정답과 해설

1. 제곱근과 실수

P. 8~10 개념+대표 문제 확인하기

1 8	**2** $-\frac{7}{3}$	**3** $-a+2b$	**4** 6
5 21개	**6** ㄴ, ㅁ, ㅂ	**7** ㄴ, ㅁ	**8** ③
9 43개	**10** ②, ⑤	**11** $\mathrm{P}(-\sqrt{5})$, $\mathrm{Q}(1+\sqrt{10})$	
12 ㄷ, ㄹ	**13** ⑤	**14** $b<a<c$	**15** 14

1 $(-5)^2=25$의 양의 제곱근은 5이므로 $a=5$
$\sqrt{81}=9$의 음의 제곱근은 -3이므로 $b=-3$
제곱근 36은 $\sqrt{36}=6$이므로 $c=6$
$\therefore a+b+c=5+(-3)+6=8$

2 $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}-\sqrt{1.44}\div\left(-\sqrt{\frac{6}{25}}\right)^2+\sqrt{2^6}\times(\sqrt{0.5^2})^2$
$=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}-\sqrt{1.2^2}\div\left(-\sqrt{\frac{6}{25}}\right)^2+\sqrt{(2^3)^2}\times(\sqrt{0.5^2})^2$
$=\frac{2}{3}-1.2\div\frac{6}{25}+2^3\times0.5^2$
$=\frac{2}{3}-1.2\times\frac{25}{6}+8\times0.25$
$=\frac{2}{3}-5+2=-\frac{7}{3}$

3 $ab<0$이므로 a, b의 부호는 서로 다르고, $a<b$이므로
$a<0$, $b>0$이다.
이때 $2a<0$, $-3b<0$이고 $a-b<0$이므로
$\sqrt{4a^2}+\sqrt{(-3b)^2}-\sqrt{(a-b)^2}$
$=\sqrt{(2a)^2}+\sqrt{(-3b)^2}-\sqrt{(a-b)^2}$
$=-2a+\{-(-3b)\}-\{-(a-b)\}$
$=-2a+3b+a-b$
$=-a+2b$

4 $\sqrt{\frac{600}{n}}=\sqrt{\frac{2^3\times3\times5^2}{n}}$이 자연수가 되려면 n은 600의 약수이면서 $2\times3\times$(자연수)^2 꼴이어야 한다.
따라서 자연수 n의 값은
2×3, $2^3\times3$, $2\times3\times5^2$, $2^3\times3\times5^2$이다. … ㉠
$\sqrt{24n}=\sqrt{2^3\times3\times n}$이 자연수가 되려면
$n=2\times3\times$(자연수)^2 꼴이어야 한다. … ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 구하는 가장 작은 자연수 n의 값은
$2\times3=6$

5 $5<\sqrt{\frac{a}{2}}<6$에서 각 변을 제곱하면
$5^2<\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2<6^2$, $25<\frac{a}{2}<36$ $\quad\therefore 50<a<72$
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 a의 개수는
$72-50-1=21$(개)

참고 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수 구하기
m, $n(m>n)$이 정수일 때
(1) $n<x<m$인 정수 x의 개수 ⇨ $(m-n-1)$개
(2) $n\le x\le m$인 정수 x의 개수 ⇨ $(m-n+1)$개
(3) $n<x\le m$(또는 $n\le x<m$)인 정수 x의 개수
⇨ $(m-n)$개

6 ㄱ. $0.\dot{3}\dot{4}=\frac{34}{99}$이므로 유리수
ㄴ. $\sqrt{0.4}=\sqrt{\frac{2}{5}}$이므로 무리수
ㄷ. $3-\sqrt{9}=3-3=0$이므로 유리수
ㄹ. $\sqrt{1.\dot{7}}=\sqrt{\frac{17-1}{9}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}$이므로 유리수
ㅁ. $\pi-1=3.141592\cdots-1=2.141592\cdots$이므로 순환소수가 아닌 무한소수, 즉 무리수
ㅂ. $0.1121231234\cdots$는 순환소수가 아닌 무한소수, 즉 무리수
따라서 순환소수가 아닌 무한소수, 즉 무리수는 ㄴ, ㅁ, ㅂ이다.

7 ㄱ. 무한소수 중에서 순환소수는 유리수이다.
ㄴ. 모든 유한소수는 분수 $\frac{a}{b}$(a, b는 정수, $b\neq0$) 꼴로 나타낼 수 있으므로 유리수이다.
ㄷ. 0은 정수이므로 유리수이다.
ㄹ. 양의 유리수 4에 대하여 $\sqrt{4}=2$는 유리수이다.
ㅁ. 유리수가 아닌 수는 무리수이므로 유리수이면서 동시에 무리수인 수는 없다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㅁ이다.

8 $a=-\sqrt{3}$일 때
① $a^2=(-\sqrt{3})^2=3$
② $(-a)^2=\{-(-\sqrt{3})\}^2=(\sqrt{3})^2=3$
③ $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$
④ $-\sqrt{3a^2}=-\sqrt{3\times(-\sqrt{3})^2}=-\sqrt{3^2}=-3$
⑤ $1-a^2=1-(-\sqrt{3})^2=1-3=-2$
따라서 유리수가 아닌 것은 ③이다.

9 $\sqrt{x}$가 유리수인 경우는 x가 (유리수)^2 꼴일 때이다.
이때 x는 50 이하의 자연수이므로 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49의 7개이다.
따라서 $\sqrt{x}$가 무리수가 되도록 하는 자연수 x의 개수는
$50-7=43$(개)

10 ① $a=1$, $b=\sqrt{2}$이면
$1+(\sqrt{2})^2=1+2=3$이므로 유리수이다.
② $a-b=$(유리수)$-$(무리수)$=$(무리수)에서
$\frac{(\text{무리수})}{(0\text{이 아닌 유리수})}$이므로 무리수이다.
③ $a=1$, $b=\sqrt{2}$이면
$1-(\sqrt{2})^2=1-2=-1$이므로 유리수이다.
④ $a=0$, $b=\sqrt{2}$이면
$0\times\sqrt{2}=0$이므로 유리수이다.
⑤ $\frac{(0\text{이 아닌 유리수})}{(\text{무리수})}$이므로 무리수이다.
따라서 항상 무리수인 것은 ②, ⑤이다.

개념 더하기 다시 보기
다음 식의 계산 결과는 항상 무리수이다.
① (유리수)$\pm$(무리수) 또는 (무리수)$\pm$(유리수)
② (0이 아닌 유리수)$\times$(무리수)
③ $\frac{(0\text{이 아닌 유리수})}{(\text{무리수})}$
④ $\frac{(\text{무리수})}{(0\text{이 아닌 유리수})}$

11 $\overline{AP}=\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로
점 P에 대응하는 수는 $-\sqrt{5}$ $\quad\therefore$ P$(-\sqrt{5})$
$\overline{CQ}=\overline{CD}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$이므로
점 Q에 대응하는 수는 $1+\sqrt{10}$ $\quad\therefore$ Q$(1+\sqrt{10})$

12 ㄱ. 2에 가장 가까운 무리수는 알 수 없다.
ㄴ. 3과 5 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.
따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

13 ① $(6+\sqrt{3})-8=-2+\sqrt{3}=-\sqrt{4}+\sqrt{3}<0$
$\therefore 6+\sqrt{3}<8$
② $(2-\sqrt{6})-(-1)=3-\sqrt{6}=\sqrt{9}-\sqrt{6}>0$
$\therefore 2-\sqrt{6}>-1$
③ $(\sqrt{7}-2)-(\sqrt{11}-2)=\sqrt{7}-\sqrt{11}<0$
$\therefore \sqrt{7}-2<\sqrt{11}-2$
④ $\sqrt{10}>3$이므로 양변에서 $\sqrt{5}$를 빼면
$\sqrt{10}-\sqrt{5}>3-\sqrt{5}$
⑤ $3<\sqrt{13}$에서 $-3>-\sqrt{13}$이므로 양변에 $\sqrt{10}$을 더하면
$\sqrt{10}-3>\sqrt{10}-\sqrt{13}$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

14 $a-c=(8-\sqrt{6})-(8-\sqrt{5})=-\sqrt{6}+\sqrt{5}<0$
$\therefore a<c$ $\quad\cdots$ ㉠
$a-b=(8-\sqrt{6})-(2+\sqrt{7})=6-\sqrt{6}-\sqrt{7}$
이때 $2<\sqrt{6}<3$, $2<\sqrt{7}<3$, 즉 $4<\sqrt{6}+\sqrt{7}<6$이므로
$a-b=6-(\sqrt{6}+\sqrt{7})>0$
$\therefore a>b$ $\quad\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 $b<a<c$이다.

15 $3<\sqrt{15}<4$이므로
$-4<-\sqrt{15}<-3$, $-2<2-\sqrt{15}<-1$ $\quad\cdots$ ㉠
$2<\sqrt{7}<3$이므로 $5<\sqrt{7}+3<6$ $\quad\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 두 수 사이에 있는 정수는 -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은 14이다.

P. 11~15 내신 5% 따라잡기

1 ② **2** 2, $-\frac{4}{3}$ **3** 29 **4** 2배
5 $\sqrt{10}$ cm **6** ③ **7** $2x-y$ **8** ③ **9** 0
10 7 **11** $\frac{1}{9}$ **12** 160 **13** 19
14 a^2, a, $\sqrt{a}$, $\sqrt{\frac{1}{a}}$, $\frac{1}{a}$ **15** ⑤
16 14, 15, 16 **17** $\frac{7}{15}$, $\frac{8}{15}$ **18** 19개
19 6개 **20** 367개 **21** ④ **22** $6+\sqrt{5}$
23 $3+24\pi$ **24** 178 **25** $3+\sqrt{11}$
26 9cm^2 **27** C$(\sqrt{5}, 0)$ **28** 27

1 ㄱ. $x^2=a$일 때, x를 a의 제곱근이라 한다.
ㄴ. 3의 두 제곱근은 $\sqrt{3}$과 $-\sqrt{3}$이고, 그 절댓값은 $\sqrt{3}$으로 같다.
ㄷ. $\sqrt{0.0625}=\sqrt{0.25^2}=0.25$의 양의 제곱근은
$\sqrt{0.25}=\sqrt{0.5^2}=0.5$이다.
ㄹ. 49의 양의 제곱근은 7이고, 제곱근 7은 $\sqrt{7}$이다.
ㅁ. (제곱근 $(-1.\dot{7})^2$)$=\sqrt{(-1.\dot{7})^2}=1.\dot{7}=\frac{16}{9}$이므로
$\frac{16}{9}$의 제곱근은 $\pm\sqrt{\frac{16}{9}}=\pm\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\pm\frac{4}{3}$이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ의 2개이다.

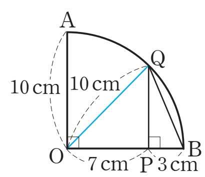
2 $\sqrt{(3a-1)^2}=5$에서
(i) $3a-1\geq 0$일 때
$3a-1=5$, $3a=6$ $\quad\therefore a=2$
(ii) $3a-1<0$일 때
$-(3a-1)=5$, $-3a=4$ $\quad\therefore a=-\frac{4}{3}$
따라서 (i), (ii)에 의해 a의 값은 2, $-\frac{4}{3}$이다.

3 $1.0\dot{5}\times\frac{a}{b}=(2.\dot{1})^2$에서 $\frac{95}{90}\times\frac{a}{b}=\left(\frac{19}{9}\right)^2$
$\therefore \frac{a}{b}=\frac{19^2}{9^2}\times\frac{18}{19}=\frac{38}{9}$
따라서 $a=38$, $b=9$이므로
$a-b=38-9=29$

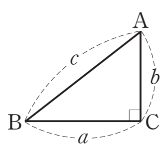
4 원 O′의 반지름의 길이를 x라 하면
(원 O의 넓이)$=\pi r^2$, (원 O′의 넓이)$=\pi x^2$이므로
$\pi x^2=4\pi r^2$, $x^2=4r^2$
이때 $r>0$, $x>0$이므로 $x=2r$
따라서 원 O′의 반지름의 길이는 원 O의 반지름의 길이의 2배이다.

5 처음 정사각형의 넓이는 $(\sqrt{160})^2=160(\text{cm}^2)$이고, 정사각형을 한 번 접으면 그 넓이는 이전 단계 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이 되므로 [1단계]~[4단계]에서 생기는 정사각형의 넓이는 각각 다음과 같다.
[1단계] $160\times\frac{1}{2}=80(\text{cm}^2)$, [2단계] $80\times\frac{1}{2}=40(\text{cm}^2)$
[3단계] $40\times\frac{1}{2}=20(\text{cm}^2)$, [4단계] $20\times\frac{1}{2}=10(\text{cm}^2)$
따라서 [4단계]에서 생기는 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{10}$ cm이다.

6 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OQ}$를 그으면
$\overline{OQ}=\overline{OA}=10$ cm
$\overline{PB}=\overline{OB}-\overline{OP}=10-7=3(\text{cm})$
△OPQ에서
$\overline{PQ}=\sqrt{10^2-7^2}=\sqrt{51}(\text{cm})$
또 △BQP에서
$\overline{BQ}=\sqrt{3^2+(\sqrt{51})^2}=\sqrt{60}(\text{cm})$



참고 **제곱근을 이용하여 직각삼각형의 한 변의 길이 구하기**
오른쪽 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의해 $c^2=a^2+b^2$이므로
⇨ $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ($\because$ $c>0$)
$a=\sqrt{c^2-b^2}$ ($\because$ $a>0$)
$b=\sqrt{c^2-a^2}$ ($\because$ $b>0$)



7 $xy<0$이므로 x, y의 부호는 서로 다르고
$x+y<0$, $|x|>|y|$이므로 $x<0$, $y>0$
$\therefore$ $\sqrt{9x^2}-\sqrt{(2y)^2}+\sqrt{(-y)^2}-|5x|$
$=\sqrt{(3x)^2}-\sqrt{(2y)^2}+\sqrt{(-y)^2}-|5x|$
$=-3x-2y+\{-(-y)\}-(-5x)$
$=-3x-2y+y+5x$
$=2x-y$

8 (가) $b<c<a$에서 $c-b>0$, $b-a<0$
(나) $c(b-a)<0$에서 $b-a<0$이므로 $c>0$
이때 (가)에서 $c<a$이므로 $a>0$
(다) $ac+b=0$에서 $b=-ac<0$ ($\because$ $a>0$, $c>0$)
$\therefore$ $\sqrt{(c-b)^2}-\sqrt{4b^2}-\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{(b-a)^2}$
$=\sqrt{(c-b)^2}-\sqrt{(2b)^2}-\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{(b-a)^2}$
$=c-b-(-2b)-\{-(-a)\}+\{-(b-a)\}$
$=c-b+2b-a-b+a=c$

9 $-1<x<0$에서 $\frac{1}{x}<-1$이므로 $\frac{1}{x}<-1<x<0$
따라서 $x+\frac{1}{x}<0$, $x-\frac{1}{x}>0$이므로
$\sqrt{4x^2}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}$
$=\sqrt{(2x)^2}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}$
$=-2x-\left\{-\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}+\left(x-\frac{1}{x}\right)$
$=-2x+x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}=0$

10 $1\times2\times3\times\cdots\times8\times9\times10$
$=1\times2\times3\times2^2\times5\times(2\times3)\times7\times2^3\times3^2\times(2\times5)$
$=2^8\times3^4\times5^2\times7=(2^4\times3^2\times5)^2\times7$
따라서 $\sqrt{\frac{(2^4\times3^2\times5)^2\times7}{n}}$이 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 n의 값은 7이다.

11 모든 경우의 수는 $6\times6=36$
$\sqrt{180ab}=\sqrt{2^2\times3^2\times5\times ab}$가 자연수가 되려면
$ab=5\times(\text{자연수})^2$ 꼴이어야 하고, a, b는 주사위의 눈의 수이므로 $1\le ab\le36$ $\quad\therefore$ $ab=5\times1^2$, 5×2^2
(ⅰ) $ab=5\times1^2$일 때, a, b의 순서쌍 (a, b)는
(1, 5), (5, 1)의 2가지
(ⅱ) $ab=5\times2^2$일 때, a, b의 순서쌍 (a, b)는
(5, 4), (4, 5)의 2가지
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 $\sqrt{180ab}$가 자연수가 되는 경우의 수는 $2+2=4$이므로 구하는 확률은 $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

12 $v=\sqrt{2\times9.8\times h}=\sqrt{\frac{2\times7^2\times h}{5}}$가 자연수가 되려면
$h=2\times5\times(\text{자연수})^2$ 꼴이어야 한다.
따라서 자연수 h는
$2\times5\times1^2=10$, $2\times5\times2^2=40$, $2\times5\times3^2=90$,
$2\times5\times4^2=160$, $\cdots$
이므로 세 자리의 자연수 h의 값 중 가장 작은 수는 160이다.

13 $\sqrt{200+a}-\sqrt{150-b}$의 값이 가능한 한 작은 정수가 되려면 $\sqrt{200+a}$는 가장 작은 정수이고, $\sqrt{150-b}$는 가장 큰 정수이어야 한다.
이때 a는 자연수이므로 $\sqrt{200+a}$가 가장 작은 정수가 되려면 $200+a$의 값이 200보다 큰 $(\text{자연수})^2$ 꼴인 수 중에서 가장 작은 수이어야 한다.
즉, $200+a=225(=15^2)$ $\quad\therefore$ $a=25$
또 b는 자연수이므로 $\sqrt{150-b}$가 가장 큰 정수가 되려면 $150-b$의 값이 150보다 작은 $(\text{자연수})^2$ 꼴인 수 중에서 가장 큰 수이어야 한다.
즉, $150-b=144(=12^2)$ $\quad\therefore$ $b=6$
$\therefore$ $a-b=25-6=19$

14 $0<a<1$이므로 $a^2<a$

즉, $a^2<a<1$이므로 $a<\sqrt{a}<1$, $1<\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{a^2}$

이때 $1<\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{a^2}$에서 $1<\sqrt{\dfrac{1}{a}}<\dfrac{1}{a}$

$\therefore\ a^2<a<\sqrt{a}<\sqrt{\dfrac{1}{a}}<\dfrac{1}{a}$

따라서 작은 것부터 차례로 나열하면

a^2, a, $\sqrt{a}$, $\sqrt{\dfrac{1}{a}}$, $\dfrac{1}{a}$

다른 풀이

$0<a<1$이므로 $a=\dfrac{1}{9}$이라 하면

$\sqrt{a}=\sqrt{\dfrac{1}{9}}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{a}=9$, $\sqrt{\dfrac{1}{a}}=\sqrt{9}=3$, $a^2=\left(\dfrac{1}{9}\right)^2=\dfrac{1}{81}$이므로

$a^2<a<\sqrt{a}<\sqrt{\dfrac{1}{a}}<\dfrac{1}{a}$

15 $a+b=5+(\sqrt{37}-1)=4+\sqrt{37}>0$

$a-b=5-(\sqrt{37}-1)=6-\sqrt{37}=\sqrt{36}-\sqrt{37}<0$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sqrt{(a+b)^2}-\sqrt{(a-b)^2}&=a+b-\{-(a-b)\}\\&=a+b+a-b=2a\\&=2\times5=10\end{aligned}$$

16 x가 자연수이므로 주어진 식에서

$\sqrt{(x-1)^2}<\sqrt{230}<\sqrt{(x+2)^2}$

$x-1<\sqrt{230}<x+2$

이때 $\sqrt{15^2}<\sqrt{230}<\sqrt{16^2}$이므로

$15<\sqrt{230}<16$

즉, $x-1\le15$에서

$x=1,\ 2,\ \cdots,\ \underline{14,\ 15,\ 16}$ $\cdots$ ㉠

$x+2\ge16$에서

$x=\underline{14,\ 15,\ 16},\ 17,\ \cdots$ $\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x의 값은 14, 15, 16이다.

17 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$와 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 사이에 있는 수 중 분모가 15인 기약분수를 $\dfrac{x}{15}$(x는 자연수)라 하면

$\dfrac{\sqrt{5}}{5}<\dfrac{x}{15}<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2<\left(\dfrac{x}{15}\right)^2<\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$\dfrac{1}{5}<\dfrac{x^2}{225}<\dfrac{1}{3}$, $45<x^2<75$

따라서 이 식을 만족시키는 자연수 x는 7, 8이므로 구하는 기약분수는 $\dfrac{7}{15}$, $\dfrac{8}{15}$이다.

18 $f(x)=9$, 즉 $\sqrt{x}$ 이하의 자연수가 9개인 경우는

$9\le\sqrt{x}<10$이므로 $81\le x<100$

따라서 자연수 x의 개수는 $100-81=19$(개)

19 $\sqrt{0.\dot{a}}=\sqrt{\dfrac{a}{9}}=\sqrt{\dfrac{a}{3^2}}$가 유리수인 경우는 a가 $(\text{유리수})^2$ 꼴일 때이다.

이때 a는 한 자리의 자연수이므로 $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$의 3개이다.

따라서 $\sqrt{0.\dot{a}}$가 무리수가 되도록 하는 한 자리의 자연수 a의 개수는 $9-3=6$(개)

20 (i) $\sqrt{3n}$이 유리수인 경우는

$n=3k^2$(k는 유리수)일 때이므로

$3k^2\le400$, 즉 $k^2\le\dfrac{400}{3}=133.333\cdots$

이때 k가 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, $\cdots$, 11이므로

400 이하의 자연수 n은

3×1^2, 3×2^2, 3×3^2, $\cdots$, 3×11^2의 11개

(ii) $\sqrt{5n}$이 유리수인 경우는

$n=5p^2$(p는 유리수)일 때이므로

$5p^2\le400$, 즉 $p^2\le80$

이때 p가 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, $\cdots$, 8이므로

400 이하의 자연수 n은

5×1^2, 5×2^2, 5×3^2, $\cdots$, 5×8^2의 8개

(iii) $\sqrt{18n}=\sqrt{2\times3^2\times n}$이 유리수인 경우는

$n=2q^2$(q는 유리수)일 때이므로

$2q^2\le400$, 즉 $q^2\le200$

이때 q가 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, $\cdots$, 14이므로

400 이하의 자연수 n은

2×1^2, 2×2^2, 2×3^2, $\cdots$, 2×14^2의 14개

따라서 (i)~(iii)에 의해 $\sqrt{3n}$, $\sqrt{5n}$, $\sqrt{18n}$이 모두 무리수가 되도록 하는 400 이하의 자연수 n의 개수는

$400-(11+8+14)=367$(개)

21 $\overline{AP}=\overline{AC}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 $p=a+\sqrt{2}$

ㄱ. $a=p-\sqrt{2}$에서 p가 유리수이면 (유리수)$-\sqrt{2}$=(무리수)이므로 a는 무리수이고, (무리수)+1=(무리수)이므로 b도 무리수이다.

ㄴ. $p=\sqrt{5}+\sqrt{2}$이면 $a=\sqrt{5}$, $b=1+\sqrt{5}$

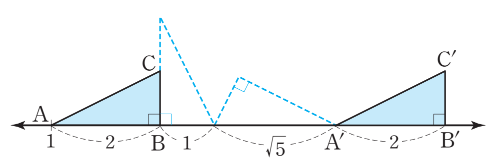
즉, p가 무리수일 때 a, b도 무리수인 경우도 있다.

ㄷ. b가 유리수이면 (유리수)-1=(유리수)이므로 a는 유리수이고, (유리수)+$\sqrt{2}$=(무리수)이므로 p는 무리수이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

22 $\overline{AC}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

이때 △ABC는 다음 그림과 같이 이동한다.



따라서 점 B′에 대응하는 수는

$1+2+1+\sqrt{5}+2=6+\sqrt{5}$

23 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=16\pi$, $r^2=16$

이때 $r>0$이므로 $r=4$

$\therefore$ (원의 둘레의 길이)$=2\pi\times4=8\pi$

따라서 점 A에 대응하는 수가 3이므로 원을 세 바퀴 굴렸을 때, 점 P에 대응하는 수는

$3+3\times8\pi=3+24\pi$

24 $\langle1,\ 2\rangle=2=2\times1$

$\langle2,\ 3\rangle=4=2\times2$

$\langle3,\ 4\rangle=6=2\times3$

$\vdots$

즉, $\langle n,\ n+1\rangle=2\times n$이므로

$\langle89,\ 90\rangle=2\times89=178$

다른 풀이

$89=\sqrt{89^2}=\sqrt{7921}$, $90=\sqrt{90^2}=\sqrt{8100}$이므로

$\langle89,\ 90\rangle=8100-7921-1=178$

25 $-2-\sqrt{11}$은 음수이고 $3+\sqrt{11}$, 7, $\sqrt{5}+\sqrt{11}$은 양수이다.

$(3+\sqrt{11})-7=\sqrt{11}-4=\sqrt{11}-\sqrt{16}<0$

$\therefore 3+\sqrt{11}<7$

$3>\sqrt{5}$이므로 양변에 $\sqrt{11}$을 더하면

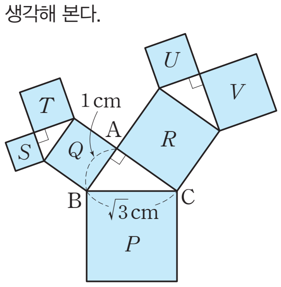
$3+\sqrt{11}>\sqrt{5}+\sqrt{11}$

따라서 크기가 큰 것부터 차례로 나열하면

7, $3+\sqrt{11}$, $\sqrt{5}+\sqrt{11}$, $-2-\sqrt{11}$

이므로 두 번째에 오는 수는 $3+\sqrt{11}$이다.

26 **길잡이** 피타고라스 정리를 이용하여 정사각형들의 넓이 사이의 관계를 생각해 본다.



위의 그림과 같이 정사각형의 넓이를 각각 $P\text{ cm}^2$, $Q\text{ cm}^2$, $R\text{ cm}^2$, $S\text{ cm}^2$, $T\text{ cm}^2$, $U\text{ cm}^2$, $V\text{ cm}^2$라 하자.

세 변의 길이가 각각 a, b, c(c는 빗변의 길이)인 직각삼각형에서 $a^2+b^2=c^2$이 성립하므로

$Q+R=P$, $S+T=Q$, $U+V=R$

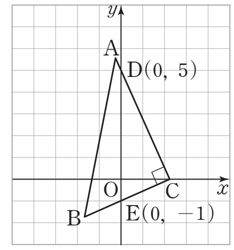
$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)$=P+\underbrace{Q+R}_{P}+\underbrace{S+T}_{Q}+\underbrace{U+V}_{R}$

$=P+P+\underbrace{Q+R}_{P}$

$=3P=3\times(\sqrt{3})^2$

$=9(\text{cm}^2)$

27 **길잡이** 서로 닮은 두 직각삼각형을 찾아 닮음의 성질을 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$가 y축과 만나는 점을 D, $\overline{BC}$가 y축과 만나는 점을 E라 하면

$\overline{OD}=5$, $\overline{OE}=1$

이때 $\triangle DOC$와 $\triangle COE$에서

$\angle DOC=\angle COE=90^\circ$,

$\angle OCD=90^\circ-\angle OCE$

$=\angle OEC$

이므로 $\triangle DOC\backsim\triangle COE$(AA 닮음)

즉, $\overline{OC}:\overline{OE}=\overline{DO}:\overline{CO}$에서

$\overline{CO}^2=\overline{OD}\times\overline{OE}=5\times1=5$

이때 $\overline{CO}>0$이므로 $\overline{CO}=\sqrt{5}$

따라서 점 C의 좌표는 $C(\sqrt{5},\ 0)$이다.

28 **길잡이** 두 밭의 각 변의 길이가 자연수가 되도록 하는 n의 값을 구한다.

배추밭의 한 변의 길이는 $\sqrt{24n}$이고 $\sqrt{24n}=\sqrt{2^3\times3\times n}$이 자연수이므로 $n=2\times3\times$(자연수)$^2=6\times$(자연수)^2

$\therefore n=\underline{6}, 24, 54, 96, \cdots$ $\quad\cdots$ ㉠

또 상추밭의 한 변의 길이는 $\sqrt{87-n}$이고 $\sqrt{87-n}$이 자연수이므로 $87-n$은 87보다 작은 (자연수)^2 꼴인 수이다.

$87-n=1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$

$\therefore n=86, 83, 78, 71, 62, 51, 38, 23, \underline{6}$ $\quad\cdots$ ㉡

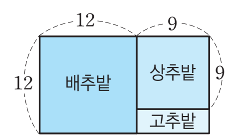
즉, ㉠, ㉡에서 $n=6$

따라서

(배추밭의 한 변의 길이)$=\sqrt{2^3\times3\times6}=\sqrt{2^4\times3^2}=12$,

(상추밭의 한 변의 길이)$=\sqrt{87-6}=\sqrt{81}=9$

이므로 오른쪽 그림에서



(고추밭의 넓이)$=9\times(12-9)$

$=27$

P. 16~17 내신 1% 뛰어넘기

01 27	**02** 0	**03** 168	**04** 9개	**05** 625
06 20	**07** $\frac{7}{9}$	**08** 9		

01 **길잡이** 근호 안의 수의 규칙을 찾는다.

$\sqrt{\underbrace{1+3}_{2개}}=\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$

$\sqrt{\underbrace{1+3+5}_{3개}}=\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$

$\sqrt{\underbrace{1+3+5+7}_{4개}}=\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$

$\sqrt{\underbrace{1+3+5+7+9}_{5개}}=\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$

$\vdots$

$\sqrt{\underbrace{1+3+5+7+9+\cdots+51+53}_{27개}}=\sqrt{27^2}=27$

02 길잡이 $\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases} A\ (A\ge0) \\ -A\ (A<0)\end{cases}$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$1<a<b$에서 $a-1>0$, $b-1>0$, $a-b<0$이므로

$$\frac{b}{b-1}-\frac{a}{a-1}=\frac{b(a-1)-a(b-1)}{(b-1)(a-1)}$$
$$=\frac{a-b}{(b-1)(a-1)}<0$$

또 $\frac{1}{1-a}=-\frac{1}{a-1}<0$, $\frac{1}{b-1}>0$이므로

$$(\text{주어진 식})=-\left(\frac{b}{b-1}-\frac{a}{a-1}\right)-\left(-\frac{1}{1-a}\right)+\frac{1}{b-1}$$
$$=\frac{a}{a-1}-\frac{b}{b-1}+\frac{1}{1-a}+\frac{1}{b-1}$$
$$=\left(\frac{a}{a-1}-\frac{1}{a-1}\right)-\left(\frac{b}{b-1}-\frac{1}{b-1}\right)$$
$$=\frac{a-1}{a-1}-\frac{b-1}{b-1}$$
$$=1-1=0$$

03 길잡이 연속하는 세 짝수 a, b, c를 한 문자를 사용하여 나타낸 후 $\sqrt{a+b+c}$가 자연수가 되기 위한 조건을 생각해 본다.

연속하는 세 짝수 a, b, c를

$a=m-2$, $b=m$, $c=m+2$(m은 2보다 큰 짝수)라 하면

$a+b+c=(m-2)+m+(m+2)=3m<400$ $\cdots$ ㉠

$\sqrt{a+b+c}=\sqrt{3m}$이 자연수가 되어야 하므로

$m=3k^2$(k는 자연수) 꼴이어야 한다.

이때 ㉠에서 $3m=3\times3k^2=9k^2<400$

$\therefore k^2<\frac{400}{9}=44.444\cdots$

즉, k^2의 값이 될 수 있는 수는 1, 4, 9, 16, 25, 36이고,

$m=3k^2$이므로 m의 값은 3, 12, 27, 48, 75, 108 중에서 짝수인 12, 48, 108이다.

이때 $b=m$이므로 $b=12$, 48, 108

따라서 모든 b의 값의 합은

$12+48+108=168$

04 길잡이 $\sqrt{7a}+\sqrt{b}=11$을 만족시키는 a, b의 값을 먼저 찾는다.

$\sqrt{7a}+\sqrt{b}=11$에서 $\sqrt{7a}$와 $\sqrt{b}$는 모두 자연수이어야 하므로 $7a$와 b는 모두 (자연수)^2 꼴이고, $7a$는 $11^2=121$보다 작은 (자연수)^2 꼴인 수이어야 하므로 $a=7$

$\sqrt{7\times7}+\sqrt{b}=11$에서 $\sqrt{b}=11-7=4$ $\therefore b=16$

따라서 $a=7$, $b=16$이므로

$\sqrt{2a^2-b}=\sqrt{2\times7^2-16}=\sqrt{82}$

이때 $\sqrt{81}<\sqrt{82}<\sqrt{100}$, 즉 $9<\sqrt{82}<10$이므로

$\sqrt{82}$보다 작은 자연수의 개수는 9개이다.

05 길잡이 $\sqrt{(A-B)^2}$에서 $A\ge B$이면 $A-B$이고, $A<B$이면 $-(A-B)$임을 이용한다.

$\sqrt{25^2}<\sqrt{629}<\sqrt{26^2}$이므로 $25<x<26$

$$\therefore \sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}+\cdots+\sqrt{(x-49)^2}+\sqrt{(x-50)^2}$$
$$=(x-1)+(x-2)+(x-3)+\cdots+(x-25)-(x-26)-(x-27)-(x-28)-\cdots-(x-50)$$
$$=-1-2-3-\cdots-25+26+27+28+\cdots+50$$
$$=(-1+26)+(-2+27)+\cdots+(-25+50)$$
$$=\underbrace{25+25+\cdots+25}_{25\text{개}}=25\times25=625$$

06 길잡이 $f(x)=1, 2, 3, \cdots$을 만족시키는 자연수 x의 개수를 각각 구해 본다.

$\sqrt{1}=1$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{25}=5$, $\cdots$이고

$f(x)$는 $\sqrt{x}$ 이하의 자연수의 개수이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=1$,

$f(4)=f(5)=\cdots=f(8)=2$,

$f(9)=f(10)=\cdots=f(15)=3$,

$f(16)=f(17)=\cdots=f(24)=4$

이때 $f(1)+f(2)+\cdots+f(15)=1\times3+2\times5+3\times7=34$

이고 $x=16$, 17, $\cdots$, 24일 때, $f(x)=4$이므로

$f(1)+f(2)+\cdots+f(15)+f(16)+\cdots+f(20)$

$=34+4\times5=54$

$54-34=20$이므로 $f(x)=4$인 $f(x)$가 5개 더 필요하다.

따라서 주어진 식이 성립하도록 하는 자연수 n의 값은 20이다.

07 길잡이 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=$(무리수)인 경우를 각각 따져 본다.

모든 경우의 수는 $6\times6=36$

(i) $\sqrt{a}$가 무리수이고, $\sqrt{b}$가 유리수인 경우

$a=2$, 3, 5, 6이고 $b=1$, 4이므로

$4\times2=8$(가지)

(ii) $\sqrt{a}$가 유리수이고, $\sqrt{b}$가 무리수인 경우

$a=1$, 4이고 $b=2$, 3, 5, 6이므로

$2\times4=8$(가지)

(iii) $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$가 모두 무리수인 경우

$a=2$, 3, 5, 6이고 $b=2$, 3, 5, 6이므로

$4\times4=16$(가지)

그런데 $a=b$이면 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$으로 유리수이므로

$a=b$인 4가지 경우를 제외하면

$16-4=12$(가지)

따라서 (i)~(iii)에 의해 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$가 무리수인 경우의 수는

$8+8+12=28$이므로 구하는 확률은

$\frac{28}{36}=\frac{7}{9}$

다른 풀이

모든 경우의 수는 $6\times6=36$

(i) $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$인 경우, a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $\cdots$, $(6, 6)$의 6가지

(ii) $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$가 모두 유리수인 경우, a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(1, 4)$, $(4, 1)$, $(4, 4)$

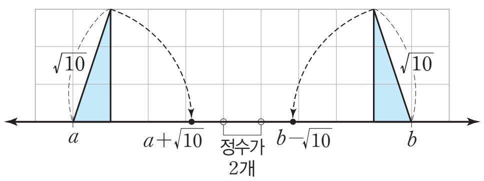
이때 $a=b$인 경우를 제외하면 2가지

따라서 (i), (ii)에 의해 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$가 유리수인 경우의 수는 $6+2=8$이므로 구하는 확률은

$1-\frac{8}{36}=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

08 **길잡이** 먼저 $a+\sqrt{10}$과 $b-\sqrt{10}$을 수직선 위에 나타낸다.

