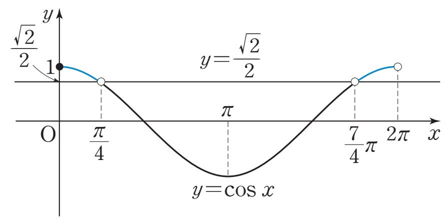
따라서 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하면 부등식의 해는

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{11}{6}\pi$

061 답 $0\le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{7}{4}\pi<x<2\pi$

$2\cos x>\sqrt{2}$에서 $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$는 다음 그림과 같다.



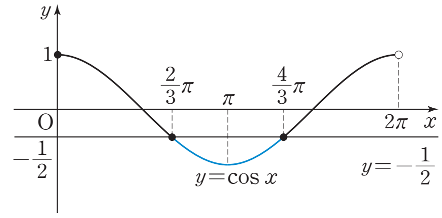
따라서 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하면 부등식의 해는

$0\le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{7}{4}\pi<x<2\pi$

062 답 $\frac{2}{3}\pi\le x\le\frac{4}{3}\pi$

$2\cos x+1\le 0$에서 $\cos x\le-\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$은 다음 그림과 같다.

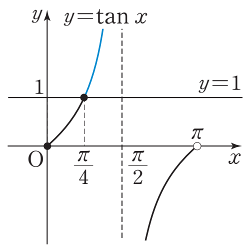


따라서 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$과 만나거나 아래쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하면 부등식의 해는

$\frac{2}{3}\pi\le x\le\frac{4}{3}\pi$

063 답 $\frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{2}$

$0 \le x < \pi$에서 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=1$은 오른쪽 그림과 같다.



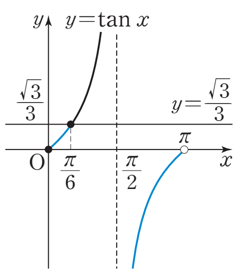
따라서 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=1$과 만나거나 위쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하면 부등식의 해는

$\frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{2}$

064 답 $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

$3\tan x \le \sqrt{3}$에서 $\tan x \le \frac{\sqrt{3}}{3}$

$0 \le x < \pi$에서 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$은 오른쪽 그림과 같다.



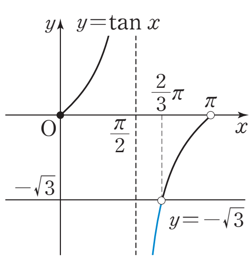
따라서 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$과 만나거나 아래쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하면 부등식의 해는

$0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

065 답 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2}{3}\pi$

$\tan x + \sqrt{3} < 0$에서 $\tan x < -\sqrt{3}$

$0 \le x < \pi$에서 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-\sqrt{3}$은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=-\sqrt{3}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하면 부등식의 해는

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{2}{3}\pi$

066 답 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, $\frac{\pi}{2}$, 0, 1, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, π

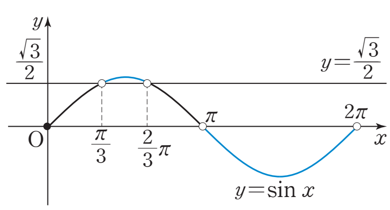
067 답 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\pi < x < 2\pi$

$2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x > 0$에서

$\sin x(2\sin x - \sqrt{3}) > 0$

$\therefore \sin x < 0$ 또는 $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \le x < 2\pi$에서 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=0$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$은 다음 그림과 같다.



따라서 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=0$보다 아래쪽에 있거나 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하면 부등식의 해는

$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\pi < x < 2\pi$

068 답 $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $\frac{5}{3}\pi \le x < 2\pi$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$이므로

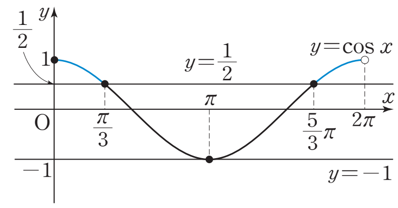
$2(1-\cos^2 x) - \cos x - 1 \le 0$

$2\cos^2 x + \cos x - 1 \ge 0$

$(\cos x + 1)(2\cos x - 1) \ge 0$

$\therefore \cos x \le -1$ 또는 $\cos x \ge \frac{1}{2}$

$0 \le x < 2\pi$에서 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-1$, $y=\frac{1}{2}$은 다음 그림과 같다.



따라서 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-1$과 만나거나 아래쪽에 있거나 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나거나 위쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하면 부등식의 해는

$0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $\frac{5}{3}\pi \le x < 2\pi$

연산 유형 **최종 점검하기** 94~95쪽

1 ③	**2** ⑤	**3** ④	**4** π	**5** ④	**6** ③
7 ㄱ, ㄷ	**8** ②	**9** ⑤	**10** ④	**11** ①	

12 $0 \le x < \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$

1 ③ 최댓값은 $|2|-1=1$이다.

2 ① 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$을 지난다.

② 주기는 $\frac{\pi}{|3|}=\frac{\pi}{3}$이다.

③ 최댓값은 없다.

④ 그래프는 $y=\tan 3x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

3 각각의 함수의 주기를 구하면

① $\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$

④ $\frac{2\pi}{|2|}=\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{|2|}=\frac{\pi}{2}$

따라서 주기가 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

4 주어진 그래프에서 최댓값은 1, 최솟값은 -1이고 $a>0$이므로

$a=1$

또 주어진 그래프에서 주기가 2π이고 $b>0$이므로

$b=1$

따라서 $y=\cos(x-c)$이고 주어진 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 것이므로

$c=\pi$

$\therefore abc=1\times1\times\pi=\pi$

5 ④ $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

6 $\sin\frac{2}{3}\pi\times\tan\frac{25}{4}\pi-\cos\frac{11}{6}\pi$

$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\times\tan\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{3}\times\tan\frac{\pi}{4}-\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{3}\times\tan\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=0$

7 ㄱ. $\sin(6\pi+x)=\sin x$

ㄴ. $\cos(-x)=\cos x$

ㄷ. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

ㄹ. $\sin(\pi+x)=-\sin x$

따라서 보기 중 $\sin x$와 같은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

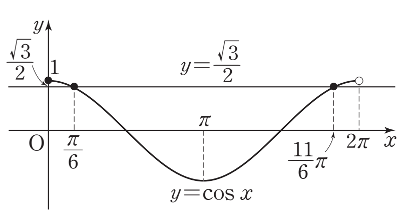
8 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin(\pi-x)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)-\cos(4\pi-x)$

$=\cos x-\sin x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos(-x)$

$=\cos x-\sin x+\sin x-\cos x$

$=0$

9 $0\le x<2\pi$에서 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$은 다음 그림과 같다.



이때 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11}{6}\pi$이므로 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

따라서 모든 근의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{11}{6}\pi=2\pi$

10 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로

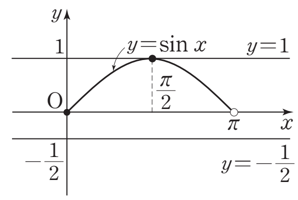
$2(1-\sin^2 x)+\sin x-1=0$

$2\sin^2 x-\sin x-1=0$

$(2\sin x+1)(\sin x-1)=0$

$\therefore \sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

$0\le x<\pi$에서 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$, $y=1$은 다음 그림과 같다.



이때 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{2}$이므로 방정식의 해는 $x=\frac{\pi}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{2}$이므로

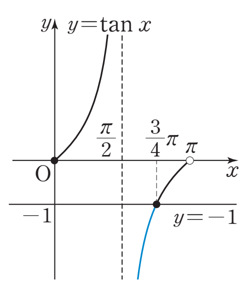
$\tan\frac{\alpha}{2}=\tan\frac{\pi}{4}=1$

11 $\tan x+1\le0$에서 $\tan x\le-1$

$0\le x<\pi$에서 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-1$은 오른쪽 그림과 같다.

이때 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=-1$과 만나거나 아래쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하면 부등식의 해는

$\frac{\pi}{2}<x\le\frac{3}{4}\pi$



따라서 $a=\frac{\pi}{2}$, $b=\frac{3}{4}\pi$이므로

$b-a=\frac{\pi}{4}$

12 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로

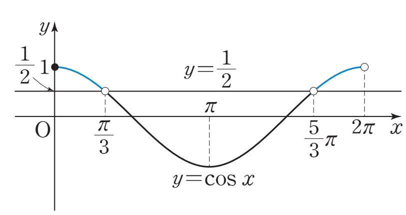
$2(1-\cos^2 x)-3\cos x<0$

$2\cos^2 x+3\cos x-2>0$

$(\cos x+2)(2\cos x-1)>0$

$\therefore \cos x>\frac{1}{2}$ ($\because -1\le\cos x\le1$)

$0\le x<2\pi$에서 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 다음 그림과 같다.



따라서 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하면 부등식의 해는

$0\le x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi<x<2\pi$

07 사인법칙과 코사인법칙

98~103쪽

001 답 a, a, a, a, $\frac{1}{2}$, $3\sqrt{2}$

002 답 $4\sqrt{3}$

$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$이므로 $\frac{b}{\sin 30^\circ}=\frac{12}{\sin 60^\circ}$

$b\sin 60^\circ=12\sin 30^\circ$

$\frac{\sqrt{3}}{2}b=12\times\frac{1}{2}$ $\quad\therefore b=4\sqrt{3}$

003 답 $\sqrt{6}$

$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$이므로 $\frac{3}{\sin 60^\circ}=\frac{c}{\sin 45^\circ}$

$3\sin 45^\circ=c\sin 60^\circ$

$3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}c$ $\quad\therefore c=\sqrt{6}$

004 답 A, A, A, $\sqrt{2}$, 1, 90°

005 답 30°

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$이므로 $\frac{3\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}=\frac{3}{\sin B}$

$3\sqrt{2}\sin B=3\sin 135^\circ$

$\therefore \sin B=3\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<B<45^\circ$이므로 $B=30^\circ$

006 답 60° 또는 120°

$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$이므로 $\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{\sin C}$

$\sqrt{2}\sin C=\sqrt{6}\sin 30^\circ$

$\therefore \sin C=\sqrt{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<C<150^\circ$이므로 $C=60^\circ$ 또는 $C=120^\circ$

007 답 $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$

008 답 2

$B=180^\circ-(A+C)=180^\circ-(105^\circ+45^\circ)=30^\circ$

$\frac{b}{\sin B}=2R$이므로 $\frac{2}{\sin 30^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{2}{2\sin 30^\circ}=\frac{2}{2\times\frac{1}{2}}=2$

009 답 $\sqrt{2}$

$\frac{a}{\sin A}=2R$이므로 $\frac{a}{\sin 45^\circ}=2\times 1$

$\therefore a=2\sin 45^\circ=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