$3<\sqrt{10}<4$이므로 $a+\sqrt{10}$과 $b-\sqrt{10}$을 빗변의 길이가 $\sqrt{10}$인 직각삼각형을 이용하여 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 a와 $a+\sqrt{10}$ 사이에 있는 정수는 3개, $a+\sqrt{10}$과 $b-\sqrt{10}$ 사이에 있는 정수는 2개, $b-\sqrt{10}$과 b 사이에 있는 정수는 3개이므로 두 정수 a, b 사이에 있는 정수는 모두

$3+2+3=8$(개)

따라서 $b-a-1=8$이므로

$b-a=9$

다른 풀이

$3<\sqrt{10}<4$이므로 $a+3<a+\sqrt{10}<a+4$

또 $-4<-\sqrt{10}<-3$이므로 $b-4<b-\sqrt{10}<b-3$

$\therefore a+\sqrt{10}<a+4\leq n\leq b-4<b-\sqrt{10}$

이 식을 만족시키는 정수 n이 2개이므로

$b-4-(a+4)+1=2 \qquad \therefore b-a=9$

2. 근호를 포함한 식의 계산

P. 20~22 개념+대표 문제 확인하기

1 3	**2** ④	**3** ②	**4** ④	**5** $\frac{1}{6}$
6 $\frac{5\sqrt{30}}{3}$	**7** 424	**8** 200.5, 0.02049		**9** ③
10 ④	**11** ④	**12** 2.6122		**13** $\frac{5}{6}$
14 $\frac{7\sqrt{6}}{12}+2\sqrt{5}$		**15** $\frac{5\sqrt{21}}{3}-3\sqrt{7}$		
16 $-10+\sqrt{5}$		**17** ③	**18** $-\frac{1}{2}$, $-\frac{9}{2}$	
19 $\frac{3\sqrt{3}-2}{3}$				

1 $\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2a}=\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{12}\times\sqrt{2a}$
$=\sqrt{2\times5\times12\times2a}=\sqrt{240a}$
이고 $12\sqrt{5}=\sqrt{720}$이므로
$240a=720 \quad \therefore a=3$

2 ① $-a>0$이므로
$\sqrt{(-a)^2b}=\sqrt{(-a)^2}\times\sqrt{b}=(-a)\times\sqrt{b}=-a\sqrt{b}$
② $ab<0$이므로 $\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{(ab)^2}=-ab$
③ $a^2b>0$이므로 $-\sqrt{a^4b^2}=-\sqrt{(a^2b)^2}=-a^2b$
④ $\sqrt{\frac{b}{a^2}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}=\frac{\sqrt{b}}{-a}=-\frac{\sqrt{b}}{a}$
⑤ $\frac{a}{b}<0$이므로 $-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=-\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2}=-\left(-\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}$
따라서 옳은 것은 ④이다.

3 $\sqrt{0.008}=\sqrt{\frac{80}{10000}}=\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{100^2}}=\frac{\sqrt{4^2\times5}}{100}=\frac{4\sqrt{5}}{100}=\frac{1}{25}\sqrt{5}$
$\therefore k=\frac{1}{25}$

4 $\sqrt{108}=\sqrt{2^2\times3^3}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{3^3}=(\sqrt{2})^2\times(\sqrt{3})^3=a^2b^3$

5 $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$이므로 $a=\frac{2}{5}$
$\frac{5}{\sqrt{48}}=\frac{5}{4\sqrt{3}}=\frac{5\times\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{12}$이므로 $b=\frac{5}{12}$
$\therefore ab=\frac{2}{5}\times\frac{5}{12}=\frac{1}{6}$

6 (직사각형의 넓이)$=5\sqrt{2}\times3\sqrt{5}=15\sqrt{10}$
(삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times x=3\sqrt{3}x$
이때 두 도형의 넓이가 같으므로 $15\sqrt{10}=3\sqrt{3}x$
$\therefore x=\frac{15\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{30}}{3}$

7 $\sqrt{16.5}=4.062$이므로 $a=4.062$
$\sqrt{17.8}=4.219$이므로 $b=17.8$
$\therefore 100a+b=406.2+17.8=424$

8 $\sqrt{40200}=\sqrt{4.02\times10000}=100\sqrt{4.02}$
$=100\times2.005=200.5$
$\sqrt{0.00042}=\sqrt{\frac{4.2}{10000}}=\frac{\sqrt{4.2}}{100}=\frac{2.049}{100}=0.02049$

9 ① $\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{2.236}{5}=0.4472$
② $\sqrt{0.05}=\sqrt{\frac{5}{100}}=\frac{\sqrt{5}}{10}=\frac{2.236}{10}=0.2236$
③ $\sqrt{0.5}=\sqrt{\frac{50}{100}}=\frac{\sqrt{50}}{10}$이므로 $\sqrt{50}$의 값이 주어져야 한다.
④ $\sqrt{125}=\sqrt{5^2\times5}=5\sqrt{5}=5\times2.236=11.18$
⑤ $\sqrt{500}=\sqrt{10^2\times5}=10\sqrt{5}=10\times2.236=22.36$
따라서 그 값을 소수로 나타낼 수 없는 것은 ③이다.

10 ① $\sqrt{7000}=\sqrt{70\times100}=10\sqrt{70}=10\times8.367=83.67$
② $\sqrt{700}=\sqrt{7\times100}=10\sqrt{7}=10\times2.646=26.46$
③ $\sqrt{28}=2\sqrt{7}=2\times2.646=5.292$
④ $\sqrt{0.007}=\sqrt{\frac{70}{10000}}=\frac{\sqrt{70}}{100}=\frac{8.367}{100}=0.08367$
⑤ $\sqrt{0.0028}=\sqrt{\frac{28}{10000}}=\frac{2\sqrt{7}}{100}=\frac{\sqrt{7}}{50}=\frac{2.646}{50}=0.05292$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

11 $\sqrt{7.77}=2.787$이므로 양변에 100을 곱하면
$100\sqrt{7.77}=278.7$, $\sqrt{100^2\times7.77}=278.7$
따라서 $\sqrt{a}=\sqrt{100^2\times7.77}$이므로 $a=77700$

12 $\frac{\sqrt{18}}{6}+\sqrt{3.63}=\frac{3\sqrt{2}}{6}+\sqrt{\frac{121\times3}{100}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{11\sqrt{3}}{10}$
$=\frac{5\sqrt{2}+11\sqrt{3}}{10}=\frac{5\times1.414+11\times1.732}{10}$
$=\frac{26.122}{10}=2.6122$

13 $\frac{\sqrt{80}}{3}-a\sqrt{5}+\frac{\sqrt{45}}{2}=\frac{4\sqrt{5}}{3}-a\sqrt{5}+\frac{3\sqrt{5}}{2}$
$=\left(\frac{4}{3}-a+\frac{3}{2}\right)\sqrt{5}$
이므로 $\frac{4}{3}-a+\frac{3}{2}=2$, $17-6a=12 \quad \therefore a=\frac{5}{6}$

14 $A=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{5}{\sqrt{10}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{6}}{3}-\sqrt{5}$
$B=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\sqrt{15}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+3\sqrt{5}=\frac{\sqrt{6}}{4}+3\sqrt{5}$
$\therefore A+B=\frac{\sqrt{6}}{3}-\sqrt{5}+\frac{\sqrt{6}}{4}+3\sqrt{5}=\frac{7\sqrt{6}}{12}+2\sqrt{5}$

15 $\dfrac{2\sqrt{7}+\sqrt{21}}{\sqrt{3}}-\sqrt{7}\left(4-\dfrac{6}{\sqrt{12}}\right)$

$=\dfrac{(2\sqrt{7}+\sqrt{21})\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-4\sqrt{7}+\dfrac{6\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$

$=\dfrac{2\sqrt{21}+3\sqrt{7}}{3}-4\sqrt{7}+\dfrac{3\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}+\sqrt{7}-4\sqrt{7}+\sqrt{21}$

$=\dfrac{5\sqrt{21}}{3}-3\sqrt{7}$

16 정사각형 PQRS의 넓이가 5이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{5}$이다.
$\overline{RA}=\overline{RQ}=\sqrt{5}$, $\overline{RB}=\overline{RS}=\sqrt{5}$이므로
$a=-2-\sqrt{5}$, $b=-2+\sqrt{5}$
$\therefore 2a+3b=2\times(-2-\sqrt{5})+3\times(-2+\sqrt{5})$
$=-4-2\sqrt{5}-6+3\sqrt{5}$
$=-10+\sqrt{5}$

17 ① $(2+\sqrt{11})-6=\sqrt{11}-4=\sqrt{11}-\sqrt{16}<0$
$\therefore 2+\sqrt{11}<6$
② $(\sqrt{24}+1)-\sqrt{54}=2\sqrt{6}+1-3\sqrt{6}=1-\sqrt{6}<0$
$\therefore \sqrt{24}+1<\sqrt{54}$
③ $(2+\sqrt{5})-(\sqrt{45}-1)=2+\sqrt{5}-3\sqrt{5}+1$
$=3-2\sqrt{5}=\sqrt{9}-\sqrt{20}<0$
$\therefore 2+\sqrt{5}<\sqrt{45}-1$
④ $(5-\sqrt{63})-(3-2\sqrt{7})=5-3\sqrt{7}-3+2\sqrt{7}$
$=2-\sqrt{7}=\sqrt{4}-\sqrt{7}<0$
$\therefore 5-\sqrt{63}<3-2\sqrt{7}$
⑤ $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}-1\right)-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
$=\sqrt{\dfrac{4}{3}}-\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\sqrt{\dfrac{8}{6}}-\sqrt{\dfrac{9}{6}}<0$
$\therefore \dfrac{2}{\sqrt{3}}-1<\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1$
따라서 옳은 것은 ③이다.

18 $\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)-2(2-a\sqrt{6})=\sqrt{6}+a-4+2a\sqrt{6}$
$=a-4+(2a+1)\sqrt{6}$ $\cdots$ ㉠
이 식이 유리수가 되려면
$2a+1=0$ $\quad\therefore a=-\dfrac{1}{2}$
$a=-\dfrac{1}{2}$을 ㉠의 식에 대입하면
$-\dfrac{1}{2}-4+(-1+1)\sqrt{6}=-\dfrac{9}{2}$

19 $1<\sqrt{3}<2$에서 $-2<-\sqrt{3}<-1$이므로
$2<4-\sqrt{3}<3$ $\quad\therefore a=2$
$b=(4-\sqrt{3})-2=2-\sqrt{3}$
$\therefore \dfrac{a}{\sqrt{3}}-\dfrac{b}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}-\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}-2}{3}$

P. 23~27 **내신 5% 따라잡기**

1 $\dfrac{1}{2}$ **2** 6 **3** 73 **4** ③ **5** $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$배
6 $\dfrac{4\sqrt{6}}{15}$ **7** ② **8** 10, 20 **9** $24\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$
10 ③ **11** 7.875 **12** 11.4126 **13** 4
14 $8\sqrt{2}$ **15** ① **16** $\dfrac{503}{40}$ **17** ③
18 $8-\sqrt{13}-\sqrt{5}$ **19** $\dfrac{2}{5}$ **20** ⑤ **21** $8+3\sqrt{3}$
22 $8-5\sqrt{2}$ **23** $38+6\sqrt{70}$ **24** $\dfrac{52\sqrt{2}}{9}\pi$
25 ⑤ **26** $\sqrt{5}\pi$ **27** 30 **28** $20+8\sqrt{2}$
29 $70\sqrt{2}$

1 $\sqrt{2}\times\sqrt{7}\times\sqrt{a}\times\sqrt{2a}\times\sqrt{28}=\sqrt{2\times7\times a\times2a\times28}$
$=\sqrt{2^4\times7^2\times a^2}=\sqrt{(2^2\times7\times a)^2}$
$=\sqrt{(28a)^2}=28a$ ($\because a>0$)
따라서 $28a=14$이므로 $a=\dfrac{1}{2}$

2 $\sqrt{252}=\sqrt{6^2\times7}=6\sqrt{7}$이므로 $a=6$
$\sqrt{2700}=\sqrt{30^2\times3}=30\sqrt{3}$이므로 $b=30$
$\sqrt{ab}=\sqrt{6\times30}=\sqrt{180}=\sqrt{6^2\times5}=6\sqrt{5}$ $\quad\therefore c=6$

3 $2\sqrt{30+a}=8\sqrt{5}$에서
$2\sqrt{30+a}=\sqrt{2^2\times(30+a)}=\sqrt{120+4a}$이고
$8\sqrt{5}=\sqrt{320}$이므로
$120+4a=320$, $4a=200$ $\quad\therefore a=50$
$\sqrt{25-b}=4\sqrt{3}$에서 $4\sqrt{3}=\sqrt{48}$이므로
$25-b=48$ $\quad\therefore b=-23$
$\therefore a-b=50-(-23)=73$

4 $\sqrt{0.025}=\sqrt{\dfrac{250}{10000}}=\dfrac{5\sqrt{10}}{100}=\dfrac{\sqrt{10}}{20}=\dfrac{1}{20}b$
$\sqrt{1200}=\sqrt{400\times3}=20\sqrt{3}=20a$
$\therefore \sqrt{0.025}+\sqrt{1200}=\dfrac{1}{20}b+20a=20a+\dfrac{1}{20}b$

5 지구의 질량을 m kg, 반지름의 길이를 r km라 하면
지구에서 탈출 속력은 $\sqrt{\dfrac{2Gm}{r}}$ km/s이고
천왕성의 질량은 $14m$ kg, 반지름의 길이는 $4r$ km이므로
천왕성에서 탈출 속력은 $\sqrt{\dfrac{2G\times14m}{4r}}=\sqrt{\dfrac{7Gm}{r}}$(km/s)
따라서 천왕성에서 탈출 속력은 지구에서 탈출 속력의
$\sqrt{\dfrac{7Gm}{r}}\div\sqrt{\dfrac{2Gm}{r}}=\sqrt{\dfrac{7Gm}{r}\times\dfrac{r}{2Gm}}$
$=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$(배)

6 $\dfrac{5a+3b}{3a-b}=2$에서 $5a+3b=6a-2b$ $\quad\therefore a=5b$

주어진 식에 $a=5b$를 대입하면

$\dfrac{\sqrt{32b^2}}{\sqrt{3a^2}}=\sqrt{\dfrac{32b^2}{3\times25b^2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{15}$

7 $\boxed{(가)}=\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}\div\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{20}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

8 넓이가 5π인 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=5\pi$, $r^2=5$

이때 $r>0$이므로 $r=\sqrt{5}$

즉, 내접하는 정사각형의 대각선의 길이는 $2\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$이므로

(내접하는 정사각형의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=10$

또 외접하는 정사각형의 한 변의 길이는 $2\sqrt{5}$이므로

(외접하는 정사각형의 넓이)$=2\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=20$

9 정육면체의 한 모서리의 길이를 a cm라 하면

△EFG에서 $\overline{EG}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}a$(cm)

△AEG는 ∠AEG=90°인 직각삼각형이므로

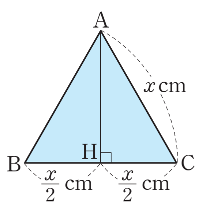
$\overline{AG}=\sqrt{a^2+(\sqrt{2}a)^2}=\sqrt{3a^2}=\sqrt{3}a$(cm)

즉, $\sqrt{3}a=12$이므로 $a=\dfrac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$

$\overline{EG}=\sqrt{2}a=\sqrt{2}\times4\sqrt{3}=4\sqrt{6}$(cm)이므로

$\triangle AEG=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{6}\times4\sqrt{3}=24\sqrt{2}(\text{cm}^2)$

10 오른쪽 그림과 같은 정삼각형 ABC의 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{AC}=x$ cm라 하면



△AHC에서

$\overline{AH}=\sqrt{x^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$(cm)

이므로

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times x\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2(\text{cm}^2)$

즉, $\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2=4\sqrt{3}$이므로 $x^2=4\sqrt{3}\times\dfrac{4}{\sqrt{3}}=16$

이때 $x>0$이므로 $x=4$

따라서 구하는 둘레의 길이는 $3\times4=12$(cm)

11 $\sqrt{62.01}=\sqrt{9\times6.89}=3\sqrt{6.89}=3\times2.625=7.875$

12 $\sqrt{136}=\sqrt{100\times1.36}=10\sqrt{1.36}=10\times1.166=11.66$

$\sqrt{0.0612}=\sqrt{\dfrac{4\times1.53}{100}}=\sqrt{\dfrac{1.53}{25}}=\dfrac{\sqrt{1.53}}{5}=\dfrac{1.237}{5}=0.2474$

$\therefore x=\sqrt{136}-\sqrt{0.0612}=11.66-0.2474=11.4126$

13 주어진 표에서 $234^2=54756$이므로

$(2.34\times100)^2=54756$,

$2.34^2\times100^2=54756$,

$2.34^2=\dfrac{54756}{100^2}$ $\quad\therefore 2.34^2=5.4756$

따라서 오른쪽과 같은 표를 얻을 수 있다.

$\dfrac{a}{100}$	$\dfrac{a^2}{10000}$
2.34	5.4756
2.35	5.5225
2.36	5.5696
2.37	5.6169
2.38	5.6644

이때 $5.4756<5.5<5.5225$이므로

$2.34<\sqrt{5.5}<2.35$

따라서 $\sqrt{5.5}$를 소수로 나타내었을 때, 소수점 아래 둘째 자리의 숫자는 4이다.

14 $a>0$, $b>0$일 때, $a=\sqrt{a^2}$, $b=\sqrt{b^2}$이므로

$a\sqrt{\dfrac{3b}{a}}+b\sqrt{\dfrac{a}{3b}}=\sqrt{a^2}\sqrt{\dfrac{3b}{a}}+\sqrt{b^2}\sqrt{\dfrac{a}{3b}}$

$=\sqrt{a^2\times\dfrac{3b}{a}}+\sqrt{b^2\times\dfrac{a}{3b}}$

$=\sqrt{3ab}+\sqrt{\dfrac{ab}{3}}$

$=\sqrt{3\times24}+\sqrt{\dfrac{24}{3}}$

$=\sqrt{72}+\sqrt{8}=6\sqrt{2}+2\sqrt{2}$

$=8\sqrt{2}$

15 $x+y=\sqrt{6}+1+\sqrt{6}-1=2\sqrt{6}$

$x-y=\sqrt{6}+1-(\sqrt{6}-1)=2$

$\therefore \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}-\dfrac{6}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-6}{12}$

16 (주어진 식)$=\left(2\sqrt{5}-\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{15}}\right)^2+\left(\dfrac{18}{2\sqrt{6}}-3\sqrt{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2$

$=\left(2\sqrt{5}-\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{6}}{2}-3\sqrt{6}+\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2$

$=\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{5\sqrt{6}}{4}\right)^2$

$=\dfrac{16}{5}+\dfrac{75}{8}=\dfrac{503}{40}$

17 $(1+2\sqrt{2})a-(-1+\sqrt{2})b=a+2\sqrt{2}a+b-\sqrt{2}b$

$=a+b+(2a-b)\sqrt{2}$

$=5+7\sqrt{2}$

이때 a, b는 유리수이므로 $a+b=5$, $2a-b=7$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=1$

$\therefore a-b=4-1=3$

18 $\overline{AP}=\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

점 P에 대응하는 수는 $-6+\sqrt{5}$이다.

$\overline{EQ}=\overline{EH}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$이므로

점 Q에 대응하는 수는 $2-\sqrt{13}$이다.

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$(2-\sqrt{13})-(-6+\sqrt{5})=8-\sqrt{13}-\sqrt{5}$

19 $f(2)+f(3)+\cdots+f(49)$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{4}}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{4}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{49}}}-\frac{1}{\sqrt{50}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{10}-\frac{\sqrt{2}}{10}=\frac{4\sqrt{2}}{10}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$$

따라서 $a\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$이므로 $a=\frac{2}{5}$

20 $3\sqrt{2}-4=\sqrt{18}-\sqrt{16}>0$이고,

$5-4\sqrt{2}=\sqrt{25}-\sqrt{32}<0$이므로

$\sqrt{(3\sqrt{2}-4)^2}-\sqrt{(5-4\sqrt{2})^2}+\sqrt{(-2)^2}$

$=(3\sqrt{2}-4)-\{-(5-4\sqrt{2})\}+2$

$=3\sqrt{2}-4+5-4\sqrt{2}+2$

$=3-\sqrt{2}$

따라서 $a=3$, $b=-1$이므로 $a+b=3+(-1)=2$

21 $A-B=(\sqrt{75}-2)-\sqrt{48}=5\sqrt{3}-2-4\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}-2=\sqrt{3}-\sqrt{4}<0$

$\therefore A<B$

$A-C=(\sqrt{75}-2)-(8-\sqrt{3})=5\sqrt{3}-2-8+\sqrt{3}$

$=6\sqrt{3}-10=\sqrt{108}-\sqrt{100}>0$

$\therefore A>C$

따라서 $C<A<B$이므로 $M=\sqrt{48}$, $m=8-\sqrt{3}$이다.

$\therefore M+m=\sqrt{48}+(8-\sqrt{3})$

$=4\sqrt{3}+8-\sqrt{3}$

$=8+3\sqrt{3}$

22 $2\sqrt{2}=\sqrt{8}$이고, $2<\sqrt{8}<3$이므로 $a=2\sqrt{2}-2$

$3\sqrt{2}=\sqrt{18}$이고, $4<\sqrt{18}<5$에서 $-5<-\sqrt{18}<-4$이므로

$5<10-\sqrt{18}<6$

$\therefore b=(10-3\sqrt{2})-5=5-3\sqrt{2}$

$a-1=(2\sqrt{2}-2)-1=2\sqrt{2}-3=\sqrt{8}-\sqrt{9}<0$이고,

$b=5-3\sqrt{2}=\sqrt{25}-\sqrt{18}>0$이므로

$\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{b^2}=-(a-1)+b$

$=-(2\sqrt{2}-3)+(5-3\sqrt{2})$

$=-2\sqrt{2}+3+5-3\sqrt{2}=8-5\sqrt{2}$

23 직육면체의 높이를 h라 하면 직육면체의 부피가

$14\sqrt{5}+5\sqrt{14}$이므로

$\sqrt{14}\times\sqrt{5}\times h=14\sqrt{5}+5\sqrt{14}$

$\therefore h=\frac{14\sqrt{5}+5\sqrt{14}}{\sqrt{14}\times\sqrt{5}}=\sqrt{14}+\sqrt{5}$

$\therefore$ (직육면체의 겉넓이)

$=2\times\{\sqrt{14}\times\sqrt{5}+\sqrt{14}\times(\sqrt{14}+\sqrt{5})+\sqrt{5}\times(\sqrt{14}+\sqrt{5})\}$

$=2\times(\sqrt{70}+14+\sqrt{70}+\sqrt{70}+5)$

$=2\times(19+3\sqrt{70})=38+6\sqrt{70}$

24 (처음 원뿔의 부피)$=\frac{1}{3}\times\pi\times(\sqrt{6})^2\times\sqrt{18}$

$=\frac{1}{3}\pi\times6\times3\sqrt{2}=6\sqrt{2}\pi$

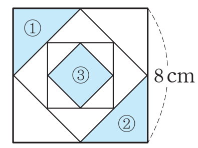
처음 원뿔과 잘라 낸 원뿔의 닮음비는 3 : 1이므로 부피의 비는 27 : 1이다. 즉, 잘라 낸 원뿔의 부피는

$6\sqrt{2}\pi\times\frac{1}{27}=\frac{2\sqrt{2}}{9}\pi$

따라서 구하는 원뿔대의 부피는

$6\sqrt{2}\pi-\frac{2\sqrt{2}}{9}\pi=\frac{52\sqrt{2}}{9}\pi$

25 한 변의 길이가 8 cm인 정사각형 안에 그린 세 정사각형의 넓이는 각각



$64\times\frac{1}{2}=32(\text{cm}^2)$,

$32\times\frac{1}{2}=16(\text{cm}^2)$, $16\times\frac{1}{2}=8(\text{cm}^2)$

이므로 세 정사각형의 한 변의 길이는 각각

$4\sqrt{2}$ cm, 4 cm, $2\sqrt{2}$ cm이다.

따라서 직각삼각형 ①, ②의 둘레의 길이는 각각

$4+4+4\sqrt{2}=8+4\sqrt{2}(\text{cm})$이고,

정사각형 ③의 둘레의 길이는 $4\times2\sqrt{2}=8\sqrt{2}(\text{cm})$이므로

색칠한 부분의 둘레의 길이의 합은

$2\times(8+4\sqrt{2})+8\sqrt{2}=16+8\sqrt{2}+8\sqrt{2}$

$=16+16\sqrt{2}(\text{cm})$

26 사분원 A의 반지름의 길이는 2

사분원 B의 반지름의 길이는

$(1+\sqrt{5})-2=\sqrt{5}-1$

사분원 C의 반지름의 길이는

$2-(\sqrt{5}-1)=3-\sqrt{5}$

사분원 D의 반지름의 길이는

$(\sqrt{5}-1)-(3-\sqrt{5})=2\sqrt{5}-4$

따라서 사분원 A, B, C, D의 호의 길이의 합은

$\frac{1}{4}\times2\pi\times2+\frac{1}{4}\times2\pi\times(\sqrt{5}-1)+\frac{1}{4}\times2\pi\times(3-\sqrt{5})$

$+\frac{1}{4}\times2\pi\times(2\sqrt{5}-4)$

$=\frac{1}{4}\times2\pi\times\{2+(\sqrt{5}-1)+(3-\sqrt{5})+(2\sqrt{5}-4)\}$

$=\frac{1}{4}\times2\pi\times2\sqrt{5}=\sqrt{5}\pi$

27 길잡이 먼저 솔이의 자의 눈금 7에서부터 63까지의 거리를 구해 본다.

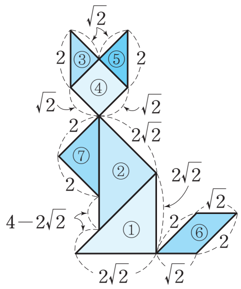
솔이의 자의 눈금 7에서부터 63까지의 거리와 민이의 자의 눈금 0에서부터 A까지의 거리가 같으므로 민이의 자의 눈금 0에서부터 A까지의 거리를 x라 하면

$\sqrt{63}-\sqrt{7}=x$, $3\sqrt{7}-\sqrt{7}=x$ $\quad\therefore x=2\sqrt{7}$

이때 $A=x^2+2$이므로 이 식에 $x=2\sqrt{7}$을 대입하면

$A=(2\sqrt{7})^2+2=28+2=30$

28 길잡이 7개의 조각의 각 변의 길이를 구한 후 주어진 도형의 둘레의 길이를 구해 본다.



(고양이 모양의 도형의 둘레의 길이)

$=2+\sqrt{2}+2+2+(4-2\sqrt{2})+(4-2\sqrt{2})+2\sqrt{2}+\sqrt{2}+2$

$\quad+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+\sqrt{2}$

$=20+8\sqrt{2}$

29 길잡이 정사각형 A_7까지 그린 도형의 둘레의 길이는 정사각형 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_7의 둘레의 길이의 합에서 겹치는 부분인 6개의 정사각형의 둘레의 길이의 합을 뺀 것과 같다.

정사각형 A_1의 한 변의 길이는 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

정사각형 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_7의 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$, $7\sqrt{2}$이다.

이때 두 정사각형의 겹치는 부분인 정사각형의 한 변의 길이는 두 정사각형 중 작은 정사각형의 한 변의 길이의 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 정사각형 A_7까지 그렸을 때, 겹치는 부분인 6개의 정사각형의 한 변의 길이를 차례로 구하면

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\times5\sqrt{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

즉, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $2\sqrt{2}$, $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $3\sqrt{2}$이다.

∴ (구하는 도형의 둘레의 길이)

$=$(정사각형 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_7의 둘레의 길이의 합)

$\quad-$(겹치는 부분인 6개의 정사각형의 둘레의 길이의 합)

$=4\times(\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4\sqrt{2}+5\sqrt{2}+6\sqrt{2}+7\sqrt{2})$

$\quad-4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}\right)$

$=4\times28\sqrt{2}-4\times\frac{21\sqrt{2}}{2}$

$=112\sqrt{2}-42\sqrt{2}=70\sqrt{2}$

P. 28~29 내신 1% 뛰어넘기

01 4 **02** ④ **03** 다섯 자리 **04** ②

05 $(6, 54)$, $(24, 24)$, $(54, 6)$ **06** -1

07 $\frac{42+21\sqrt{3}}{4}$ **08** $(2+\sqrt{2})\pi$

01 길잡이 $a>0$, $b>0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$임을 이용한다.

$\frac{\sqrt{6^8+4^9}}{\sqrt{18^4+4^7}}=\sqrt{\frac{6^8+4^9}{18^4+4^7}}=\sqrt{\frac{(2\times3)^8+(2^2)^9}{(2\times3^2)^4+(2^2)^7}}$

$=\sqrt{\frac{2^8\times3^8+2^{18}}{2^4\times3^8+2^{14}}}=\sqrt{\frac{2^8\times(3^8+2^{10})}{2^4\times(3^8+2^{10})}}$

$=\sqrt{2^4}=4$

02 길잡이 $\sqrt{0.3}=\sqrt{\frac{3}{10}}$을 변형한 후 a, b를 사용하여 나타내고, $\sqrt{0.5}=\sqrt{\frac{5}{10}}$를 변형한 후 c, d를 사용하여 나타낸다.

$\sqrt{0.3}=\sqrt{\frac{3}{10}}=\sqrt{\frac{3^2}{30}}=\frac{3}{\sqrt{30}}=\frac{a^2}{b}$

$\sqrt{0.5}=\sqrt{\frac{5}{10}}=\sqrt{\frac{5^2}{50}}=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{c^2}{d}$

$\therefore \sqrt{0.3}+\sqrt{0.5}=\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{d}$

03 길잡이 근호 안의 수 $1\times2\times3\times\cdots\times10$을 소인수분해한다.

$1\times2\times3\times\cdots\times10=2^8\times3^4\times5^2\times7$

$=(2^4\times3^2\times5)^2\times7$

$=720^2\times7$

$\therefore 25\sqrt{1\times2\times3\times\cdots\times10}=25\sqrt{720^2\times7}$

$=25\times720\times\sqrt{7}$

$=18000\sqrt{7}$

이때 $2<\sqrt{7}<3$이므로

$36000<18000\sqrt{7}<54000$

따라서 정수 부분은 다섯 자리의 수이다.

04 길잡이 $12-\sqrt{5}$의 소수 부분 a를 구한 후, $\sqrt{5}$를 a를 사용하여 나타낸다.

$2<\sqrt{5}<3$에서 $-3<-\sqrt{5}<-2$이므로

$9<12-\sqrt{5}<10$

즉, $12-\sqrt{5}$의 정수 부분은 9이므로

$a=12-\sqrt{5}-9=3-\sqrt{5}$ $\cdots$ ㉠

$4\sqrt{5}=\sqrt{80}$이고 $8<\sqrt{80}<9$에서 $4\sqrt{5}$의 정수 부분은 8이므로

$4\sqrt{5}$의 소수 부분은 $4\sqrt{5}-8$

㉠에서 $\sqrt{5}=3-a$이므로

$4\sqrt{5}-8=4(3-a)-8=4-4a$

05 길잡이 제곱근의 덧셈과 뺄셈은 근호 안의 수가 같은 수끼리 계산할 수 있음을 이용한다.

$\sqrt{96}=\sqrt{4^2\times6}=4\sqrt{6}$이므로

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\sqrt{6}$ $\cdots$ ㉠

$4\sqrt{6}$은 무리수이고 x, y는 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 x, y는 $x=6\times k^2$, $y=6\times l^2$ (k, l은 자연수) 꼴이어야 한다.

㉠에서 $\sqrt{6\times k^2}+\sqrt{6\times l^2}=4\sqrt{6}$이므로

$k\sqrt{6}+l\sqrt{6}=4\sqrt{6}$ $\quad\therefore k+l=4$

$k+l=4$를 만족시키는 두 자연수 k, l의 값은

$k=1$, $l=3$ 또는 $k=2$, $l=2$ 또는 $k=3$, $l=1$

(ⅰ) $k=1$, $l=3$일 때

$x=6\times1^2=6$, $y=6\times3^2=54$

(ⅱ) $k=2$, $l=2$일 때

$x=6\times2^2=24$, $y=6\times2^2=24$

(ⅲ) $k=3$, $l=1$일 때

$x=6\times3^2=54$, $y=6\times1^2=6$

따라서 (ⅰ)~(ⅲ)에 의해 구하는 순서쌍 (x, y)는

$(6, 54)$, $(24, 24)$, $(54, 6)$이다.

06 길잡이 먼저 부등식의 해를 구해 본다.

$\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})x-\sqrt{3}>3\sqrt{2}x-1$에서

$3\sqrt{2}x-2\sqrt{3}x-3\sqrt{2}x>-1+\sqrt{3}$

$-2\sqrt{3}x>-1+\sqrt{3}$

$\therefore x<\dfrac{-1+\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}}=\dfrac{(-1+\sqrt{3})\times\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-3}{6}$

이때 $1<\sqrt{3}<2$이므로 $-\dfrac{1}{3}<\dfrac{\sqrt{3}-3}{6}<-\dfrac{1}{6}$

따라서 $x<\dfrac{\sqrt{3}-3}{6}$에서 $\dfrac{\sqrt{3}-3}{6}$이 -1과 0 사이에 있는 수이므로 x의 값 중 가장 큰 정수는 -1이다.

07 길잡이 서로 닮은 두 평면도형의 닮음비가 $m:n$일 때, 넓이의 비는 $m^2:n^2$임을 이용한다.

정육각형과 각 변의 중점을 연결하여 그린 정육각형은 서로 닮음이고, 두 정육각형의 넓이의 비가 $4:3$으로 일정하므로 닮음비는 $\sqrt{4}:\sqrt{3}=2:\sqrt{3}$

즉, 두 정육각형의 한 변의 길이의 비는 $2:\sqrt{3}\left(=1:\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 정육각형의 각 변의 중점을 연결하여 그린 정육각형의 둘레의 길이는 이전 정육각형의 둘레의 길이의 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$배이다.

$\therefore$ (색칠한 부분의 둘레의 길이의 합)

$=$(4개의 정육각형의 둘레의 길이의 합)

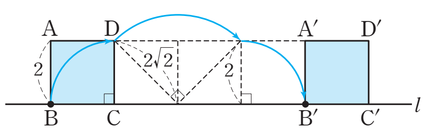
$=6+\left(6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=6+3\sqrt{3}+\dfrac{9}{2}+\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

$=\dfrac{42+21\sqrt{3}}{4}$

08 길잡이 점 B가 움직인 자리를 그려 본다.

점 B가 움직인 자리는 다음 그림과 같다.



한 변의 길이가 2인 정사각형의 대각선의 길이는

$\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$이므로

(점 B가 움직인 거리)

$=\dfrac{1}{4}\times2\pi\times2+\dfrac{1}{4}\times2\pi\times2\sqrt{2}+\dfrac{1}{4}\times2\pi\times2$

$=\pi+\sqrt{2}\pi+\pi=(2+\sqrt{2})\pi$

P. 30~31 **1~2 서술형 완성하기**

[과정은 풀이 참조]

1 a^2+bc **2** $\dfrac{1}{6}$ **3** 3 **4** $-\dfrac{1}{3}$

5 $3\sqrt{14}$ cm, $36\sqrt{14}$ cm^3 **6** $28\sqrt{5}$ cm

7 9개 **8** $7\sqrt{3}$ cm

1 $a<0$, $c<0$이므로 $-ac<0$

$\therefore \sqrt{(-ac)^2}=-(-ac)=ac$ $\cdots$ (ⅰ)

$a<c$에서 $c-a>0$이고, $b<0$이므로

$b(c-a)<0$

$\therefore \sqrt{b^2(c-a)^2}=\sqrt{\{b(c-a)\}^2}=-b(c-a)$ $\cdots$ (ⅱ)

$b<c$에서 $c-b>0$이고, $-a>0$이므로

$c-b-a=(c-b)+(-a)>0$

$\therefore \sqrt{(c-b-a)^2}=c-b-a$ $\cdots$ (ⅲ)

$\therefore \sqrt{(-ac)^2}-\sqrt{b^2(c-a)^2}-a\sqrt{(c-b-a)^2}$

$=ac-\{-b(c-a)\}-a(c-b-a)$

$=ac+bc-ab-ac+ab+a^2$

$=a^2+bc$ $\cdots$ (ⅳ)

채점 기준	비율
(ⅰ) $\sqrt{(-ac)^2}=ac$임을 알기	30 %
(ⅱ) $\sqrt{b^2(c-a)^2}=-b(c-a)$임을 알기	30 %
(ⅲ) $\sqrt{(c-b-a)^2}=c-b-a$임을 알기	30 %
(ⅳ) 주어진 식을 간단히 하기	10 %

2 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$ $\cdots$ (ⅰ)

$\sqrt{72-2ab}$가 정수가 되려면 $72-2ab$가 0 또는 72보다 작은 (자연수)^2 꼴인 수이어야 한다.

즉, $72-2ab=0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64$이므로

$ab=36, \dfrac{71}{2}, 34, \dfrac{63}{2}, 28, \dfrac{47}{2}, 18, \dfrac{23}{2}, 4$

이때 a, b는 $1\le a\le6$, $1\le b\le6$인 자연수이므로

$ab=36, 18, 4$ $\cdots$ (ⅱ)

따라서 이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(6, 6)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$의 6가지이므로 구하는 확률은 $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$이다. $\cdots$ (ⅲ)

채점 기준	비율
(ⅰ) 모든 경우의 수 구하기	30 %
(ⅱ) $\sqrt{72-2ab}$가 정수가 되는 조건을 찾아 ab의 값 구하기	40 %
(ⅲ) 확률 구하기	30 %

3 $\sqrt{169}<\sqrt{173}<\sqrt{196}$, 즉 $13<\sqrt{173}<14$이므로

$\sqrt{173}$ 이하의 홀수는 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13의 7개이다.

$\therefore f(173)=7$ $\cdots$ (ⅰ)

$\sqrt{64}<\sqrt{73}<\sqrt{81}$, 즉 $8<\sqrt{73}<9$이므로

$\sqrt{73}$ 이하의 홀수는 1, 3, 5, 7의 4개이다.

$\therefore f(73)=4$ $\cdots$ (ii)

$\therefore f(173)-f(73)=7-4=3$ $\cdots$ (iii)

채점 기준	비율
(i) $f(173)$의 값 구하기	40 %
(ii) $f(73)$의 값 구하기	40 %
(iii) $f(173)-f(73)$의 값 구하기	20 %

4 $5=\sqrt{25}$와 $7=\sqrt{49}$ 사이에 있는 무리수 중 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n}$ 꼴로 나타낼 수 있는 가장 큰 수는 $\sqrt{48}$이다.

$6<\sqrt{48}<7$이므로

$p=6$, $q=\sqrt{48}-6=4\sqrt{3}-6$ $\cdots$ (i)

$\therefore \dfrac{q}{p}=\dfrac{4\sqrt{3}-6}{6}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}-1$

따라서 $a=\dfrac{2}{3}$, $b=-1$이므로 $\cdots$ (ii)

$a+b=\dfrac{2}{3}+(-1)=-\dfrac{1}{3}$ $\cdots$ (iii)

채점 기준	비율
(i) p, q의 값 구하기	40 %
(ii) a, b의 값 구하기	40 %
(iii) $a+b$의 값 구하기	20 %

5 $\triangle$BCD에서

$\overline{BD}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}(cm)$이므로

$\overline{DH}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\times 6\sqrt{2}=3\sqrt{2}(cm)$ $\cdots$ (i)

$\triangle$OHD에서

$\overline{OH}=\sqrt{12^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{14}(cm)$

따라서 정사각뿔의 높이는 $3\sqrt{14}$ cm이므로 $\cdots$ (ii)

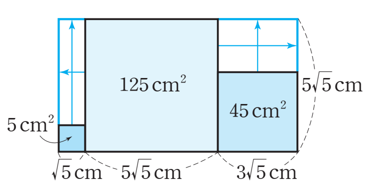
정사각뿔의 부피는

$\dfrac{1}{3}\times 6\times 6\times 3\sqrt{14}=36\sqrt{14}(cm^3)$ $\cdots$ (iii)

채점 기준	비율
(i) $\overline{DH}$의 길이 구하기	30 %
(ii) 정사각뿔의 높이 구하기	30 %
(iii) 정사각뿔의 부피 구하기	40 %

6 넓이가 각각 $5\,cm^2$, $125\,cm^2$, $45\,cm^2$인 정사각형 모양의 색종이의 한 변의 길이는 각각

$\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{125}=5\sqrt{5}(cm)$, $\sqrt{45}=3\sqrt{5}(cm)$ $\cdots$ (i)



따라서 색종이로 이루어진 도형의 둘레의 길이는 가로의 길이가 $(\sqrt{5}+5\sqrt{5}+3\sqrt{5})$ cm, 세로의 길이가 $5\sqrt{5}$ cm인 직사각형의 둘레의 길이와 같으므로

(도형의 둘레의 길이)

$=2\times\{(\sqrt{5}+5\sqrt{5}+3\sqrt{5})+5\sqrt{5}\}$ $\cdots$ (ii)

$=2\times 14\sqrt{5}$

$=28\sqrt{5}(cm)$ $\cdots$ (iii)

채점 기준	비율
(i) 정사각형 모양의 색종이의 한 변의 길이 구하기	30 %
(ii) 도형의 둘레의 길이를 구하는 식 세우기	40 %
(iii) 도형의 둘레의 길이 구하기	30 %

7 $\sqrt{3n}$이 2의 배수가 되어야 하므로 $\sqrt{3n}=2k$ (k는 자연수)라 하고 양변을 제곱하면

$3n=4k^2$ $\quad\therefore n=\dfrac{4k^2}{3}$

이때 n이 자연수이므로 k는 3의 배수이어야 한다.

$k=3m$ (m은 자연수)이라 하면

$n=\dfrac{4k^2}{3}=\dfrac{4\times(3m)^2}{3}=12m^2$ $\cdots$ (i)

n은 1000 이하의 자연수이므로

$1\le n\le 1000$에서 $1\le 12m^2\le 1000$

$\dfrac{1}{12}\le m^2\le\dfrac{1000}{12}=83.3\cdots$

$\therefore m=1, 2, 3, \cdots, 9$

따라서 n은 12×1^2, 12×2^2, 12×3^2, $\cdots$, 12×9^2의 9개이다.

$\cdots$ (ii)

채점 기준	비율
(i) $\sqrt{3n}$이 2의 배수가 되기 위한 조건 구하기	50 %
(ii) n의 개수 구하기	50 %

8 $\triangle$ADE와 $\triangle$ABC에서

$\overline{BC}\,/\!/\,\overline{DE}$이므로 $\angle ADE=\angle ABC$ (동위각), $\angle$A는 공통

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$ (AA 닮음)

이때 □DBCE : $\triangle$ABC$=3:7$이므로

$\triangle ADE:\triangle ABC=4:7$ $\cdots$ (i)

즉, $\triangle$ADE와 $\triangle$ABC의 닮음비는 $\sqrt{4}:\sqrt{7}=2:\sqrt{7}$이다.

$\cdots$ (ii)

이때 $\overline{BC}=x$ cm라 하면 $2:\sqrt{7}=2\sqrt{21}:x$에서

$2x=14\sqrt{3}$ $\quad\therefore x=7\sqrt{3}$

따라서 $\overline{BC}$의 길이는 $7\sqrt{3}$ cm이다. $\cdots$ (iii)

채점 기준	비율
(i) $\triangle$ADE와 $\triangle$ABC의 넓이의 비 구하기	30 %
(ii) $\triangle$ADE와 $\triangle$ABC의 닮음비 구하기	40 %
(iii) $\overline{BC}$의 길이 구하기	30 %

3. 다항식의 곱셈

P. 34~36 개념+대표 문제 확인하기

1 $a=3$, $b=-2$ **2** ③, ⑤ **3** ⑤ **4** 7
5 ③ **6** $(8a^2-18a+9)\,\mathrm{m}^2$ **7** ⑤ **8** 2499.51
9 $12+\sqrt{6}$ **10** 10 **11** ⑤ **12** $4+3\sqrt{5}$
13 $9x^2-16y^2+8y-1$
14 $x^4+16x^3+86x^2+176x+105$ **15** (1) 18 (2) 320
16 (1) 6 (2) 34 **17** ① **18** 1

1 x^3항이 나오는 부분만 전개하면
$x^2\times ax+x\times 2x^2=ax^3+2x^3=(a+2)x^3$
$a+2=5 \qquad \therefore a=3$
x^2항이 나오는 부분만 전개하면
$x^2\times b+x\times ax+(-4)\times 2x^2=bx^2+ax^2-8x^2$
$=(b+a-8)x^2$
$b+a-8=-7 \qquad \therefore b=-a+1=-3+1=-2$

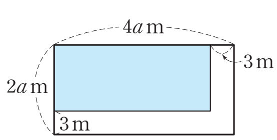
2 ① $(3a-2)^2=9a^2-12a+4$
② $(-2x-y)^2=4x^2+4xy+y^2$
④ $(x+3)(x-2)=x^2+x-6$
따라서 바르게 전개한 것은 ③, ⑤이다.

3 $(-x+2a)^2+(2x-3)(x-1)$
$=x^2-4ax+4a^2+2x^2-5x+3$
$=3x^2+(-4a-5)x+4a^2+3$
x^2의 계수는 3, x의 계수는 $-4a-5$이므로
$3=-4a-5 \qquad \therefore a=-2$
따라서 상수항은 $4a^2+3=4\times(-2)^2+3=19$

4 $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$
$=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$
$=(x^4-1)(x^4+1)$
$=x^8-1$
따라서 $a=8$, $b=-1$이므로
$a+b=8+(-1)=7$

5 (색칠한 부분의 넓이)
$=(2x+5)(2x+3)-(x-1)(x+2)$
$=4x^2+16x+15-(x^2+x-2)$
$=3x^2+15x+17$

6 길을 제외한 정원의 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$(4a-3)(2a-3)$
$=8a^2-18a+9(\mathrm{m}^2)$

7 ① $304^2=(300+4)^2$에서 $a=300$, $b=4$로 놓으면
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
② $299^2=(300-1)^2$에서 $a=300$, $b=1$로 놓으면
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
③ $201\times199=(200+1)(200-1)$에서 $a=200$, $b=1$로 놓으면 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
④ $201\times202=(200+1)(200+2)$에서 $x=200$, $a=1$, $b=2$로 놓으면 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
⑤ $48\times52=(50-2)(50+2)$에서 $a=50$, $b=-2$로 놓으면 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
따라서 적당하지 않은 것은 ⑤이다.

8 $49.3\times50.7=(50-0.7)(50+0.7)=50^2-0.7^2$
$=2500-0.49=2499.51$

9 $(2+\sqrt{6})^2-(\sqrt{2}+\sqrt{12})(\sqrt{8}-\sqrt{3})$
$=(4+4\sqrt{6}+6)-(\sqrt{2}+2\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$
$=4+4\sqrt{6}+6-(4+3\sqrt{6}-6)$
$=10+4\sqrt{6}-3\sqrt{6}+2$
$=12+\sqrt{6}$

10 $x+y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$
$=\dfrac{3+2\sqrt{6}+2+3-2\sqrt{6}+2}{3-2}=10$

11 $-\dfrac{2}{5\sqrt{2}+7}=-\dfrac{2(5\sqrt{2}-7)}{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)}$
$=\dfrac{-2(5\sqrt{2}-7)}{50-49}=14-10\sqrt{2}$
따라서 $a=14$, $b=-10$이므로
$a-b=14-(-10)=24$

12 $\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{4(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\dfrac{4(3+\sqrt{5})}{9-5}=3+\sqrt{5}$
$2<\sqrt{5}<3$에서 $5<3+\sqrt{5}<6$
따라서 $a=5$, $b=(3+\sqrt{5})-5=\sqrt{5}-2$이므로
$\sqrt{a}+\dfrac{2}{b}=\sqrt{5}+\dfrac{2}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+\dfrac{2(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}$
$=\sqrt{5}+\dfrac{2(\sqrt{5}+2)}{5-4}=\sqrt{5}+2\sqrt{5}+4$
$=4+3\sqrt{5}$

13 $4y-1=A$로 놓으면
$(3x+4y-1)(3x-4y+1)$
$=\{3x+(4y-1)\}\{3x-(4y-1)\}$
$=(3x+A)(3x-A)=9x^2-A^2$
$=9x^2-(4y-1)^2=9x^2-(16y^2-8y+1)$
$=9x^2-16y^2+8y-1$

14 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)$
$=\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}$
$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)$
$x^2+8x=A$로 놓으면
$(A+7)(A+15)=A^2+22A+105$
$=(x^2+8x)^2+22(x^2+8x)+105$
$=x^4+16x^3+64x^2+22x^2+176x+105$
$=x^4+16x^3+86x^2+176x+105$

15 (1) $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=4^2+2\times1=18$
(2) $(x^2-y^2)^2=(x^2+y^2)^2-4x^2y^2=(x^2+y^2)^2-4(xy)^2$
$=18^2-4\times1^2=324-4=320$

16 (1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=2^2+2=6$
(2) $x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=6^2-2=34$

17 $x^2-4x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면
$x-4+\frac{1}{x}=0\quad\therefore x+\frac{1}{x}=4$
그런데 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=4^2-4=12$이므로
$x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$

18 $x=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$
$=\frac{4-4\sqrt{3}+3}{4-3}=7-4\sqrt{3}$
즉, $x-7=-4\sqrt{3}$이므로 양변을 제곱하면
$(x-7)^2=(-4\sqrt{3})^2$, $x^2-14x+49=48$
따라서 $x^2-14x=-1$이므로
$x^2-14x+2=-1+2=1$

P. 37~41 **내신 5% 따라잡기**

1 ④	**2** 6	**3** a^8-2a^4+1	**4** ②
5 0	**6** ②	**7** $45a^2+6ab-24b^2$	
8 $-2x^2+7xy-6y^2$	**9** $\pi b^2+\pi ab$		
10 (1) 831 (2) 2	**11** ④	**12** 37	**13** ②
14 $\frac{16}{13}$	**15** $(48+96\sqrt{2})\,\text{cm}^3$	**16** 1	
17 $(21-7\sqrt{6})\,\text{cm}$	**18** 4	**19** ⑤	
20 $x=-20,\ y=-7$	**21** 2	**22** ①	**23** ⑤
24 ④	**25** ⑤	**26** 1	**27** $18+\sqrt{6}$
28 ②	**29** 4개	**30** $100a^4-196a^2-25a^2b^2+49b^2$	
31 (1) (가) $a+1$, (나) bc, (다) $a+1$, (라) c (2) 5616			

1 $(3x^2-x+2)=(3x^2-x+2)(3x^2-x+2)$에서
x^3항이 나오는 부분만 전개하면
$3x^2\times(-x)+(-x)\times3x^2=-6x^3$
x^2항이 나오는 부분만 전개하면
$3x^2\times2+(-x)\times(-x)+2\times3x^2=13x^2$
따라서 x^3의 계수는 -6, x^2의 계수는 13이므로
$-6+13=7$

2 $(2x-3)^2(ax^2+bx-c)=(4x^2-12x+9)(ax^2+bx-c)$
에서 x^2항이 나오는 부분만 전개하면
$4x^2\times(-c)+(-12x)\times bx+9\times ax^2=(9a-12b-4c)x^2$
x항이 나오는 부분만 전개하면
$-12x\times(-c)+9\times bx=(9b+12c)x$
상수항이 나오는 부분만 전개하면
$9\times(-c)=-9c$
상수항이 45이므로 $-9c=45$에서 $c=-5$
x의 계수는 12이므로 $9b+12c=12$에서
$9b-60=12$, $9b=72\quad\therefore b=8$
x^2의 계수는 -49이므로 $9a-12b-4c=-49$에서
$9a-96+20=-49$, $9a=27\quad\therefore a=3$
$\therefore a+b+c=3+8+(-5)=6$

3 $(a-1)^2(a+1)^2(a^2+1)^2=\{(a-1)(a+1)(a^2+1)\}^2$
$=\{(a^2-1)(a^2+1)\}^2$
$=(a^4-1)^2$
$=a^8-2a^4+1$

4 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab=x^2+cx-36$에서
$ab=-36$이므로 이 식을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(-36, 1)$, $(-18, 2)$, $(-12, 3)$, $(-9, 4)$, $(-6, 6)$, $(-4, 9)$, $(-3, 12)$, $(-2, 18)$, $(-1, 36)$, $(1, -36)$, $(2, -18)$, $(3, -12)$, $(4, -9)$, $(6, -6)$, $(9, -4)$, $(12, -3)$, $(18, -2)$, $(36, -1)$이다.
이때 $a+b=c$이므로 c의 값이 될 수 있는 수는
-35, -16, -9, -5, 0, 5, 9, 16, 35
따라서 c의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.

5 $(2x+a)(x-1)+(x-a)(-a-x)$
$=(2x+a)(x-1)-(x-a)(x+a)$
$=2x^2+(-2+a)x-a-(x^2-a^2)$
$=x^2+(-2+a)x+a^2-a$
x의 계수가 음수이므로 $-2+a<0\quad\therefore a<2$
이때 a는 자연수이므로 $a=1$
따라서 상수항은 $a^2-a=1^2-1=0$

6 진호가 전개한 식은

$$(x+3)(x+A)=x^2+(3+A)x+3A$$
$$=x^2-8x+B$$

이므로 $3+A=-8$, $3A=B$

$\therefore A=-11$, $B=-33$

수지가 전개한 식은

$$(Cx-3)(x+1)=Cx^2+(C-3)x-3$$
$$=Cx^2-5x-3$$

이므로 $C-3=-5$ $\quad\therefore C=-2$

$\therefore A+B+C=-11+(-33)+(-2)=-46$

7 직사각형 모양의 바닥 전체의 넓이는

$(15a+12b)(9a-6b)=135a^2+18ab-72b^2$

이때 타일을 붙이지 않은 부분의 넓이는 바닥 전체의 넓이의 $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$이므로

$(135a^2+18ab-72b^2)\times\frac{1}{3}=45a^2+6ab-24b^2$

다른 풀이

타일 한 개의 가로, 세로의 길이는 각각

$(15a+12b)\div5=3a+\frac{12}{5}b$, $(9a-6b)\div3=3a-2b$

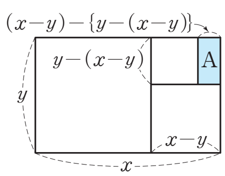
타일 한 개의 넓이는

$\left(3a+\frac{12}{5}b\right)(3a-2b)=9a^2+\frac{6}{5}ab-\frac{24}{5}b^2$

타일을 붙이지 않은 부분의 넓이는 타일 5개의 넓이와 같으므로

$\left(9a^2+\frac{6}{5}ab-\frac{24}{5}b^2\right)\times5=45a^2+6ab-24b^2$

8 직사각형 A의 세로의 길이는



$y-(x-y)=-x+2y$

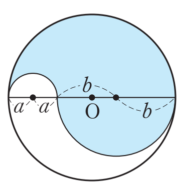
가로의 길이는

$(x-y)-(-x+2y)=2x-3y$

따라서 직사각형 A의 넓이는

$(2x-3y)(-x+2y)=-2x^2+7xy-6y^2$

9 원 O의 반지름의 길이는



$\frac{2a+2b}{2}=a+b$이므로

(색칠한 부분의 넓이)

$=\frac{1}{2}\pi(a+b)^2-\frac{1}{2}\pi a^2+\frac{1}{2}\pi b^2$

$=\frac{1}{2}\pi a^2+\pi ab+\frac{1}{2}\pi b^2-\frac{1}{2}\pi a^2+\frac{1}{2}\pi b^2$

$=\pi b^2+\pi ab$

10 (1) $415=x$로 놓으면

$415\times417-414\times416$

$=x(x+2)-(x-1)(x+1)$

$=x^2+2x-(x^2-1)=2x+1$

$=2\times415+1=831$

(2) $2020=x$로 놓으면

$$\frac{4040}{2021\times2024-2022^2}=\frac{2x}{(x+1)(x+4)-(x+2)^2}$$
$$=\frac{2x}{x^2+5x+4-(x^2+4x+4)}$$
$$=\frac{2x}{x}=2$$

11 $6(9+3)(9^2+3^2)(9^4+3^4)(9^8+3^8)+3^{16}$

$=(9-3)(9+3)(9^2+3^2)(9^4+3^4)(9^8+3^8)+3^{16}$

$=(9^2-3^2)(9^2+3^2)(9^4+3^4)(9^8+3^8)+3^{16}$

$=(9^4-3^4)(9^4+3^4)(9^8+3^8)+3^{16}$

$=(9^8-3^8)(9^8+3^8)+3^{16}$

$=(9^{16}-3^{16})+3^{16}=9^{16}$

$=(3^2)^{16}=3^{32}$

$\therefore x=32$

12 $f(1)f(2)f(4)f(8)f(16)$

$=(5+1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)$

$=\frac{1}{5-1}\times(5-1)(5+1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)$

$=\frac{1}{4}(5^2-1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)$

$=\frac{1}{4}(5^4-1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)$

$=\frac{1}{4}(5^8-1)(5^8+1)(5^{16}+1)$

$=\frac{1}{4}(5^{16}-1)(5^{16}+1)$

$=\frac{1}{4}(5^{32}-1)=\frac{5^{32}-1}{4}$

따라서 $a=5$, $b=32$이므로

$a+b=5+32=37$

13 $(7-5\sqrt{2})^{11}(7+5\sqrt{2})^{11}=\{(7-5\sqrt{2})(7+5\sqrt{2})\}^{11}$

$=(49-50)^{11}=(-1)^{11}$

$=-1$

$\therefore (7+5\sqrt{2})^{11}=-\frac{1}{(7-5\sqrt{2})^{11}}=-\frac{1}{A}$

다른 풀이

$(7-5\sqrt{2})(7+5\sqrt{2})=49-50=-1$이므로

$7+5\sqrt{2}=-\frac{1}{7-5\sqrt{2}}$

$\therefore (7+5\sqrt{2})^{11}=\left(-\frac{1}{7-5\sqrt{2}}\right)^{11}=-\frac{1}{(7-5\sqrt{2})^{11}}=-\frac{1}{A}$

14 $(4+a\sqrt{3})(1-2\sqrt{3})^2=(4+a\sqrt{3})(1-4\sqrt{3}+12)$

$=(4+a\sqrt{3})(13-4\sqrt{3})$

$=52+(-16+13a)\sqrt{3}-12a$

$=52-12a+(13a-16)\sqrt{3}$

이 식이 유리수이려면 $13a-16=0$이어야 하므로

$13a=16$ $\quad\therefore a=\frac{16}{13}$

15 (정사각뿔대의 부피)

$=$(큰 정사각뿔의 부피)$-$(작은 정사각뿔의 부피)

$=\frac{1}{3}\times(3+3\sqrt{2})^2\times\{8(2-\sqrt{2})+16(\sqrt{2}-1)\}$

$\quad-\frac{1}{3}\times3^2\times8(2-\sqrt{2})$

$=\frac{1}{3}\times(27+18\sqrt{2})\times8\sqrt{2}-24(2-\sqrt{2})$

$=72\sqrt{2}+96-48+24\sqrt{2}$

$=48+96\sqrt{2}(\text{cm}^3)$

16 (주어진 식)$=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\underbrace{\boxed{\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}}}_{=-1}}}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}=1$

17 두 정삼각형은 서로 닮은 도형이고, 넓이의 비가 2 : 3이므로 한 변의 길이의 비는 $\sqrt{2}:\sqrt{3}$이다.

이때 큰 정삼각형의 한 변의 길이와 작은 정삼각형의 한 변의 길이의 합은 $21\times\frac{1}{3}=7(\text{cm})$이므로

(큰 정삼각형의 한 변의 길이)

$=7\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=7\times\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$=7\times(3-\sqrt{6})=21-7\sqrt{6}(\text{cm})$

18 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}{\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}}$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=1$이므로

$a+b+c=2+1+1=4$

19 $f(n)=\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}$

$\quad=-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$

$=-\sqrt{1}+\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{3}}+\cancel{\sqrt{4}}$

$\quad+\cdots-\cancel{\sqrt{99}}+\cancel{\sqrt{100}}-\cancel{\sqrt{100}}+\sqrt{101}$

$=\sqrt{101}-1$

20 $\dfrac{x}{\sqrt{3}+1}+(1-\sqrt{12})y=\dfrac{x(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}+y-2y\sqrt{3}$

$=\dfrac{x\sqrt{3}-x}{2}+y-2y\sqrt{3}$

$=\left(-\dfrac{x}{2}+y\right)+\left(\dfrac{x}{2}-2y\right)\sqrt{3}$

즉, $\left(-\dfrac{x}{2}+y\right)+\left(\dfrac{x}{2}-2y\right)\sqrt{3}=3+4\sqrt{3}$이므로

$-\dfrac{x}{2}+y=3$ $\cdots$ ㉠, $\dfrac{x}{2}-2y=4$ $\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-20$, $y=-7$

21 $1+x>0$, $1-x>0$이므로

$\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}-\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}-\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$

$=\dfrac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}$

$=\dfrac{1+x-(1-x)}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\dfrac{2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

$=2$

22 $(2x+1-\sqrt{2})(2x-2-\sqrt{2})=(2x-\sqrt{2}+1)(2x-\sqrt{2}-2)$

이므로 $2x-\sqrt{2}=A$로 놓으면

$(2x-\sqrt{2}+1)(2x-\sqrt{2}-2)=(A+1)(A-2)$

$=A^2-A-2$

$=(2x-\sqrt{2})^2-(2x-\sqrt{2})-2$

$=4x^2-4\sqrt{2}x+2-2x+\sqrt{2}-2$

$=4x^2+(-4\sqrt{2}-2)x+\sqrt{2}$

따라서 x의 계수와 상수항의 곱은

$(-4\sqrt{2}-2)\times\sqrt{2}=-8-2\sqrt{2}$

23 $x^2-3x-5=0$에서 $x^2-3x=5$

$\therefore (x+2)(x+3)(x-5)(x-6)$

$=\{(x+2)(x-5)\}\{(x+3)(x-6)\}$

$=(x^2-3x-10)(x^2-3x-18)$

$=(5-10)\times(5-18)$

$=-5\times(-13)=65$

24 $(x-1)(x+1)(2x+1)(2x+5)$

$=(x-1)(2x+5)(x+1)(2x+1)$

$=(2x^2+3x-5)(2x^2+3x+1)$

이때 $2x^2+3x=A$로 놓으면

$(A-5)(A+1)=A^2-4A-5$

$=(2x^2+3x)^2-4(2x^2+3x)-5$

$=4x^4+12x^3+9x^2-8x^2-12x-5$

$=4x^4+12x^3+x^2-12x-5$

25 $(x+\sqrt{5})(y-\sqrt{5})=xy-x\sqrt{5}+y\sqrt{5}-5$
$=xy-5+(-x+y)\sqrt{5}$
$=7-4\sqrt{5}$
따라서 $xy-5=7$이므로 $xy=12$이고,
$-x+y=-4$이므로 $x-y=4$
$\therefore x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=4^2+2\times12=40$

26 $(2x-1)(2y-1)=3$에서
$4xy-2(x+y)-2=0$, $2xy-(x+y)-1=0$
이때 $xy=2$이므로 $4-(x+y)-1=0$
$\therefore x+y=3$
$\therefore \dfrac{x-1}{y}+\dfrac{y-1}{x}=\dfrac{x(x-1)+y(y-1)}{xy}$
$=\dfrac{x^2+y^2-(x+y)}{xy}$
$=\dfrac{(x+y)^2-2xy-(x+y)}{xy}$
$=\dfrac{3^2-2\times2-3}{2}=1$

27 $x^2-\sqrt{6}x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면
$x-\sqrt{6}+\dfrac{1}{x}=0$　　$\therefore x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{6}$
이때 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=(\sqrt{6})^2-2=4$,
$x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2=4^2-2=14$이므로
$x^4+x^2+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}$
$=\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right)+\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
$=14+4+\sqrt{6}$
$=18+\sqrt{6}$

28 $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$
$2<\sqrt{5}<3$에서 $4<\sqrt{5}+2<5$이므로
$\sqrt{5}+2$의 정수 부분은 4이고, 소수 부분은
$x=(\sqrt{5}+2)-4=\sqrt{5}-2$이다.
즉, $x+2=\sqrt{5}$이므로 양변을 제곱하면
$(x+2)^2=(\sqrt{5})^2$, $x^2+4x+4=5$
따라서 $x^2+4x=1$이므로
$x^2+4x+3=1+3=4$

29 길잡이 6□와 4□를 각각 $60+x$, $40+y$로 놓고 두 수의 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 각각 바꾸어도 그 곱이 같음을 식으로 나타내 본다.
두 자리의 자연수 6□와 4□를 $60+x$, $40+y$라 하면 이 두 수의 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 각각 바꾼 두 자리의 자연수는 $10x+6$, $10y+4$이므로
$(60+x)(40+y)=(10x+6)(10y+4)$
$2400+60y+40x+xy=100xy+40x+60y+24$
$99xy=2376$　　$\therefore xy=24$
이때 x, y는 한 자리의 자연수이므로 순서쌍 (x, y)의 개수는 $(3, 8)$, $(4, 6)$, $(6, 4)$, $(8, 3)$의 4개이다.

30 길잡이 앞, 오른쪽, 위에서 본 모양으로부터 상자의 최소 개수를 생각해 본다.
상자 한 개의 부피는 $(2a+b)(5a-7)(2a-b)$
상자는 바닥에 $a\times5=5a$(개)가 깔려 있고, 오른쪽에서 보면 그 위로 최소 $4+1+2=7$(개)의 상자가 쌓여 있으므로 상자의 최소 개수는 $(5a+7)$개이다.
따라서 상자 전체의 최소 부피는
$(2a+b)(5a-7)(2a-b)(5a+7)$
$=(2a+b)(2a-b)(5a+7)(5a-7)$
$=(4a^2-b^2)(25a^2-49)$
$=100a^4-196a^2-25a^2b^2+49b^2$

31 길잡이 곱셈 공식을 이용하여 십의 자리의 숫자가 같고 일의 자리의 숫자의 합이 10인 두 자리의 자연수의 곱을 구하는 방법을 생각한다.
(1) $\boxed{a}\boxed{b}$와 $\boxed{a}\boxed{c}$에서 일의 자리의 숫자의 합이 10이므로
$b+c=10$
$\therefore (10a+b)(10a+c)=100a^2+10a(b+c)+bc$
$=100a^2+100a+bc$
$=100a(\boxed{a+1})+\boxed{bc}$
따라서 $\boxed{a}\boxed{b}\times\boxed{a}\boxed{c}$의 계산 결과는 앞의 두 자리에는 a와 $\boxed{a+1}$의 곱을 적고, 뒤의 두 자리에는 b와 $\boxed{c}$의 곱을 적으면 된다.
$\therefore$ (가) $a+1$, (나) bc, (다) $a+1$, (라) c
$7\times(7+1)$
(2) $72\times78=5616$
2×8

P. 42~43 내신 1% 뛰어넘기

01 16	**02** -1	**03** 2	**04** 1	
05 $-20-10\sqrt{3}$		**06** 2	**07** ⑤	**08** 5

01 길잡이 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용할 수 있도록 수를 적절히 변형한다.
$3\times5\times17\times257$
$=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2^8-1)(2^8+1)$
$=2^{16}-1$
$\therefore a=16$

02 길잡이 $\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{b}+1}=1$에서 좌변의 분모를 통분하여 $\sqrt{ab}$의 값을 구한다.

$$\frac{1}{\sqrt{a}+1}+\frac{1}{\sqrt{b}+1}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{b}+1)}=1\text{에서}$$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+2=\sqrt{ab}+\sqrt{a}+\sqrt{b}+1 \qquad \therefore \sqrt{ab}=1$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{\sqrt{a}-1}+\frac{1}{\sqrt{b}-1}&=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)}\\&=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-2}{\sqrt{ab}-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1}\\&=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-2}{1-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1}\\&=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-2}{-(\sqrt{a}+\sqrt{b}-2)}=-1\end{aligned}$$

03 길잡이 $2^{3x}\times2^{3y}=2^{3x+3y}=2^{3(x+y)}$임을 이용한다.

$$\begin{aligned}2^{3x}\times2^{3y}&=(12-4\sqrt{5})(12+4\sqrt{5})\\&=12^2-(4\sqrt{5})^2\\&=144-80\\&=64=2^6\end{aligned}$$

이고, $2^{3x}\times2^{3y}=2^{3x+3y}=2^{3(x+y)}$이므로

$3(x+y)=6 \qquad \therefore x+y=2$

04 길잡이 $0<a<1$이면 $0<a^n<1$임을 이용한다. (단, n은 자연수)

$4<\sqrt{17}<5$이므로 $0<\sqrt{17}-4<1$

따라서 $0<(\sqrt{17}-4)^{2020}<1$이므로

$(\sqrt{17}-4)^{2020}$의 정수 부분은 0이고, 소수 부분은

$A=(\sqrt{17}-4)^{2020}-0=(\sqrt{17}-4)^{2020}$

$$\begin{aligned}\therefore (\sqrt{17}+4)^{2020}A&=(\sqrt{17}+4)^{2020}(\sqrt{17}-4)^{2020}\\&=\{(\sqrt{17}+4)(\sqrt{17}-4)\}^{2020}\\&=\{(\sqrt{17})^2-4^2\}^{2020}\\&=1^{2020}=1\end{aligned}$$

05 길잡이 $\langle 1,\ 3\rangle$, $\langle 2,\ 6\rangle$, $\langle 3,\ 9\rangle$, $\cdots$, $\langle 10,\ 30\rangle$을 분수로 나타낸 후 분모, 분자에 공통으로 곱해진 수를 찾아 약분한다.

$$\begin{aligned}&\langle 1,\ 3\rangle+\langle 2,\ 6\rangle+\langle 3,\ 9\rangle+\cdots+\langle 10,\ 30\rangle\\&=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{9}}{\sqrt{3}-\sqrt{9}}+\cdots+\frac{\sqrt{10}+\sqrt{30}}{\sqrt{10}-\sqrt{30}}\\&=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}(\sqrt{1}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}(\sqrt{1}-\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{3}(\sqrt{1}+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{1}-\sqrt{3})}\\&\qquad+\cdots+\frac{\sqrt{10}(\sqrt{1}+\sqrt{3})}{\sqrt{10}(\sqrt{1}-\sqrt{3})}\\&=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}+\cdots+\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}\\&=10\times\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}=10\times\frac{(\sqrt{1}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{1}-\sqrt{3})(\sqrt{1}+\sqrt{3})}\\&=10\times\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}=10\times(-2-\sqrt{3})\\&=-20-10\sqrt{3}\end{aligned}$$

06 길잡이 x_1, x_2, x_3, $\cdots$의 값을 차례로 구하여 규칙을 찾는다.

$\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{\sqrt{6}-2}=\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}$이고,

$2<\sqrt{6}<3$이므로 $2<\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}<\dfrac{5}{2}$

즉, $\dfrac{1}{x_1}$의 정수 부분이 2이므로

$x_2=\dfrac{1}{x_1}-2=\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}-2=\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$

마찬가지로 $\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{2}{\sqrt{6}-2}=\sqrt{6}+2$이고,

$2<\sqrt{6}<3$이므로 $4<\sqrt{6}+2<5$

즉, $\dfrac{1}{x_2}$의 정수 부분이 4이므로

$x_3=\dfrac{1}{x_2}-4=(\sqrt{6}+2)-4=\sqrt{6}-2$

이와 같이 x_4, x_5, x_6, $\cdots$의 값을 차례로 구하면

$x_1=x_3=x_5=\cdots=\sqrt{6}-2$,

$x_2=x_4=x_6=\cdots=\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$이므로

$x_{2020}=x_2=\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$, $x_{2021}=x_1=\sqrt{6}-2$

$$\therefore \frac{x_{2021}}{x_{2020}}=\frac{\sqrt{6}-2}{\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}}=2$$

07 길잡이 $x+y=A$, $z-w=B$, $x-y=C$, $z+w=D$로 놓고 곱셈 공식을 이용하여 전개한다.