010 답 60° 또는 120°

$\frac{c}{\sin C}=2R$이므로 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin C}=2\times 2$

$\therefore \sin C=2\sqrt{3}\times\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=60^\circ$ 또는 $C=120^\circ$

011 답 b, $2R$, b, $2R$, c^2, 90°, 직각

012 답 $a=b$인 이등변삼각형

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$

이를 주어진 식에 대입하면

$a\times\frac{a}{2R}=b\times\frac{b}{2R}$ $\quad\therefore a^2=b^2$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 $a=b$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

013 답 $B=90^\circ$인 직각삼각형

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 주어진 식에 대입하면

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2$ $\quad\therefore a^2+c^2=b^2$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

014 답 $\frac{1}{2}$, 12, $2\sqrt{3}$

015 답 $\sqrt{5}$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$이므로

$b^2=(2\sqrt{2})^2+3^2-2\times 2\sqrt{2}\times 3\times\cos 45^\circ$

$=8+9-12\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5$

$\therefore b=\sqrt{5}$ ($\because b>0$)

016 답 1

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$이므로

$c^2=2^2+(\sqrt{3})^2-2\times 2\times\sqrt{3}\times\cos 30^\circ$

$=4+3-4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$

$\therefore c=1$ ($\because c>0$)

017 답 c, a, 5, 3, $\frac{4}{5}$

018 답 $\frac{2}{3}$

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\frac{1^2+3^2-(\sqrt{6})^2}{2\times 1\times 3}=\frac{2}{3}$

019 답 **60°**

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{2^2+4^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times2\times4}=\dfrac{1}{2}$

이때 $0°<A<180°$이므로

$A=60°$

020 답 **120°**

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\dfrac{1}{2}$

이때 $0°<B<180°$이므로

$B=120°$

021 답 **6**

삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}\times\sin 60°$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6$

022 답 **9**

삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times6\times3\sqrt{2}\times\sin 45°$

$=\dfrac{1}{2}\times6\times3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=9$

023 답 **14**

삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\times8\times7\times\sin 150°$

$=\dfrac{1}{2}\times8\times7\times\dfrac{1}{2}=14$

024 답 **8, 9, $\dfrac{2}{7}$, $\dfrac{2}{7}$, $\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$, $\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$, $12\sqrt{5}$**

025 답 **$\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$**

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{4^2+5^2-6^2}{2\times4\times5}=\dfrac{1}{8}$

$\therefore \sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times4\times5\times\dfrac{3\sqrt{7}}{8}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

026 답 **$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$**

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\times2\times3}=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore \sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times2\times3\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

027 답 **$12\sqrt{3}$**

평행사변형 ABCD의 넓이는

$4\times6\times\sin 60°=4\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$

028 답 **10**

평행사변형 ABCD의 넓이는

$4\times5\times\sin 30°=4\times5\times\dfrac{1}{2}=10$

029 답 **12**

$B=180°-135°=45°$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$3\times4\sqrt{2}\times\sin 45°=3\times4\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=12$

030 답 **15**

$B=D=150°$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$5\times6\times\sin 150°=5\times6\times\dfrac{1}{2}=15$

031 답 **$12\sqrt{3}$**

사각형 ABCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times6\times8\times\sin 120°=\dfrac{1}{2}\times6\times8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$

032 답 **5**

사각형 ABCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times5\times4\times\sin 150°=\dfrac{1}{2}\times5\times4\times\dfrac{1}{2}=5$

033 답 **8**

사각형 ABCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}\times\sin 45°=\dfrac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=8$

034 답 **48, $4\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$, $13\sqrt{3}$**

035 답 **$\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$**

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=5^2+3^2-2\times5\times3\times\cos 120°$

$=25+9-30\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=49$

$\therefore \overline{BD}=7$ ($\because \overline{BD}>0$)

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\triangle ABD+\triangle BCD=\dfrac{1}{2}\times5\times3\times\sin 120°+\dfrac{1}{2}\times5\times7\times\sin 60°$

$=\dfrac{1}{2}\times5\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\times5\times7\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}+\dfrac{35\sqrt{3}}{4}$

$=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$

036 답 18

삼각형 ABD에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BD}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{5^2+6^2-5^2}{2\times5\times6}=\frac{3}{5}$

$\therefore \sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\triangle ABD+\triangle BCD=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times5\times6\times\sin C$

$=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{4}{5}$

$=6+12=18$

연산 유형 최종 점검하기

104~105쪽

1 $4\sqrt{2}$	2 ⑤	3 ⑤	4 $a=c$인 이등변삼각형	
5 ①	6 2	7 ②	8 ③	9 $135°$	10 ②
11 ②	12 $30°$	13 44		

1 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$이므로 $\frac{a}{\sin 45°}=\frac{4\sqrt{3}}{\sin 60°}$

$a\sin 60°=4\sqrt{3}\sin 45°$

$\frac{\sqrt{3}}{2}a=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\therefore a=4\sqrt{2}$

2 $\frac{\overline{AC}}{\sin B}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}$이므로 $\frac{4\sqrt{2}}{\sin B}=\frac{6}{\sin 30°}$

$4\sqrt{2}\sin 30°=6\sin B$

$\therefore \sin B=4\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

이때 $0°<B<90°$이므로

$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

3 $C=180°-(A+B)=180°-(45°+105°)=30°$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$\frac{c}{\sin C}=2R$이므로 $\frac{6}{\sin 30°}=2R$

$\therefore R=\frac{6}{2\sin 30°}=\frac{6}{2\times\frac{1}{2}}=6$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi\times6^2=36\pi$

4 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$\sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$ ...... ㉠

또 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 주어진 식에 대입하면

$\frac{b}{2R}=2\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{c}{2R}$ $\quad\therefore a^2=c^2$

이때 $a>0$, $c>0$이므로 $a=c$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

5 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$이므로

$c^2=3^2+(2\sqrt{3})^2-2\times3\times2\sqrt{3}\times\cos 30°$

$=9+12-12\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

$\therefore c=\sqrt{3}$ ($\because c>0$)

6 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$이므로

$a^2=4^2+(2\sqrt{2})^2-2\times4\times2\sqrt{2}\times\cos 45°$

$=16+8-16\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8$

$\therefore a=2\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$\frac{a}{\sin A}=2R$이므로 $\frac{2\sqrt{2}}{\sin 45°}=2R$

$\therefore R=\frac{2\sqrt{2}}{2\sin 45°}=\frac{2\sqrt{2}}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=2$

7 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{7^2+8^2-6^2}{2\times7\times8}=\frac{11}{16}$

8 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{6}\times\sin 45°$

$=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{3}$

9 $\frac{1}{2}\times6\times10\times\sin A=15\sqrt{2}$이므로 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $A>90°$이므로 $A=135°$

10 $\cos B=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$

이때 $0°<B<90°$이므로 $B=60°$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times8\times\sin 60°=\frac{1}{2}\times5\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$

11 $4\times\overline{BC}\times\sin 45°=10\sqrt{2}$이므로

$4\times\overline{BC}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}$ $\quad\therefore \overline{BC}=5$

12 $\frac{1}{2}\times6\times9\times\sin\theta=\frac{27}{2}$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{2}$

이때 $0°<\theta<90°$이므로 $\theta=30°$

13 삼각형 ACD에서 $\angle CAD=180°-(90°+45°)=45°$

$\therefore \overline{AC}=\overline{CD}=8$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{1}{2}\times6\times8\times\sin 30°+\frac{1}{2}\times8\times8$

$=\frac{1}{2}\times6\times8\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times8\times8$

$=12+32=44$

08 등차수열과 등비수열

108~122쪽

001 답 **3, 5, 7, 9, 11**

$a_n=2n+1$에 n 대신 1, 2, 3, 4, 5를 대입하면

$a_1=2\times1+1=3$

$a_2=2\times2+1=5$

$a_3=2\times3+1=7$

$a_4=2\times4+1=9$

$a_5=2\times5+1=11$

002 답 **-2, -2, 0, 4, 10**

$a_n=n^2-3n$에 n 대신 1, 2, 3, 4, 5를 대입하면

$a_1=1^2-3\times1=-2$

$a_2=2^2-3\times2=-2$

$a_3=3^2-3\times3=0$

$a_4=4^2-3\times4=4$

$a_5=5^2-3\times5=10$

003 답 **1, 3, 7, 15, 31**

$a_n=2^n-1$에 n 대신 1, 2, 3, 4, 5를 대입하면

$a_1=2^1-1=1$

$a_2=2^2-1=3$

$a_3=2^3-1=7$

$a_4=2^4-1=15$

$a_5=2^5-1=31$

004 답 **1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{13}$**

$a_n=\frac{1}{3n-2}$에 n 대신 1, 2, 3, 4, 5를 대입하면

$a_1=\frac{1}{3\times1-2}=1$

$a_2=\frac{1}{3\times2-2}=\frac{1}{4}$

$a_3=\frac{1}{3\times3-2}=\frac{1}{7}$

$a_4=\frac{1}{3\times4-2}=\frac{1}{10}$

$a_5=\frac{1}{3\times5-2}=\frac{1}{13}$

005 답 **$a_n=3n$**

$a_1=3=3\times1$, $a_2=6=3\times2$, $a_3=9=3\times3$,

$a_4=12=3\times4$, $a_5=15=3\times5$, $\cdots$

따라서 일반항 a_n은 $a_n=3n$

006 답 **$a_n=n^2$**

$a_1=1=1^2$, $a_2=4=2^2$, $a_3=9=3^2$,

$a_4=16=4^2$, $a_5=25=5^2$, $\cdots$

따라서 일반항 a_n은 $a_n=n^2$

007 답 **$a_n=(-1)^n$**

$a_1=-1=(-1)^1$, $a_2=1=(-1)^2$,

$a_3=-1=(-1)^3$, $a_4=1=(-1)^4$,

$a_5=-1=(-1)^5$, $\cdots$

따라서 일반항 a_n은

$a_n=(-1)^n$

008 답 **$a_n=\frac{n}{n+1}$**

$a_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$, $a_2=\frac{2}{3}=\frac{2}{2+1}$,

$a_3=\frac{3}{4}=\frac{3}{3+1}$, $a_4=\frac{4}{5}=\frac{4}{4+1}$,

$a_5=\frac{5}{6}=\frac{5}{5+1}$, $\cdots$

따라서 일반항 a_n은

$a_n=\frac{n}{n+1}$

009 답 **5, 7**

$3-1=2$에서 공차가 2이므로 주어진 수열은

1, 3, 5, 7, 9, $\cdots$

010 답 **-3, 7**

$17-12=5$에서 공차가 5이므로 주어진 수열은

-3, 2, 7, 12, 17, $\cdots$

011 답 **-2, -5**

$-11-(-8)=-3$에서 공차가 -3이므로 주어진 수열은

-2, -5, -8, -11, -14, $\cdots$

012 답 **1, $\frac{3}{2}$**

$\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$에서 공차가 $\frac{1}{2}$이므로 주어진 수열은