$x+y=A$, $z-w=B$, $x-y=C$, $z+w=D$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(A-B)(A+B)+(-C+D)(C+D)\\&=A^2-B^2-C^2+D^2\\&=(x+y)^2-(z-w)^2-(x-y)^2+(z+w)^2\\&=(x^2+2xy+y^2)-(z^2-2zw+w^2)\\&\quad-(x^2-2xy+y^2)+(z^2+2zw+w^2)\\&=4xy+4zw\end{aligned}$$

08 길잡이 $m^2+mn-n^2=0$의 양변을 mn으로 나눈 후 곱셈 공식을 변형하여 식의 값을 구한다.

$m^2+mn-n^2=0$의 양변을 $mn\,(mn\neq0)$으로 나누면

$\dfrac{m}{n}+1-\dfrac{n}{m}=0 \qquad \therefore \dfrac{m}{n}-\dfrac{n}{m}=-1$

$$\begin{aligned}\therefore \left(\frac{m^2+n^2}{mn}\right)^2&=\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)^2\\&=\left(\frac{m}{n}-\frac{n}{m}\right)^2+4\\&=(-1)^2+4=5\end{aligned}$$

4. 인수분해

P. 46~48 개념+대표 문제 확인하기

1 ④	**2** 13	**3** $-2a-2$	**4** -19
5 $(x+4)(3x-1)$	**6** $3x-1$	**7** ㄱ, 8100	
8 1	**9** 2022	**10** $150\pi\,\mathrm{cm}^2$	**11** ⑤
12 -3	**13** ④	**14** $(a+2b+3)(a+2b-5)$	
15 $(x^2-2x-2)(x^2-2x-9)$	**16** $(6,\ 4),\ (8,\ 2)$		
17 4	**18** $(x-y-5)(x-y+2)$		**19** $4x$

1 ④ $-2a^2-3ab+9b^2=(-2a+3b)(a+3b)$

2 $4x^2+ax+1=(2x)^2+ax+(\pm1)^2$
이 식이 완전제곱식이 되려면
$a=2\times2\times(\pm1)=\pm4$
이때 $a>0$이므로 $a=4$
x^2-6x+b가 완전제곱식이 되려면
$b=\left(\dfrac{-6}{2}\right)^2=(-3)^2=9$
$\therefore a+b=4+9=13$

3 $-4<a<2$에서 $a-2<0$, $a+4>0$이므로
$$\sqrt{a^2-4a+4}-\sqrt{a^2+8a+16}=\sqrt{(a-2)^2}-\sqrt{(a+4)^2}=-(a-2)-(a+4)=-2a-2$$

4 $3x^2+ax+10=(x-5)(3x+m)$ (m은 상수)으로 놓으면
$3x^2+ax+10=3x^2+(m-15)x-5m$이므로
$m-15=a$, $-5m=10$
$\therefore m=-2$, $a=-17$
$bx^2+13x-15=(x-5)(bx+n)$ (n은 상수)으로 놓으면
$bx^2+13x-15=bx^2+(n-5b)x-5n$이므로
$n-5b=13$, $-5n=-15$
$\therefore n=3$, $b=-2$
$\therefore a+b=-17+(-2)=-19$

5 승재는 상수항을 제대로 보았으므로
$(x+2)(3x-2)=3x^2+4x-4$
에서 처음 이차식의 상수항은 -4이다.
보아는 x의 계수를 제대로 보았으므로
$(x+3)(3x+2)=3x^2+11x+6$
에서 처음 이차식의 x의 계수는 11이다.
따라서 처음 이차식은 $3x^2+11x-4$이므로 이 식을 바르게 인수분해하면
$3x^2+11x-4=(x+4)(3x-1)$

6 도형 (가)의 넓이는
$(3x+2)^2-3^2=9x^2+12x-5=(3x+5)(3x-1)$
이때 도형 (가), (나)의 넓이는 서로 같고, 도형 (나)의 가로의 길이가 $3x+5$이므로 세로의 길이는 $3x-1$이다.

7
$$81.5^2+17\times81.5+8.5^2=81.5^2+2\times81.5\times8.5+8.5^2=(81.5+8.5)^2=90^2=8100$$
따라서 주어진 식을 계산하는 데 가장 알맞은 인수분해 공식은 ㄱ이고, 그 값은 8100이다.

8
$$(\text{주어진 식})=\frac{96^2-16+35^2-65^2}{81^2-19^2}=\frac{96^2-4^2+35^2-65^2}{81^2-19^2}=\frac{(96+4)(96-4)+(35+65)(35-65)}{(81+19)(81-19)}=\frac{100\times92+100\times(-30)}{100\times62}=\frac{62}{62}=1$$

9
$$2020\times2024+4=2020\times(2020+4)+4=2020^2+2\times2020\times2+2^2=(2020+2)^2=2022^2$$
따라서 구하는 자연수는 2022이다.

10 (한지 부분의 넓이)
=(큰 부채꼴의 넓이)−(작은 부채꼴의 넓이)
$$=\pi\times22.5^2\times\frac{120}{360}-\pi\times7.5^2\times\frac{120}{360}=\frac{1}{3}\pi(22.5^2-7.5^2)=\frac{1}{3}\pi(22.5+7.5)(22.5-7.5)=\frac{1}{3}\pi\times30\times15=150\pi(\mathrm{cm}^2)$$

11
$$\frac{x^2-3xy+2y^2}{x-2y}=\frac{(x-y)(x-2y)}{x-2y}=x-y\ (\because x-2y\neq0)=11+6\sqrt{2}-(-3+3\sqrt{2})=14+3\sqrt{2}$$

12 $x^2-9y^2=(x+3y)(x-3y)=-2(x-3y)=10$
$\therefore x-3y=-5$
두 식 $x+3y=-2$, $x-3y=-5$를 연립하여 풀면
$x=-\dfrac{7}{2}$, $y=\dfrac{1}{2}$이므로 $x+y=-\dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{2}=-3$

13 $6x^3y^2-15x^2y^3-9xy^4=3xy^2(2x^2-5xy-3y^2)$
$=3xy^2(x-3y)(2x+y)$
따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ④이다.

14 $a+2b=A$로 놓으면
$(a+2b)(a+2b-2)-15=A(A-2)-15$
$=A^2-2A-15$
$=(A+3)(A-5)$
$=(a+2b+3)(a+2b-5)$

15 $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)-6$
$=(x+1)(x-3)(x+2)(x-4)-6$
$=(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)-6$
이때 $x^2-2x=X$로 놓으면
$(X-3)(X-8)-6=X^2-11X+18$
$=(X-2)(X-9)$
$=(x^2-2x-2)(x^2-2x-9)$

16 $xy-x-5y+5=x(y-1)-5(y-1)$
$=(x-5)(y-1)$
즉, $(x-5)(y-1)=3$이고 x, y는 양의 정수이므로
$x-5=1$, $y-1=3$ 또는 $x-5=3$, $y-1=1$
따라서 주어진 식을 만족시키는 순서쌍 (x, y)는 $(6, 4)$, $(8, 2)$이다.

17 $25-4x^2-y^2+4xy=25-(4x^2-4xy+y^2)$
$=5^2-(2x-y)^2$
$=(5+2x-y)(5-2x+y)$
따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=5$, $d=-2$이므로
$a+b+c+d=2+(-1)+5+(-2)=4$

18 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$x^2+y^2-3x+3y-2xy-10$
$=x^2-(2y+3)x+y^2+3y-10$
$=x^2-(2y+3)x+(y+5)(y-2)$
$=(x-y-5)(x-y+2)$

19 x^4-5x^2+4에서 $x^2=X$로 놓으면
$x^4-5x^2+4=(x^2)^2-5x^2+4=X^2-5X+4$
$=(X-1)(X-4)=(x^2-1)(x^2-4)$
$=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$
$\therefore (x+1)+(x-1)+(x+2)+(x-2)=4x$

P. 49~53 **내신 5% 따라잡기**

1 ⑤ **2** 60 **3** $(18, 5)$, $(-22, -5)$
4 ① **5** ② **6** $2(a+c)(a-c)$
7 8, 18, 30, 44 **8** ③ **9** $10x+6$
10 32 cm **11** -200 **12** $\frac{101}{200}$ **13** 16 **14** $4\sqrt{2}$
15 ② **16** ③ **17** ④ **18** 16 **19** ①
20 $\frac{1}{6}$ **21** ② **22** $(k^2+k+4)(k^2-k+4)$
23 991 **24** $20\sqrt{5}-21$ **25** ③ **26** 48
27 -2 **28** $2x+3y$ **29** 149, 151
30 $A_{25}(337, -312)$

1 ① $x^2y-2xy^2=xy(x-2y)$
② $x^4-x^2=x^2(x^2-1)=x^2(x+1)(x-1)$
③ $-4x^2+16xy-16y^2=-4(x^2-4xy+4y^2)$
$=-4(x-2y)^2$
④ $a(3a-2b)-(2b-3a)=a(3a-2b)+(3a-2b)$
$=(a+1)(3a-2b)$
⑤ $(3a+5b)(2x-1)-3a-5b$
$=(3a+5b)(2x-1)-(3a+5b)$
$=(3a+5b)(2x-2)$
$=2(3a+5b)(x-1)$
따라서 인수분해를 바르게 한 것은 ⑤이다.

2 $x^2-5ax+3b+(7ax-b)=x^2+2ax+2b$
이 식이 완전제곱식이 되려면
$2b=\left(\frac{2a}{2}\right)^2=a^2$
따라서 50 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(2, 2)$, $(4, 8)$, $(6, 18)$, $(8, 32)$, $(10, 50)$
이므로 $a+b$의 최댓값은
$10+50=60$

3 $4x^2+(m+2)xy+25y^2=(2x)^2+(m+2)xy+(\pm5y)^2$
이 식이 완전제곱식이 되려면
$m+2=2\times2\times(\pm5)=\pm20$
$\therefore m=18$ 또는 $m=-22$
(i) $m=18$일 때
$4x^2+20xy+25y^2=(2x+5y)^2$이므로 $n=5$
(ii) $m=-22$일 때
$4x^2-20xy+25y^2=(2x-5y)^2$이므로 $n=-5$
따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 순서쌍 (m, n)은
$(18, 5)$, $(-22, -5)$이다.

4 $a>1$에서 $0<\frac{1}{a}<1$이므로 $a+\frac{1}{a}>0$
$0<b<1$에서 $\frac{1}{b}>1$이므로 $b-\frac{1}{b}<0$

$$\therefore \sqrt{a^2+2+\frac{1}{a^2}}-\sqrt{\left(b+\frac{1}{b}\right)^2-4}-\frac{1}{\sqrt{a^2}}+\sqrt{\frac{1}{b^2}}$$
$$=\sqrt{a^2+2+\frac{1}{a^2}}-\sqrt{b^2-2+\frac{1}{b^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2}}+\sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{\left(b-\frac{1}{b}\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{a^2}}+\sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2}$$
$$=a+\frac{1}{a}-\left\{-\left(b-\frac{1}{b}\right)\right\}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$
$$=a+\frac{1}{a}+b-\frac{1}{b}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=a+b$$

5 $\sqrt{x}=a+3$이므로 양변을 제곱하면
$x=(a+3)^2=a^2+6a+9$
이때 $-2<a<4$에서 $a+2>0$, $a-4<0$이므로
$\sqrt{x-2a-5}+\sqrt{x-14a+7}$
$=\sqrt{a^2+6a+9-2a-5}+\sqrt{a^2+6a+9-14a+7}$
$=\sqrt{a^2+4a+4}+\sqrt{a^2-8a+16}$
$=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(a-4)^2}$
$=(a+2)-(a-4)=6$

6 $[-a,\ 2b,\ c]-[b,\ -4c,\ a]-[c,\ -2a,\ -b]$
$=(a^2-c^2+2abc)-(b^2-a^2+4abc)-(c^2-b^2-2abc)$
$=a^2-c^2+2abc-b^2+a^2-4abc-c^2+b^2+2abc$
$=2a^2-2c^2=2(a^2-c^2)=2(a+c)(a-c)$

7 $x^2+7x-k=(x+a)(x+b)$
$\qquad\qquad=x^2+(a+b)x+ab$
이므로 $a+b=7$, $ab=-k$
이때 $1\le k\le 50$이므로 $-50\le ab\le -1$
$a>b$라 하면 a와 b는 서로 다른 부호이므로 $a>0$, $b<0$
따라서 합이 7이고, $-50\le ab\le -1$을 만족시키는 두 정수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(8,\ -1)$, $(9,\ -2)$, $(10,\ -3)$, $(11,\ -4)$
이므로 자연수 $k(=-ab)$의 값은 8, 18, 30, 44이다.

8 $5x^2+kx+6=(x+a)(5x+b)$
$\qquad\qquad=5x^2+(5a+b)x+ab$
이므로 $5a+b=k$, $ab=6$
이때 곱이 6인 두 정수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(1,\ 6)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(6,\ 1)$, $(-1,\ -6)$, $(-2,\ -3)$, $(-3,\ -2)$, $(-6,\ -1)$이므로
$(1,\ 6)$일 때, $k=5\times1+6=11$
$(2,\ 3)$일 때, $k=5\times2+3=13$
$(3,\ 2)$일 때, $k=5\times3+2=17$
$(6,\ 1)$일 때, $k=5\times6+1=31$
$(-1,\ -6)$일 때, $k=5\times(-1)+(-6)=-11$
$(-2,\ -3)$일 때, $k=5\times(-2)+(-3)=-13$
$(-3,\ -2)$일 때, $k=5\times(-3)+(-2)=-17$
$(-6,\ -1)$일 때, $k=5\times(-6)+(-1)=-31$
따라서 k의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

9 (직사각형의 넓이)=(가로의 길이)×(세로의 길이)이므로
$6x^2+ax-10$은 $2x+5$를 인수로 가진다.
$6x^2+ax-10=(2x+5)(3x+m)$ (m은 상수)으로 놓으면
$6x^2+ax-10=6x^2+(2m+15)x+5m$
즉, $5m=-10$이므로 $m=-2$
따라서 $6x^2+ax-10=(2x+5)(3x-2)$이므로 이 직사각형의 세로의 길이는 $3x-2$이다.
∴ (둘레의 길이)$=2\{(2x+5)+(3x-2)\}$
$\qquad\qquad\qquad=2(5x+3)=10x+6$

10 $\overline{AC}$를 지름으로 하는 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면
$2\pi r=36\pi \qquad \therefore r=18$
즉, $\overline{AC}=2r=2\times18=36$(cm)이므로 $\overline{BC}=a$ cm라 하면
(색칠한 부분의 넓이)
=($\overline{AD}$를 지름으로 하는 원의 넓이)
　−($\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 넓이)
$=\pi\left(\frac{36+a}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{36-a}{2}\right)^2$
$=\pi\left\{\left(\frac{36+a}{2}\right)^2-\left(\frac{36-a}{2}\right)^2\right\}$
$=\pi\left(\frac{36+a}{2}+\frac{36-a}{2}\right)\left(\frac{36+a}{2}-\frac{36-a}{2}\right)$
$=\pi\times36\times a=144\pi(\text{cm}^2)$
따라서 $a=4$이므로 $\overline{BC}=4$ cm
∴ $\overline{AB}=\overline{AC}-\overline{BC}=36-4=32$(cm)

11 $1^2-3^2+5^2-7^2+9^2-11^2+13^2-15^2+17^2-19^2$
$=(1^2-3^2)+(5^2-7^2)+(9^2-11^2)+(13^2-15^2)$
　$+(17^2-19^2)$
$=(1-3)(1+3)+(5-7)(5+7)+(9-11)(9+11)$
　$+(13-15)(13+15)+(17-19)(17+19)$
$=-2\times(\underbrace{1+3+5+7+9+11+13+15+17+19}_{\text{⇨ 합이 20인 것이 5쌍}})$
$=-2\times(20\times5)$
$=-200$

12 $f(2)\times f(3)\times f(4)\times\cdots\times f(99)\times f(100)$
$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{99^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$
$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times$
　$\cdots\times\left(1-\frac{1}{99}\right)\times\left(1+\frac{1}{99}\right)\times\left(1-\frac{1}{100}\right)\times\left(1+\frac{1}{100}\right)$
$=\frac{1}{2}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\cdots\times\frac{\cancel{98}}{\cancel{99}}\times\frac{\cancel{100}}{\cancel{99}}\times\frac{\cancel{99}}{\cancel{100}}\times\frac{101}{100}$
$=\frac{1}{2}\times\frac{101}{100}$
$=\frac{101}{200}$

13 $2^{48}-1=(2^{24}+1)(2^{24}-1)$
$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{12}-1)$
$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{6}+1)(2^{6}-1)$
$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{6}+1)(2^{3}+1)(2^{3}-1)$
이때 $2^3+1=9$, $2^3-1=7$이므로 $2^{48}-1$은 7, 9로 나누어떨어진다.
따라서 이 두 자연수의 합은 $7+9=16$이다.

14 주어진 식을 인수분해하면
$3x^2-8xy-3y^2=(3x+y)(x-3y)$
이때 $2x-y=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$ ⋯ ㉠
$x+2y=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$ ⋯ ㉡
㉠+㉡에서 $3x+y=2\sqrt{2}$
㉠−㉡에서 $x-3y=2$
∴ (주어진 식)$=(3x+y)(x-3y)$
$=2\sqrt{2}\times2=4\sqrt{2}$

15 $xyz-xy-xz+x-yz+y+z-1$
$=x(yz-y-z+1)-(yz-y-z+1)$
$=(x-1)(yz-y-z+1)$
$=(x-1)\{y(z-1)-(z-1)\}$
$=(x-1)(y-1)(z-1)$

16 $P(x)=(x-3)^2-4(x-3)+4$에서
$x-3=A$로 놓으면
$P(x)=A^2-4A+4=(A-2)^2$
$=\{(x-3)-2\}^2$
$=(x-5)^2$
∴ $P(x)\times P(x+10)=(x-5)^2\{(x+10)-5\}^2$
$=(x-5)^2(x+5)^2$
$=\{(x-5)(x+5)\}^2$
$=(x^2-25)^2$
따라서 $P(x)\times P(x+10)$의 인수가 아닌 것은 ③이다.

17 $x+y=X$로 놓으면
$(x+y)^2-6(x+y)-55=X^2-6X-55$
$=(X+5)(X-11)$
$=(x+y+5)(x+y-11)$
이 식의 값이 소수가 되어야 하므로
$x+y+5=1$ 또는 $x+y-11=1$
이때 x, y는 자연수이므로 $x+y-11=1$
∴ $x+y=12$
따라서 $x+y=12$이면 $x+y+5=17$은 소수이므로
$x+y=12$를 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(1, 11)$, $(2, 10)$, $(3, 9)$, ⋯, $(11, 1)$의 11개이다.

18 $x(x+2)(x+4)(x+6)+k=x(x+6)(x+2)(x+4)+k$
$=(x^2+6x)(x^2+6x+8)+k$
이때 $x^2+6x=X$로 놓으면
$X(X+8)+k=X^2+8X+k$
따라서 이 식이 완전제곱식이 되도록 하는 k의 값은
$k=\left(\dfrac{8}{2}\right)^2=4^2=16$

19 x, y는 연속하는 두 자연수이므로 $y=x+1$이라 하면
$X=\sqrt{x^2+y^2+x^2y^2}$
$=\sqrt{x^2+(x+1)^2+\{x(x+1)\}^2}$
$=\sqrt{2x^2+2x+1+(x^2+x)^2}$
$=\sqrt{(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1}$
이때 $x^2+x=A$로 놓으면
$X=\sqrt{A^2+2A+1}=\sqrt{(A+1)^2}$
$=\sqrt{(x^2+x+1)^2}=x^2+x+1$ (∵ x는 자연수)
$=x(x+1)+1$
따라서 연속하는 두 자연수의 곱 $x(x+1)$은 항상 짝수이므로 $X=x(x+1)+1$은 항상 홀수이다.
참고 $y=x-1\,(x>1)$이라 하면 $X=\underbrace{x(x-1)}_{\text{항상 짝수}}+1$이므로 X는 항상 홀수이다.

20 모든 경우의 수는 $6\times6=36$
$xy-2x-y+2=x(y-2)-(y-2)=(x-1)(y-2)$
이므로 $\sqrt{(x-1)(y-2)}$가 자연수가 되려면 $(x-1)(y-2)$가 (자연수)^2 꼴이어야 한다.
이때 $1\le x\le6$, $1\le y\le6$이므로 x, y의 순서쌍 (x, y)는 다음과 같다.
(i) $(x-1)(y-2)=1$일 때, $(2, 3)$
(ii) $(x-1)(y-2)=4$일 때, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(5, 3)$
(iii) $(x-1)(y-2)=9$일 때, $(4, 5)$
(iv) $(x-1)(y-2)=16$일 때, $(5, 6)$
따라서 (i)~(iv)에 의해 $\sqrt{xy-2x-y+2}$가 자연수가 되는 경우의 수는 $1+3+1+1=6$이므로
구하는 확률은 $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

21 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$(1-x^2)(1-y^2)-4xy$
$=1-x^2-y^2+x^2y^2-4xy$
$=(y^2-1)x^2-4yx-(y^2-1)$
$=(y+1)(y-1)x^2-4yx-(y+1)(y-1)$
$=\{(y-1)x-(y+1)\}\{(y+1)x+(y-1)\}$
$=(xy-x-y-1)(xy+x+y-1)$
따라서 $a=-1$, $b=-1$, $c=-1$, $d=1$, $e=-1$이므로
$a+b+c+d+e=-1+(-1)+(-1)+1+(-1)$
$=-3$

다른 풀이

$(1-x^2)(1-y^2)-4xy$
$=1-x^2-y^2+x^2y^2-4xy$
$=(1-2xy+x^2y^2)-(x^2+2xy+y^2)$
$=(xy-1)^2-(x+y)^2$
$=(xy-x-y-1)(xy+x+y-1)$

따라서 $a=-1,\ b=-1,\ c=-1,\ d=1,\ e=-1$이므로

$a+b+c+d+e=-1+(-1)+(-1)+1+(-1)$
$=-3$

22 $k^4+7k^2+16=k^4+8k^2+16-k^2$
$=(k^2+4)^2-k^2$
$=(k^2+k+4)(k^2-k+4)$

개념 더하기 다시 보기

x^4+ax^2+b 꼴의 인수분해
① $x^2=X$로 놓고 인수분해 공식을 이용한다.
② ①의 방법으로 인수분해되지 않으면 A^2-B^2 꼴로 변형하여 인수분해한다.

23 $30=x$로 놓으면

$30\times31\times32\times33+1$
$=x(x+1)(x+2)(x+3)+1$
$=x(x+3)(x+1)(x+2)+1$
$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$

이때 $x^2+3x=A$로 놓으면

$A(A+2)+1=A^2+2A+1=(A+1)^2$
$=(x^2+3x+1)^2$
$=(30^2+3\times30+1)^2$
$=991^2$

이때 $N>0$이므로 $N=991$

24 $x^2-y^2+2x+1=(x^2+2x+1)-y^2$
$=(x+1)^2-y^2$
$=(x+y+1)(x-y+1)$

즉, $(x+y+1)(x-y+1)=80$이고 $x+y=\sqrt{5}$이므로

$(\sqrt{5}+1)(x-y+1)=80$에서

$x-y+1=\dfrac{80}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{80(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$
$=20\sqrt{5}-20$

$\therefore\ x-y=20\sqrt{5}-21$

25 $2<\sqrt{7}<3$에서 $\sqrt{7}$의 정수 부분이 2이므로

$a=\sqrt{7}-2$

또 $3<2\sqrt{3}(=\sqrt{12})<4$에서

$1<5-2\sqrt{3}<2$이므로 $b=1$

$\therefore\ \dfrac{a^3-b^3+a^2b-ab^2}{a-b}=\dfrac{a^3+a^2b-b^3-ab^2}{a-b}$
$=\dfrac{a^2(a+b)-b^2(a+b)}{a-b}$
$=\dfrac{(a^2-b^2)(a+b)}{a-b}$
$=\dfrac{(a+b)^2(a-b)}{a-b}$
$=(a+b)^2\ (\because\ a-b\neq0)$
$=(\sqrt{7}-2+1)^2=(\sqrt{7}-1)^2$
$=8-2\sqrt{7}$

26 $2x+2y+xy=28 \quad \cdots$ ㉠
$x+y-xy=-4 \quad \cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $3x+3y=24$이므로

$3(x+y)=24 \qquad \therefore\ x+y=8$

$x+y=8$을 ㉡에 대입하면

$8-xy=-4 \qquad \therefore\ xy=12$

또 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=8^2-4\times12=16$이므로

$x-y=\pm4$

이때 $x>y$에서 $x-y>0$이므로 $x-y=4$

$\therefore\ \sqrt{6xy(x^2-y^2)}=\sqrt{6xy(x+y)(x-y)}$
$=\sqrt{6\times12\times8\times4}$
$=\sqrt{(2^4\times3)^2}=48$

27 주어진 식에서 분자를 x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$3x^2+4xy+y^2+6x+2y=3x^2+(4y+6)x+y^2+2y$
$=3x^2+(4y+6)x+y(y+2)$
$=(3x+y)(x+y+2)$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{(3x+y)(x+y+2)}{x+y+2}$
$=3x+y\ (\because\ x+y+2\neq0)$
$=3(\sqrt{5}-2)+(4-3\sqrt{5})$
$=3\sqrt{5}-6+4-3\sqrt{5}$
$=-2$

28 길잡이 먼저 색종이 A의 넓이를 구해 본다.

(색종이 A의 넓이)
=(색종이 C의 넓이)
 −(색종이 C에서 색종이 B와 겹치지 않은 부분의 넓이)
 −(색종이 B에서 색종이 A와 겹치지 않은 부분의 넓이)
$=(3x+4y)^2-(4x^2+11xy+5y^2)-(x^2+xy+2y^2)$
$=(9x^2+24xy+16y^2)-(4x^2+11xy+5y^2)$
$\quad-(x^2+xy+2y^2)$
$=4x^2+12xy+9y^2$
$=(2x+3y)^2$

따라서 색종이 A의 한 변의 길이는 $2x+3y$이다.

29 길잡이 22499=22500−1이므로 인수분해를 이용하여 복호 키를 구한다.

22499는 두 소수의 곱으로 나타내어지므로 두 소수의 곱이 22499가 되는 수를 찾으면

$22499=22500-1=150^2-1^2$
$=(150+1)(150-1)$
$=151\times149$

따라서 22499는 두 소수 149와 151의 곱으로 나타낼 수 있으므로 복호 키는 149와 151이다.

30 길잡이 n이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 점 A_n의 x좌표, y좌표가 각각 어떻게 변하는지 생각해 본다.

점 A_{n-1}에서 점 A_n으로 이동할 때, n이 홀수이면 x좌표가, n이 짝수이면 y좌표가 변하므로 원점에서 출발하여

1번째의 좌표는 $A_1(1^2, 0)$,
2번째의 좌표는 $A_2(1^2, 2^2)$,
3번째의 좌표는 $A_3(1^2-3^2, 2^2)$,
4번째의 좌표는 $A_4(1^2-3^2, 2^2-4^2)$, ⋯

점 A_{25}의 x좌표는

$1^2-3^2+5^2-7^2+\cdots+21^2-23^2+25^2$
$=(1-3)(1+3)+(5-7)(5+7)+\cdots+(21-23)(21+23)+25^2$
$=-2\times(1+3+5+7+\cdots+21+23)+25^2$
$=-2\times(24\times6)+625$
$=-288+625=337$

점 A_{25}의 y좌표는

$2^2-4^2+6^2-8^2+\cdots+22^2-24^2$
$=(2-4)(2+4)+(6-8)(6+8)+\cdots+(22-24)(22+24)$
$=-2\times(2+4+6+8+\cdots+22+24)$
$=-2\times(26\times6)=-312$

따라서 점 A_{25}의 좌표는 $A_{25}(337, -312)$이다.

P. 54~55 내신 1% 뛰어넘기

01	$2a$	**02**	210, 504, 990	**03**	13개	**04**	12
05	$k=7n+1$	**06**	$9-\sqrt{3}$	**07**	28	**08**	72

01 길잡이 연립방정식의 해를 구하여 주어진 식에 대입한다.

$\begin{cases} 9x-ay=81 & \cdots ㉠ \\ ax-y=a^3 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡×a를 하면

$(9-a^2)x=81-a^4$, $(9-a^2)x=(9+a^2)(9-a^2)$

이때 $0<a<3$이므로 $9-a^2\neq0$

$\therefore x=a^2+9 \quad \cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$a(a^2+9)-y=a^3$, $a^3+9a-y=a^3 \quad \therefore y=9a$

따라서 $\alpha=a^2+9$, $\beta=9a$이므로

$\sqrt{\alpha+\frac{2}{3}\beta}-\sqrt{\alpha-\frac{2}{3}\beta}$
$=\sqrt{a^2+9+\frac{2}{3}\times9a}-\sqrt{a^2+9-\frac{2}{3}\times9a}$
$=\sqrt{a^2+6a+9}-\sqrt{a^2-6a+9}$
$=\sqrt{(a+3)^2}-\sqrt{(a-3)^2}$
$=(a+3)-\{-(a-3)\}$ ($\because 0<a<3$)
$=2a$

02 길잡이 $8n^3-2n$을 인수분해한 후 인수들의 관계를 생각한다.

$8n^3-2n=2n(4n^2-1)$
$=(2n-1)\times2n\times(2n+1)$

즉, $8n^3-2n$은 연속하는 세 자연수의 곱의 꼴로 나타낼 수 있다.

$n=2$일 때, $3\times4\times5=60$
$n=3$일 때, $5\times6\times7=210$
$n=4$일 때, $7\times8\times9=504$
$n=5$일 때, $9\times10\times11=990$
$n=6$일 때, $11\times12\times13=1716$

따라서 세 자리의 자연수는 210, 504, 990이다.

03 길잡이 주어진 식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되기 위한 일차항의 계수와 상수항 사이의 관계를 알아본다.

주어진 다항식이 $(x+a)(x+b)$(a, b는 정수)로 인수분해된다고 하면 $x^2+(a+b)x+ab$에서 $a+b=-2$이고, $-200\le ab\le-1$이므로 이를 만족시키는 두 정수 a, b를 순서쌍 (a, b)로 나타내면

$(1, -3)$, $(2, -4)$, $(3, -5)$, ⋯, $(13, -15)$

이므로 구하는 다항식의 개수는 13개이다.

04 길잡이 $9xy-6x+\frac{x}{y}$에서 $\frac{x}{y}$를 묶어 낸 후, 인수분해 공식을 이용한다.

$9xy-6x+\frac{x}{y}=\frac{x}{y}(9y^2-6y+1)$
$=\frac{x}{y}(3y-1)^2$

즉, $\frac{x}{y}(3y-1)^2=242$에서 x, y는 자연수이고

$242=2\times11^2=242\times1^2$이므로

(i) $\frac{x}{y}=2$, $3y-1=11$일 때, $x=8$, $y=4$

(ii) $\frac{x}{y}=242$, $3y-1=1$일 때, $x=\frac{484}{3}$, $y=\frac{2}{3}$
그런데 x, y는 자연수이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 (i), (ii)에 의해 $x=8$, $y=4$이므로

$x+y=8+4=12$

05 길잡이 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$임을 이용하여 주어진 식을 먼저 간단히 한다.

$(x^{7n}-y^{7n})^2-(x^{7n}+y^{7n})^2$
$=(x^{7n}-y^{7n}+x^{7n}+y^{7n})(x^{7n}-y^{7n}-x^{7n}-y^{7n})$
$=2x^{7n}\times(-2y^{7n})$
$=-4\times(xy)^{7n}$

이때 $xy=(3\sqrt{2}-\sqrt{22})(3\sqrt{2}+\sqrt{22})=18-22=-4$이므로

$-4\times(xy)^{7n}=-4\times(-4)^{7n}$
$=4^{7n+1}$ ($\because$ n은 홀수)

$\therefore$ $k=7n+1$

06 길잡이 주어진 방정식을 연립방정식으로 나타낸 후 $x+y$, x^2+y^2의 값을 구한다.

$x^2+\sqrt{3}y=y^2+\sqrt{3}x=2\sqrt{3}$에서

$\begin{cases} x^2=2\sqrt{3}-\sqrt{3}y & \cdots ㉠ \\ y^2=2\sqrt{3}-\sqrt{3}x & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면

$x^2-y^2=\sqrt{3}x-\sqrt{3}y$
$(x+y)(x-y)=\sqrt{3}(x-y)$

이때 $x\neq y$, 즉 $x-y\neq0$이므로 $x+y=\sqrt{3}$

㉠+㉡을 하면

$x^2+y^2=4\sqrt{3}-\sqrt{3}(x+y)$
$=4\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}-3$

$\therefore$ $x^3+x^2y+y^3+xy^2-xy$
$=x^2(x+y)+y^2(x+y)-xy$
$=(x^2+y^2)(x+y)-xy$
$=(4\sqrt{3}-3)\times\sqrt{3}-(3-2\sqrt{3})$
$=12-3\sqrt{3}-3+2\sqrt{3}$
$=9-\sqrt{3}$

07 길잡이 주어진 식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

주어진 식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$
$=x(yz+y+z+1)+(yz+y+z+1)$
$=(x+1)(yz+y+z+1)$
$=(x+1)\{y(z+1)+(z+1)\}$
$=(x+1)(y+1)(z+1)$

$\therefore$ $(x+1)(y+1)(z+1)=1001$
$=7\times11\times13$

이때 x, y, z가 $x<y<z$인 양의 정수이므로

$x+1=7$, $y+1=11$, $z+1=13$

$\therefore$ $x=6$, $y=10$, $z=12$

$\therefore$ $x+y+z=6+10+12=28$

08 길잡이 $x^2-xy+y^2=6$의 좌변을 완전제곱식 $(x-y)^2$으로 변형한 후, 주어진 식에 대입한다.

$x^2-xy+y^2=6$에서 $x^2-2xy+y^2=6-xy$이므로

$(x-y)^2=6-xy$

$\therefore$ $x^4+y^4+(x-y)^4$
$=x^4+y^4+(6-xy)^2$
$=x^4+y^4+x^2y^2-12xy+36$
$=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2-12xy+36$
$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2-12xy+36$
$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)-12xy+36$
$=6(x^2+xy+y^2)-12xy+36$
$=6(x^2-xy+y^2)+36$
$=6\times6+36=72$

개념 더하기 다시 보기

$a^4+a^2b^2+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$
$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$
$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

P. 56~57 3~4 서술형 완성하기

[과정은 풀이 참조]

1 31 **2** 8
3 (1) 3 (2) $4-2\sqrt{3}$ (3) $x=-16$, $y=10$ **4** $3x-7$
5 $\frac{10}{3}$ **6** -6 **7** $29-3\sqrt{11}$ **8** 228

1 $(4+2)(4^2+2^2)(4^4+2^4)(4^8+2^8)+2^{15}$

$=\frac{1}{2}(4-2)(4+2)(4^2+2^2)(4^4+2^4)(4^8+2^8)+2^{15}$ $\cdots$ (i)

$=\frac{1}{2}(4^2-2^2)(4^2+2^2)(4^4+2^4)(4^8+2^8)+2^{15}$

$=\frac{1}{2}(4^4-2^4)(4^4+2^4)(4^8+2^8)+2^{15}$

$=\frac{1}{2}(4^8-2^8)(4^8+2^8)+2^{15}$

$=\frac{1}{2}(4^{16}-2^{16})+2^{15}$

$=\frac{1}{2}(2^{32}-2^{16})+2^{15}$

$=2^{31}-2^{15}+2^{15}$

$=2^{31}$

따라서 $2^{31}=2^x$이므로 $x=31$ $\cdots$ (ii)

채점 기준	비율
(i) 곱셈 공식을 이용할 수 있도록 좌변을 변형하기	30 %
(ii) 곱셈 공식을 이용하여 x의 값 구하기	70 %

2 $(5-a\sqrt{2})+(b+3\sqrt{2})=5+b+(3-a)\sqrt{2}$

이 식의 값이 유리수가 되어야 하므로

$3-a=0 \qquad \therefore a=3$ … (i)

$(5-a\sqrt{2})(b+3\sqrt{2})=(5-3\sqrt{2})(b+3\sqrt{2})$

$=5b-18+(15-3b)\sqrt{2}$

이 식의 값이 유리수가 되어야 하므로

$15-3b=0 \qquad \therefore b=5$ … (ii)

$\therefore a+b=3+5=8$ … (iii)

채점 기준	비율
(i) 두 수의 합이 유리수가 되도록 하는 a의 값 구하기	40 %
(ii) 두 수의 곱이 유리수가 되도록 하는 b의 값 구하기	40 %
(iii) $a+b$의 값 구하기	20 %

3 (1) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{6+4\sqrt{3}+2}{6-2}$

$=\dfrac{8+4\sqrt{3}}{4}$

$=2+\sqrt{3}$

$1<\sqrt{3}<2$에서 $3<2+\sqrt{3}<4$이므로

$A=3$ … (i)

(2) $(\sqrt{3}-1)^2=3-2\sqrt{3}+1$

$=4-2\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}=\sqrt{12}$이고, $3<\sqrt{12}<4$에서 $0<4-\sqrt{12}<1$이므로

$4-2\sqrt{3}$의 정수 부분은 0이고, 소수 부분은

$B=(4-2\sqrt{3})-0=4-2\sqrt{3}$ … (ii)

(3) $B(A-B)=(4-2\sqrt{3})\{3-(4-2\sqrt{3})\}$

$=(4-2\sqrt{3})(-1+2\sqrt{3})$

$=-4+8\sqrt{3}+2\sqrt{3}-12$

$=-16+10\sqrt{3}$

$\therefore x=-16,\ y=10$ … (iii)

채점 기준	비율
(i) A의 값 구하기	30 %
(ii) B의 값 구하기	30 %
(iii) x, y의 값 구하기	40 %

4 $\triangle$ABC의 둘레의 길이는 $2(4x+5)$이므로

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=2(4x+5)$

이때 $\triangle$ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times r\times\overline{AB}+\dfrac{1}{2}\times r\times\overline{BC}+\dfrac{1}{2}\times r\times\overline{CA}$

$=\dfrac{1}{2}\times r\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$

$=\dfrac{1}{2}\times r\times 2(4x+5)$

$=(4x+5)r$ … (i)

이때 $\triangle$ABC의 넓이는

$12x^2-13x-35=(3x-7)(4x+5)$이므로 … (ii)

$(4x+5)r=(3x-7)(4x+5)$에서

$r=3x-7$

따라서 $\triangle$ABC의 내접원의 반지름의 길이는 $3x-7$이다. … (iii)

채점 기준	비율
(i) 내접원의 반지름의 길이를 이용하여 $\triangle$ABC의 넓이를 구하는 식 세우기	40 %
(ii) $12x^2-13x-35$를 인수분해하기	40 %
(iii) $\triangle$ABC의 내접원의 반지름의 길이 구하기	20 %

5 $a(a-1)-b(b+1)=a^2-a-b^2-b$

$=a^2-b^2-a-b$

$=(a+b)(a-b)-(a+b)$

$=(a+b)(a-b-1)$ … (i)

이때 $a+b=-3$이므로 $-3(a-b-1)=-7$에서

$a-b-1=\dfrac{7}{3}$ … (ii)

$\therefore a-b=\dfrac{10}{3}$ … (iii)

채점 기준	비율
(i) $a(a-1)-b(b+1)$을 인수분해하기	50 %
(ii) $a-b-1$의 값 구하기	30 %
(iii) $a-b$의 값 구하기	20 %

6 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$x^2+4xy+3y^2-10x-14y+16$

$=x^2+(4y-10)x+3y^2-14y+16$ … (i)

$=x^2+(4y-10)x+(3y-8)(y-2)$

$=(x+3y-8)(x+y-2)$ … (ii)

따라서 $a=3,\ b=-8,\ c=1,\ d=-2$ 또는

$a=1,\ b=-2,\ c=3,\ d=-8$이므로 … (iii)

$a+b+c+d=3+(-8)+1+(-2)$

$=-6$ … (iv)

채점 기준	비율
(i) 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하기	30 %
(ii) 주어진 식을 인수분해하기	30 %
(iii) a, b, c, d의 값 구하기	20 %
(iv) $a+b+c+d$의 값 구하기	20 %

7 $3<\sqrt{11}<4$이므로

$6<3+\sqrt{11}<7 \qquad \therefore \langle x\rangle=6$ … (i)

$2x=6+2\sqrt{11}=6+\sqrt{44}$이고 $6<\sqrt{44}<7$이므로

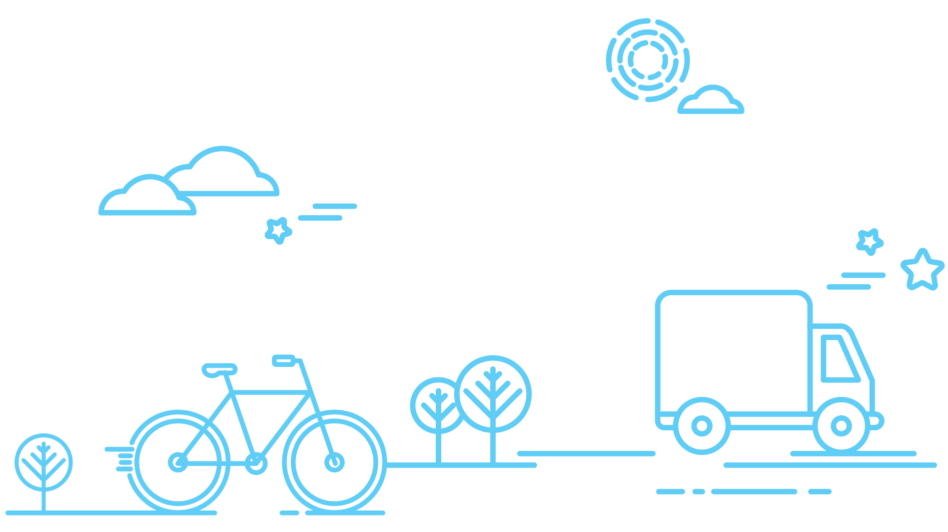
$12<6+\sqrt{44}<13 \qquad \therefore \langle 2x\rangle=12$ … (ii)

$$\therefore \frac{x}{x-\langle x\rangle}+\frac{x-\langle 2x\rangle}{x}$$
$$=\frac{3+\sqrt{11}}{(3+\sqrt{11})-6}+\frac{(3+\sqrt{11})-12}{3+\sqrt{11}}$$
$$=\frac{\sqrt{11}+3}{\sqrt{11}-3}+\frac{\sqrt{11}-9}{\sqrt{11}+3}$$
$$=\frac{(\sqrt{11}+3)^2+(\sqrt{11}-9)(\sqrt{11}-3)}{(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)}$$
$$=\frac{(20+6\sqrt{11})+(38-12\sqrt{11})}{2}$$
$$=\frac{58-6\sqrt{11}}{2}=29-3\sqrt{11} \qquad \cdots \text{(iii)}$$

채점 기준	비율
(i) $\langle x\rangle$의 값 구하기	30 %
(ii) $\langle 2x\rangle$의 값 구하기	30 %
(iii) 주어진 식의 값 구하기	40 %

8
$$\frac{215^2-225}{230}+\frac{3^{33}+3^{30}-3^3-1}{3^{30}-1}$$
$$=\frac{215^2-15^2}{215+15}+\frac{3^{30}(3^3+1)-(3^3+1)}{3^{30}-1}$$
$$=\frac{(215+15)(215-15)}{215+15}+\frac{(3^3+1)(3^{30}-1)}{3^{30}-1} \qquad \cdots \text{(i)}$$
$$=215-15+3^3+1$$
$$=228 \qquad \cdots \text{(ii)}$$

채점 기준	비율
(i) 인수분해 공식을 이용하여 주어진 식 변형하기	50 %
(ii) 답 구하기	50 %



5. 이차방정식

P. 60~65 **개념+대표 문제 확인하기**

1 ㄱ, ㄷ	**2** ③	**3** $x=3$	**4** $\frac{1}{3}$	**5** -11
6 4	**7** ③	**8** 8	**9** $a=3$, $x=1$	
10 ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㅂ		**11** 2	**12** $x=-6$	
13 9	**14** ③	**15** $a=1$, $b=\frac{5}{4}$		**16** ④
17 24	**18** ⑤	**19** -1	**20** $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$	
21 $x=9-3\sqrt{10}$		**22** 140		
23 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{4}$			**24** 2	**25** 10
26 $a=3$, $b=-6$		**27** ①	**28** 10	**29** 7
30 ④	**31** 21	**32** 15명	**33** 4초 후	
34 13초 후		**35** 2		

1 ㄱ. $x^2+5x-1=0$ (이차방정식)
ㄴ. 등식이 아니므로 이차방정식이 아니다.
ㄷ. $x^2+x=3$　　$\therefore x^2+x-3=0$ (이차방정식)
ㄹ. $x^2+2=x^2+3x$　　$\therefore -3x+2=0$ (일차방정식)
ㅁ. $4x^2-x=4x^2-4x+1$　　$\therefore 3x-1=0$ (일차방정식)
ㅂ. 분모에 미지수가 있으므로 이차방정식이 아니다.
따라서 이차방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

2 $(a+1)x^2-x=(4x-1)(x+3)$에서
$(a+1)x^2-x=4x^2+11x-3$
$\therefore (a-3)x^2-12x+3=0$
이 식이 x에 대한 이차방정식이려면 이차항의 계수가 0이 아니어야 하므로
$a-3\neq 0$에서 $a\neq 3$
따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

3 $-2(x-11)\geq 5x-8$에서 $-2x+22\geq 5x-8$
$-7x\geq -30$　　$\therefore x\leq \frac{30}{7}(=4.28\cdots)$
이를 만족시키는 자연수 x의 값은 1, 2, 3, 4이므로
$x^2-9x+18=0$에 이 값들을 각각 대입하면
$x=1$일 때, $1^2-9\times 1+18=10\neq 0$
$x=2$일 때, $2^2-9\times 2+18=4\neq 0$
$x=3$일 때, $3^2-9\times 3+18=0$
$x=4$일 때, $4^2-9\times 4+18=-2\neq 0$
따라서 $x^2-9x+18=0$의 해는 $x=3$이다.

4 $5x^2-3(a-4)x+2=0$에 $x=-2$를 대입하면
$5\times(-2)^2+6(a-4)+2=0$, $20+6a-24+2=0$
$6a=2$　　$\therefore a=\frac{1}{3}$

5 $x^2+3x+1=0$에 $x=p$를 대입하면
$p^2+3p+1=0$에서 $p^2+3p=-1$
$2x^2-3x-5=0$에 $x=q$를 대입하면
$2q^2-3q-5=0$에서 $2q^2-3q=5$
$\therefore p^2+3p-4q^2+6q=(p^2+3p)-2(2q^2-3q)$
$=-1-2\times 5=-11$

6 $x^2-4x+1=0$에 $x=a$를 대입하면
$a^2-4a+1=0$　　$\cdots$ ㉠
이때 $a=0$이면 등식이 성립하지 않으므로 $a\neq 0$
㉠의 양변을 a로 나누면
$a-4+\frac{1}{a}=0$　　$\therefore a+\frac{1}{a}=4$

7 $(x+3)(x-1)=-2-2x^2$에서
$x^2+2x-3=-2-2x^2$, $3x^2+2x-1=0$
$(x+1)(3x-1)=0$　　$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$
이때 $a>b$이므로 $a=\frac{1}{3}$, $b=-1$
$\therefore 3a+b=3\times\frac{1}{3}+(-1)=0$

8 $x^2-3x-4a=8$에 $x=a$를 대입하면
$a^2-3a-4a=8$, $a^2-7a-8=0$
$(a+1)(a-8)=0$　　$\therefore a=-1$ 또는 $a=8$
이때 $a>0$이므로 $a=8$

9 $x^2+ax-2(a-1)=0$에 $x=-4$를 대입하면
$(-4)^2-4a-2(a-1)=0$, $16-4a-2a+2=0$
$-6a=-18$　　$\therefore a=3$
따라서 주어진 이차방정식은 $x^2+3x-4=0$이므로
$(x+4)(x-1)=0$　　$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$
따라서 다른 한 근은 $x=1$이다.

10 ㄱ. $2x^2-2x-4=0$, $2(x^2-x-2)=0$
$2(x+1)(x-2)=0$　　$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
ㄴ. $x^2-6x+9=0$, $(x-3)^2=0$　　$\therefore x=3$
ㄷ. $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=0$, $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=0$　　$\therefore x=\frac{1}{3}$
ㄹ. $x^2-10x+24=0$, $(x-4)(x-6)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=6$
ㅁ. $3(x^2+4x+4)=0$, $3(x+2)^2=0$　　$\therefore x=-2$
ㅂ. $x^2-8x-20=-36$, $x^2-8x+16=0$
$(x-4)^2=0$　　$\therefore x=4$
따라서 중근을 갖는 이차방정식은 ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㅂ이다.

11 $x^2+2ax-4a+12=0$이 중근을 가지려면 (완전제곱식)$=0$ 꼴로 나타낼 수 있어야 하므로
$-4a+12=\left(\frac{2a}{2}\right)^2$, $a^2+4a-12=0$

$(a+6)(a-2)=0 \qquad \therefore a=-6$ 또는 $a=2$
이때 $a>0$이므로 $a=2$

12 $5x(x+7)=3(x-4)$에서
$5x^2+35x=3x-12,\ 5x^2+32x+12=0$
$(x+6)(5x+2)=0 \qquad \therefore x=-6$ 또는 $x=-\frac{2}{5}$
또 $x(2x-11)+6=(x-6)^2$에서
$2x^2-11x+6=x^2-12x+36,\ x^2+x-30=0$
$(x+6)(x-5)=0 \qquad \therefore x=-6$ 또는 $x=5$
따라서 두 이차방정식의 공통인 근은 $x=-6$이다.

13 $3(x-2)^2-21=0$에서 $(x-2)^2=7$
$x-2=\pm\sqrt{7} \qquad \therefore x=2\pm\sqrt{7}$
따라서 $a=2,\ b=7$이므로
$a+b=2+7=9$

14 $(x-p)^2=q-3$에서 $q-3>0$이면 서로 다른 두 근을 갖고, $q-3=0$이면 중근을 갖고, $q-3<0$이면 근을 갖지 않는다.
따라서 주어진 이차방정식이 해를 가질 조건은 $q-3\geq 0$, 즉, $q\geq 3$이다.

15 $4x^2+8x-1=0$에서 $x^2+2x-\frac{1}{4}=0$
$x^2+2x=\frac{1}{4},\ x^2+2x+1=\frac{1}{4}+1 \qquad \therefore (x+1)^2=\frac{5}{4}$
$\therefore a=1,\ b=\frac{5}{4}$

16 ① $5x^2=3,\ x^2=\frac{3}{5} \qquad \therefore x=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}=\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$
② $(x+3)^2=2,\ x+3=\pm\sqrt{2} \qquad \therefore x=-3\pm\sqrt{2}$
③ $6x^2+5x-4=0,\ (3x+4)(2x-1)=0$
$\therefore x=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$
④ $x^2-2x-\frac{2}{3}=0,\ x^2-2x=\frac{2}{3},\ x^2-2x+1=\frac{2}{3}+1$
$(x-1)^2=\frac{5}{3},\ x-1=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$
$\therefore x=1\pm\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{3\pm\sqrt{15}}{3}$
⑤ $9x^2-6x+1=0,\ (3x-1)^2=0 \qquad \therefore x=\frac{1}{3}$
따라서 해를 바르게 구한 것은 ④이다.

17 $x^2+14x=1-2k$에서 $x^2+14x+49=1-2k+49$
$(x+7)^2=-2k+50,\ x+7=\pm\sqrt{-2k+50}$
$\therefore x=-7\pm\sqrt{-2k+50}$
따라서 $-2k+50=2$이므로 $-2k=-48 \qquad \therefore k=24$
다른 풀이
$x=-7\pm\sqrt{2}$에서 $x+7=\pm\sqrt{2}$
양변을 제곱하면 $(x+7)^2=2,\ x^2+14x=-47$
따라서 $1-2k=-47$이므로 $-2k=-48 \qquad \therefore k=24$

18 ① $x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-4)}}{2\times1}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$
② $x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-3)}}{2\times1}=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$
③ $x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-1\times2}}{1}=-2\pm\sqrt{2}$
④ $x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-1\times4}}{1}=-3\pm\sqrt{5}$
⑤ $x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-1\times(-3)}}{1}=4\pm\sqrt{19}$
따라서 바르게 푼 것은 ⑤이다.

19 $x^2+3x-a=0$에서
$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-a)}}{2\times1}=\frac{-3\pm\sqrt{9+4a}}{2}$이므로
$-3=b,\ 9+4a=17$에서
$a=2,\ b=-3$
$\therefore a+b=2+(-3)=-1$

20 $x^2-x+3k=0$에 $x=k$를 대입하면 $k^2-k+3k=0$
$k^2+2k=0,\ k(k+2)=0 \qquad \therefore k=0$ 또는 $k=-2$
이때 $k\neq0$이므로 $k=-2$
따라서 이차방정식 $4x^2+2x-1=0$의 해는
$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times(-1)}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

21 주어진 이차방정식의 양변에 6을 곱하면
$3(x+2)^2-2x=(2x-3)(2x-1)$
$3(x^2+4x+4)-2x=4x^2-8x+3$
$3x^2+12x+12-2x=4x^2-8x+3$
$x^2-18x-9=0$
$\therefore x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-1\times(-9)}}{1}$
$=9\pm\sqrt{90}=9\pm3\sqrt{10}$
따라서 음수인 해는 $x=9-3\sqrt{10}$이다.

22 주어진 이차방정식의 양변에 10을 곱하면
$5x^2-3x=2x+10x^2-6,\ 5x^2+5x-6=0$
$\therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times5\times(-6)}}{2\times5}=\frac{-5\pm\sqrt{145}}{10}$
따라서 $p=-5,\ q=145$이므로
$p+q=-5+145=140$

23 $x-\frac{1}{2}=A$로 놓으면
$4A^2-1=-3A,\ 4A^2+3A-1=0$
$(A+1)(4A-1)=0 \qquad \therefore A=-1$ 또는 $A=\frac{1}{4}$
즉, $x-\frac{1}{2}=-1$ 또는 $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

24 $x^2-2mx+2m+3=0$이 중근을 가지려면
$(-2m)^2-4\times1\times(2m+3)=0$이어야 하므로
$4m^2-8m-12=0,\ m^2-2m-3=0$
$(m+1)(m-3)=0\qquad\therefore m=-1$ 또는 $m=3$
따라서 모든 m의 값의 합은 $-1+3=2$

다른 풀이

$x^2-2mx+2m+3=0$이 중근을 가지려면
(완전제곱식)$=0$ 꼴로 나타낼 수 있어야 하므로
$2m+3=\left(\frac{-2m}{2}\right)^2,\ m^2-2m-3=0$
$(m+1)(m-3)=0\qquad\therefore m=-1$ 또는 $m=3$
따라서 모든 m의 값의 합은 $-1+3=2$

25 $2x^2+8x+k-3=0$은 서로 다른 두 근을 가지므로
$8^2-4\times2\times(k-3)>0$
$8k<88\qquad\therefore k<11\qquad\cdots$ ㉠
또 $x^2-4x+k-5=0$은 근이 없으므로
$(-4)^2-4\times1\times(k-5)<0$
$4k>36\qquad\therefore k>9\qquad\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 자연수 k의 값은 10이다.

26 두 근이 -3, 5이고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은
$a(x+3)(x-5)=0,\ a(x^2-2x-15)=0$
$ax^2-2ax-15a=0$
이 식이 $ax^2+bx-45=0$과 같으므로
$-2a=b,\ -15a=-45\qquad\therefore a=3,\ b=-6$

27 중근이 $x=2$이고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은
$3(x-2)^2=0\qquad\therefore 3x^2-12x+12=0\qquad\cdots$ ㉠
$3(x-1)(x-a)=b$에서
$3x^2-3(a+1)x+3a-b=0\qquad\cdots$ ㉡
㉠과 ㉡이 같으므로
$-3(a+1)=-12,\ 3a-b=12$에서 $a=3,\ b=-3$
$\therefore a+b=3+(-3)=0$

28 두 근의 차가 4이므로 두 근을 α, $\alpha+4$라 하면
$2(x-\alpha)\{x-(\alpha+4)\}=0$
$2x^2-2(2\alpha+4)x+2\alpha(\alpha+4)=0$
이 식이 $2x^2+12x+k=0$과 같으므로
$-2(2\alpha+4)=12,\ 4\alpha=-20\qquad\therefore \alpha=-5$
$\therefore k=2\alpha(\alpha+4)=2\times(-5)\times(-5+4)=10$

다른 풀이

$2x^2+12x+k=0$에서 일차항의 계수가 짝수이므로
$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-2k}}{2}$
이때 두 근의 차가 4이므로
$\frac{-6+\sqrt{36-2k}}{2}-\frac{-6-\sqrt{36-2k}}{2}=4,\ \sqrt{36-2k}=4$
$36-2k=16,\ 2k=20\qquad\therefore k=10$

29 $x^2-10x+k=0$에서 x의 계수와 상수항이 모두 유리수이고
한 근이 $x=5-3\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $x=5+3\sqrt{2}$이다.
즉, $\{x-(5-3\sqrt{2})\}\{x-(5+3\sqrt{2})\}=0$에서
$x^2-10x+7=0$
이 식이 $x^2-10x+k=0$과 같으므로 $k=7$

다른 풀이

$x^2-10x+k=0$에 $x=5-3\sqrt{2}$를 대입하면
$(5-3\sqrt{2})^2-10(5-3\sqrt{2})+k=0$
$43-30\sqrt{2}-50+30\sqrt{2}+k=0\qquad\therefore k=7$

개념 더하기 자세히 보기

계수가 유리수인 이차방정식의 근
이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq0)$에서 a, b, c가 유리수일 때
$x=\frac{-b}{2a}+\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$ 또는 $x=\frac{-b}{2a}-\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$
유리수 유리수
⇨ 한 근이 $x=p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $x=p-q\sqrt{m}$이다.
(단, p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수)

30 $\frac{n(n-3)}{2}=44$에서 $n(n-3)=88,\ n^2-3n-88=0$
$(n+8)(n-11)=0\qquad\therefore n=-8$ 또는 $n=11$
이때 $n>3$이므로 $n=11$
따라서 구하는 다각형은 십일각형이다.

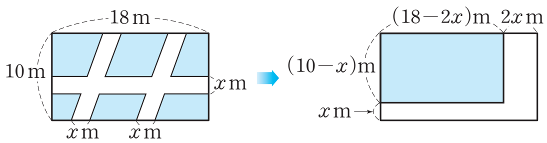
31 연속하는 세 홀수를 $x-2$, x, $x+2$(x는 2보다 큰 홀수)라 하면 $(x-2)^2+x^2+(x+2)^2=155$에서
$3x^2=147,\ x^2=49\qquad\therefore x=-7$ 또는 $x=7$
이때 $x>2$이므로 $x=7$
따라서 세 홀수는 5, 7, 9이므로 그 합은 $5+7+9=21$

32 학생 수를 x명이라 하면 한 사람이 받는 연필의 수는
$(x-3)$자루이므로
$x(x-3)=180$에서 $x^2-3x-180=0$
$(x+12)(x-15)=0\qquad\therefore x=-12$ 또는 $x=15$
이때 x는 자연수이므로 $x=15$
따라서 학생 수는 15명이다.

33 $50+70t-5t^2=250$에서 $5t^2-70t+200=0$
$t^2-14t+40=0,\ (t-4)(t-10)=0$
$\therefore t=4$ 또는 $t=10$
따라서 물체가 지면으로부터 250 m 높이의 지점을 처음으로 지나는 것은 쏘아 올린 지 4초 후이다.

34 x초 후에 처음 직사각형과 넓이가 같아진다고 하면
x초 후의 가로의 길이는 $(20-x)$ cm,
세로의 길이는 $(14+2x)$ cm이므로
$(20-x)(14+2x)=280,\ 280+40x-14x-2x^2=280$
$x^2-13x=0,\ x(x-13)=0\qquad\therefore x=0$ 또는 $x=13$
이때 $0<x<20$이므로 $x=13$
따라서 처음 직사각형과 넓이가 같아지는 것은 13초 후이다.

35



위의 그림에서 도로를 제외한 땅의 넓이가 112 m^2이므로

$(18-2x)(10-x)=112$에서

$2x^2-38x+180=112$

$x^2-19x+34=0$

$(x-2)(x-17)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=17$

이때 $0<2x<18$에서 $0<x<9$이므로

$x=2$

P. 66~74 **내신 5% 따라잡기**

1 ③ **2** 1 **3** ① **4** ② **5** $\frac{1}{2}$

6 (3, 4) **7** $x=1$ 또는 $x=6$ **8** $-\frac{3}{5}$ **9** 6개

10 $-3\sqrt{3}$ **11** $x=-\frac{5}{8}$ **12** ④ **13** -1

14 1 **15** ① **16** ② **17** ⑤ **18** -5

19 1 **20** $\frac{8}{3}$ **21** $\frac{1}{8}$ **22** -1 **23** 3개

24 1, 2, 3 **25** $\frac{10+2\sqrt{37}}{3}$ **26** ②

27 $x=\frac{3\pm\sqrt{57}}{2}$ **28** $-\frac{3}{2}$ **29** ⑤ **30** ⑤

31 $c=2a-b$ **32** ⑤ **33** $a<\frac{9}{4}$

34 84 **35** 10 **36** ③ **37** 6 **38** 10단계

39 9 **40** 83 **41** 3초 **42** ③

43 14일, 21일, 28일 **44** 13 cm

45 P(8, 5), P(10, 4) **46** 3초 후

47 2 **48** $\frac{-5+5\sqrt{5}}{2}$ cm **49** ③ **50** $\frac{3}{200}$

51 4 **52** 19개

1 $a^2x^2+ax+2=(a+2)x^2-1$에서

$(a^2-a-2)x^2+ax+3=0$

이 식이 x에 대한 이차방정식이 되려면 이차항의 계수가 0이 아니어야 하므로

$a^2-a-2\neq0,\ (a+1)(a-2)\neq0$

$\therefore a\neq-1,\ a\neq2$

2 $kx^2+ax+(k+2)b=0$에 $x=1$을 대입하면

$k+a+(k+2)b=0,\ (1+b)k+a+2b=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$1+b=0,\ a+2b=0 \qquad \therefore a=2,\ b=-1$

$\therefore a+b=2+(-1)=1$

3 $(a+c-2)x^2+(b-5)x-c-3=0$에 $x=-1$을 대입하면

$a+c-2-b+5-c-3=0,\ a-b=0 \qquad \therefore a=b$

따라서 a, b, c를 세 변으로 하는 삼각형은 $a=b$인 이등변 삼각형이다.

4 $2x^2-6x-3=0$에 $x=\alpha$를 대입하면

$2\alpha^2-6\alpha-3=0 \qquad \cdots$ ㉠

이때 $\alpha=0$이면 등식이 성립하지 않으므로 $\alpha\neq0$

㉠의 양변을 α로 나누면

$2\alpha-6-\frac{3}{\alpha}=0,\ 2\alpha-\frac{3}{\alpha}=6$

$\therefore 4\alpha^2+\frac{9}{\alpha^2}=\left(2\alpha-\frac{3}{\alpha}\right)^2+2\times2\alpha\times\frac{3}{\alpha}$

$=6^2+12=48$

5 $4x^2-(2m+1)x-4=0$에 $x=p$를 대입하면

$4p^2-(2m+1)p-4=0 \qquad \cdots$ ㉠

이때 $p=0$이면 등식이 성립하지 않으므로 $p\neq0$

㉠의 양변을 p로 나누면 $4p-(2m+1)-\frac{4}{p}=0$

$4\left(p-\frac{1}{p}\right)=2m+1 \qquad \therefore p-\frac{1}{p}=\frac{2m+1}{4}$

따라서 $\frac{2m+1}{4}=m$이므로 $2m+1=4m$

$2m=1 \qquad \therefore m=\frac{1}{2}$

6 $x^2+ax-b=0$에 $x=a-\sqrt{b}$를 대입하면

$(a-\sqrt{b})^2+a(a-\sqrt{b})-b=0,\ 2a^2=3a\sqrt{b}$

$a\neq0$이므로 양변을 $2a$로 나누면 $a=\frac{3}{2}\sqrt{b}$

이때 a는 자연수이므로 $\frac{3}{2}\sqrt{b}$도 자연수이어야 한다.

즉, b는 $4\times(\text{자연수})^2$ 꼴이어야 하므로

$b=4,\ 16,\ 36,\ \cdots$

이때 b는 10보다 작은 자연수이므로 $b=4$

따라서 $a=\frac{3}{2}\sqrt{b}=\frac{3}{2}\sqrt{4}=3$이므로

구하는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(3,\ 4)$이다.

7 일차항의 계수와 상수항을 바꾸면

$x^2+(k-1)x-k=0$이고 이 식에 $x=-7$을 대입하면

$(-7)^2-7(k-1)-k=0$

$49-7k+7-k=0,\ -8k=-56 \qquad \therefore k=7$

따라서 처음 이차방정식은 $x^2-7x+6=0$이므로

$(x-1)(x-6)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=6$

8 직선 $2ax+3y=3$이 점 $(a-1, a^2)$을 지나므로
$2a(a-1)+3a^2=3$, $5a^2-2a-3=0$
$(5a+3)(a-1)=0$
$\therefore a=-\frac{3}{5}$ 또는 $a=1$ $\cdots$ ㉠
또 이 직선이 제4사분면을 지나지 않으므로
$2ax+3y=3$, 즉 $y=-\frac{2}{3}ax+1$에서
(기울기)$=-\frac{2}{3}a>0$ $\therefore a<0$ $\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 $a=-\frac{3}{5}$

9 $\langle x\rangle^2+2\langle x\rangle-8=0$에서
$(\langle x\rangle+4)(\langle x\rangle-2)=0$
$\therefore \langle x\rangle=-4$ 또는 $\langle x\rangle=2$
이때 $\langle x\rangle$는 자연수이므로 $\langle x\rangle=2$
따라서 약수가 2개인 자연수는 소수이므로 15 이하의 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13의 6개이다.

10 $x^2-|x|-2=x+1$에서
(i) $x\geq 0$일 때, $|x|=x$이므로
$x^2-x-2=x+1$, $x^2-2x-3=0$
$(x+1)(x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
이때 $x\geq 0$이므로 $x=3$
(ii) $x<0$일 때, $|x|=-x$이므로
$x^2+x-2=x+1$, $x^2=3$ $\therefore x=\pm\sqrt{3}$
이때 $x<0$이므로 $x=-\sqrt{3}$
따라서 (i), (ii)에 의해 $x=3$ 또는 $x=-\sqrt{3}$이므로
모든 근의 곱은 $3\times(-\sqrt{3})=-3\sqrt{3}$

11 $(a-1)x^2-a(a+4)x-10=0$에 $x=-2$를 대입하면
$4(a-1)+2a(a+4)-10=0$
$2a^2+12a-14=0$, $a^2+6a-7=0$
$(a+7)(a-1)=0$ $\therefore a=-7$ 또는 $a=1$
이때 $\underbrace{a-1}_{\text{이차항의 계수}}\neq 0$에서 $a\neq 1$이므로 $a=-7$
즉, 주어진 이차방정식은 $8x^2+21x+10=0$이므로
$(x+2)(8x+5)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=-\frac{5}{8}$
따라서 구하는 다른 한 근은 $x=-\frac{5}{8}$이다.

12 $(a^2-4)x^2-(4-a)x-2(a-1)=0$에 $x=1$을 대입하면
$a^2-4-(4-a)-2(a-1)=0$, $a^2-a-6=0$
$(a+2)(a-3)=0$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=3$
이때 $\underbrace{a^2-4}_{\text{이차항의 계수}}\neq 0$에서 $a\neq -2$, $a\neq 2$이므로 $a=3$
따라서 약수가 3개인 자연수는 $(\text{소수})^2$ 꼴인 수이고, 이 중에서 50보다 작은 수는 4, 9, 25, 49이므로 그 합은
$4+9+25+49=87$

13 $(x+3)*(x-2)$
$=(x+3)(x-2)-(x+3)+2(x-2)+3$
$=x^2+2x-10$
즉, $x^2+2x-10=-7$이므로 $x^2+2x-3=0$
$(x+3)(x-1)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=1$
이때 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=-3$, $\beta=1$
따라서 $3\alpha+8\beta=3\times(-3)+8\times 1=-1$이므로
$(3\alpha+8\beta)+(3\alpha+8\beta)^2+\cdots+(3\alpha+8\beta)^{2021}$
$=(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^{2020}+(-1)^{2021}$
$=\underline{(-1)+1}+\underline{(-1)+1}+\cdots+\underline{(-1)+1}+(-1)$
$=-1$

14 $4x^2-8ax+a=0$에서 $x^2-2ax+\frac{a}{4}=0$
이 이차방정식이 중근을 가지려면 (완전제곱식)$=0$ 꼴로 나타낼 수 있어야 하므로
$\frac{a}{4}=\left(-\frac{2a}{2}\right)^2$, $\frac{a}{4}=a^2$, $4a^2-a=0$
$a(4a-1)=0$ $\therefore a=0$ 또는 $a=\frac{1}{4}$
이때 $a\neq 0$이므로 $a=\frac{1}{4}$
주어진 이차방정식에 $a=\frac{1}{4}$을 대입하면
$4x^2-2x+\frac{1}{4}=0$, $16x^2-8x+1=0$
$(4x-1)^2=0$ $\therefore x=\frac{1}{4}$
따라서 $k=\frac{1}{4}$이므로 $\frac{a}{k}=\frac{1}{4}\div\frac{1}{4}=1$

15 $x^2+ax+8b=0$의 두 근이 같으려면, 즉 해가 중근이려면 (완전제곱식)$=0$ 꼴로 나타낼 수 있어야 하므로
$8b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$, $a^2=32b$
즉, $a^2=2^5b$이므로 b의 값은 $2\times(\text{자연수})^2$ 꼴이어야 한다.
$b=2, 8, 18, 32, 50, 72, 98, 128, \cdots$
이때 a, b는 두 자리의 자연수이고, a의 값이 최대가 되려면 b의 값이 최대이어야 하므로 $b=98$
$a^2=2^5b=2^5\times 98=2^5\times 2\times 7^2=2^6\times 7^2=(2^3\times 7)^2$
이때 $a>0$이므로 $a=2^3\times 7=56$
$\therefore b-a=98-56=42$

16 $x^2+2ax+3b+1=0$의 해가 중근이려면 (완전제곱식)$=0$ 꼴로 나타낼 수 있어야 하므로
$3b+1=\left(\frac{2a}{2}\right)^2$ $\therefore 3b+1=a^2$
이 식을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(2, 1)$, $(4, 5)$의 2가지이고, 모든 경우의 수는 $6\times 6=36$이므로 구하는 확률은
$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

17 $6A=5B$에서 $6(x^2+2x-3)=5(x^2+4x-5)$
$x^2-8x+7=0$, $(x-1)(x-7)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=7$ $\cdots$ ㉠
또 $A\neq 0$에서 $x^2+2x-3\neq 0$, $(x+3)(x-1)\neq 0$
$\therefore x\neq -3$, $x\neq 1$ $\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 $x=7$

18 $x^2+2(a+2)x+a^2+4a+3=0$에서
$x^2+2(a+2)x+(a+1)(a+3)=0$
$(x+a+1)(x+a+3)=0$
$\therefore x=-a-1$ 또는 $x=-a-3$
이때 두 근 중 큰 근은 $x=-a-1$이다.
또 $x^2-2x-8=0$에서
$(x+2)(x-4)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=4$
이때 두 근 중 큰 근은 $x=4$이므로
$-a-1=4$ $\therefore a=-5$

19 $x^2+ax+a-1=0$에서 $(x+1)(x+a-1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=-a+1$
$x^2-(a+3)x+3a=0$에서 $(x-3)(x-a)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=a$
(i) 공통인 해가 $x=-1$일 때, $a=-1$
(ii) 공통인 해가 $x=3$일 때, $-a+1=3$ $\therefore a=-2$
(iii) 공통인 해가 $x=-a+1$과 $x=a$일 때,
$-a+1=a$ $\therefore a=\frac{1}{2}$
따라서 (i)~(iii)에 의해 모든 a의 값의 곱은
$-1\times(-2)\times\frac{1}{2}=1$

20 $9(x-2)^2=a^2$에 $x=\frac{10}{3}$을 대입하면
$9\left(\frac{10}{3}-2\right)^2=a^2$, $a^2=16$
이때 $a>0$이므로 $a=4$
즉, $9(x-2)^2=16$에서 $(x-2)^2=\frac{16}{9}$
$x-2=\pm\frac{4}{3}$ $\therefore x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{10}{3}$
따라서 $b=\frac{2}{3}$이므로 $ab=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

21 $2(x+3)^2=a$에서 $(x+3)^2=\frac{a}{2}$
$x+3=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$ $\therefore x=-3\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$
이때 두 근의 차가 $\frac{1}{2}$이므로
$-3+\sqrt{\frac{a}{2}}-\left(-3-\sqrt{\frac{a}{2}}\right)=\frac{1}{2}$, $2\sqrt{\frac{a}{2}}=\frac{1}{2}$
$\sqrt{\frac{a}{2}}=\frac{1}{4}$, $\frac{a}{2}=\frac{1}{16}$ $\therefore a=\frac{1}{8}$

22 $x^2-ax-2a=0$에서 $x^2-ax+\frac{a^2}{4}=2a+\frac{a^2}{4}$
$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+2a$ $\therefore A=-\frac{a}{2}$, $B=\frac{a^2}{4}+2a$
$B=\frac{a^2}{4}+2a=5$에서 $a^2+8a-20=0$
$(a+10)(a-2)=0$ $\therefore a=-10$ 또는 $a=2$
이때 $a>0$이므로 $a=2$ $\therefore A=-\frac{a}{2}=-1$

23 $(x-5)^2=\frac{k}{2}+25$에서 $x=5\pm\sqrt{\frac{k}{2}+25}$
이 해가 모두 정수가 되려면 근호 안의 수, 즉 $\frac{k}{2}+25$가 0 또는 (자연수)^2 꼴이어야 한다.
이때 k는 두 자리의 자연수이므로
$10\leq k\leq 99$에서 $30\leq\frac{k}{2}+25\leq 74.5$
$\frac{k}{2}+25=36,\ 49,\ 64$ $\therefore k=22,\ 48,\ 78$
따라서 두 자리의 자연수 k는 3개이다.