$\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, $\cdots$

013 답 **$a_n=7n-10$**

$a_n=-3+(n-1)\times7=7n-10$

014 답 **$a_n=-2n+12$**

$a_n=10+(n-1)\times(-2)=-2n+12$

015 답 **$a_n=4n-24$**

첫째항이 -20, 공차가 $-4-(-8)=4$이므로 일반항 a_n은

$a_n=-20+(n-1)\times4=4n-24$

016 답 **$a_n=-\frac{3}{2}n+\frac{17}{2}$**

첫째항이 7, 공차가 $1-\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}$이므로 일반항 a_n은

$a_n=7+(n-1)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}n+\frac{17}{2}$

017 답 **6**

공차를 d라고 하면 $a_6=33$에서

$3+5d=33 \qquad \therefore d=6$

018 답 **-3**

공차를 d라고 하면 $a_9=-8$에서

$16+8d=-8 \qquad \therefore d=-3$

019 답 **4, 1, 3, 1, 3, $3n-2$**

020 답 **$a_n=2n-9$**

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $a_3=-3$, $a_{10}=11$에서

$a+2d=-3$, $a+9d=11$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-7$, $d=2$

따라서 일반항 a_n은

$a_n=-7+(n-1)\times2=2n-9$

021 답 **$a_n=-4n+29$**

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $a_5=9$, $a_9=-7$에서

$a+4d=9$, $a+8d=-7$

두 식을 연립하여 풀면

$a=25$, $d=-4$

따라서 일반항 a_n은

$a_n=25+(n-1)\times(-4)=-4n+29$

022 답 **$a_n=-\frac{1}{3}n$**

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $a_3=-1$, $a_8=-\frac{8}{3}$에서

$a+2d=-1$, $a+7d=-\frac{8}{3}$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{3}$, $d=-\frac{1}{3}$

따라서 일반항 a_n은

$a_n=-\frac{1}{3}+(n-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}n$

023 답 **-16**

$a_{10}=11+9\times(-3)=-16$

024 답 **$\frac{7}{2}$**

$a_{10}=-1+9\times\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

025 답 **43**

첫째항이 -20, 공차가 $8-1=7$이므로

$a_{10}=-20+9\times7=43$

026 답 **-33**

첫째항이 12, 공차가 $7-12=-5$이므로

$a_{10}=12+9\times(-5)=-33$

027 답 **-17**

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $a_2=-1$, $a_5=-7$에서

$a+d=-1$, $a+4d=-7$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $d=-2$

$\therefore a_{10}=1+9\times(-2)=-17$

028 답 **10**

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $a_3=\frac{33}{4}$, $a_6=9$에서

$a+2d=\frac{33}{4}$, $a+5d=9$

두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{31}{4}$, $d=\frac{1}{4}$

$\therefore a_{10}=\frac{31}{4}+9\times\frac{1}{4}=10$

029 답 **7**

x는 3과 11의 등차중항이므로

$x=\frac{3+11}{2}=7$

030 답 **-6**

x는 2와 -14의 등차중항이므로

$x=\frac{2+(-14)}{2}=-6$

031 답 **2**

4는 x와 $3x$의 등차중항이므로

$4=\frac{x+3x}{2}$, $4x=8$

$\therefore x=2$

032 답 **$-\frac{8}{3}$**

$3x+2$는 $x-1$과 $2x-3$의 등차중항이므로

$3x+2=\frac{(x-1)+(2x-3)}{2}$

$6x+4=3x-4$, $3x=-8$

$\therefore x=-\frac{8}{3}$

033 답 **$x=5$, $y=11$**

x는 2와 8의 등차중항이므로

$x=\frac{2+8}{2}=5$

y는 8과 14의 등차중항이므로

$y=\frac{8+14}{2}=11$

034 답 $x=-5,\ y=-13$

x는 -1과 -9의 등차중항이므로

$x=\frac{-1+(-9)}{2}=-5$

y는 -9와 -17의 등차중항이므로

$y=\frac{-9+(-17)}{2}=-13$

035 답 $x=-4,\ y=2,\ z=8$

y는 -1과 5의 등차중항이므로

$y=\frac{-1+5}{2}=2$

-1은 x와 y의 등차중항이므로

$-1=\frac{x+y}{2},\ -1=\frac{x+2}{2}\quad \therefore x=-4$

5는 y와 z의 등차중항이므로

$5=\frac{y+z}{2},\ 5=\frac{2+z}{2}\quad \therefore z=8$

036 답 $x=16,\ y=4,\ z=-8$

y는 10과 -2의 등차중항이므로

$y=\frac{10+(-2)}{2}=4$

10은 x와 y의 등차중항이므로

$10=\frac{x+y}{2},\ 10=\frac{x+4}{2}\quad \therefore x=16$

-2는 y와 z의 등차중항이므로

$-2=\frac{y+z}{2},\ -2=\frac{4+z}{2}\quad \therefore z=-8$

037 답 $a,\ a,\ a,\ 28,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 9,\ \pm 3,\ 4,\ 7$

038 답 $-5,\ -3,\ -1$

세 수를 $a-d,\ a,\ a+d$로 놓으면

$(a-d)+a+(a+d)=-9\quad \cdots\cdots$ ㉠

$(a-d)\times a\times(a+d)=-15\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $3a=-9\quad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉡에 대입하면

$(-3-d)\times(-3)\times(-3+d)=-15$

$d^2=4\quad \therefore d=\pm 2$

따라서 구하는 세 수는 $-5,\ -3,\ -1$이다.

039 답 $-2,\ 2,\ 6$

세 수를 $a-d,\ a,\ a+d$로 놓으면

$(a-d)+a+(a+d)=6\quad \cdots\cdots$ ㉠

$(a-d)\times a\times(a+d)=-24\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $3a=6\quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면

$(2-d)\times 2\times(2+d)=-24$

$d^2=16\quad \therefore d=\pm 4$

따라서 구하는 세 수는 $-2,\ 2,\ 6$이다.

040 답 $a+d,\ a+d,\ 40,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 1,\ \pm 1,\ 4,\ 6,\ 10$

041 답 $-5,\ -1,\ 3,\ 7$

네 수를 $a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d$로 놓으면

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=4\quad \cdots\cdots$ ㉠

$(a-d)(a+d)=(a-3d)(a+3d)+32\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $4a=4\quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면

$(1-d)(1+d)=(1-3d)(1+3d)+32$

$d^2=4\quad \therefore d=\pm 2$

따라서 구하는 네 수는 $-5,\ -1,\ 3,\ 7$이다.

042 답 $-1,\ 1,\ 3,\ 5$

네 수를 $a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d$로 놓으면

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=8\quad \cdots\cdots$ ㉠

$(a-3d)^2+(a-d)^2+(a+d)^2+(a+3d)^2=36\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $4a=8\quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면

$(2-3d)^2+(2-d)^2+(2+d)^2+(2+3d)^2=36$

$d^2=1\quad \therefore d=\pm 1$

따라서 구하는 네 수는 $-1,\ 1,\ 3,\ 5$이다.

043 답 165

$S_{10}=\frac{10\times(3+30)}{2}=165$

044 답 32

$S_8=\frac{8\times\{12+(-4)\}}{2}=32$

045 답 276

$S_{12}=\frac{12\times\{2\times 1+(12-1)\times 4\}}{2}=276$

046 답 -18

$S_9=\frac{9\times\{2\times 10+(9-1)\times(-3)\}}{2}=-18$

047 답 616

첫째항이 1, 공차가 $6-1=5$이므로

$S_{16}=\frac{16\times\{2\times 1+(16-1)\times 5\}}{2}=616$

048 답 -140

첫째항이 12, 공차가 $10-12=-2$이므로

$S_{20}=\frac{20\times\{2\times 12+(20-1)\times(-2)\}}{2}=-140$

049 답 408

첫째항이 1, 공차가 $7-1=6$인 등차수열의 n번째 항을 67이라고 하면

$1+(n-1)\times6=67$

$n-1=11 \qquad \therefore n=12$

$\therefore 1+7+13+19+\cdots+67=\dfrac{12\times(1+67)}{2}=408$

050 답 −85

첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공차가 $0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$인 등차수열의 n번째 항을 -9라고 하면

$\frac{1}{2}+(n-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-9$

$n-1=19 \qquad \therefore n=20$

$\therefore \frac{1}{2}+0+\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)+\cdots+(-9)=\dfrac{20\times\left\{\frac{1}{2}+(-9)\right\}}{2}$

$=-85$

051 답 7

공차를 d라고 하면 $S_8=220$에서

$\dfrac{8\times\{2\times3+(8-1)d\}}{2}=220$

$6+7d=55 \qquad \therefore d=7$

052 답 3

공차를 d라고 하면 $S_{10}=125$에서

$\dfrac{10\times\{2\times(-1)+(10-1)d\}}{2}=125$

$-2+9d=25 \qquad \therefore d=3$

053 답 2, 1, 3, −1, 3, −1, −30

054 답 510

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $S_{10}=70$, $S_{20}=240$에서

$\dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=70$, $\dfrac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=240$

$\therefore 2a+9d=14$, $2a+19d=24$

두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{5}{2}$, $d=1$

$\therefore S_{30}=\dfrac{30\times\left\{2\times\frac{5}{2}+(30-1)\times1\right\}}{2}=510$

055 답 −390

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $S_6=30$, $S_{18}=-126$에서

$\dfrac{6\{2a+(6-1)d\}}{2}=30$, $\dfrac{18\{2a+(18-1)d\}}{2}=-126$

$\therefore 2a+5d=10$, $2a+17d=-14$

두 식을 연립하여 풀면

$a=10$, $d=-2$

$\therefore S_{26}=\dfrac{26\times\{2\times10+(26-1)\times(-2)\}}{2}=-390$

056 답 81

일반항 a_n은

$a_n=17+(n-1)\times(-2)=-2n+19$

이때 제n항에서 처음으로 음수가 된다고 하면

$a_n=-2n+19<0$

$\therefore n>\frac{19}{2}=9.5$

따라서 첫째항부터 제9항까지가 양수이고 제10항부터 음수이므로 구하는 최댓값은

$S_9=\dfrac{9\times\{2\times17+(9-1)\times(-2)\}}{2}=81$

057 답 91

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $a_2=21$, $a_6=5$에서

$a+d=21$, $a+5d=5$

두 식을 연립하여 풀면

$a=25$, $d=-4$

$\therefore a_n=25+(n-1)\times(-4)=-4n+29$

이때 제n항에서 처음으로 음수가 된다고 하면

$a_n=-4n+29<0$

$\therefore n>\frac{29}{4}=7.25$

따라서 첫째항부터 제7항까지가 양수이고 제8항부터 음수이므로 구하는 최댓값은

$S_7=\dfrac{7\times\{2\times25+(7-1)\times(-4)\}}{2}=91$

058 답 −70

일반항 a_n은

$a_n=-19+(n-1)\times3=3n-22$

이때 제n항에서 처음으로 양수가 된다고 하면

$a_n=3n-22>0$

$\therefore n>\frac{22}{3}=7.3\times\times$

따라서 첫째항부터 제7항까지가 음수이고 제8항부터 양수이므로 구하는 최솟값은

$S_7=\dfrac{7\times\{2\times(-19)+(7-1)\times3\}}{2}=-70$

059 답 −78

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $a_3=-15$, $a_8=5$에서

$a+2d=-15$, $a+7d=5$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-23$, $d=4$