24 $x^2-4x+2=0$에서 일차항의 계수가 짝수이므로
$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-1\times 2}}{1}=2\pm\sqrt{2}$
이때 $1<\sqrt{2}<2$이므로 $3<2+\sqrt{2}<4$
또 $-2<-\sqrt{2}<-1$에서 $0<2-\sqrt{2}<1$
따라서 두 근 사이에 있는 자연수는 1, 2, 3이다.

25 $x^2-3x-7=0$에서
$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-7)}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{37}}{2}$
이때 양수인 근은 $x=\frac{3+\sqrt{37}}{2}$이고 $6<\sqrt{37}<7$에서
$9<3+\sqrt{37}<10$, $4.5<\frac{3+\sqrt{37}}{2}<5$이므로
$a=4$, $b=\frac{3+\sqrt{37}}{2}-4=\frac{-5+\sqrt{37}}{2}$
$\therefore \frac{a}{b}=4\times\frac{2}{-5+\sqrt{37}}=\frac{8(-5-\sqrt{37})}{(-5+\sqrt{37})(-5-\sqrt{37})}$
$=\frac{10+2\sqrt{37}}{3}$

26 $2x^2-8x+k-1=0$에서 일차항의 계수가 짝수이므로
$x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-2(k-1)}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{18-2k}}{2}$
$=2\pm\frac{\sqrt{2(9-k)}}{2}$
이 해가 모두 정수가 되려면 $9-k$의 값이 0 또는 $2\times$(자연수)^2 꼴이어야 한다.
(i) $9-k=0$일 때, $k=9$
(ii) $9-k=2\times1^2$일 때, $k=9-2=7$
(iii) $9-k=2\times2^2$일 때, $k=9-8=1$
따라서 (i)~(iii)에 의해 모든 자연수 k의 값의 합은
$9+7+1=17$

27 $-0.1x^2-\frac{x(x+4)}{2}+\frac{(x-1)^2}{5}+1=0$의 양변에 10을 곱하면
$-x^2-5x(x+4)+2(x-1)^2+10=0$
$-4x^2-24x+12=0$, $x^2+6x-3=0$
이때 일차항의 계수가 짝수이므로
$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-1\times(-3)}}{1}=-3\pm\sqrt{12}$
따라서 $a=-3$, $b=12$이므로
$x^2+ax-b=0$에서 $x^2-3x-12=0$
$\therefore x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-12)}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{57}}{2}$

28 $2(a+b)^2-a+b-6=8ab$에서
$2a^2+4ab+2b^2-8ab-a+b-6=0$
$2(a-b)^2-(a-b)-6=0$
$a-b=A$로 놓으면
$2A^2-A-6=0$, $(2A+3)(A-2)=0$
$\therefore A=-\frac{3}{2}$ 또는 $A=2$
즉, $a-b=-\frac{3}{2}$ 또는 $a-b=2$
이때 $a<b$에서 $a-b<0$이므로 $a-b=-\frac{3}{2}$

29 $(k^2-1)x^2-2(k+1)x+2=0$이 중근을 가지므로
$\{-2(k+1)\}^2-4\times(k^2-1)\times2=0$
$k^2+2k+1-2k^2+2=0$, $k^2-2k-3=0$
$(k+1)(k-3)=0$ $\therefore k=-1$ 또는 $k=3$
이때 $\underbrace{k^2-1}_{\text{이차항의 계수}}\neq0$에서 $(k+1)(k-1)\neq0$이므로
$k\neq-1$, $k\neq1$ $\therefore k=3$

30 $px^2-5x+q=0$이 서로 다른 두 근을 가지려면
$(-5)^2-4pq>0$이어야 하므로 $pq<\frac{25}{4}(=6.25)$
이를 만족시키는 순서쌍 (p, q)는
(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (5, 1), (6, 1)
의 14가지이고, 모든 경우의 수는 $6\times6=36$이므로
구하는 확률은 $\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$

31 $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$이 중근을 가지므로
$(b-c)^2-4(a-b)(c-a)=0$
$b^2-2bc+c^2-4(ac-a^2-bc+ab)=0$
$4a^2-4(b+c)a+b^2+2bc+c^2=0$
$4a^2-4\underbrace{(b+c)}_{A}a+\underbrace{(b+c)}_{A}{}^2=0$
$\{2a-\underbrace{(b+c)}_{A}\}^2=0$, $(2a-b-c)^2=0$
따라서 $2a-b-c=0$이므로 $c=2a-b$

32 $2x^2-3x-2=0$에서
$(2x+1)(x-2)=0$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$
따라서 $-\frac{1}{2}-3=-\frac{7}{2}$, $2-3=-1$이므로
두 근이 $-\frac{7}{2}$, -1이고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은
$2\left(x+\frac{7}{2}\right)(x+1)=0$ $\therefore 2x^2+9x+7=0$

33 두 근이 p, q이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-p)(x-q)=0$ $\therefore x^2-(p+q)x+pq=0$
이때 $\begin{cases}p+q=3-2a\\pq=a^2-2a\end{cases}$에서 $x^2-(3-2a)x+(a^2-2a)=0$
이 이차방정식이 서로 다른 두 근을 가지므로
$(2a-3)^2-4(a^2-2a)>0$, $4a^2-12a+9-4a^2+8a>0$
$-4a+9>0$ $\therefore a<\frac{9}{4}$

34 $2x^2+ax+b=0$에서 a, b가 유리수이고 한 근이
$x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$이므로 다른 한 근은 $x=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$이다.
$2\left(x-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=0$에서 $2x^2-4x+1=0$
이 식이 $2x^2+ax+b=0$과 같으므로 $a=-4$, $b=1$
$\therefore a+b=-3$, $ab=-4$
즉, 두 근이 -3, -4이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x+3)(x+4)=0$ $\therefore x^2+7x+12=0$
따라서 $p=7$, $q=12$이므로
$pq=7\times12=84$

35 두 근의 비가 2 : 1이므로 두 근을 α, $2\alpha(\alpha\neq0)$라 하면
$(x-\alpha)(x-2\alpha)=0$ $\therefore x^2-3\alpha x+2\alpha^2=0$
이 식이 $x^2+(m-5)x+32=0$과 같으므로
$2\alpha^2=32$에서 $\alpha^2=16$ $\therefore \alpha=\pm4$
또 $-3\alpha=m-5$에서 $m=-3\alpha+5$
$\therefore m=-7$ 또는 $m=17$
따라서 모든 m의 값의 합은 $-7+17=10$

36 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 연속하는 홀수이므로 두 근을 α, $\alpha+2$(α는 홀수)라 하면 두 근의 제곱의 차가 16이므로
$(\alpha+2)^2-\alpha^2=16$, $\alpha^2+4\alpha+4-\alpha^2=16$
$4\alpha=12$ $\therefore \alpha=3$
즉, 두 근이 3, 5이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-3)(x-5)=0$ $\therefore x^2-8x+15=0$
이 식이 $x^2+ax+b=0$과 같으므로 $a=-8$, $b=15$
따라서 $bx^2+ax+1=0$에서 $15x^2-8x+1=0$
$(5x-1)(3x-1)=0$ $\therefore x=\frac{1}{5}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

37 두 근이 절댓값은 같고, 부호는 반대이므로
두 근을 k, $-k(k>0)$라 하면
$(x-k)(x+k)=0 \quad \therefore x^2-k^2=0$
이 식이 $x^2-(a^2-3a-18)x-a+2=0$과 같으므로
$0=-(a^2-3a-18) \quad \cdots$ ㉠
$-k^2=-a+2 \quad \cdots$ ㉡
㉠에서 $a^2-3a-18=0$
$(a+3)(a-6)=0 \quad \therefore a=-3$ 또는 $a=6$
㉡에서 $k^2=a-2$이므로
(i) $a=-3$일 때, $k^2=-5$
그런데 어떤 수의 제곱은 음수가 될 수 없으므로 이를 만족시키는 k의 값은 없다.
(ii) $a=6$일 때, $k^2=4 \quad \therefore k=-2$ 또는 $k=2$
이때 $k>0$이므로 $k=2$
따라서 (i), (ii)에 의해 $a=6$

38 n단계에 놓인 흰 바둑돌의 개수는 검은 바둑돌의 개수보다 n개 적으므로
$\frac{n(n+1)}{2}-n=\frac{n^2+n}{2}-\frac{2n}{2}=\frac{n^2-n}{2}$(개)
흰 바둑돌이 45개이므로
$\frac{n^2-n}{2}=45$에서 $n^2-n-90=0$
$(n+9)(n-10)=0 \quad \therefore n=-9$ 또는 $n=10$
이때 $n>0$이므로 $n=10$
따라서 흰 바둑돌이 45개가 놓이는 삼각형 모양은 10단계이다.

39 연속하는 다섯 개의 자연수를 $x-2$, $x-1$, x, $x+1$, $x+2$(x는 2보다 큰 자연수)라 하면
$(x+2)^2+(x+1)^2=x^2+(x-1)^2+(x-2)^2+11$에서
$x^2+4x+4+x^2+2x+1=x^2+x^2-2x+1+x^2-4x+4+11$
$x^2-12x+11=0$, $(x-1)(x-11)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=11$
이때 $x>2$이므로 $x=11$
따라서 다섯 개의 자연수는 9, 10, 11, 12, 13이므로 이 중에서 가장 작은 수는 9이다.

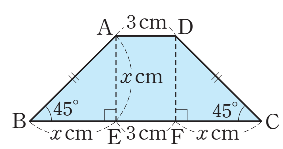
40 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면 구하는 자연수는 $10x+y$이다.
(나)에서 $x^2+y^2=73 \quad \cdots$ ㉠
(다)에서 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수는 $10y+x$이므로
$(10y+x)+(10x+y)=121$, $11x+11y=121$
$x+y=11 \quad \therefore y=11-x \quad \cdots$ ㉡
㉠에 ㉡을 대입하면 $x^2+(11-x)^2=73$
$x^2-11x+24=0$, $(x-3)(x-8)=0$
$\therefore x=3$, $y=8$ 또는 $x=8$, $y=3$
이때 (가)에서 $x>y$이므로 $x=8$, $y=3$
따라서 구하는 두 자리의 자연수는 83이다.

41 쏘아 올린 지 t초 후의 높이를 50 m라 하면
$35t-5t^2=50$에서 $5t^2-35t+50=0$
$t^2-7t+10=0$, $(t-2)(t-5)=0$
$\therefore t=2$ 또는 $t=5$
따라서 물체의 높이가 50 m 이상일 때는 쏘아 올린 지 2초 후부터 5초 후까지이므로 3초 동안이다.

42 처음 꿀벌의 수를 x마리라 하면
$\sqrt{\frac{1}{2}x}+\frac{7}{8}x=x$에서 $\sqrt{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{8}x$, $\frac{1}{2}x=\frac{1}{64}x^2$
$x^2-32x=0$, $x(x-32)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=32$
이때 $x\geq 1$이므로 $x=32$
따라서 처음에 있던 꿀벌은 모두 32마리이다.

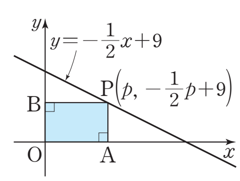
43 봉사 활동을 하는 3번의 날의 수를 차례로 $x-7$, x, $x+7$(x는 7보다 큰 자연수)이라 하면
$(x-7)^2+2x+(x+7)=266$에서
$x^2-11x-210=0$, $(x+10)(x-21)=0$
$\therefore x=-10$ 또는 $x=21$
이때 $x>7$이므로 $x=21$
따라서 구하는 날은 14일, 21일, 28일이다.

44 오른쪽 그림과 같이 등변사다리꼴 ABCD의 두 꼭짓점 A, D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하면



$\angle DCF=\angle ABE=45°$이므로
$\triangle ABE\equiv\triangle DCF$ (RHA 합동)
$\overline{BE}=x$ cm라 하면 $\overline{CF}=\overline{BE}=x$ cm이고
$\triangle ABE$가 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AE}=\overline{BE}=x$ cm
등변사다리꼴 ABCD의 넓이가 40 cm^2이므로
$\frac{1}{2}\times\{3+(2x+3)\}\times x=40$에서
$x^2+3x-40=0$, $(x+8)(x-5)=0$
$\therefore x=-8$ 또는 $x=5$
이때 $x>0$이므로 $x=5$
$\therefore \overline{BC}=2x+3=2\times 5+3=13$(cm)

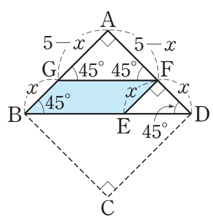
45 점 P의 x좌표를 p라 하면
$P\left(p,\ -\frac{1}{2}p+9\right)$



□OAPB$=\overline{OA}\times\overline{OB}$이므로
$p\left(-\frac{1}{2}p+9\right)=40$에서
$p^2-18p+80=0$, $(p-8)(p-10)=0$
$\therefore p=8$ 또는 $p=10$
$\therefore P(8,\ 5)$, $P(10,\ 4)$

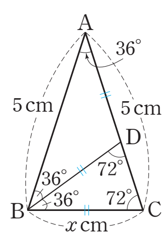
46 점 P는 초속 1 cm로 움직이므로 점 P가 출발한 지 t초 후에
$\overline{AP}=t$ cm　　$\therefore \overline{BP}=(9-t)$ cm
점 Q는 초속 2 cm로 움직이므로 점 Q가 출발한 지 t초 후에
$\overline{BQ}=2t$ cm
t초 후에 $\triangle PBQ$의 넓이가 18 cm^{2}가 된다고 하면
$\frac{1}{2}\times(9-t)\times 2t=18$에서 $9t-t^2=18$, $t^2-9t+18=0$
$(t-3)(t-6)=0$　　$\therefore t=3$ 또는 $t=6$
이때 $0<2t<10$이므로 $0<t<5$　　$\therefore t=3$
따라서 $\triangle PBQ$의 넓이가 18 cm^{2}가 되는 것은 두 점 P, Q가 출발한 지 3초 후이다.
참고 $\overline{BC}=10$ cm이므로 점 Q가 움직일 수 있는 거리는 10 cm 미만이다. ⇨ $0<2t<10$

47 오른쪽 그림에서 $\triangle AGF$와 $\triangle FED$는 직각이등변삼각형이다.



$\overline{BG}=x$라 하면 $\overline{AG}=5-x$이므로
$\square BEFG$
$=\triangle ABD-\triangle AGF-\triangle FED$
에서
$6=\frac{1}{2}\times5\times5-\frac{1}{2}\times(5-x)\times(5-x)-\frac{1}{2}\times x\times x$
$6=\frac{25}{2}-\frac{(5-x)^2}{2}-\frac{x^2}{2}$, $12=25-(5-x)^2-x^2$
$x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=3$
이때 $\overline{AF}>\overline{DF}$에서 $5-x>x$이므로 $0<x<\frac{5}{2}$　　$\therefore x=2$
따라서 $\overline{BG}$의 길이는 2이다.

48 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로



$\angle ABC=\angle ACB$
$=\frac{1}{2}\times(180^\circ-36^\circ)=72^\circ$
$\therefore \angle ABD=\angle CBD=\frac{1}{2}\times72^\circ=36^\circ$
즉, $\angle A=\angle ABD$이므로 $\overline{AD}=\overline{BD}$
또 $\triangle ABD$에서
$\angle BDC=\angle A+\angle ABD=36^\circ+36^\circ=72^\circ$
즉, $\angle BDC=\angle BCD$이므로 $\overline{BD}=\overline{BC}$
$\triangle ABC$와 $\triangle BCD$에서
$\angle BAC=\angle CBD=36^\circ$, $\angle ACB=\angle BDC=72^\circ$이므로
$\triangle ABC \backsim \triangle BCD$ (AA 닮음)
$\therefore \overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{CD}$
$\overline{BC}=x$ cm라 하면 $\overline{CD}=(5-x)$ cm이므로
$5:x=x:(5-x)$, $x^2=5(5-x)$, $x^2+5x-25=0$
$\therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times(-25)}}{2}=\frac{-5\pm5\sqrt{5}}{2}$
이때 $x>0$이므로 $x=\frac{-5+5\sqrt{5}}{2}$
따라서 $\overline{BC}$의 길이는 $\frac{-5+5\sqrt{5}}{2}$ cm이다.

49 $\overline{AC}=x$ cm라 하면 $\overline{BC}=(40-x)$ cm이므로
(색칠한 부분의 넓이)
$=$($\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)
　$-$($\overline{AC}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)
　$-$($\overline{BC}$를 지름으로 하는 반원의 넓이)
에서
$\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{40}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{40-x}{2}\right)^2=99\pi$
$200-\frac{x^2}{8}-\frac{(40-x)^2}{8}=99$
$1600-x^2-(x^2-80x+1600)=792$
$2x^2-80x+792=0$, $x^2-40x+396=0$
$(x-18)(x-22)=0$　　$\therefore x=18$ 또는 $x=22$
이때 $\overline{AC}>\overline{BC}$에서 $x>40-x$이므로
$20<x<40$　　$\therefore x=22$
따라서 $\overline{AC}$의 길이는 22 cm이다.

50 길잡이 근의 공식을 이용하여 x를 □에 대한 식으로 나타내어 본다.
$x^2-2x-\square=0$에서 일차항의 계수가 짝수이므로
$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-1\times(-\square)}}{1}=1\pm\sqrt{1+\square}$이고, 이 해가 자연수가 되려면 $1+\square$가 (자연수)^2 꼴이어야 한다.
(i) $1+\square=4$, 즉 $\square=3$일 때
　$x=1\pm\sqrt{4}$　　$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
　이때 $x>0$이므로 $x=3$
(ii) $1+\square=9$, 즉 $\square=8$일 때
　$x=1\pm\sqrt{9}$　　$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$
　이때 $x>0$이므로 $x=4$
(iii) $1+\square=16$, 즉 $\square=15$일 때
　$x=1\pm\sqrt{16}$　　$\therefore x=-3$ 또는 $x=5$
　이때 $x>0$이므로 $x=5$
즉, 은석이와 소영이가 받은 사은품의 개수의 합이 8개 이상인 경우에 두 사람이 구한 해를 순서쌍으로 나타내면
(3, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)의 6가지이고, 모든 경우의 수는 $20\times20=400$이므로
구하는 확률은 $\frac{6}{400}=\frac{3}{200}$

51 길잡이 주어진 타일의 넓이의 합을 구해 본다.
모든 타일의 넓이의 합은
$x^2\times5+(1\times x)\times7+1^2\times7=5x^2+7x+7$ (cm^2)
이때 타일 A, C가 각각 한 개씩 더 있으면 직사각형 모양의 벽면을 모두 채울 수 있으므로
$(5x^2+7x+7)+x^2+1=132$에서
$6x^2+7x-124=0$
$(6x+31)(x-4)=0$　　$\therefore x=-\frac{31}{6}$ 또는 $x=4$
이때 $x>0$이므로 $x=4$

52 길잡이 돌의 반지름의 길이에 가로 또는 세로로 놓인 돌의 개수만큼 곱하면 연못의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

십자 모양에서 가로로 놓인 돌의 개수를 x개라 하면 세로로 놓인 돌의 개수도 x개이므로 전체 돌의 개수는 $(2x-1)$개이다.

이때 돌의 반지름의 길이가 50 cm이므로 연못의 반지름의 길이는 $50x$ cm이다.

즉, 돌 1개의 넓이는 $\pi\times50^2=2500\pi(\text{cm}^2)$이고

연못의 넓이는 $\pi\times(50x)^2=2500\pi x^2(\text{cm}^2)$이므로

$2500\pi x^2-2500\pi\times(2x-1)=\dfrac{81}{100}\times2500\pi x^2$

$x^2-(2x-1)=\dfrac{81}{100}x^2,\ \dfrac{19}{100}x^2-2x+1=0$

$19x^2-200x+100=0,\ (19x-10)(x-10)=0$

$\therefore x=\dfrac{10}{19}$ 또는 $x=10$

이때 x는 자연수이므로 $x=10$

따라서 연못에 놓인 돌의 개수는

$2\times10-1=19$(개)

P. 75~77 내신 1% 뛰어넘기

01 2	**02** 3	**03** $x=1$	**04** -3	**05** 5
06 $3-\sqrt{14}$		**07** 9	**08** 2	
09 $x^2-2020x-2021=0$				
10 걸린 시간: 1시간 40분, $a=10$				**11** 20 %
12 P(6, 9)				

01 길잡이 주어진 이차방정식에 한 근을 대입하고, 이를 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

$x^2-3x+1=0$에 $x=a$를 대입하면 $a^2-3a+1=0$

$\therefore a^5-5a^4+7a^3-a^2-3a+3$

$=a^5\underline{-3a^4}\underline{-2a^4}+a^3+6a^3\underline{-2a^2}+a^2-3a+\underline{1}+\underline{2}$

$=a^5-3a^4+a^3-2a^4+6a^3-2a^2+a^2-3a+1+2$

$=a^3(a^2-3a+1)-2a^2(a^2-3a+1)+(a^2-3a+1)+2$

$=a^3\times0-2a^2\times0+0+2=2$

다른 풀이

$a^2-3a+1=0$에서 $a^2=3a-1$이므로

$a^3=a\times a^2=a(3a-1)=3a^2-a=3(3a-1)-a=8a-3$

$a^4=a\times a^3=a(8a-3)=8a^2-3a=8(3a-1)-3a$

$=21a-8$

$a^5=a\times a^4=a(21a-8)=21a^2-8a=21(3a-1)-8a$

$=55a-21$

$\therefore a^5-5a^4+7a^3-a^2-3a+3$

$=(55a-21)-5(21a-8)+7(8a-3)-(3a-1)$

$-3a+3$

$=55a-21-105a+40+56a-21-3a+1-3a+3$

$=2$

02 길잡이 주어진 식에서 반복되는 부분이 x와 같음을 이용한다.

$x=2+\cfrac{3}{\underbrace{2+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\cdots}}}_{=x}}$에서 $x=2+\dfrac{3}{x}$이므로

$x^2=2x+3,\ x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0\qquad\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

이때 $x>0$이므로 $x=3$

03 길잡이 두 이차방정식에 공통인 근을 문자로 놓고 대입한 후 두 식이 같음을 이용한다.

두 이차방정식의 공통인 근을 $x=\alpha$라 하자.

$x^2+mx+n=0$에 $x=\alpha$를 대입하면

$\alpha^2+m\alpha+n=0\qquad\cdots$ ㉠

주어진 이차방정식의 x의 계수와 상수항을 바꾸면

$x^2+nx+m=0$이고, 이 식에 $x=\alpha$를 대입하면

$\alpha^2+n\alpha+m=0\qquad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha^2+m\alpha+n=\alpha^2+n\alpha+m$

$(m-n)\alpha=m-n$

이때 $m\neq n$이므로 $\alpha=1$

따라서 두 이차방정식의 공통인 근은 $x=1$이다.

04 길잡이 $f(x)$의 식의 분모를 유리화한 후 m의 값을 구한다.

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$

$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$\therefore m=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(23)+f(24)$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})$

$+\cdots+(\sqrt{24}-\sqrt{23})+(\sqrt{25}-\sqrt{24})$

$=\sqrt{25}-\sqrt{1}=5-1=4$

주어진 이차방정식에 $x=4$를 대입하면

$16(a^2-1)+4(5a-6)+4(3a-2)=0$

$16a^2+32a-48=0,\ a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0\qquad\therefore a=-3$ 또는 $a=1$

이때 $a^2-1\neq0$에서 $a\neq-1,\ a\neq1$이므로 $a=-3$

05 길잡이 a, c가 소수임을 이용하여 $x^2-2cx+a=0$의 좌변을 인수분해한다.

$x^2-2cx+a=0$에서 a가 소수이므로 곱이 a가 되는 두 정수를 찾아 좌변을 인수분해하면

$(x+a)(x+1)=0$ 또는 $(x-a)(x-1)=0$이다.

이때 $(x+a)(x+1)=0$의 좌변을 정리하면

$x^2+(a+1)x+a=0$이고 이 식이 $x^2-2cx+a=0$과 같으므로 $a+1=-2c$이어야 한다.

그런데 a, c는 소수, 즉 자연수이므로 $a+1=-2c$는 성립하지 않는다.

따라서 $x^2-2cx+a=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-a)(x-1)=0$이므로 $x=a$ 또는 $x=1$이다.

주어진 두 이차방정식의 공통인 해를 $x=a$라 하자.

$x^2-ax+2b=0$에 $x=a$를 대입하면

$a^2-a^2+2b=0 \qquad \therefore b=0$

그런데 b는 소수이어야 하므로 $x=a$는 공통인 해가 아니다.

즉, 공통인 해는 $x=1$이다.

$x^2-ax+2b=0$에 $x=1$을 대입하면

$a=2b+1 \qquad \cdots ㉠$

$x^2-2cx+a=0$에 $x=1$을 대입하면

$a=2c-1 \qquad \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $2b+1=2c-1 \qquad \therefore c=b+1$

따라서 b와 c는 소수이면서 연속하는 두 자연수이므로

$b=2,\ c=3$

$\therefore a=2b+1=2\times2+1=5$

06 길잡이 주어진 등식의 양변을 y^2으로 나눈 후 $\frac{x}{y}=A$로 놓고 이차방정식을 푼다.

(나)에서 $xy<0$이므로 $x\neq0,\ y\neq0 \qquad \therefore y^2\neq0$

(가)에서 $x^2-6xy-5y^2=0$의 양변을 y^2으로 나누면

$\frac{x^2}{y^2}-6\frac{x}{y}-5=0,\ \left(\frac{x}{y}\right)^2-6\frac{x}{y}-5=0$

$\frac{x}{y}=A$로 놓으면

$A^2-6A-5=0$에서 일차항의 계수가 짝수이므로

$A=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-1\times(-5)}}{1}=3\pm\sqrt{14}$

$\therefore \frac{x}{y}=3\pm\sqrt{14}$

이때 $xy<0$에서 $\frac{x}{y}<0$이므로

$\frac{x}{y}=3-\sqrt{14}$

07 길잡이 좌변에 공통부분이 생기도록 2개씩 묶어 전개한다.

$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=109^2$에서

$n(n+3)(n+1)(n+2)=109^2-1$

$=(109-1)(109+1)$

$=108\times110$

즉, $(n^2+3n)(n^2+3n+2)=108\times110$이므로

$n^2+3n=A$로 놓으면

$A(A+2)=108\times110,\ A^2+2A-108\times110=0$

$(A+110)(A-108)=0 \qquad \therefore A=-110$ 또는 $A=108$

이때 n은 자연수이므로 $A=n^2+3n>0$

$\therefore A=108$

즉, $n^2+3n=108$이므로 $n^2+3n-108=0$

$(n+12)(n-9)=0 \qquad \therefore n=-12$ 또는 $n=9$

이때 n은 자연수이므로 $n=9$

08 길잡이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 근을 가지려면 $b^2-4ac\geq0$이어야 함을 이용한다.

$x^2-ax+b+1=0$이 근을 가지므로

$(-a)^2-4(b+1)\geq0 \qquad \therefore b\leq\frac{a^2}{4}-1$

즉, b의 최댓값은 $M=\frac{a^2}{4}-1$

이때 $-2\leq a\leq4$이므로 $0\leq a^2\leq16$

$0\leq\frac{a^2}{4}\leq4,\ -1\leq\frac{a^2}{4}-1\leq3 \qquad \therefore -1\leq M\leq3$

따라서 $p=-1,\ q=3$이므로

$p+q=-1+3=2$

09 길잡이 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 연속하는 자연수이므로 두 근을 $\alpha,\ \alpha+1$로 놓는다.

$x^2-ax+b=0$의 두 근이 연속하는 자연수이므로 두 근을 $\alpha,\ \alpha+1$ (α는 자연수)이라 하면 두 근의 제곱의 차가 5이므로

$(\alpha+1)^2-\alpha^2=5,\ \alpha^2+2\alpha+1-\alpha^2=5$

$2\alpha=4 \qquad \therefore \alpha=2$

즉, 두 근은 2, 3이므로

$(x-2)(x-3)=0 \qquad \therefore x^2-5x+6=0$

이 식이 $x^2-ax+b=0$과 같으므로

$a=5,\ b=6$에서 $a-b=-1,\ b-a=1$

$\therefore A=(a-b)+(a-b)^2+\cdots+(a-b)^{2021}$

$=(-1)+(-1)^2+\cdots+(-1)^{2021}=-1$

$\therefore B=(b-a)+(b-a)^2+\cdots+(b-a)^{2021}$

$=1+1^2+\cdots+1^{2021}=2021$

따라서 두 근이 -1, 2021이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x+1)(x-2021)=0 \qquad \therefore x^2-2020x-2021=0$

10 길잡이 (거리)=(시간)×(속력)임을 이용하여 우현이와 주아가 이동한 거리에 대한 식을 각각 세워 본다.

두 사람이 만날 때까지 걸린 시간을 x시간, 두 사람이 만난 지점을 P 지점이라 하면 우현이가 A 지점에서 P 지점까지 간 거리는 $8x$ km이고, 주아가 B 지점에서 P 지점까지 간 거리는 ax km이다. 이때 1시간 20분은 $1+\frac{20}{60}=\frac{4}{3}$(시간)이므로 주아가 P 지점에서 A 지점까지 간 거리는 $\frac{4}{3}a$ km이다.

즉, $8x=\frac{4}{3}a \qquad \cdots ㉠, \qquad ax+\frac{4}{3}a=30 \qquad \cdots ㉡$

㉠에서 $a=6x$이므로 ㉡에 이를 대입하면

$6x^2+8x=30,\ 3x^2+4x-15=0$

$(x+3)(3x-5)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

이때 $x>0$이므로 $x=\frac{5}{3}$

따라서 두 사람이 만날 때까지 걸린 시간은 $\frac{5}{3}$시간, 즉 1시간 40분이다.

또 $a=6x$에 $x=\frac{5}{3}$를 대입하면 $a=10$

11 길잡이 처음 1인당 입장료와 입장객 수를 각각 문자로 놓고, (전체 입장료)=(1인당 입장료)×(입장객 수)임을 이용하여 이차방정식을 세운다.

처음 1인당 입장료를 a원, 입장객 수를 b명이라 하면

입장료를 $x\%$ 올린 후의 입장료는 $\left(1+\frac{x}{100}\right)a$원,

입장객 수는 $\left(1-\frac{x}{400}\right)b$명이다.

따라서 입장료를 $x\%$ 올린 후의 총수입은

$\left(1+\frac{x}{100}\right)a\times\left(1-\frac{x}{400}\right)b$(원)

이때 총수입이 14% 증가해야 하므로

$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{400}\right)ab=\frac{114}{100}ab$에서

$\frac{100+x}{100}\times\frac{400-x}{400}=\frac{114}{100}$, $(100+x)(400-x)=45600$

$x^2-300x+5600=0$, $(x-20)(x-280)=0$

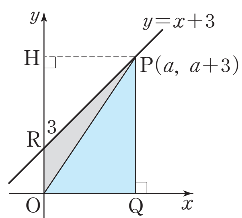
$\therefore x=20$ 또는 $x=280$

이때 $0<x<50$이므로 $x=20$

따라서 입장료는 20%를 올려야 한다.

12 길잡이 점 P가 일차함수 $y=x+3$의 그래프 위의 점이므로 그 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ a+3)$으로 놓는다.

$y=x+3$의 그래프 위의 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ a+3)\ (a>0)$이라 하면



오른쪽 그림에서

$\overline{\mathrm{OQ}}=a$, $\overline{\mathrm{PQ}}=a+3$

$\therefore \triangle\mathrm{POQ}=\frac{1}{2}a(a+3)$

점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{OQ}}=a$

$y=x+3$의 그래프의 y절편은 3이므로 $\overline{\mathrm{OR}}=3$

$\therefore \triangle\mathrm{PRO}=\frac{1}{2}\times3\times a=\frac{3}{2}a$

$\triangle\mathrm{POQ}:\triangle\mathrm{PRO}=3:1$이므로

$\frac{1}{2}a(a+3):\frac{3}{2}a=3:1$, $\frac{1}{2}a(a+3)=\frac{9}{2}a$

$a^2-6a=0$, $a(a-6)=0$ $\quad\therefore a=0$ 또는 $a=6$

이때 $a>0$이므로 $a=6$

따라서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(6,\ 9)$이다.

P. 78~79 **5 서술형 완성하기**

[과정은 풀이 참조]

1 풀이 참조 **2** 15 **3** 3개 **4** 9
5 $x=4$ 또는 $x=6$ **6** $6+6\sqrt{5}$ **7** 111
8 24명

1 오른쪽 표에서 가로와 대각선에 있는 네 수의 합이 서로 같으므로

	15	14	4
12	$x+3$	㉠	$2x^2-3x$
	$x+7$		5
13			16

$12+(x+3)+㉠+(2x^2-3x)$
$=4+㉠+(x+7)+13$에서 $\cdots$ (i)

$2x^2-3x-9=0$

$(2x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=3$

이때 $x+3$은 자연수, 즉 x는 정수이므로 $x=3$ $\cdots$ (ii)

즉, 세로에 있는 네 수의 합은

$4+(2x^2-3x)+5+16=4+(18-9)+5+16=34$

따라서 가로, 세로, 대각선에 있는 네 수의 합은 모두 34이므로 주어진 마방진을 완성하면 오른쪽 표와 같다. $\cdots$ (iii)

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

채점 기준	비율
(i) x에 대한 이차방정식 세우기	30%
(ii) x의 값 구하기	40%
(iii) 마방진 완성하기	30%

2 $x(x-3)=18$에서 $x^2-3x-18=0$

$(x+3)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=6$ $\cdots$ (i)

따라서 $2x^2+(a+1)x+2a=0$에 $x=-3$을 대입하면

$2\times(-3)^2-3(a+1)+2a=0$ $\cdots$ (ii)

$18-3a-3+2a=0$ $\quad\therefore a=15$ $\cdots$ (iii)

채점 기준	비율
(i) 이차방정식 $x(x-3)=18$의 두 근 구하기	40%
(ii) (i)의 두 근 중 작은 근을 $2x^2+(a+1)x+2a=0$에 대입하기	30%
(iii) a의 값 구하기	30%

3 $x^2+y^2+2xy-3x-3y-4=0$에서

$(x+y)^2-3(x+y)-4=0$

$x+y=A$로 놓으면 $\cdots$ (i)

$A^2-3A-4=0$, $(A+1)(A-4)=0$

$\therefore A=-1$ 또는 $A=4$

즉, $x+y=-1$ 또는 $x+y=4$

이때 x, y는 자연수이므로 $x+y=4$ $\cdots$ (ii)

따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$의 3개이다. $\cdots$ (iii)

채점 기준	비율
(i) 주어진 식을 정리한 후, $x+y=A$로 놓기	40%
(ii) $x+y$의 값 구하기	40%
(iii) 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수 구하기	20%

4 $3x^2+2ax+2a+9=0$이 중근을 가지려면
$(2a)^2-4\times3\times(2a+9)=0$이어야 하므로 … (i)
$a^2-6a-27=0$, $(a+3)(a-9)=0$
$\therefore a=-3$ 또는 $a=9$ … (ii)
㉠ $a=-3$일 때, $3x^2-6x+3=0$에서
$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$ $\quad\therefore x=1$
그런데 $x=1$은 양수인 중근이므로 음수인 중근이라는 조건을 만족시키지 않는다.
㉡ $a=9$일 때, $3x^2+18x+27=0$에서
$x^2+6x+9=0$, $(x+3)^2=0$ $\quad\therefore x=-3$
따라서 ㉠, ㉡에서 $a=9$ … (iii)

채점 기준	비율
(i) 중근을 갖도록 하는 a에 대한 이차방정식 세우기	30 %
(ii) a에 대한 이차방정식 풀기	30 %
(iii) 음수인 중근을 갖도록 하는 a의 값 구하기	40 %

5 지은이는 중근 $x=5$를 얻었으므로 지은이가 푼 이차방정식은
$(x-5)^2=0$ $\quad\therefore x^2-10x+25=0$
이때 지은이는 x의 계수를 바르게 보았으므로 처음 이차방정식의 x의 계수는 -10이다. … (i)
보검이는 $x=-12$ 또는 $x=-2$의 해를 얻었으므로 보검이가 푼 이차방정식은
$(x+12)(x+2)=0$ $\quad\therefore x^2+14x+24=0$
이때 보검이는 상수항을 바르게 보았으므로 처음 이차방정식의 상수항은 24이다. … (ii)
따라서 처음 이차방정식은 $x^2-10x+24=0$이므로
$(x-4)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=4$ 또는 $x=6$ … (iii)

채점 기준	비율
(i) 처음 이차방정식의 x의 계수 구하기	40 %
(ii) 처음 이차방정식의 상수항 구하기	40 %
(iii) 처음 이차방정식 풀기	20 %

6 $\overline{BC}=x$라 하면 $\overline{DE}=\overline{AD}-\overline{AE}=x-12$
$\square ABCD \backsim \square DEFC$이므로 $\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EF}$에서
$12:(x-12)=x:12$ … (i)
$x(x-12)=144$, $x^2-12x-144=0$
일차항의 계수가 짝수이므로
$x=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-1\times(-144)}}{1}=6\pm6\sqrt{5}$ … (ii)
이때 $x>12$이므로 $x=6+6\sqrt{5}$
따라서 $\overline{BC}$의 길이는 $6+6\sqrt{5}$이다. … (iii)

채점 기준	비율
(i) $\overline{BC}$에 대한 비례식 세우기	50 %
(ii) 이차방정식 풀기	40 %
(iii) $\overline{BC}$의 길이 구하기	10 %

7 주어진 이차방정식의 두 근의 최대공약수가 3이므로
두 근을 $a=3m$, $b=3n$ (m, n은 서로소)이라 하면 … (i)
$2(x-3m)(x-3n)=0$
$\therefore 2x^2-2(3m+3n)x+18mn=0$
이 식이 $2x^2-30x+k=0$과 같으므로
$-2(3m+3n)=-30$ … ㉠
$18mn=k$ … ㉡
㉠에서 $m+n=5$이고
$a>b>3$에서 $3m>3n>3$, $m>n>1$
이때 m, n은 자연수이므로 $m=3$, $n=2$ … (ii)
㉡에서 $k=18\times3\times2=108$
$\therefore a-b+k=3m-3n+k$
$=3\times3-3\times2+108$
$=9-6+108=111$ … (iii)

채점 기준	비율
(i) $a=3m$, $b=3n$으로 놓기	40 %
(ii) m, n의 값 구하기	40 %
(iii) $a-b+k$의 값 구하기	20 %

8 기존 야구 동아리 학생 수를 x명이라 하면
기존 학생 1명이 처음에 받은 관람권의 수는 $\dfrac{96}{x}$장이므로
2명의 학생이 새로 들어온 후, 기존 학생 1명이 갖게 된 관람권의 수는 $\left(\dfrac{96}{x}-1\right)$장, 새로 온 학생 1명이 받은 관람권의 수는 $\dfrac{x}{2}$장이다.
즉, $\dfrac{x}{2}=\left(\dfrac{96}{x}-1\right)+9$에서 … (i)
$\dfrac{x}{2}=\dfrac{96}{x}+8$
이때 $x\neq0$이므로 양변에 $2x$를 곱하면 $x^2=192+16x$
$x^2-16x-192=0$, $(x+8)(x-24)=0$
$\therefore x=-8$ 또는 $x=24$ … (ii)
이때 x는 자연수이므로 $x=24$
따라서 기존 야구 동아리 학생 수는 24명이다. … (iii)

채점 기준	비율
(i) 기존 야구 동아리 학생과 새로 온 학생이 각각 갖게 된 관람권의 수를 비교하여 식 세우기	50 %
(ii) 이차방정식 풀기	40 %
(iii) 기존 야구 동아리 학생 수 구하기	10 %

6. 이차함수와 그 그래프

P. 82~87 개념+대표 문제 확인하기

1 ㄷ, ㅁ **2** 9 **3** -180 **4** $-2<a<-\frac{2}{3}$

5 ④, ⑤ **6** 10 **7** $-\frac{5}{3}$ **8** $(0,\ 1)$ **9** $-1,\ 3$

10 ②, ⑤ **11** 1 **12** -6 **13** ㄴ, ㄷ **14** ②

15 $\frac{3}{4}$ **16** 4 **17** $a=-\frac{1}{2},\ p=-2,\ q=1$

18 $y=-2(x+3)^2+11$ **19** $a<0,\ p>0,\ q<0$

20 ③ **21** -30 **22** 29 **23** $k>-2$

24 ①, ⑤ **25** 10 **26** $x=-1,\ (-1,\ 1)$

27 -2 **28** $a>0,\ b<0,\ c>0$ **29** ③

1 ㄱ. $y=2000x$ (일차함수)
ㄴ. $y=80x$ (일차함수)
ㄷ. $y=x\left(\frac{10}{2}-x\right)=-x^2+5x$ (이차함수)
ㄹ. $y=x^3$ (이차함수가 아니다.)
ㅁ. $y=4\pi x^2$ (이차함수)
따라서 이차함수인 것은 ㄷ, ㅁ이다.

2 $f(3)=2$이므로 $-\frac{1}{3}\times3^2+3a-1=2$
$3a=6\qquad\therefore a=2$
즉, $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x-1$에서
$f(b)=-\frac{10}{3}$이므로 $-\frac{1}{3}b^2+2b-1=-\frac{10}{3}$
$b^2-6b-7=0,\ (b+1)(b-7)=0$
$\therefore b=-1$ 또는 $b=7$
이때 b는 자연수이므로 $b=7$
$\therefore a+b=2+7=9$

3 $y=5x^2$의 그래프와 x축에 서로 대칭인 그래프는 $y=-5x^2$이고, 이 그래프가 점 $(-6,\ k)$를 지나므로
$k=-5\times(-6)^2=-180$

4 $y=ax^2$의 그래프의 폭이 $y=-\frac{2}{3}x^2$의 그래프보다 좁고, $y=-2x^2$의 그래프보다 넓으므로
$\left|-\frac{2}{3}\right|<|a|<|-2|,\ \frac{2}{3}<|a|<2$
이때 $a<0$이므로 $-2<a<-\frac{2}{3}$

5 ① 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 0)$이다.
② 축의 방정식은 $x=0$이다.
③ $y=ax^2$에서 $a<0$이므로 위로 볼록한 포물선이다.
④ 제3사분면과 제4사분면을 지난다.
⑤ $\left|-\frac{1}{2}\right|>\left|\frac{1}{4}\right|$이므로 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프는 $y=\frac{1}{4}x^2$의 그래프보다 폭이 좁다.
따라서 옳은 것은 ④, ⑤이다.

6 그래프의 꼭짓점이 원점이므로 구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2$으로 놓자.
이 그래프가 점 $(-3,\ 2)$를 지나므로
$2=9a\qquad\therefore a=\frac{2}{9}$
따라서 $f(x)=\frac{2}{9}x^2$이므로
$f(9)-f(6)=\frac{2}{9}\times9^2-\frac{2}{9}\times6^2=18-8=10$

7 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 $y=ax^2-3$이고, 이 그래프가 점 $(3,\ 0)$을 지나므로
$0=9a-3\qquad\therefore a=\frac{1}{3}$
따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^2-3$이므로
$f(-2)=\frac{1}{3}\times(-2)^2-3=-\frac{5}{3}$

8 $y=ax^2+q$의 그래프가 점 $(-3,\ -2)$를 지나므로
$-2=9a+q\qquad\cdots$ ㉠
또 점 $\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$를 지나므로
$\frac{2}{3}=a+q\qquad\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{3},\ q=1$
따라서 $y=-\frac{1}{3}x^2+1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

9 $y=-3x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동하면 $y=-3(x-p)^2$이고, 이 그래프가 점 $(1,\ -12)$를 지나므로
$-12=-3(1-p)^2,\ (1-p)^2=4,\ 1-p=\pm2$
$\therefore p=-1$ 또는 $p=3$

10 ② 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 0)$이다.
⑤ $x<-1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

11 $y=a(x-p)^2$의 그래프의 축의 방정식은 $x=p$이므로
$p=-2$
$y=a(x+2)^2$의 그래프가 점 $(-4,\ -2)$를 지나므로
$-2=a(-4+2)^2,\ 4a=-2\qquad\therefore a=-\frac{1}{2}$
$\therefore ap=-\frac{1}{2}\times(-2)=1$

12 $y=-2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 $y=-2(x-3)^2+a$이고,
이 그래프가 점 $(2, -1)$을 지나므로
$-1=-2(2-3)^2+a$, $-1=-2+a$ $\therefore a=1$
즉, $y=-2(x-3)^2+1$의 그래프가 점 $(5, b)$를 지나므로
$b=-2(5-3)^2+1=-7$
$\therefore a+b=1+(-7)=-6$

13 ㄴ. 꼭짓점의 좌표가 $(-2, -5)$이므로
$y=-2x-1$에 $x=-2$, $y=-5$를 대입하면
$-5\neq-2\times(-2)-1$
즉, 꼭짓점은 일차함수 $y=-2x-1$의 그래프 위에 있지 않다.
ㄷ. 축의 방정식은 $x=-2$이다.
따라서 옳지 않은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

14 각 그래프의 꼭짓점을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하여 꼭짓점이 위치하는 사분면을 구하면
① $(0, 4)$ ⇨ $(1, 2)$: 제1사분면
② $(-2, 0)$ ⇨ $(-1, -2)$: 제3사분면
③ $(0, 3)$ ⇨ $(1, 1)$: 제1사분면
④ $(1, 0)$ ⇨ $(2, -2)$: 제4사분면
⑤ $(-3, 4)$ ⇨ $(-2, 2)$: 제2사분면
따라서 평행이동한 그래프의 꼭짓점이 제3사분면 위에 위치하는 것은 ②이다.

15 이차함수의 그래프를 평행이동할 때 그래프의 모양과 폭은 변하지 않으므로 $a=\frac{3}{4}$
꼭짓점이 $(2, 1)$에서 $(5, -2)$로 이동했으므로
$2+m=5$, $1+n=-2$ $\therefore m=3$, $n=-3$
$\therefore a+m+n=\frac{3}{4}+3+(-3)=\frac{3}{4}$

16 $y=-\frac{1}{3}(x-2)^2+a$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면
$y=-\frac{1}{3}(-x-2)^2+a$ $\therefore y=-\frac{1}{3}(x+2)^2+a$
이 그래프가 점 $(-5, 1)$을 지나므로
$1=-\frac{1}{3}(-5+2)^2+a$
$1=-3+a$ $\therefore a=4$

17 주어진 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2, 1)$이므로
$p=-2$, $q=1$
즉, $y=a(x+2)^2+1$이고, 이 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로
$-1=a(0+2)^2+1$, $4a=-2$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$

18 (가)에서 축의 방정식이 $x=-3$이므로 구하는 이차함수의 식을 $y=a(x+3)^2+q$로 놓으면
(나)에서 이 그래프가 두 점 $(-5, 3)$, $(-2, 9)$를 지나므로
$3=4a+q$, $9=a+q$
이 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $q=11$
따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=-2(x+3)^2+11$

19 그래프가 위로 볼록한 포물선이므로 $a<0$
꼭짓점 $(-p, -q)$가 제2사분면 위에 있으므로
$-p<0$, $-q>0$ $\therefore p>0$, $q<0$

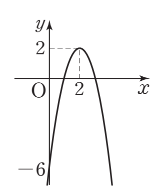
20 $y=ax+b$의 그래프에서 (기울기)$=a<0$, (y절편)$=b>0$
즉, $y=a(x-b)^2$의 그래프는 $a<0$이므로 위로 볼록한 포물선이고, 꼭짓점의 좌표 $(b, 0)$에서 $b>0$이므로 꼭짓점은 x축 위의 점이며 y축의 오른쪽에 있다.
따라서 $y=a(x-b)^2$의 그래프로 알맞은 것은 ③이다.

21 $y=-2x^2-24x-40=-2(x+6)^2+32$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면
$y=-2(x-m+6)^2+32+n$
이때 $y=-2x^2+4x-7=-2(x-1)^2-5$이므로
$-m+6=-1$, $32+n=-5$
$\therefore m=7$, $n=-37$
$\therefore m+n=7+(-37)=-30$

22 $y=2x^2-16x+k+3=2(x-4)^2+k-29$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 꼭짓점이 x축 위에 있다.
이때 꼭짓점의 좌표는 $(4, k-29)$이고, 꼭짓점의 y좌표는 0이므로 $k-29=0$ $\therefore k=29$

23 $y=-x^2+4x+5k+10$의 그래프에서 x^2의 계수가 음수이므로 그래프의 모양이 위로 볼록한 포물선이다.
따라서 이 그래프가 모든 사분면을 지나려면 y축과 만나는 점의 y좌표가 0보다 커야 하므로
$5k+10>0$ $\therefore k>-2$

24 $y=-2x^2+8x-6=-2(x-2)^2+2$의 그래프에서
① 꼭짓점의 좌표는 $(2, 2)$이다.
② 축의 방정식은 $x=2$이다.
③ 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.



④ $y=-2x^2+8x-6$에 $y=0$을 대입하면
$-2x^2+8x-6=0$, $x^2-4x+3=0$
$(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$
즉, x축과 두 점 $(1, 0)$, $(3, 0)$에서 만난다.
⑤ $x>2$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 옳은 것은 ①, ⑤이다.

25 $y=-x^2+3x+4$에 $y=0$을 대입하면
$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$ $\quad\therefore$ B$(-1, 0)$, C$(4, 0)$
$x=0$을 대입하면 $y=4$ $\quad\therefore$ A$(0, 4)$
$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AO}=\frac{1}{2}\times5\times4=10$

26 $y=ax^2+bx+c$로 놓으면 이 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로
$c=3$
즉, $y=ax^2+bx+3$의 그래프가
점 $(-1, 1)$을 지나므로 $1=a-b+3$
$\therefore a-b=-2$ $\quad\cdots$ ㉠
점 $(1, 9)$를 지나므로 $9=a+b+3$
$\therefore a+b=6$ $\quad\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$
따라서 $y=2x^2+4x+3=2(x+1)^2+1$이므로 이 그래프의 축의 방정식은 $x=-1$이고 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 1)$이다.

27 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 두 점 $(-2, 0)$, $(4, 0)$에서 만나므로 $y=a(x+2)(x-4)$로 놓으면 이 그래프가 점 $(0, 4)$를 지나므로
$4=a\times2\times(-4)$, $-8a=4$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$
즉, $y=-\frac{1}{2}(x+2)(x-4)=-\frac{1}{2}x^2+x+4$이므로
$b=1$, $c=4$ $\quad\therefore abc=-\frac{1}{2}\times1\times4=-2$

28 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$
축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0$ $\quad\therefore b<0$
y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $c>0$

29 $\sqrt{a^2}=-a$에서 $a<0$, $\sqrt{b^2}=b$에서 $b>0$
즉, $y=-x^2+ax+b$에서
(i) (이차항의 계수)$=-1<0$이므로 위로 볼록하다.
(ii) (이차항의 계수)<0, $a<0$이므로 그래프의 축은 y축의 왼쪽에 있다.
(iii) $b>0$이므로 y축과의 교점은 x축보다 위쪽에 있다.
따라서 (i)~(iii)에 의해 그래프로 알맞은 것은 ③이다.

P. 88~96 내신 5% 따라잡기

1 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ **2** ②, ⑤ **3** ③ **4** 12
5 P$(2, 1)$ **6** ⑤ **7** $-\frac{1}{4}$
8 $y=-\frac{1}{3}x^2$ **9** B$\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{9}\right)$ **10** $\frac{1}{3}$
11 18 **12** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **13** -15 **14** 18 **15** $\frac{13}{2}$
16 $\frac{4}{9}\le a\le1$ **17** 16 **18** -4 **19** ④
20 5초 **21** ⑤ **22** $y=\frac{1}{3}(x-2)^2+1$ **23** 6
24 12 m **25** 제1사분면 **26** ② **27** ②, ④
28 ① **29** ④ **30** $(-6, 36)$ **31** 8
32 ④ **33** $a=1$, $m=3$, $n=-1$ **34** 1
35 B$\left(5, \frac{21}{2}\right)$ **36** ③ **37** -6
38 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ **39** ⑤ **40** $\frac{1}{30}$
41 $y=-\frac{1}{4}x^2+x+8$ **42** 3 **43** 7 **44** ③
45 ㄱ, ㄷ **46** $a<0$, $b>0$, $c>0$ **47** ③
48 (1) $y=-\frac{2}{3}x^2+8x$ (2) 20 **49** (1) $y=x^2$ (2) 81개
50 66.56 m **51** P$(2, 5)$

1 ㄱ. $y=\frac{x(x-3)}{2}=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$ (이차함수)
ㄴ. 둘레의 길이가 $4\pi x$ cm인 원의 반지름의 길이는 $2x$ cm이므로
$y=\pi\times(2x)^2=4\pi x^2$ (이차함수)
ㄷ. $y=\frac{1}{2}\times(x+x+2)\times2x=2x^2+2x$ (이차함수)
ㄹ. 주어진 원뿔의 옆넓이는 반지름의 길이가 10 cm, 호의 길이가 $2\pi x$ cm인 부채꼴의 넓이와 같으므로
$y=\frac{1}{2}\times10\times2\pi x=10\pi x$ (일차함수)
ㅁ. $y=\frac{1}{3}\times x^2\times12=4x^2$ (이차함수)
따라서 이차함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

2 $y=k(k-1)x^2-12x^2-5x=(k^2-k-12)x^2-5x$
$=(k+3)(k-4)x^2-5x$
이 식이 x에 대한 이차함수이려면 x^2의 계수가 0이 아니어야 한다.
$\therefore k\ne-3$, $k\ne4$
따라서 k의 값이 될 수 없는 것은 ②, ⑤이다.

3 $y=ax^2$의 그래프의 폭이 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프보다 좁고,
$y=\frac{5}{2}x^2$의 그래프보다 넓으므로
$\left|-\frac{1}{3}\right|<|a|<\left|\frac{5}{2}\right|$, $\frac{1}{3}<|a|<\frac{5}{2}$

이때 $a<0$이므로 $-\frac{5}{2}<a<-\frac{1}{3}$

따라서 a의 값으로 알맞은 것은 ③ $-\frac{3}{2}$이다.

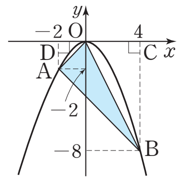
4 $y=ax^2$의 그래프가 점 A$(-2,\ -2)$를 지나므로

$-2=4a$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$

즉, $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프가 점 B$(4,\ b)$를 지나므로

$b=-\frac{1}{2}\times4^2=-8$

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, C라 하면



△OAB

$=$□ABCD$-$△ODA$-$△OBC

$=\frac{1}{2}\times(2+8)\times6-\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times4\times8$

$=30-2-16=12$

5 $y=ax^2$의 그래프가 점 A$(-4,\ 4)$를 지나므로

$4=16a$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$

점 P의 x좌표를 k라 하면 P$\left(k,\ \frac{1}{4}k^2\right)$

(직선 AP의 기울기)$=\dfrac{\frac{1}{4}k^2-4}{k-(-4)}=-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}k^2-8=-k-4,\ \frac{1}{2}k^2+k-4=0,\ k^2+2k-8=0$

$(k+4)(k-2)=0$ $\quad\therefore k=-4$ 또는 $k=2$

이때 두 점 A, P는 서로 다른 점이므로 $k=2$

$\therefore$ P$(2,\ 1)$

6 $y=ax^2$의 그래프가 y축에 대칭이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=2k\,(k>0)$라 하면

B$(-k,\ ak^2)$, C$(k,\ ak^2)$

점 D의 x좌표는 $k+2k=3k$이므로 D$(3k,\ 6k^2)$

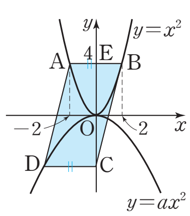
점 C와 점 D의 y좌표는 서로 같으므로 $ak^2=6k^2$

이때 $k\neq0$이므로 $a=6$

7 $y=x^2$에 $y=4$를 대입하면 $4=x^2$ $\quad\therefore x=\pm2$

즉, A$(-2,\ 4)$, B$(2,\ 4)$이므로 $\overline{AB}=4$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$와 y축의 교점을 E라 하면



□ADCB$=\overline{AB}\times\overline{EC}=4\times\overline{EC}=32$

에서 $\overline{EC}=8$ $\quad\therefore$ C$(0,\ -4)$

□ADCB가 평행사변형이므로

$\overline{DC}=\overline{AB}=4$ $\quad\therefore$ D$(-4,\ -4)$

따라서 $y=ax^2$의 그래프가 점 D$(-4,\ -4)$를 지나므로

$-4=16a$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{4}$

8 점 A의 x좌표를 $k\,(k>0)$라 하면

A$\left(k,\ \frac{1}{3}k^2\right)$, B$(k,\ -k^2)$

점 M이 $\overline{AB}$의 중점이므로 점 M의 좌표는

$\left\{\frac{1}{3}k^2+(-k^2)\right\}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}k^2$ $\quad\therefore$ M$\left(k,\ -\frac{1}{3}k^2\right)$

구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2$으로 놓으면

이 그래프가 점 M$\left(k,\ -\frac{1}{3}k^2\right)$을 지나므로 $-\frac{1}{3}k^2=ak^2$

이때 $k\neq0$이므로 $a=-\frac{1}{3}$

$\therefore y=-\frac{1}{3}x^2$

9 점 A의 x좌표를 $k\,(k>0)$라 하면

A$\left(k,\ \frac{1}{2}k^2\right)$, D$(k,\ 2k^2)$

이때 점 C의 y좌표는 점 D의 y좌표와 같으므로 $2k^2$

즉, $y=\frac{1}{2}x^2$에 $y=2k^2$을 대입하면 $2k^2=\frac{1}{2}x^2,\ x^2=4k^2$

이때 $\underline{x>0}$이므로 $x=2k$

↳ 점 C는 제1사분면 위의 점

$\therefore$ C$(2k,\ 2k^2)$, B$\left(2k,\ \frac{1}{2}k^2\right)$

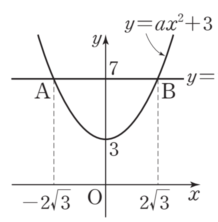
$\overline{AD}=2k^2-\frac{1}{2}k^2=\frac{3}{2}k^2$, $\overline{DC}=2k-k=k$이고

□ABCD가 정사각형이므로 $\overline{AD}=\overline{DC}$에서

$\frac{3}{2}k^2=k,\ k\left(\frac{3}{2}k-1\right)=0$

이때 $k\neq0$이므로 $k=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore$ B$\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{9}\right)$

10 $y=ax^2+3$의 그래프의 축은 y축이므로 점 A와 점 B는 y축에 서로 대칭이다.



이때 $\overline{AB}=4\sqrt{3}$이고 두 점 A, B의 y좌표는 7로 같으므로 오른쪽 그림과 같이 점 A를 제2사분면 위의 점이라 하면

A$(-2\sqrt{3},\ 7)$, B$(2\sqrt{3},\ 7)$

따라서 $y=ax^2+3$의 그래프가 점 B$(2\sqrt{3},\ 7)$을 지나므로

$7=a\times(2\sqrt{3})^2+3,\ 12a=4$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$

11 두 이차함수의 그래프가 모두 점 C$(2,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{5}{4}\times2^2+m$에서 $m=-5$, $0=-2^2+n$에서 $n=4$

따라서 두 점 B, D는 각각 $y=\frac{5}{4}x^2-5$, $y=-x^2+4$의 그래프의 꼭짓점이므로

B$(0,\ -5)$, D$(0,\ 4)$

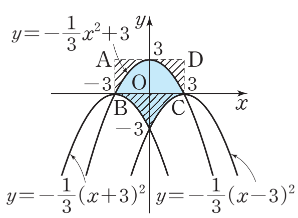
$\therefore$ □ABCD$=$△ACD$+$△ABC

$=\frac{1}{2}\times4\times4+\frac{1}{2}\times4\times5=8+10=18$

12 $y=a(x-p)^2$의 그래프의 축이 y축의 오른쪽에 있으므로
$p>0$
$y=a(x-p)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(p,\ 0)$이고,
$y=-\frac{1}{2}x^2+3$의 그래프가 이 점 $(p,\ 0)$을 지나므로
$0=-\frac{1}{2}p^2+3,\ p^2=6 \qquad \therefore p=\pm\sqrt{6}$
이때 $p>0$이므로 $p=\sqrt{6}$
$y=-\frac{1}{2}x^2+3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 3)$이고,
$y=a(x-\sqrt{6})^2$의 그래프가 이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로
$3=a(-\sqrt{6})^2,\ 6a=3 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$
$\therefore ap=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

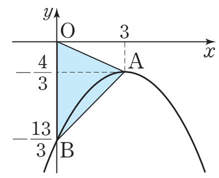
13 (가)에서 $f(x)=a(x-p)^2$으로 놓으면
(나)에서 $|a|=3$이고 (다)에서 $a<0$이므로 $a=-3$
(라)에서 $f(5)=-27$이므로 $-3(5-p)^2=-27$
$(5-p)^2=9,\ p^2-10p+16=0,\ (p-2)(p-8)=0$
$\therefore p=2$ 또는 $p=8$
그런데 $p=8$이면 $y=-3(x-8)^2$에서 $3<x<8$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 (다)를 만족시키지 않는다.
따라서 $p=2$이므로 $f(x)=-3(x-2)^2$
$\therefore f(1)+f(4)=-3\times(-1)^2+(-3)\times2^2$
$=-3+(-12)=-15$

14 $y=-\frac{1}{3}x^2+3,\ y=-\frac{1}{3}(x-3)^2,\ y=-\frac{1}{3}(x+3)^2$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

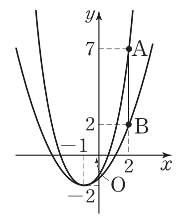


이때 그래프를 평행이동해도 그 모양과 폭은 변하지 않으므로 세 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.
따라서 구하는 넓이는
$6\times3=18$

15 $y=ax+b$의 그래프가 두 점 $(-3,\ 0)$, $(0,\ -2)$를 지나므로
$a=(\text{기울기})=\frac{-2-0}{0-(-3)}=-\frac{2}{3},\ b=(y\text{절편})=-2$
즉, 주어진 이차함수의 식은
$y=-\frac{1}{3}(x-3)^2-\frac{4}{3} \qquad \therefore A\left(3,\ -\frac{4}{3}\right)$
$x=0$일 때, $y=-\frac{1}{3}\times(-3)^2-\frac{4}{3}=-\frac{13}{3}$
$\therefore B\left(0,\ -\frac{13}{3}\right)$
따라서 $y=-\frac{1}{3}(x-3)^2-\frac{4}{3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
$\triangle AOB=\frac{1}{2}\times\frac{13}{3}\times3=\frac{13}{2}$

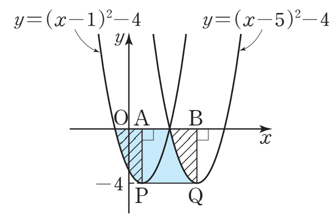


16 오른쪽 그림에서 $y=a(x+1)^2-2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -2)$이고, 이 그래프가 $\overline{AB}$와 만나야 하므로



(i) 점 $A(2,\ 7)$을 지날 때
$7=9a-2 \qquad \therefore a=1$
(ii) 점 $B(2,\ 2)$를 지날 때
$2=9a-2 \qquad \therefore a=\frac{4}{9}$
따라서 (i), (ii)에 의해 a의 값의 범위는 $\frac{4}{9}\le a\le1$

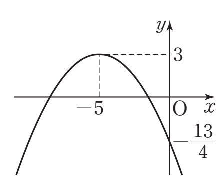
17 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자.



$y=(x-5)^2-4$의 그래프는 $y=(x-1)^2-4$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이는 직사각형 APQB의 넓이와 같고, $P(1,\ -4)$, $Q(5,\ -4)$이므로
(색칠한 부분의 넓이)$=\square APQB$
$=\overline{AB}\times\overline{AP}$
$=(5-1)\times4=16$

18 $y=(x-2)^2$의 그래프는 $y=(x+4)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼 평행이동한 그래프이므로 $\overline{AB}=6$
$\triangle ACB=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times6\times\overline{AC}=12$에서 $\overline{AC}=4$
따라서 $y=(x+4)^2+q$의 그래프는 $y=(x+4)^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프이므로
$q=-4$

19 $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+3$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면
$y=-\frac{1}{4}(-x-2)^2+3=-\frac{1}{4}(x+2)^2+3$
이 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면
$y=-\frac{1}{4}(x+3+2)^2+3=-\frac{1}{4}(x+5)^2+3$
따라서 $y=-\frac{1}{4}(x+5)^2+3$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 그래프는 제2, 3, 4사분면을 지난다.



20 주어진 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 45)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-2)^2+45$로 놓자.

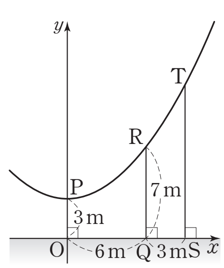
이 그래프가 점 $(0,\ 25)$를 지나므로
$25=4a+45,\ 4a=-20 \qquad \therefore a=-5$
물체가 지면에 떨어지는 순간에 물체의 높이는 0 m이므로
$y=-5(x-2)^2+45$에 $y=0$을 대입하면
$0=-5(x-2)^2+45,\ 5(x-2)^2=45,\ (x-2)^2=9$
$x-2=\pm3 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=5$
이때 $x>0$이므로 $x=5$
따라서 물체를 쏘아 올린 후 지면에 떨어질 때까지 걸리는 시간은 5초이다.

21 $y=(x-p)^2+q$의 그래프의 꼭짓점 $(p,\ q)$가 직선 $y=-2x$ 위에 있으므로 $q=-2p$
즉, $y=(x-p)^2-2p$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로
$2=(1-p)^2-2p,\ p^2-4p-1=0 \qquad \therefore p=2\pm\sqrt{5}$
이때 $p>0$이므로 $p=2+\sqrt{5}$
$\therefore p+q=p+(-2p)=-p=-2-\sqrt{5}$

22 ㈎에서 $y=\frac{1}{3}x^2-4$의 그래프와 모양과 폭이 같으므로 구하는 이차함수의 이차항의 계수는 $\frac{1}{3}$이고, ㈏에서 구하는 그래프의 축의 방정식은 $x=2$이다.
따라서 구하는 이차함수의 식을 $y=\frac{1}{3}(x-2)^2+q$로 놓으면
㈐에서 이 그래프가 점 $(-1,\ 4)$를 지나므로
$4=\frac{1}{3}(-1-2)^2+q,\ 4=3+q \qquad \therefore q=1$
$\therefore y=\frac{1}{3}(x-2)^2+1$
참고 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 축 $x=p$를 기준으로 증가, 감소가 바뀐다.

23 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면
$-y=a(x-p)^2+q \qquad \therefore y=-a(x-p)^2-q$
이 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ -1)$이므로
$p=-3,\ -q=-1$에서 $q=1$
따라서 $y=a(x-p)^2+q=a(x+3)^2+1$의 그래프가 점 $(-1,\ -7)$을 지나므로
$-7=a(-1+3)^2+1,\ 4a=-8 \qquad \therefore a=-2$
$\therefore apq=-2\times(-3)\times1=6$

24 오른쪽 그림과 같이 지점 O가 원점, 지면이 x축, 선분 OP가 y축 위에 있도록 주어진 그림을 좌표평면 위에 나타내면 꼭짓점의 좌표가 $\mathrm{P}(0,\ 3)$이므로 이 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+3$으로 놓자.

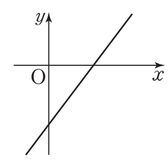


이 그래프가 점 $\mathrm{R}(6,\ 7)$을 지나므로 $7=a\times6^2+3$
$36a=4 \qquad \therefore a=\frac{1}{9}$

점 T의 x좌표가 9이므로 $y=\frac{1}{9}x^2+3$에 $x=9$를 대입하면
$y=\frac{1}{9}\times9^2+3=12 \qquad \therefore \mathrm{T}(9,\ 12)$
따라서 S 지점에서 T 지점까지의 높이는 12 m이다.

25 축의 방정식이 $x=-2a+4$이므로
$-2a+4>0,\ -2a>-4 \qquad \therefore a<2$
이때 꼭짓점의 좌표가 $(-2a+4,\ -5a+13)$이므로
$a<2$에서 $-5a>-10 \qquad \therefore -5a+13>3$
따라서 꼭짓점은 제1사분면 위에 있다.