$\therefore a_n=-23+(n-1)\times4=4n-27$

이때 제n항에서 처음으로 양수가 된다고 하면

$a_n=4n-27>0$

$\therefore n>\frac{27}{4}=6.75$

따라서 첫째항부터 제6항까지가 음수이고 제7항부터 양수이므로 구하는 최솟값은

$S_6=\dfrac{6\times\{2\times(-23)+(6-1)\times4\}}{2}=-78$

060 답 **4, 8**

$\frac{2}{1}=2$에서 공비가 2이므로 주어진 수열은

1, 2, 4, 8, 16, ⋯

061 답 $\mathbf{1,\ \frac{1}{27}}$

$\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$에서 공비가 $\frac{1}{3}$이므로 주어진 수열은

$3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \cdots$

062 답 **−10, 20**

$\frac{80}{-40}=-2$에서 공비가 -2이므로 주어진 수열은

5, −10, 20, −40, 80, ⋯

063 답 $\sqrt{2}$**, 2**

$\frac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$에서 공비가 $\sqrt{2}$이므로 주어진 수열은

$\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4,\ 4\sqrt{2},\ \cdots$

064 답 $a_n=3^{n-1}$

065 답 $a_n=5\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

066 답 $a_n=2\times(-3)^{n-1}$

첫째항이 2, 공비가 $\frac{-6}{2}=-3$이므로 일반항 a_n은

$a_n=2\times(-3)^{n-1}$

067 답 $a_n=7\times(\sqrt{7})^{n-1}$

첫째항이 7, 공비가 $\frac{7\sqrt{7}}{7}=\sqrt{7}$이므로 일반항 a_n은

$a_n=7\times(\sqrt{7})^{n-1}$

068 답 **2**

공비를 r라고 하면 $a_6=64$에서

$2\times r^5=64,\ r^5=32 \qquad \therefore\ r=2$

069 답 $\frac{1}{2}$

공비를 r라고 하면 $a_8=\frac{1}{8}$에서

$16\times r^7=\frac{1}{8},\ r^7=\frac{1}{128} \qquad \therefore\ r=\frac{1}{2}$

070 답 **4, 3, 3, 2, 2**

071 답 $a_n=(-\sqrt{2})^{n-1}$

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 $a_3=2,\ a_6=-4\sqrt{2}$에서

$ar^2=2$ ⋯⋯ ㉠

$ar^5=-4\sqrt{2}$ ⋯⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=-2\sqrt{2} \qquad \therefore\ r=-\sqrt{2}$

$r=-\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=1$

따라서 일반항 a_n은

$a_n=1\times(-\sqrt{2})^{n-1}=(-\sqrt{2})^{n-1}$

072 답 $a_n=(-1)^{n-1}$

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 $a_3=1,\ a_8=-1$에서

$ar^2=1$ ⋯⋯ ㉠

$ar^7=-1$ ⋯⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^5=-1 \qquad \therefore\ r=-1$

$r=-1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=1$

따라서 일반항 a_n은

$a_n=1\times(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}$

073 답 $a_n=64\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 $a_4=8,\ a_9=\frac{1}{4}$에서

$ar^3=8$ ⋯⋯ ㉠

$ar^8=\frac{1}{4}$ ⋯⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^5=\frac{1}{32} \qquad \therefore\ r=\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=64$

따라서 일반항 a_n은

$a_n=64\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

074 답 $\frac{1}{256}$

$a_9=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}$

075 답 **243**

$a_9=\frac{1}{27}\times3^8=243$

076 답 **64**

첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{-2}{1}=-2$이므로

$a_9=\frac{1}{4}\times(-2)^8=64$

077 답 $\frac{\sqrt{5}}{625}$

첫째항이 $\sqrt{5}$, 공비가 $\frac{-1}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$이므로

$a_9=\sqrt{5}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^8=\frac{\sqrt{5}}{625}$

078 답 $\frac{1}{81}$

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 $a_3=9$, $a_4=3$에서

$ar^2=9$ …… ㉠

$ar^3=3$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r=\frac{1}{3}$

$r=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=81$

$\therefore a_9=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^8=\frac{1}{81}$

079 답 $27\sqrt{3}$

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 $a_2=1$, $a_5=3\sqrt{3}$에서

$ar=1$ …… ㉠

$ar^4=3\sqrt{3}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=3\sqrt{3}$ $\quad\therefore r=\sqrt{3}$

$r=\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore a_9=\frac{\sqrt{3}}{3}\times(\sqrt{3})^8=27\sqrt{3}$

080 답 -6 또는 6

x는 3과 12의 등비중항이므로

$x^2=3\times12=36$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=6$

081 답 -10 또는 10

x는 2와 50의 등비중항이므로

$x^2=2\times50=100$

$\therefore x=-10$ 또는 $x=10$

082 답 $-8\sqrt{5}$ 또는 $8\sqrt{5}$

x는 -4와 -80의 등비중항이므로

$x^2=(-4)\times(-80)=320$

$\therefore x=-8\sqrt{5}$ 또는 $x=8\sqrt{5}$

083 답 $x=-4$, $y=-64$ 또는 $x=4$, $y=64$

x는 1과 16의 등비중항이므로

$x^2=1\times16=16$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=4$

16은 x와 y의 등비중항이므로

$16^2=xy$

(i) $x=-4$일 때

$-4y=256$ $\quad\therefore y=-64$

(ii) $x=4$일 때

$4y=256$ $\quad\therefore y=64$

$\therefore x=-4$, $y=-64$ 또는 $x=4$, $y=64$

084 답 2

4는 a와 $4a$의 등비중항이므로

$4^2=a\times4a$, $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

085 답 3

$3\sqrt{2}$는 a와 $a+3$의 등비중항이므로

$(3\sqrt{2})^2=a(a+3)$

$a^2+3a-18=0$, $(a+6)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

086 답 1

$a+3$은 $2a$와 $8a$의 등비중항이므로

$(a+3)^2=2a\times8a$

$5a^2-2a-3=0$, $(5a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

087 답 $\frac{1}{3}$

$a+1$은 $a-1$과 $a-3$의 등비중항이므로

$(a+1)^2=(a-1)(a-3)$

$6a=2$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$

088 답 $\frac{8}{9}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{8}{9}$, $\left(\frac{8}{9}\right)^n$, $\left(\frac{8}{9}\right)^{10}$

089 답 $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$

1회 시행 후 남아 있는 선분의 길이는

$1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

2회 시행 후 남아 있는 선분의 길이는

$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$

3회 시행 후 남아 있는 선분의 길이는

$\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$

⋮

n회 시행 후 남아 있는 선분의 길이는

$\left(\frac{2}{3}\right)^n$

따라서 20회 시행 후 남아 있는 선분의 길이는

$\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$

090 답 $\left(\frac{1}{2}\right)^7$

한 변의 길이가 2인 정사각형의 둘레의 길이는

$2\times4=8$

1회 시행 후 남아 있는 도형의 둘레의 길이는

$8\times\frac{1}{2}$

2회 시행 후 남아 있는 도형의 둘레의 길이는

$8\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$

3회 시행 후 남아 있는 도형의 둘레의 길이는

$8\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$

⋮

n회 시행 후 남아 있는 도형의 둘레의 길이는

$8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

따라서 10회 시행 후 남아 있는 도형의 둘레의 길이는

$8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^7$

091 답 $4\sqrt{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

한 변의 길이가 4인 정삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$

1회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$4\sqrt{3}\times\frac{3}{4}$

2회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$4\sqrt{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=4\sqrt{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$

3회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$4\sqrt{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}=4\sqrt{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^3$

⋮

n회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$4\sqrt{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$

따라서 10회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$4\sqrt{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

092 답 $S_n=7n$

첫째항이 7, 공비가 1이므로

$S_n=7n$

093 답 $S_n=2\times(3^n-1)$

첫째항이 4, 공비가 $\frac{12}{4}=3$이므로

$S_n=\frac{4\times(3^n-1)}{3-1}=2\times(3^n-1)$

094 답 $S_n=1-(-2)^n$

첫째항이 3, 공비가 $\frac{-6}{3}=-2$이므로

$S_n=\frac{3\times\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=1-(-2)^n$

095 답 $S_n=\frac{1}{9}\times\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}$

첫째항이 $0.1=\frac{1}{10}$, 공비가 $\frac{0.01}{0.1}=\frac{1}{10}$이므로

$S_n=\frac{\frac{1}{10}\times\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9}\times\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}$

096 답 364

$S_6=\frac{1\times(3^6-1)}{3-1}=364$

097 답 -682

$S_{10}=\frac{2\times\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}=-682$

098 답 762

첫째항이 6, 공비가 $\frac{12}{6}=2$인 등비수열의 n번째 항을 384라고 하면

$6\times2^{n-1}=384$

$2^{n-1}=2^6 \qquad \therefore n=7$

$\therefore 6+12+24+48+\cdots+384=\frac{6\times(2^7-1)}{2-1}=762$

099 답 $\frac{255}{4}$

첫째항이 32, 공비가 $\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$인 등비수열의 n번째 항을 $\frac{1}{4}$이라고 하면

$32\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^7 \qquad \therefore n=8$

$\therefore 32+16+8+4+\cdots+\frac{1}{4}=\frac{32\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{255}{4}$

100 답 3, r^3-1, 104

101 답 21

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 $S_4=3$, $S_8=9$에서

$\frac{a(r^4-1)}{r-1}=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{a(r^8-1)}{r-1}=9 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $\frac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}=9$에 ㉠을 대입하면