26 주어진 이차함수의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
꼭짓점 $(p,\ -q)$가 제1사분면 위에 있으므로 $p>0,\ q<0$
직선 $px+qy+a=0$에서 $q\neq0$이므로 $y=-\frac{p}{q}x-\frac{a}{q}$
따라서 (기울기)$=-\frac{p}{q}>0$,
(y절편)$=-\frac{a}{q}<0$이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 $px+qy+a=0$은 제2사분면을 지나지 않는다.



27 $ap<0,\ aq>0$이므로 a와 p는 부호가 서로 다르고, a와 q는 부호가 서로 같으므로
(i) $a>0,\ p<0,\ q>0$일 때
$a>0$이므로 아래로 볼록한 포물선이고,
$p<0,\ q>0$이므로 꼭짓점 $(p,\ q)$는 제2사분면 위에 있다.
(ii) $a<0,\ p>0,\ q<0$일 때
$a<0$이므로 위로 볼록한 포물선이고,
$p>0,\ q<0$이므로 꼭짓점 $(p,\ q)$는 제4사분면 위에 있다.
따라서 (i), (ii)에 의해 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 될 수 있는 것은 ②, ④이다.

28 $y=ax+b$의 그래프가 두 점 $(-2,\ 0)$, $(0,\ -3)$을 지나므로
$a=(\text{기울기})=\frac{-3-0}{0-(-2)}=-\frac{3}{2},\ b=(y\text{절편})=-3$
즉, 주어진 이차함수의 식은
$y=3x^2-\frac{3}{2}x+4=3\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{61}{16}$
따라서 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{61}{16}\right)$이므로 꼭짓점은 제1사분면 위의 점이다.

29 $y=2x^2-3x+4a=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}+4a$
이 그래프가 아래로 볼록하고 x축과 만나지 않으므로
(꼭짓점의 y좌표)$=-\frac{9}{8}+4a>0,\ 4a>\frac{9}{8} \qquad \therefore a>\frac{9}{32}$
또 이 그래프가 점 $(a,\ a^2+6)$을 지나므로
$a^2+6=2a^2-3a+4a,\ a^2+a-6=0$
$(a+3)(a-2)=0 \qquad \therefore a=-3$ 또는 $a=2$
이때 $a>\frac{9}{32}$이므로 $a=2$

30 $y=-x^2+4kx+k+3=-(x^2-4kx)+k+3$

$=-(x^2-4kx+4k^2)+k+3+4k^2$

$=-(x-2k)^2+4k^2+k+3$ $\cdots$ ㉠

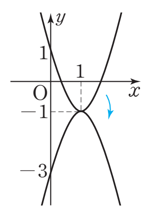
이 그래프가 $x>-6$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하고, $x<-6$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로 축의 방정식은 $x=-6$이다.

㉠에서 그래프의 축의 방정식이 $x=2k$이므로

$2k=-6$ $\therefore k=-3$

따라서 $y=-(x-2k)^2+4k^2+k+3=-(x+6)^2+36$이므로 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-6, 36)$이다.

31 $y=2x^2-4x+1=2(x-1)^2-1$의 그래프를 꼭짓점을 중심으로 $180°$ 회전시킨 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 이 그래프의 식은

$y=-2(x-1)^2-1$이고, 이 그래프를 y축의 방향으로 h만큼 평행이동하면

$y=-2(x-1)^2-1+h$

이 그래프가 점 $(3, 0)$을 지나므로

$0=-2(3-1)^2-1+h$ $\therefore h=9$

즉, $y=-2(x-1)^2+8$에 $y=0$을 대입하면

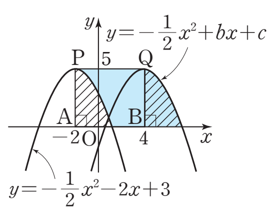
$0=-2(x-1)^2+8$, $(x-1)^2=4$

$x-1=\pm2$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 $y=-2(x-1)^2+8$의 그래프가 x축과 만나는 두 점이 $(-1, 0)$, $(3, 0)$이므로 $k=-1$

$\therefore h+k=9+(-1)=8$

32 $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+3=-\frac{1}{2}(x+2)^2+5$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 5)$이고, 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 서로 같으므로



(색칠한 부분의 넓이)

$=\square PABQ=5\times\overline{AB}=30$

$\therefore \overline{PQ}=\overline{AB}=6$

따라서 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(4, 5)$이므로

$y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+5=-\frac{1}{2}x^2+4x-3$

$\therefore b=4$, $c=-3$ $\therefore b-c=4-(-3)=7$

33 $y=-x^2-2x+1=-(x+1)^2+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

$y=-(x-m+1)^2+2+n$

이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=-(x-m+1)^2+2+n$

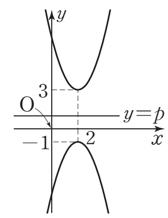
$\therefore y=(x-m+1)^2-2-n$

이 그래프가 $y=ax^2-4x+3$의 그래프와 일치하므로 $a=1$

이때 $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$이므로

$-m+1=-2$, $-2-n=-1$ $\therefore m=3$, $n=-1$

34 $y=x^2-4x+7=(x-2)^2+3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2, 3)$이고, $y=-x^2+4x-5=-(x-2)^2-1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2, -1)$이다. 따라서 두 그래프가 직선 $y=p$에 대하여 서로 대칭이므로 두 그래프의 꼭짓점도 직선 $y=p$에 대하여 대칭이다.



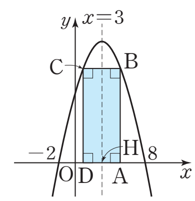
$\therefore p=\frac{3+(-1)}{2}=1$

35 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x+8=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{25}{2}$

두 점 A, B의 좌표를 각각

$A(k, 0)$, $B\left(k, -\frac{1}{2}k^2+3k+8\right)$

이라 하고, 축의 방정식이 $x=3$이므로 축과 x축이 만나는 점을 H라 하면



$\overline{AD}=2\overline{AH}=2(k-3)=2k-6$

또 $\overline{AB}=-\frac{1}{2}k^2+3k+8$이므로

($\square$ABCD의 둘레의 길이)

$=2(\overline{AD}+\overline{AB})=2\left(2k-6-\frac{1}{2}k^2+3k+8\right)$

$=-k^2+10k+4$

즉, $-k^2+10k+4=29$이므로

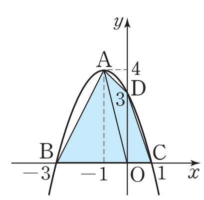
$k^2-10k+25=0$, $(k-5)^2=0$ $\therefore k=5$

$\therefore B\left(5, \frac{21}{2}\right)$

36 $y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$이므로

$A(-1, 4)$, $D(0, 3)$

$y=-x^2-2x+3$에 $y=0$을 대입하면



$-x^2-2x+3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 $B(-3, 0)$, $C(1, 0)$이므로

$\square$ABCD

$=\triangle ABO+\triangle AOD+\triangle DOC$

$=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times3\times1+\frac{1}{2}\times1\times3=9$

37 $y=x^2-4x-12$에 $y=0$을 대입하면

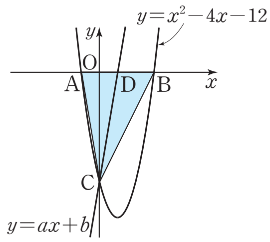
$x^2-4x-12=0$, $(x+2)(x-6)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=6$ $\therefore A(-2, 0)$, $B(6, 0)$

$y=x^2-4x-12$에 $x=0$을 대입하면

$y=-12$ $\therefore C(0, -12)$

이때 점 C를 지나고 △ACB의 넓이를 이등분하는 직선 $y=ax+b$가 x축과 만나는 점을 D라 하면 점 D는 $\overline{AB}$의 중점이므로



D(2, 0)

따라서 직선 $y=ax+b$는 두 점 C(0, -12), D(2, 0)을 지나므로

$a=(\text{기울기})=\dfrac{0-(-12)}{2-0}=6$, $b=(y\text{절편})=-12$

$\therefore a+b=6+(-12)=-6$

38 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2, -4)$이므로 $y=a(x+2)^2-4$로 놓자.

이 그래프가 점 $(0, -3)$을 지나므로

$-3=4a-4 \qquad \therefore a=\dfrac{1}{4}$

즉, $y=\dfrac{1}{4}(x+2)^2-4=\dfrac{1}{4}x^2+x-3$이므로 $b=1$, $c=-3$

따라서

$y=-bx^2+cx+a=-x^2-3x+\dfrac{1}{4}=-\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{5}{2}$

이므로 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$이다.

39 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(0, -3)$을 지나므로

$c=-3$

즉, $y=ax^2+bx-3$의 그래프가

점 $(-4, -3)$을 지나므로

$-3=16a-4b-3$, $4a-b=0 \qquad \cdots ㉠$

점 $(1, -8)$을 지나므로

$-8=a+b-3$, $a+b=-5 \qquad \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-4$이므로

$y=-x^2-4x-3$

① $a+b+c=-1+(-4)+(-3)=-8$

② $-15\neq-6^2-4\times6-3$

③ $y=-x^2-4x-3=-(x+2)^2+1$

즉, 축의 방정식은 $x=-2$이다.

④ 평행이동하여 이차함수 $y=-x^2$의 그래프와 포갤 수 있다.

⑤ $y=-x^2-4x-3$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=-x^2-4x-3$

$\therefore y=x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

40 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 두 점 $(-5, 0)$, $(3, 0)$에서 만나므로 $y=a(x+5)(x-3)$으로 놓으면

$y=a(x^2+2x-15)=a(x+1)^2-16a$

이 그래프의 꼭짓점 $(-1, -16a)$가 직선 $y=-3x+1$ 위에 있으므로

$-16a=3+1 \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{4}$

따라서

$y=-\dfrac{1}{4}(x^2+2x-15)=-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{15}{4}$

이므로 $b=-\dfrac{1}{2}$, $c=\dfrac{15}{4}$

$\therefore \dfrac{ab}{c}=\left\{\left(-\dfrac{1}{4}\right)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}\div\dfrac{15}{4}=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{4}{15}=\dfrac{1}{30}$

41 $\overline{BC}=8-(-4)=12$이므로 △ABC$=48$에서

$\dfrac{1}{2}\times12\times\overline{AO}=48 \qquad \therefore \overline{AO}=8 \qquad \therefore$ A(0, 8)

$y=a(x+4)(x-8)$로 놓으면 이 그래프가 점 A(0, 8)을 지나므로

$8=a\times4\times(-8) \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore y=-\dfrac{1}{4}(x+4)(x-8)=-\dfrac{1}{4}(x^2-4x-32)$

$=-\dfrac{1}{4}x^2+x+8$

42 주어진 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 -2이므로 축의 방정식은 $x=-2$이고, $\overline{AB}=6$이므로 축에서 두 점 A, B까지의 거리는 각각 3이다.

$\therefore$ A$(-5, 0)$, B(1, 0)

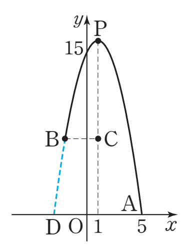
$\therefore y=\dfrac{1}{3}(x+5)(x-1)=\dfrac{1}{3}(x^2+4x-5)$

$=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3}$

따라서 $a=\dfrac{4}{3}$, $b=-\dfrac{5}{3}$이므로

$a-b=\dfrac{4}{3}-\left(-\dfrac{5}{3}\right)=3$

43 오른쪽 그림과 같이 이차함수의 그래프가 y축의 왼쪽에서 x축과 만나는 점을 D라 하면 축의 방정식이 $x=1$이므로 점 D의 x좌표는 $1-4=-3$



$\therefore$ D$(-3, 0)$

그래프가 두 점 A(5, 0), D$(-3, 0)$을 지나므로 $y=a(x-5)(x+3)$으로 놓으면

이 그래프가 점 (0, 15)를 지나므로

$15=-15a \qquad \therefore a=-1$

$\therefore y=-(x-5)(x+3)=-x^2+2x+15$

이때 점 B의 x좌표는 $1-3=-2$이므로

$y=-x^2+2x+15$에 $x=-2$를 대입하면

$y=-4-4+15=7$

따라서 건물의 높이는 7이다.

44 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

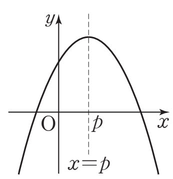
축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $ab>0 \qquad \therefore b>0$

y축과의 교점이 x축보다 아래쪽에 있으므로 $c<0$

즉, $y=cx^2+bx+a$의 그래프는 $c<0$이므로 위로 볼록한 포물선이고, $cb<0$이므로 축이 y축의 오른쪽에 있고, $a>0$이므로 y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있다.
따라서 그래프로 알맞은 것은 ③이다.

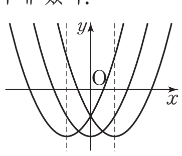
45 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서
위로 볼록하므로 $a<0$
축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0$ $\quad\therefore b>0$
y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $c>0$
ㄱ. $abc<0$
ㄴ. $\dfrac{b}{2a}<0$
ㄷ. 주어진 그림에서 $x=1$일 때 $y>0$이므로
$y=ax^2+bx+c$에 $x=1$을 대입하면 $y=a+b+c>0$
ㄹ. 주어진 그림에서 $x=\dfrac{1}{2}$일 때 $y>0$이므로
$y=ax^2+bx+c$에 $x=\dfrac{1}{2}$을 대입하면
$y=\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{2}b+c=\dfrac{1}{4}(a+2b+4c)>0$
$\therefore a+2b+4c>0$
ㅁ. $b^2>0$, $ac<0$이므로 $b^2-4ac>0$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

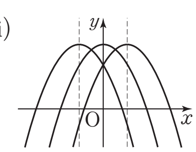
46 (가), (나)를 모두 만족시키는 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0$
$\therefore b>0$
y축과의 교점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $c>0$

47 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 모든 사분면을 지나는 경우는 다음 그림과 같다. 이때 원점 O는 항상 포물선의 안쪽에 있다.

(i)


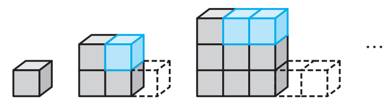
(ii)


(i) $a>0$일 때, (y축과의 교점의 y좌표)$=c<0$
(ii) $a<0$일 때, (y축과의 교점의 y좌표)$=c>0$
따라서 (i), (ii)에 의해 항상 옳은 것은 ③ $ac<0$이다.

48 (1) $\triangle ASR \backsim \triangle ABC$ (AA 닮음)이므로
$\overline{SR} : \overline{BC} = \overline{AI} : \overline{AH}$에서 $x : 12 = \overline{AI} : 8$
$\therefore \overline{AI}=\dfrac{2}{3}x$
따라서 $\overline{IH}=8-\dfrac{2}{3}x$이므로
$y=x\left(8-\dfrac{2}{3}x\right)=-\dfrac{2}{3}x^2+8x$

(2) $y=-\dfrac{2}{3}x^2+8x$에 $y=24$를 대입하면
$24=-\dfrac{2}{3}x^2+8x$, $\dfrac{2}{3}x^2-8x+24=0$
$x^2-12x+36=0$, $(x-6)^2=0$ $\quad\therefore x=6$
따라서 $\overline{SR}=6$, $\overline{IH}=4$이므로 직사각형 PQRS의 둘레의 길이는 $2\times(6+4)=20$

49 길잡이 각 단계마다 블록의 위치를 적절히 옮겨서 어떤 규칙으로 블록의 개수가 늘어나는지 생각해 본다.

(1)


[1단계] [2단계] [3단계]

위의 그림과 같이 블록을 옮겨서 생각하면 각 단계에서 사용한 블록의 개수는 다음과 같다.
[1단계] $1^2=1$(개), [2단계] $2^2=4$(개), [3단계] $3^2=9$(개), …, [x단계] x^2개
$\therefore y=x^2$

(2) $y=x^2$에 $x=9$를 대입하면 $y=9^2=81$
따라서 [9단계]에서 사용한 블록의 개수는 81개이다.

50 길잡이 자동차의 제동 거리가 속력의 제곱에 비례함을 이용하여 이차항의 계수를 상수 a로 놓고 이차함수의 식을 세운다.
제동 거리를 y m, 자동차의 속력을 시속 x km라 하면 제동 거리는 자동차의 속력의 제곱에 비례하므로
$y=ax^2$ (a는 상수)
시속 50 km로 달리는 자동차의 제동 거리가 20 m이므로
$20=a\times50^2$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{125}$
즉, $y=\dfrac{1}{125}x^2$이므로 시속 80 km로 달리는 자동차의 제동 거리는 $y=\dfrac{1}{125}\times80^2=51.2$(m)
따라서 빗길에서 이 자동차의 제동 거리는
$51.2+51.2\times0.3=66.56$(m)

51 길잡이 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓고 이 그래프가 지나는 점의 좌표를 각각 대입하여 a, b, c의 값을 구한다.
구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓으면
이 그래프가 점 $\left(0,\ \dfrac{7}{2}\right)$을 지나므로 $c=\dfrac{7}{2}$
점 $(-2,\ 5)$를 지나므로 $5=4a-2b+\dfrac{7}{2}$ $\quad\cdots$ ㉠
점 $(10,\ 11)$을 지나므로 $11=100a+10b+\dfrac{7}{2}$ $\quad\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{8}$, $b=-\dfrac{1}{2}$
즉, 이차함수의 식은 $y=\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}=\dfrac{1}{8}(x-2)^2+3$
따라서 초점 P가 포물선의 축 위에 존재하므로 초점 P의 x좌표는 2이고, y좌표는 5이다.
$\therefore$ P(2, 5)

P. 97~99 내신 1% 뛰어넘기

01 4　**02** $\frac{9}{4}$　**03** 3π　**04** 4

05 $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2+5$　**06** -12

07 $a=1,\ b=8$　**08** A$(-1,\ 0)$, B$(4,\ 0)$

09 $x=b$ 또는 $x=\frac{a+c}{2}$

01 길잡이 직선 AB의 기울기를 이용하여 상수 a의 값을 먼저 구한다.

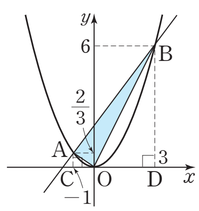
$A\left(a,\ \frac{2}{3}a^2\right)$, $B\left(a+4,\ \frac{2}{3}(a+4)^2\right)$이고

직선 AB의 기울기가 $\frac{4}{3}$이므로 $\dfrac{\frac{2}{3}(a+4)^2-\frac{2}{3}a^2}{(a+4)-a}=\frac{4}{3}$

에서 $\dfrac{\frac{2}{3}(8a+16)}{4}=\frac{4}{3}$

$2(8a+16)=16,\ 16a=-16$　$\therefore a=-1$

따라서 $A\left(-1,\ \frac{2}{3}\right)$, $B(3,\ 6)$이므로



오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면

$\triangle AOB$

$=\square ACDB-\triangle OAC-\triangle ODB$

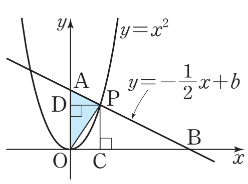
$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}+6\right)\times4-\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times3\times6$

$=\frac{40}{3}-\frac{1}{3}-9=4$

02 길잡이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하면 $\triangle AOB$에서 $\overline{AO}\,/\!/\,\overline{PC}$이므로 평행선과 선분의 길이의 비를 이용한다.

직선 $y=-\frac{1}{2}x+b$에서 (x절편)$=2b$, (y절편)$=b$이므로

$A(0,\ b)$, $B(2b,\ 0)$



오른쪽 그림과 같이 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면

$\triangle AOB$에서

$\overline{AO}\,/\!/\,\overline{PC}$이므로

$\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{OC}:\overline{CB}=1:3$

$\therefore \overline{OC}=\frac{1}{4}\overline{OB}=\frac{1}{4}\times2b=\frac{b}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{b}{2},\ \frac{b^2}{4}\right)$이고, 직선 $y=-\frac{1}{2}x+b$가

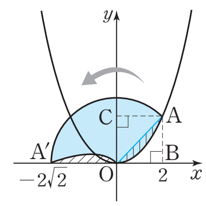
점 P를 지나므로 $\frac{b^2}{4}=-\frac{1}{2}\times\frac{b}{2}+b$

$b^2-3b=0,\ b(b-3)=0$　$\therefore b=0$ 또는 $b=3$

이때 $b>0$이므로 $b=3$

$\therefore \triangle AOP=\frac{1}{2}\times\overline{AO}\times\overline{DP}=\frac{1}{2}\times b\times\frac{b}{2}=\frac{b^2}{4}=\frac{9}{4}$

03 길잡이 $\overline{OA}$를 그으면 색칠한 부분의 넓이는 부채꼴 A′OA의 넓이와 같음을 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$를 그으면 빗금 친 부분의 넓이는 서로 같으므로 색칠한 부분의 넓이는 부채꼴 A′OA의 넓이와 같다. 이때 점 A에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하면 $A(2,\ 2)$이므로

$\square OBAC$는 한 변의 길이가 2인 정사각형이고 $\overline{OA}$는 그 대각선이므로 $\angle AOB=45°$이다.

즉, 부채꼴 A′OA의 반지름의 길이는

$\overline{OA}=\overline{OA'}=2\sqrt{2}$

중심각의 크기는

$\angle A'OA=180°-45°=135°$

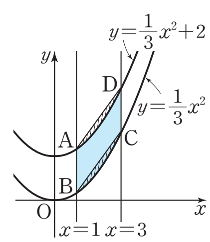
$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)$=$(부채꼴 A′OA의 넓이)

$=\pi\times(2\sqrt{2})^2\times\frac{135}{360}$

$=\pi\times8\times\frac{3}{8}$

$=3\pi$

04 길잡이 그래프를 평행이동해도 그 모양과 폭은 변하지 않으므로 적당한 보조선을 그어 색칠한 부분과 넓이가 같은 도형을 찾아본다.



$y=\frac{1}{3}x^2+2$의 그래프는 $y=\frac{1}{3}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

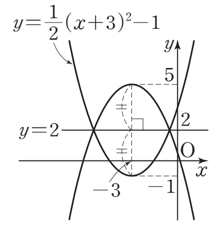
이때 그래프를 평행이동해도 그 모양과 폭은 변하지 않으므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 같고, $\square ABCD$는 평행사변형이다.

따라서 $\overline{AB}=2$이고, 두 직선 $x=1$과 $x=3$ 사이의 거리는 $3-1=2$이므로

(구하는 넓이)$=\square ABCD$

$=2\times2=4$

05 길잡이 대칭이동한 그래프는 대칭하기 전의 그래프와 폭이 같음을 이용한다.



오른쪽 그림에서 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-1$의 그래프를 직선 $y=2$에 대하여 대칭이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ 5)$이다.

또 대칭이동한 그래프는 대칭이동하기 전의 그래프와 폭은 같고, 위로 볼록한 포물선이므로 이차항의 계수는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=-\frac{1}{2}(x+3)^2+5$

06 길잡이 먼저 $y=x^2-6x+5$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리를 구한다.

$y=x^2-6x+5$에 $y=0$을 대입하면

$0=x^2-6x+5$, $(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

즉, $y=x^2-6x+5$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표는 $(1, 0)$, $(5, 0)$이므로 이 두 점 사이의 거리는 4이다.

$y=x^2-6x+5=(x-3)^2-4$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면

$y=(x-3)^2-4+q$

이 그래프의 축의 방정식은 $x=3$이고, 이 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는 $2\times4=8$이므로 x축과 만나는 두 점의 좌표는 $(-1, 0)$, $(7, 0)$이다.

따라서 $y=(x-3)^2-4+q$에 $x=7$, $y=0$을 대입하면

$0=16-4+q$ $\quad\therefore q=-12$

07 길잡이 $\triangle$CAO와 $\triangle$COB는 높이가 $\overline{CO}$로 같으므로 밑변의 길이의 비는 넓이의 비와 같다. 따라서 $\overline{AO}:\overline{BO}=1:2$이다.

$\triangle$CAO와 $\triangle$COB는 높이가 $\overline{CO}$로 같고, 넓이의 비가 $1:2$이므로 $\overline{AO}:\overline{BO}=1:2$

$A(-k, 0)$, $B(2k, 0)$ $(k>0)$이라 하면

$y=-\frac{1}{4}x^2+ax+b=-\frac{1}{4}(x+k)(x-2k)$

$=-\frac{1}{4}(x^2-kx-2k^2)=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{9}{16}k^2$

이 그래프의 꼭짓점의 y좌표가 9이므로

$\frac{9}{16}k^2=9$, $k^2=16$ $\quad\therefore k=\pm4$

이때 $k>0$이므로 $k=4$

따라서 $y=-\frac{1}{4}(x^2-4x-32)=-\frac{1}{4}x^2+x+8$이므로

$a=1$, $b=8$

08 길잡이 두 삼각형의 밑변의 길이가 같으면 높이의 비는 넓이의 비와 같음을 이용한다.

$y=2x^2-6x+k$에 $x=0$을 대입하면 $y=k$

$\therefore C(0, k)$ $(k<0)$

$y=2x^2-6x+k=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+k-\frac{9}{2}$

$\therefore D\left(\frac{3}{2}, k-\frac{9}{2}\right)$ $\left(k-\frac{9}{2}<0\right)$

이때 $\triangle$ACB와 $\triangle$ADB는 밑변의 길이가 $\overline{AB}$로 같으므로 두 삼각형의 높이의 비는 넓이의 비와 같다.

즉, $|k|:\left|k-\frac{9}{2}\right|=16:25$에서

$-k:\left(-k+\frac{9}{2}\right)=16:25$

$-25k=-16k+72$, $-9k=72$ $\quad\therefore k=-8$

따라서 $y=2x^2-6x-8$에 $y=0$을 대입하면

$2x^2-6x-8=0$, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

$\therefore A(-1, 0)$, $B(4, 0)$

09 길잡이 이차항의 계수가 1이고, x축과 만나는 두 점의 x좌표가 각각 α, β인 이차함수의 그래프의 식 ⇨ $y=(x-\alpha)(x-\beta)$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 각각 a, b이고 이차항의 계수는 1이므로

$f(x)=(x-a)(x-b)$

이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 각각 b, c이고 이차항의 계수는 1이므로

$g(x)=(x-b)(x-c)$

따라서 $f(x)+g(x)=0$에서

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)=0$

$(x-b)(2x-a-c)=0$ $\quad\therefore x=b$ 또는 $x=\frac{a+c}{2}$

P. 100~101 **6 서술형 완성하기**

[과정은 풀이 참조]

1 $A\left(-\frac{4}{9}, \frac{16}{81}\right)$ **2** $a=-5$, $b=68$ **3** $\frac{21}{8}$ m
4 $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ **5** -6 **6** 제3사분면과 제4사분면
7 2 **8** $\frac{4}{3}$

1 점 B의 x좌표를 a라 하면 $B(a, a^2)$이고,

$y=x^2$의 그래프는 y축에 대칭이므로 $A(-a, a^2)$

이때 점 C는 점 B와 x좌표가 같고, $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프 위의 점이므로 $C\left(a, -\frac{1}{2}a^2\right)$ $\cdots$ (i)

즉, $\overline{AB}=a-(-a)=2a$,

$\overline{BC}=a^2-\left(-\frac{1}{2}a^2\right)=\frac{3}{2}a^2$이므로 $\cdots$ (ii)

$2a:\frac{3}{2}a^2=3:1$, $\frac{9}{2}a^2=2a$, $9a^2-4a=0$

$a(9a-4)=0$ $\quad\therefore a=0$ 또는 $a=\frac{4}{9}$

이때 점 B가 제1사분면 위의 점이므로 $a>0$ $\quad\therefore a=\frac{4}{9}$

$\therefore A\left(-\frac{4}{9}, \frac{16}{81}\right)$ $\cdots$ (iii)

채점 기준	비율
(i) 세 점 A, B, C의 좌표를 문자를 사용하여 나타내기	30 %
(ii) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 길이를 문자를 사용하여 나타내기	30 %
(iii) 점 A의 좌표 구하기	40 %

2 $y=-2(x-1)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면

$y=-2(x-a-1)^2+4$ $\cdots$ (i)

이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

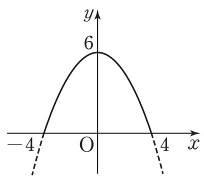
$-y=-2(x-a-1)^2+4$

$\therefore y=2(x-a-1)^2-4$ $\cdots$ (ii)

이 그래프가 점 $(-1,\ 14)$를 지나므로
$14=2(-a-2)^2-4,\ a^2+4a-5=0$
$(a+5)(a-1)=0 \qquad \therefore a=-5$ 또는 $a=1$
이때 $a<0$이므로 $a=-5$ … (iii)
따라서 $y=2(x+4)^2-4$의 그래프가 점 $(2,\ b)$를 지나므로
$b=2\times(2+4)^2-4=68$ … (iv)

채점 기준	비율
(i) 평행이동한 그래프의 식 구하기	30 %
(ii) 대칭이동한 그래프의 식 구하기	30 %
(iii) a의 값 구하기	20 %
(iv) b의 값 구하기	20 %

3 분수대의 물줄기를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 이때 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 6)$이므로 … (i)

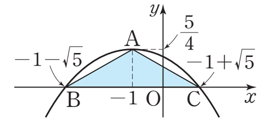


$y=ax^2+6$으로 놓자.
이 그래프가 점 $(4,\ 0)$을 지나므로
$0=16a+6 \qquad \therefore a=-\frac{3}{8}$
$\therefore y=-\frac{3}{8}x^2+6$ … (ii)
이때 폭의 중점에서 3 m 떨어진 지점은 x좌표가 3 또는 -3인 지점이고, 물줄기의 그래프는 y축에 대칭이므로 이 두 지점의 y좌표는 서로 같다.
즉, $y=-\frac{3}{8}x^2+6$에 $x=3$을 대입하면
$y=-\frac{3}{8}\times3^2+6=\frac{21}{8}$
따라서 폭의 중점에서 3 m 떨어진 지점에서의 물줄기의 높이는 $\frac{21}{8}$ m이다. … (iii)

채점 기준	비율
(i) 꼭짓점의 좌표 구하기	30 %
(ii) 이차함수의 식 구하기	40 %
(iii) 폭의 중점에서 3 m 떨어진 지점에서의 물줄기의 높이 구하기	30 %

4 축의 방정식이 $x=-1$이므로 주어진 이차함수의 식을 $y=a(x+1)^2+q$로 놓으면 이 그래프가
점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $1=a+q$ … ㉠
점 $(2,\ -1)$을 지나므로 $-1=9a+q$ … ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{4},\ q=\frac{5}{4}$
즉, $y=-\frac{1}{4}(x+1)^2+\frac{5}{4}$이므로 … (i)
$\mathrm{A}\left(-1,\ \frac{5}{4}\right)$ … (ii)
x축과의 교점의 y좌표는 0이므로 $0=-\frac{1}{4}(x+1)^2+\frac{5}{4}$
$(x+1)^2=5,\ x+1=\pm\sqrt{5} \qquad \therefore x=-1\pm\sqrt{5}$

$\therefore \mathrm{B}(-1-\sqrt{5},\ 0)$,
$\mathrm{C}(-1+\sqrt{5},\ 0)$
(또는 $\mathrm{B}(-1+\sqrt{5},\ 0)$,
$\mathrm{C}(-1-\sqrt{5},\ 0)$) … (iii)



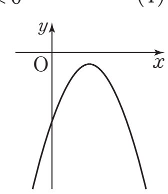
$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\{(-1+\sqrt{5})-(-1-\sqrt{5})\}\times\frac{5}{4}$
$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{5}{4}=\frac{5\sqrt{5}}{4}$ … (iv)

채점 기준	비율
(i) 이차함수의 식 구하기	30 %
(ii) 점 A의 좌표 구하기	10 %
(iii) 두 점 B, C의 좌표 구하기	30 %
(iv) △ABC의 넓이 구하기	30 %

5 $y=\frac{1}{2}x^2-kx+k+1=\frac{1}{2}(x^2-2kx+k^2)+k+1-\frac{1}{2}k^2$
$=\frac{1}{2}(x-k)^2-\frac{1}{2}k^2+k+1$ … (i)
이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(k,\ -\frac{1}{2}k^2+k+1\right)$이고,
직선 $3x-y=5$가 이 꼭짓점을 지나므로
$3k-\left(-\frac{1}{2}k^2+k+1\right)=5,\ k^2+4k-12=0$
$(k+6)(k-2)=0 \qquad \therefore k=-6$ 또는 $k=2$ … (ii)
㉠ $k=-6$일 때, $y=\frac{1}{2}(x+6)^2-23$이므로 이 그래프는 모든 사분면을 지난다.
㉡ $k=2$일 때, $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$이므로 이 그래프는 제1사분면과 제2사분면을 지난다.
따라서 ㉠, ㉡에서 $k=-6$ … (iii)

채점 기준	비율
(i) 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 나타내기	30 %
(ii) k에 대한 이차방정식 풀기	40 %
(iii) 그래프가 모든 사분면을 지날 때의 k의 값 구하기	30 %

6 $y=abx^2+bcx+abc$의 그래프에서
위로 볼록하므로 $ab<0$ … ㉠
축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $ab\times bc>0$
$\therefore bc<0$ ($\because ab<0$) … ㉡
(y축과 만나는 점의 y좌표)$=abc>0$ … ㉢
㉠, ㉢에서 $c<0$, ㉡에서 $b>0$, ㉠에서 $a<0$ … (i)
이때 $y=a(x+c)^2-b$의 그래프는 $a<0$이므로 위로 볼록하고, $-c>0,\ -b<0$에서 꼭짓점 $(-c,\ -b)$는 제4사분면 위에 있으므로 오른쪽 그림과 같다. … (ii)



따라서 이 그래프가 지나는 사분면은 제3사분면과 제4사분면이다. … (iii)

채점 기준	비율
(i) a, b, c의 부호 구하기	30 %
(ii) 이차함수 $y=a(x+c)^2-b$의 그래프 그리기	40 %
(iii) 이차함수 $y=a(x+c)^2-b$의 그래프가 지나는 사분면 구하기	30 %

채점 기준	비율
(i) 두 점 A, B의 좌표 구하기	20 %
(ii) 점 P의 좌표 구하기	40 %
(iii) □AOPB의 넓이 구하기	40 %

7 $y=\frac{1}{2}x^2$에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면 $y=\frac{1}{2}$, $y=2$

$\therefore$ $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, $B(2, 2)$ … (i)

점 P의 좌표를 $P\left(k, \frac{1}{2}k^2\right)$ $(k>0)$이라 하면

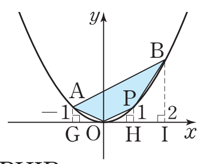
$\overline{AB}\,/\!/\,\overline{OP}$에서

(직선 AB의 기울기)=(직선 OP의 기울기)이므로

$\dfrac{2-\frac{1}{2}}{2-(-1)}=\dfrac{\frac{1}{2}k^2}{k}$, $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}k$ $\quad\therefore k=1$

$\therefore$ $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ … (ii)

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, P, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 G, H, I라 하면



□AOPB

=□AGIB−△AGO−△POH−□PHIB

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+2\right)\times3-\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}$

$\quad-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+2\right)\times1$

$=\frac{15}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}=2$ … (iii)

8 $f(x)=ax^2+3$으로 놓으면

이 그래프가 점 Q(3, 0)을 지나므로

$0=9a+3$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{3}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{3}x^2+3$ … (i)

$g(x)=b(x-3)^2$으로 놓으면

이 그래프가 점 P(0, 3)을 지나므로

$3=b(0-3)^2$ $\quad\therefore b=\frac{1}{3}$

$\therefore g(x)=\frac{1}{3}(x-3)^2$ … (ii)

두 점 A, B의 x좌표가 1이므로

$f(1)=-\frac{1}{3}\times1^2+3=\frac{8}{3}$, $g(1)=\frac{1}{3}(1-3)^2=\frac{4}{3}$

따라서 $A\left(1, \frac{8}{3}\right)$, $B\left(1, \frac{4}{3}\right)$이므로

$\overline{AB}=\frac{8}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$ … (iii)

채점 기준	비율
(i) $y=f(x)$의 식 구하기	40 %
(ii) $y=g(x)$의 식 구하기	40 %
(iii) $\overline{AB}$의 길이 구하기	20 %

MEMO