$3(r^4+1)=9 \qquad \therefore r^4=2$

$\therefore S_{12}=\frac{a(r^{12}-1)}{r-1}$

$=\frac{a(r^4-1)(r^8+r^4+1)}{r-1}$

$=3(r^8+r^4+1)$

$=3\times(2^2+2+1)=21$

102 답 91

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 $S_{10}=7$, $S_{20}=28$에서

$\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=7 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=28 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $\frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=28$에 ㉠을 대입하면

$7(r^{10}+1)=28 \qquad \therefore r^{10}=3$

$\therefore S_{30}=\dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1}$

$=\dfrac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1}$

$=7(r^{20}+r^{10}+1)$

$=7\times(3^2+3+1)=91$

103 답 **8, 2, 2, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, 2, 85**

104 답 $\mathbf{\frac{121}{2}}$

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_1+a_2=2$에서 $a+ar=2$

$\therefore a(1+r)=2$ ...... ㉠

$a_4+a_5=54$에서 $ar^3+ar^4=54$

$\therefore ar^3(1+r)=54$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=27$ $\therefore r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하여 풀면

$a=\frac{1}{2}$

$\therefore S_5=\dfrac{\frac{1}{2}\times(3^5-1)}{3-1}=\dfrac{121}{2}$

105 답 **341**

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_2+a_5=6$에서 $ar+ar^4=6$

$\therefore ar(1+r^3)=6$ ...... ㉠

$a_5+a_8=48$에서 $ar^4+ar^7=48$

$\therefore ar^4(1+r^3)=48$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=8$ $\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하여 풀면

$a=\frac{1}{3}$

$\therefore S_{10}=\dfrac{\frac{1}{3}\times(2^{10}-1)}{2-1}=341$

106 답 **0.05, 10, 10, 126**

107 답 **10, 10, 120**

108 답 **260만 원**

$20\times(1+0.04)+20\times(1+0.04)^2+\cdots+20\times(1+0.04)^{10}$

$=\dfrac{20\times(1+0.04)\times\{(1+0.04)^{10}-1\}}{(1+0.04)-1}$

$=\dfrac{20\times1.04\times(1.04^{10}-1)}{0.04}$

$=\dfrac{20\times1.04\times(1.5-1)}{0.04}$

$=260$(만 원)

109 답 **250만 원**

$20+20\times(1+0.04)+\cdots+20\times(1+0.04)^9$

$=\dfrac{20\times\{(1+0.04)^{10}-1\}}{(1+0.04)-1}$

$=\dfrac{20\times(1.04^{10}-1)}{0.04}$

$=\dfrac{20\times(1.5-1)}{0.04}$

$=250$(만 원)

110 답 **103만 원**

$10\times(1+0.03)+10\times(1+0.03)^2+\cdots+10\times(1+0.03)^9$

$=\dfrac{10\times(1+0.03)\times\{(1+0.03)^9-1\}}{(1+0.03)-1}$

$=\dfrac{10\times1.03\times(1.03^9-1)}{0.03}$

$=\dfrac{10\times1.03\times(1.3-1)}{0.03}$

$=103$(만 원)

111 답 **100만 원**

$10+10\times(1+0.03)+\cdots+10\times(1+0.03)^8$

$=\dfrac{10\times\{(1+0.03)^9-1\}}{(1+0.03)-1}$

$=\dfrac{10\times(1.03^9-1)}{0.03}$

$=\dfrac{10\times(1.3-1)}{0.03}$

$=100$(만 원)

112 답 **$2n-4$, -2, $2n-4$**

113 답 **$a_n=4n-1$**

(i) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2+n-\{2(n-1)^2+(n-1)\}$

$=4n-1$ ...... ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2\times1^2+1=3$ ...... ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=4n-1$

114 답 **$a_1=4$, $a_n=2n+1$ $(n\geq2)$**

(i) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+2n+1-\{(n-1)^2+2(n-1)+1\}$

$=2n+1$ ...... ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2+2\times1+1=4$ ...... ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않으므로 일반항 a_n은

$a_1=4$, $a_n=2n+1$ $(n\geq2)$

115 답 $a_n=2\times3^{n-1}$

(i) $n\geq2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=3^n-1-(3^{n-1}-1)$$
$$=3\times3^{n-1}-3^{n-1}$$
$$=2\times3^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $n=1$일 때

$$a_1=S_1=3^1-1=2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=2\times3^{n-1}$

116 답 $a_n=3\times4^n$

(i) $n\geq2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=4^{n+1}-4-(4^n-4)$$
$$=4\times4^n-4^n$$
$$=3\times4^n \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $n=1$일 때

$$a_1=S_1=4^2-4=12 \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=3\times4^n$

117 답 $a_1=5$, $a_n=2^n$ $(n\geq2)$

(i) $n\geq2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=2^{n+1}+1-(2^n+1)$$
$$=2\times2^n-2^n$$
$$=2^n \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $n=1$일 때

$$a_1=S_1=2^2+1=5 \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않으므로 일반항 a_n은

$a_1=5$, $a_n=2^n$ $(n\geq2)$

연산 유형 최종 점검하기

123~125쪽

1 ③	2 ②	3 ②	4 ③	5 ⑤	6 ④
7 7	8 ①	9 270	10 ①	11 ②	12 ④
13 4	14 $\frac{3}{1024}$	15 ④	16 ①	17 ③	
18 424만 원		19 ③			

1 $a_n=\dfrac{1}{2n+1}$이므로

$\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{1}{101}$, $2n+1=101$

$\therefore n=50$

2 $a_{10}=-6+9\times4=30$

3 공차를 d라고 하면 $a_{13}=-10$에서

$-2+12d=-10$

$\therefore d=-\dfrac{2}{3}$

4 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $a_6=32$, $a_{10}=20$에서

$a+5d=32$, $a+9d=20$

두 식을 연립하여 풀면

$a=47$, $d=-3$

$\therefore a_n=47+(n-1)\times(-3)=-3n+50$

이때 제n항에서 처음으로 음수가 된다고 하면

$a_n=-3n+50<0$

$\therefore n>\dfrac{50}{3}=16.6\times\times$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제17항이다.

5 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_2+a_5=6$에서 $(a+d)+(a+4d)=6$

$\therefore 2a+5d=6 \quad \cdots\cdots ㉠$

$a_7+a_{10}=-14$에서 $(a+6d)+(a+9d)=-14$

$\therefore 2a+15d=-14 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=8$, $d=-2$

$\therefore a_{16}=8+15\times(-2)=-22$

6 a^2+2a는 $6a$와 4의 등차중항이므로

$a^2+2a=\dfrac{6a+4}{2}$

$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-1+2=1$

7 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면

$(a-d)+a+(a+d)=9 \quad \cdots\cdots ㉠$

$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=59 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠에서 $3a=9 \quad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면

$(3-d)^2+3^2+(3+d)^2=59$

$d^2=16 \quad \therefore d=\pm4$

따라서 세 수는 -1, 3, 7이므로 가장 큰 수는 7이다.

8 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $a_2=-2$, $a_5=10$에서

$a+d=-2$, $a+4d=10$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-6$, $d=4$

$\therefore S_{20}=\dfrac{20\times\{2\times(-6)+(20-1)\times4\}}{2}=640$

9 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $S_{10}=-10$, $S_{20}=80$에서

$\dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=-10$, $\dfrac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=80$

$\therefore 2a+9d=-2$, $2a+19d=8$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\dfrac{11}{2}$, $d=1$

$\therefore S_{30}=\dfrac{30\times\left\{2\times\left(-\dfrac{11}{2}\right)+(30-1)\times1\right\}}{2}=270$

10 일반항 a_n은

$a_n=-23+(n-1)\times2=2n-25$

이때 제n항에서 처음으로 양수가 된다고 하면

$a_n=2n-25>0 \qquad \therefore n>\dfrac{25}{2}=12.5$

따라서 첫째항부터 제12항까지가 음수이고 제13항부터 양수이므로 구하는 최솟값은

$S_{12}=\dfrac{12\times\{2\times(-23)+(12-1)\times2\}}{2}=-144$

11 $a_3=9$, $a_6=243$에서

$ar^2=9 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$ar^5=243 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=27 \qquad \therefore r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=1$

$\therefore a+r=4$

12 공비를 r라고 하면 $a_5=4$에서

$\dfrac{1}{4}\times r^4=4$, $r^4=16 \qquad \therefore r=2\ (\because r>0)$

$\therefore a_n=\dfrac{1}{4}\times2^{n-1}$

제n항에서 처음으로 100보다 커진다고 하면

$a_n=\dfrac{1}{4}\times2^{n-1}>100$

$2^{n-1}>400$

이때 $2^8=256$, $2^9=512$이므로

$n-1\ge9 \qquad \therefore n\ge10$

따라서 처음으로 100보다 커지는 항은 제10항이다.

13 $x+8$은 x와 $9x$의 등비중항이므로

$(x+8)^2=x\times9x$

$x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=4\ (\because x>0)$

14 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 둘레의 길이는

$2\times3=6$

1회 시행에서 그린 정삼각형의 둘레의 길이는

$6\times\dfrac{1}{2}$

2회 시행에서 그린 정삼각형의 둘레의 길이는

$6\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=6\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

3회 시행에서 그린 정삼각형의 둘레의 길이는

$6\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{2}=6\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

$\vdots$

n회 시행에서 그린 정삼각형의 둘레의 길이는

$6\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

따라서 11회 시행에서 그린 정삼각형의 둘레의 길이는

$6\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{11}=\dfrac{3}{1024}$

15 첫째항이 2, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로

$S_{10}=\dfrac{2\times\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1023}{256}$

16 제n항이 끝항이라고 하면

$3\times(-3)^{n-1}=-729$

$(-3)^{n-1}=(-3)^5 \qquad \therefore n=6$

$\therefore S_6=\dfrac{3\times\{1-(-3)^6\}}{1-(-3)}=-546$

17 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 $S_3=21$, $S_6=189$에서

$\dfrac{a(r^3-1)}{r-1}=21 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=189 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $\dfrac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=189$에 ㉠을 대입하면

$21(r^3+1)=189$

$r^3=8 \qquad \therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=3$

$\therefore a_4=3\times2^3=24$

18 $30\times(1+0.06)+30\times(1+0.06)^2+\cdots+30\times(1+0.06)^{10}$

$=\dfrac{30\times(1+0.06)\times\{(1+0.06)^{10}-1\}}{(1+0.06)-1}$

$=\dfrac{30\times1.06\times(1.06^{10}-1)}{0.06}$

$=\dfrac{30\times1.06\times(1.8-1)}{0.06}$

$=424$(만 원)

19 (i) $n\ge2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2^n-1-(2^{n-1}-1)$

$=2\times2^{n-1}-2^{n-1}$

$=2^{n-1} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2^1-1=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=2^{n-1}$

$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7=2^0+2^2+2^4+2^6=85$

09 수열의 합

128~135쪽

001 답 $\sum_{k=1}^{n} 2^k$

002 답 $\sum_{k=1}^{5} 3$

3이 5개 있으므로

$3+3+3+3+3=\sum_{k=1}^{5} 3$

003 답 $\sum_{k=1}^{10} 5k$

수열 5, 10, 15, …의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=5n$

이때 $5n=50$에서 $n=10$

따라서 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$5+10+15+\cdots+50=\sum_{k=1}^{10} 5k$

004 답 $\sum_{k=1}^{12} (k^2+2k)$

$$\begin{aligned}1\times3+2\times4+3\times5+\cdots+12\times14&=\sum_{k=1}^{12} k(k+2)\\&=\sum_{k=1}^{12}(k^2+2k)\end{aligned}$$

005 답 $3+6+9+12+15$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} 3k&=3\times1+3\times2+3\times3+3\times4+3\times5\\&=3+6+9+12+15\end{aligned}$$

006 답 $1+3+5+\cdots+19$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(2k-1)&=(2\times1-1)+(2\times2-1)+(2\times3-1)\\&\quad+\cdots+(2\times10-1)\\&=1+3+5+\cdots+19\end{aligned}$$

007 답 $5^3+5^4+5^5+5^6+5^7$

008 답 $5^2+6^2+7^2+\cdots+16^2$

$$\begin{aligned}\sum_{m=4}^{15}(m+1)^2&=(4+1)^2+(5+1)^2+(6+1)^2+\cdots+(15+1)^2\\&=5^2+6^2+7^2+\cdots+16^2\end{aligned}$$

009 답 5

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)&=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k\\&=2+3=5\end{aligned}$$

010 답 -1

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)&=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k\\&=2-3=-1\end{aligned}$$

011 답 13

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3b_k)&=2\sum_{k=1}^{10}a_k+3\sum_{k=1}^{10}b_k\\&=2\times2+3\times3\\&=13\end{aligned}$$

012 답 34

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(-a_k+2b_k+3)&=-\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}3\\&=-2+2\times3+3\times10\\&=34\end{aligned}$$

013 답 37

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(a_k+2)^2&=\sum_{k=1}^{5}(a_k^2+4a_k+4)\\&=\sum_{k=1}^{5}a_k^2+4\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}4\\&=5+4\times3+4\times5\\&=37\end{aligned}$$

014 답 0

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(a_k+1)(a_k-1)&=\sum_{k=1}^{5}(a_k^2-1)\\&=\sum_{k=1}^{5}a_k^2-\sum_{k=1}^{5}1\\&=5-5=0\end{aligned}$$

015 답 120

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(k+7)-\sum_{k=1}^{10}(k-5)&=\sum_{k=1}^{10}\{k+7-(k-5)\}\\&=\sum_{k=1}^{10}12=12\times10=120\end{aligned}$$

016 답 $9n$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k+3)^2-\sum_{k=1}^{n}(k^2+6k)&=\sum_{k=1}^{n}\{k^2+6k+9-(k^2+6k)\}\\&=\sum_{k=1}^{n}9=9n\end{aligned}$$

017 답 3, 3, $\frac{3}{2}\times(3^n-1)$

018 답 $2\times\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$

첫째항이 $\frac{2}{3}$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열의 합이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k&=\frac{\frac{2}{3}\times\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{2}{3}}\\&=2\times\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

019 답 247

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{7}(2^k-1)&=\sum_{k=1}^{7}2^k-\sum_{k=1}^{7}1\\&=\frac{2\times(2^7-1)}{2-1}-7\\&=254-7=247\end{aligned}$$

020 답 **1, 2^n-1, 2^k-1, 2^k, 20, 20, 21**

021 답 $\dfrac{3^{21}-43}{4}$

주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$$a_n=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}$$
$$=\frac{1\times(3^n-1)}{3-1}=\frac{1}{2}\times(3^n-1)$$

따라서 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}\left\{\frac{1}{2}\times(3^k-1)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\sum_{k=1}^{20}3^k-\sum_{k=1}^{20}1\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left\{\frac{3\times(3^{20}-1)}{3-1}-20\right\}$$
$$=\frac{3^{21}-43}{4}$$

022 답 **88**

$$\sum_{k=1}^{11}(k+2)=\sum_{k=1}^{11}k+\sum_{k=1}^{11}2$$
$$=\frac{11\times12}{2}+2\times11$$
$$=66+22=88$$

023 답 **96**

$$\sum_{k=1}^{8}(k^2-3k)=\sum_{k=1}^{8}k^2-3\sum_{k=1}^{8}k$$
$$=\frac{8\times9\times17}{6}-3\times\frac{8\times9}{2}$$
$$=204-108=96$$

024 답 **462**

$$\sum_{k=1}^{6}(k^3+k)=\sum_{k=1}^{6}k^3+\sum_{k=1}^{6}k$$
$$=\left(\frac{6\times7}{2}\right)^2+\frac{6\times7}{2}$$
$$=441+21=462$$

025 답 **1015**

$$\sum_{k=1}^{10}(k+3)(2k-1)=\sum_{k=1}^{10}(2k^2+5k-3)$$
$$=2\sum_{k=1}^{10}k^2+5\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}3$$
$$=2\times\frac{10\times11\times21}{6}+5\times\frac{10\times11}{2}-3\times10$$
$$=770+275-30=1015$$

026 답 **k, 11, 2, 96**

027 답 **322**

$$\sum_{k=4}^{10}(k^2-k)=\sum_{k=1}^{10}(k^2-k)-\sum_{k=1}^{3}(k^2-k)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k-\left(\sum_{k=1}^{3}k^2-\sum_{k=1}^{3}k\right)$$
$$=\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}-\left(\frac{3\times4\times7}{6}-\frac{3\times4}{2}\right)$$
$$=330-8=322$$

028 답 **1935**

$$\sum_{k=5}^{9}(k^3+2)=\sum_{k=1}^{9}(k^3+2)-\sum_{k=1}^{4}(k^3+2)$$
$$=\sum_{k=1}^{9}k^3+\sum_{k=1}^{9}2-\left(\sum_{k=1}^{4}k^3+\sum_{k=1}^{4}2\right)$$
$$=\left(\frac{9\times10}{2}\right)^2+2\times9-\left\{\left(\frac{4\times5}{2}\right)^2+2\times4\right\}$$
$$=2043-108=1935$$

029 답 **n, k, k, $2n+1$, $n+1$, $n+2$**

030 답 $\dfrac{n(n+1)(n-7)}{3}$

주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$$a_n=n^2-5n$$

따라서 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2-5k)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k^2-5\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-5\times\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n-14)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)(n-7)}{3}$$

031 답 $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$$a_n=1+2+3+\cdots+n$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$$

따라서 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+4)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

032 답 **715**

수열 1×1, 2×3, 3×5, 4×7, $\cdots$의 일반항을 a_n이라고 하면

$$a_n=n(2n-1)=2n^2-n$$

$$\therefore\ 1\times1+2\times3+3\times5+\cdots+10\times19$$
$$=\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2k^2-k)$$
$$=2\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k$$
$$=2\times\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}$$
$$=770-55=715$$

033 답 **455**

수열 1^2, 3^2, 5^2, 7^2, …의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=(2n-1)^2=4n^2-4n+1$

이때 $2n-1=13$에서 $n=7$

$$\therefore 1^2+3^2+5^2+\cdots+13^2=\sum_{k=1}^{7}a_k=\sum_{k=1}^{7}(4k^2-4k+1)$$
$$=4\sum_{k=1}^{7}k^2-4\sum_{k=1}^{7}k+\sum_{k=1}^{7}1$$
$$=4\times\frac{7\times8\times15}{6}-4\times\frac{7\times8}{2}+7$$
$$=560-112+7=455$$

034 답 **1740**

수열 1×2^2, 2×3^2, 3×4^2, 4×5^2, …의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=n(n+1)^2=n^3+2n^2+n$

$\therefore 1\times2^2+2\times3^2+3\times4^2+\cdots+8\times9^2$

$$=\sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}(k^3+2k^2+k)$$
$$=\sum_{k=1}^{8}k^3+2\sum_{k=1}^{8}k^2+\sum_{k=1}^{8}k$$
$$=\left(\frac{8\times9}{2}\right)^2+2\times\frac{8\times9\times17}{6}+\frac{8\times9}{2}$$
$$=1296+408+36=1740$$

035 답 $\boldsymbol{k+1,\ n+1,\ \frac{1}{n+1},\ n}$

036 답 $\boldsymbol{\frac{n}{2(n+2)}}$

$$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$
$$=\frac{n}{2(n+2)}$$

037 답 $\boldsymbol{\frac{n}{2n+1}}$

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{n}{2n+1}$$

038 답 $\boldsymbol{\frac{5n^2+13n}{12(n+2)(n+3)}}$

$$\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+3)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{5n^2+13n}{12(n+2)(n+3)}$$

039 답 $\boldsymbol{k+2,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10},\ \frac{58}{45}}$

040 답 $\boldsymbol{\frac{9}{10}}$

$$\frac{1}{2^2-2}+\frac{1}{3^2-3}+\frac{1}{4^2-4}+\cdots+\frac{1}{10^2-10}$$
$$=\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{k^2-k}$$
$$=\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{k(k-1)}$$
$$=\sum_{k=2}^{10}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$
$$=1-\frac{1}{10}$$
$$=\frac{9}{10}$$

041 답 $\boldsymbol{\frac{10}{21}}$

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots+\frac{1}{20^2-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k)^2-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{21}\right)$$
$$=\frac{10}{21}$$

042 답 $\boldsymbol{\sqrt{k},\ \sqrt{n},\ \sqrt{n+1}-1}$

043 답 $\dfrac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$
$$=\frac{1}{2}\times\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$$
$$=\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$$

044 답 $\dfrac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2}}{3}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{11}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{3n-1}+\sqrt{3n+2}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{3k-1}+\sqrt{3k+2}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{3k-1}-\sqrt{3k+2}}{(\sqrt{3k-1}+\sqrt{3k+2})(\sqrt{3k-1}-\sqrt{3k+2})}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{3k+2}-\sqrt{3k-1})$$
$$=\frac{1}{3}\times\{(\sqrt{5}-\sqrt{2})+(\sqrt{8}-\sqrt{5})+(\sqrt{11}-\sqrt{8})+\cdots+(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1})\}$$
$$=\frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2}}{3}$$

045 답 3, 1, n, 1, $\dfrac{(2n-1)3^n+1}{4}$

046 답 $\dfrac{2^{n+1}-n-2}{2^{n-1}}$

구하는 합을 S로 놓으면

$$S=1+2\times\frac{1}{2}+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $\frac{1}{2}$을 곱하면

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠−㉡을 하면

$$\frac{1}{2}S=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=\frac{1\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$$
$$\therefore S=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^{n-1}}$$

047 답 $13\times2^{14}+1$

구하는 합을 S로 놓으면

$$S=1+2\times2+3\times2^2+\cdots+14\times2^{13} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 2를 곱하면

$$2S=2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+14\times2^{14} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠−㉡을 하면

$$-S=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{13}-14\times2^{14}$$
$$=\frac{1\times(2^{14}-1)}{2-1}-14\times2^{14}$$
$$=-13\times2^{14}-1$$
$$\therefore S=13\times2^{14}+1$$

048 답 $\dfrac{3^{11}-23}{4\times3^9}$

구하는 합을 S로 놓으면

$$S=1+2\times\frac{1}{3}+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+10\times\left(\frac{1}{3}\right)^9 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $\frac{1}{3}$을 곱하면

$$\frac{1}{3}S=\frac{1}{3}+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+10\times\left(\frac{1}{3}\right)^{10} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠−㉡을 하면

$$\frac{2}{3}S=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^9-10\times\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$
$$=\frac{1\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{3}}-10\times\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$
$$=\frac{3^{11}-23}{2\times3^{10}}$$
$$\therefore S=\frac{3^{11}-23}{4\times3^9}$$

연산 유형 **최종 점검하기** 136~137쪽

1 ①	**2** ④	**3** ④	**4** ③	**5** ②	**6** ③
7 ③	**8** ⑤	**9** ⑤	**10** ⑤	**11** $5-\sqrt{2}$	
12 ①					

1 $$\sum_{k=1}^{5}(a_k-1)(a_k+3)=\sum_{k=1}^{5}(a_k^2+2a_k-3)$$
$$=\sum_{k=1}^{5}a_k^2+2\sum_{k=1}^{5}a_k-\sum_{k=1}^{5}3$$
$$=10+2\times4-3\times5$$
$$=3$$

2 $$\sum_{k=1}^{10}(2k+2^{k-1})=2\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}2^{k-1}$$
$$=2\times\frac{10\times11}{2}+\frac{1\times(2^{10}-1)}{2-1}$$
$$=110+(2^{10}-1)$$
$$=2^{10}+109$$

3 $9=10-1$, $99=10^2-1$, $999=10^3-1$, $9999=10^4-1$, $\cdots$이므로 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=10^n-1$

따라서 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(10^k-1)=\sum_{k=1}^{10}10^k-\sum_{k=1}^{10}1=\frac{10\times(10^{10}-1)}{10-1}-10=\frac{10^{11}-100}{9}$$

4 $$\sum_{k=1}^{9}k^2(k-1)+\sum_{k=1}^{9}k(k+1)=\sum_{k=1}^{9}(k^3-k^2+k^2+k)=\sum_{k=1}^{9}(k^3+k)=\sum_{k=1}^{9}k^3+\sum_{k=1}^{9}k=\left(\frac{9\times10}{2}\right)^2+\frac{9\times10}{2}=2025+45=2070$$

5 $$\sum_{k=1}^{20}\frac{1+2+3+\cdots+k}{k}=\sum_{k=1}^{20}\frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k}=\sum_{k=1}^{20}\frac{k+1}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}1\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{20\times21}{2}+20\right)=115$$

6 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$a_n=(2n)^2=4n^2$

따라서 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}4k^2=4\sum_{k=1}^{n}k^2=4\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

7 일반항 a_n은

$a_n=n(2n+1)=2n^2+n$

$$\therefore \sum_{k=1}^{11}a_k=\sum_{k=1}^{11}(2k^2+k)=2\sum_{k=1}^{11}k^2+\sum_{k=1}^{11}k=2\times\frac{11\times12\times23}{6}+\frac{11\times12}{2}=1012+66=1078$$

8 $$\sum_{k=2}^{10}\frac{2}{k^2-1}=\sum_{k=2}^{10}\frac{2}{(k-1)(k+1)}=\sum_{k=2}^{10}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}=\frac{72}{55}$$

9 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

따라서 첫째항부터 제19항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{19}a_k=\sum_{k=1}^{19}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{19}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\times\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)\right\}$$
$$=2\times\left(1-\frac{1}{20}\right)=\frac{19}{10}$$

10 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2})$$
$$=(2-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})=\sqrt{n+3}-\sqrt{3}$$

11 $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{24}+5}=\sum_{k=1}^{23}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$$
$$=\sum_{k=1}^{23}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})}=\sum_{k=1}^{23}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$
$$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-2)+\cdots+(5-\sqrt{24})=5-\sqrt{2}$$

12 $S=1-2\times3+3\times3^2-4\times3^3+\cdots-10\times3^9$ …… ㉠

㉠의 양변에 -3을 곱하면

$-3S=-3+2\times3^2-3\times3^3+4\times3^4+\cdots+10\times3^{10}$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$$4S=1-3+3^2-3^3+3^4-\cdots-3^9-10\times3^{10}=\frac{1\times\{1-(-3)^{10}\}}{1-(-3)}-10\times3^{10}=\frac{1-41\times3^{10}}{4}$$

$\therefore 16S=1-41\times3^{10}$

10 수학적 귀납법

140~147쪽

001 답 9

$a_{n+1}=a_n+n$의 n에 1, 2, 3을 차례로 대입하면
$a_2=a_1+1=3+1=4$
$a_3=a_2+2=4+2=6$
$\therefore a_4=a_3+3=6+3=9$

002 답 12

$a_{n+1}=na_n$의 n에 1, 2, 3을 차례로 대입하면
$a_2=1\times a_1=1\times 2=2$
$a_3=2\times a_2=2\times 2=4$
$\therefore a_4=3\times a_3=3\times 4=12$

003 답 41

$a_{n+1}=2a_n+3n$의 n에 1, 2, 3을 차례로 대입하면
$a_2=2\times a_1+3\times 1=2\times 1+3=5$
$a_3=2\times a_2+3\times 2=2\times 5+6=16$
$\therefore a_4=2\times a_3+3\times 3=2\times 16+9=41$

004 답 3

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$의 n에 1, 2를 차례로 대입하면
$a_3=a_2+a_1=2-1=1$
$\therefore a_4=a_3+a_2=1+2=3$

005 답 3, 4, 3, 1, 3

006 답 $a_1=-2,\ a_{n+1}=a_n+7\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

첫째항은 $a_1=-2$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면
$a_2-a_1=5-(-2)=7$
$a_3-a_2=12-5=7$
$a_4-a_3=19-12=7$
$\vdots$
$a_{n+1}-a_n=7\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$a_1=-2,\ a_{n+1}=a_n+7\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

007 답 $a_1=11,\ a_{n+1}=a_n-4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

첫째항은 $a_1=11$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면
$a_2-a_1=7-11=-4$
$a_3-a_2=3-7=-4$
$a_4-a_3=-1-3=-4$
$\vdots$
$a_{n+1}-a_n=-4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$a_1=11,\ a_{n+1}=a_n-4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

008 답 $a_1=\frac{3}{2},\ a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

첫째항은 $a_1=\frac{3}{2}$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면
$a_2-a_1=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$
$a_3-a_2=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$
$a_4-a_3=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$
$\vdots$
$a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$a_1=\frac{3}{2},\ a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

009 답 $-1,\ 5,\ -1,\ -n+6$

010 답 $a_n=2n+1$

$a_{n+1}-a_n=2$에서 주어진 수열은 공차가 2인 등차수열이다.
이때 첫째항이 $a_1=3$이므로
$a_n=3+(n-1)\times 2$
$=2n+1$

011 답 $a_n=n$

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 주어진 수열은 등차수열이다.
이때 첫째항이 $a_1=1$, 공차가 $a_2-a_1=1$이므로
$a_n=1+(n-1)\times 1$
$=n$

012 답 $a_n=-2n+5$

$a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$에서 주어진 수열은 등차수열이다.
이때 첫째항이 $a_1=3$, 공차가 $a_2-a_1=-2$이므로
$a_n=3+(n-1)\times(-2)$
$=-2n+5$

013 답 2, 3, 2, 2, 2

014 답 $a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

첫째항은 $a_1=3$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면
$a_2\div a_1=1\div 3=\frac{1}{3}$
$a_3\div a_2=\frac{1}{3}\div 1=\frac{1}{3}$
$a_4\div a_3=\frac{1}{9}\div\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$
$\vdots$
$a_{n+1}\div a_n=\frac{1}{3}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

015 답 $a_1=1,\ a_{n+1}=-3a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

첫째항은 $a_1=1$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2\div a_1=(-3)\div 1=-3$

$a_3\div a_2=9\div(-3)=-3$

$a_4\div a_3=(-27)\div 9=-3$

$\vdots$

$a_{n+1}\div a_n=-3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=1,\ a_{n+1}=-3a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

016 답 $a_1=25,\ a_{n+1}=-\frac{1}{5}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

첫째항은 $a_1=25$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2\div a_1=(-5)\div 25=-\frac{1}{5}$

$a_3\div a_2=1\div(-5)=-\frac{1}{5}$

$a_4\div a_3=\left(-\frac{1}{5}\right)\div 1=-\frac{1}{5}$

$\vdots$

$a_{n+1}\div a_n=-\frac{1}{5}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=25,\ a_{n+1}=-\frac{1}{5}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

017 답 $-2,\ 1,\ -2,\ (-2)^{n-1}$

018 답 $a_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_{n+1}\div a_n=\frac{1}{2}$에서 주어진 수열은 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=3$이므로

$a_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

019 답 $a_n=5^{n-1}$

${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$에서 주어진 수열은 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=1$, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=5$이므로

$a_n=1\times 5^{n-1}$

$\quad=5^{n-1}$

020 답 $a_n=2\times 3^{n-1}$

$a_{n+1}\div a_n=a_{n+2}\div a_{n+1}$에서 주어진 수열은 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=2$, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=3$이므로

$a_n=2\times 3^{n-1}$

021 답 $n(n-1),\ n^2-n+2$

022 답 $a_n=\frac{3n^2-3n+2}{2}$

$a_{n+1}=a_n+3n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}&=a_1+3\times 1\\
\cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+3\times 2\\
\cancel{a_4}&=\cancel{a_3}+3\times 3\\
&\ \vdots\\
+\underline{)\ a_n}&\underline{=\cancel{a_{n-1}}+3(n-1)}\\
a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3k\\
&=1+3\times\frac{n(n-1)}{2}\\
&=\frac{3n^2-3n+2}{2}
\end{aligned}$$

023 답 $a_n=n^2-2n$

$a_{n+1}-a_n=2n-1$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}-a_1&=2\times 1-1\\
\cancel{a_3}-\cancel{a_2}&=2\times 2-1\\
\cancel{a_4}-\cancel{a_3}&=2\times 3-1\\
&\ \vdots\\
+\underline{)\ a_n-\cancel{a_{n-1}}}&\underline{=2(n-1)-1}\\
a_n-a_1&=\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)\\
&=2\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1\\
&=2\times\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)\\
&=n^2-2n+1
\end{aligned}$$

$\therefore\ a_n=n^2-2n+1+(-1)$

$\quad=n^2-2n$

024 답 $a_n=2^n+1$

$a_{n+1}-a_n=2^n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}-a_1&=2\\
\cancel{a_3}-\cancel{a_2}&=2^2\\
\cancel{a_4}-\cancel{a_3}&=2^3\\
&\ \vdots\\
+\underline{)\ a_n-\cancel{a_{n-1}}}&\underline{=2^{n-1}}\\
a_n-a_1&=\sum_{k=1}^{n-1}2^k\\
&=\frac{2\times(2^{n-1}-1)}{2-1}\\
&=2^n-2
\end{aligned}$$

$\therefore\ a_n=2^n-2+3$

$\quad=2^n+1$

025 답 $n,\ \frac{5}{n}$

026 답 $a_n=\dfrac{4}{n+1}$

$a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+2}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=\frac{2}{3}a_1$$
$$\cancel{a_3}=\frac{3}{4}\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=\frac{4}{5}\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times\big)\ a_n=\frac{n}{n+1}\cancel{a_{n-1}}$$

$$a_n=\frac{n}{n+1}\times\cdots\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times a_1$$
$$=\frac{2}{n+1}\times 2$$
$$=\frac{4}{n+1}$$

027 답 $a_n=\dfrac{n^2+n}{2}$

$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=\frac{3}{1}a_1$$
$$\cancel{a_3}=\frac{4}{2}\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=\frac{5}{3}\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times\big)\ a_n=\frac{n+1}{n-1}\cancel{a_{n-1}}$$

$$a_n=\frac{n+1}{n-1}\times\frac{n}{n-2}\times\cdots\times\frac{6}{4}\times\frac{5}{3}\times\frac{4}{2}\times\frac{3}{1}\times a_1$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}\times 1$$
$$=\frac{n^2+n}{2}$$

028 답 **1, 2, 2, $2^{n-1}+1$**

029 답 $a_n=2^{n+1}-1$

$a_{n+1}=2a_n+1$에서 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

이때 수열 $\{a_n+1\}$은 첫째항이 $a_1+1=4$, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n+1=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$

$\therefore\ a_n=2^{n+1}-1$

030 답 $a_n=3^{n-1}+1$

$a_{n+1}=3a_n-2$에서 $a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

이때 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 $a_1-1=1$, 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n-1=1\times 3^{n-1}=3^{n-1}$

$\therefore\ a_n=3^{n-1}+1$

031 답 ○

$p(1)$이 참이면 $p(3)$, $p(9)$, $p(27)$, ⋯이 참이다.

032 답 ×

$p(2)$가 참이면 $p(6)$, $p(18)$, $p(54)$, ⋯가 참이다.

따라서 $p(36)$이 참인지는 알 수 없다.

033 답 ×

$p(3)$이 참일 때, $3n=1$을 만족하는 자연수 n이 존재하지 않으므로 $p(1)$이 참인지는 알 수 없다.

034 답 ×

$p(3)$이 참이면 $p(9)$, $p(27)$, $p(81)$, ⋯이 참이다.

따라서 $p(6)$, $p(12)$, $p(15)$, ⋯가 참인지는 알 수 없다.

035 답 ×

$p(5)$가 참이면 $p(7)$, $p(9)$, $p(11)$, ⋯이 참이다.

따라서 $p(10)$이 참인지는 알 수 없다.

036 답 ○

$p(1)$이 참이면 $p(3)$, $p(5)$, $p(7)$, ⋯이 참이다.

따라서 $p(1)$이 참이면 모든 홀수 k에 대하여 $p(k)$가 참이다.

037 답 ○

$p(2)$가 참이면 $p(4)$, $p(6)$, $p(8)$, ⋯이 참이다.

따라서 $p(2)$가 참이면 모든 짝수 k에 대하여 $p(k)$가 참이다.

038 답 ○

$p(1)$이 참이면 $p(3)$, $p(5)$, $p(7)$, ⋯이 참이고

$p(2)$가 참이면 $p(4)$, $p(6)$, $p(8)$, ⋯이 참이다.

따라서 $p(1)$, $p(2)$가 참이면 모든 자연수 k에 대하여 $p(k)$가 참이다.

039 답 **1, $k+1$, $k+1$, $k+1$, $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$**

040 답 **풀이 참고**

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1$, (우변)$=1$

따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

위의 식의 양변에 $2k+1$을 더하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)$$
$$=(k+1)^2$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

041 답 **풀이 참고**

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1$, (우변)$=1$

따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$

위의 식의 양변에 $(k+1)^3$을 더하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$$
$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

042 답 풀이 참고

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1$, (우변)$=1$

따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$

위의 식의 양변에 2^k을 더하면

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k=2^k-1+2^k$$
$$=2^{k+1}-1$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

043 답 **25, 25, 2, $(k+1)^2$, $(k+1)^2$**

044 답 풀이 참고

(i) $n=3$일 때

(좌변)$=8$, (우변)$=7$

$8>7$이므로 $n=3$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\,(k\ge3)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^k>2k+1$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$2^{k+1}>2(2k+1)>2(k+1)+1$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n\ge3$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

045 답 풀이 참고

(i) $n=4$일 때

(좌변)$=24$, (우변)$=16$

$24>16$이므로 $n=4$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\,(k\ge4)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1\times2\times3\times\cdots\times k>2^k$

위의 식의 양변에 $k+1$을 곱하면

$$1\times2\times3\times\cdots\times k\times(k+1)>2^k(k+1)$$
$$>2^k\times2=2^{k+1}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n\ge4$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

046 답 풀이 참고

(i) $n=2$일 때

(좌변)$=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$, (우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\frac{5}{4}<\frac{3}{2}$이므로 $n=2$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\,(k\ge2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}-\left(2-\frac{1}{k+1}\right)=-\frac{1}{k(k+1)^2}<0$이므로

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

연산유형 최종 점검하기

148~149쪽

1 ② **2** $a_1=23$, $a_{n+1}=a_n-6$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ **3** 59
4 $a_1=6$, $a_{n+1}=2a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ **5** ① **6** ③
7 26 **8** ⑤ **9** ⑤ **10** 풀이 참고
11 (가) 9 (나) 7 (다) 3^{2k-1} **12** (가) $1+kh$ (나) kh^2 (다) $k+1$

1 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$의 n에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$a_3=a_2+a_1=1-2=-1$

$a_4=a_3+a_2=-1+1=0$

$\therefore a_5=a_4+a_3=0-1=-1$

2 첫째항은 $a_1=23$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면

$a_2-a_1=17-23=-6$

$a_3-a_2=11-17=-6$

$a_4-a_3=5-11=-6$

$\vdots$

$a_{n+1}-a_n=-6$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=23$, $a_{n+1}=a_n-6$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

3 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 주어진 수열은 등차수열이다.
이때 첫째항이 $a_1=2$, 공차가 $a_2-a_1=3$이므로
$a_{20}=2+19\times3=59$

4 첫째항은 $a_1=6$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면
$a_2\div a_1=12\div6=2$
$a_3\div a_2=24\div12=2$
$a_4\div a_3=48\div24=2$
$\vdots$
$a_{n+1}\div a_n=2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$a_1=6,\ a_{n+1}=2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

5 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=3$에서 주어진 수열은 등비수열이다.
이때 첫째항이 $a_1=3$, 공비가 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{3}$이므로
$a_{50}=3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{49}=\dfrac{1}{3^{48}}$
$\therefore\ k=48$

6 $a_{n+1}=a_n+2n$의 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=a_1+2\times1 \\ & \cancel{a_3}=\cancel{a_2}+2\times2 \\ & \cancel{a_4}=\cancel{a_3}+2\times3 \\ & \quad\vdots \\ +\,) & a_n=\cancel{a_{n-1}}+2(n-1) \\ \hline & a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2k \\ & \quad=3+2\times\dfrac{n(n-1)}{2} \\ & \quad=n^2-n+3 \end{array}$$

$\therefore\ a_{100}=10000-100+3=9903$

7 $a_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n-1}a_n$의 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}=\dfrac{3}{1}a_1 \\ & \cancel{a_3}=\dfrac{5}{3}\cancel{a_2} \\ & \cancel{a_4}=\dfrac{7}{5}\cancel{a_3} \\ & \quad\vdots \\ \times\,) & a_n=\dfrac{2n-1}{2n-3}\cancel{a_{n-1}} \\ \hline & a_n=\dfrac{2n-1}{2n-3}\times\cdots\times\dfrac{7}{5}\times\dfrac{5}{3}\times\dfrac{3}{1}\times a_1 \\ & \quad=(2n-1)\times1 \\ & \quad=2n-1 \end{array}$$

$a_k>50$에서 $2k-1>50$
$\therefore\ k>\dfrac{51}{2}=25.5$
따라서 자연수 k의 최솟값은 26이다.

8 $a_{n+1}=-3a_n+4$에서
$a_{n+1}-1=-3(a_n-1)$
이때 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 $a_1-1=1$, 공비가 -3인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} a_n-1&=1\times(-3)^{n-1} \\ &=(-3)^{n-1} \end{aligned}$$

$\therefore\ a_n=(-3)^{n-1}+1$
$\therefore\ a_{11}=(-3)^{10}+1=3^{10}+1$

9 ㄱ. $p(1)$이 참이면 $p(4)$, $p(7)$, $p(10)$, $\cdots$이 참이므로 모든 자연수 k에 대하여 $p(3k)$가 참인지는 알 수 없다.
ㄴ. $p(3)$이 참이면 $p(6)$, $p(9)$, $p(12)$, $\cdots$가 참이므로 모든 3의 배수 k에 대하여 $p(k)$가 참이다.
ㄷ. $p(1)$이 참이면 $p(4)$, $p(7)$, $p(10)$, $\cdots$이 참,
$p(2)$가 참이면 $p(5)$, $p(8)$, $p(11)$, $\cdots$이 참,
$p(3)$이 참이면 $p(6)$, $p(9)$, $p(12)$, $\cdots$가 참이다.
따라서 $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$이 참이면 모든 자연수 k에 대하여 $p(k)$가 참이다.
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

10 (i) $n=1$일 때
(좌변)$=\dfrac{1}{2}$, (우변)$=\dfrac{1}{2}$
따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

위의 식의 양변에 $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$을 더하면

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &=\frac{k+1}{k+2} \\ &=\frac{k+1}{(k+1)+1} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

· MEMO ·