유형만렙 LITE

정답과 해설

공통수학2

01 평면좌표

개념유형

9~11쪽

001 답 4

$\overline{AB}=|6-2|=4$

002 답 6

$\overline{AB}=|4-(-2)|=6$

003 답 7

$\overline{AB}=|-2-5|=7$

004 답 5

$\overline{AB}=|-5-(-10)|=5$

005 답 3

$\overline{OA}=|3-0|=3$

006 답 8

$\overline{OA}=|-8-0|=8$

007 답 $\sqrt{13}$

$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$

008 답 $\sqrt{5}$

$\overline{AB}=\sqrt{(1-0)^2+\{-3-(-5)\}^2}=\sqrt{5}$

009 답 13

$\overline{AB}=\sqrt{\{9-(-3)\}^2+(7-2)^2}=13$

010 답 $2\sqrt{10}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-4)^2+\{1-(-1)\}^2}=2\sqrt{10}$

011 답 $2\sqrt{2}$

$\overline{AB}=\sqrt{\{-6-(-8)\}^2+\{-3-(-1)\}^2}=2\sqrt{2}$

012 답 $2\sqrt{5}$

$\overline{OA}=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$

013 답 25, 7, 7, 7

014 답 -3, 5

$\sqrt{(-1-3)^2+(1-a)^2}=4\sqrt{2}$이므로 양변을 제곱하면

$16+(1-a)^2=32$, $a^2-2a-15=0$

$(a+3)(a-5)=0 \qquad \therefore a=-3$ 또는 $a=5$

015 답 1

$\sqrt{(-1-a)^2+(2a-1-2)^2}=\sqrt{5}$이므로 양변을 제곱하면

$(a+1)^2+(2a-3)^2=5$, $a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0 \qquad \therefore a=1$

016 답 -1, 2

$\sqrt{(a+1)^2+(a+1-3)^2}=3$이므로 양변을 제곱하면

$(a+1)^2+(a-2)^2=9$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=2$

017 답 -8, 6

$\sqrt{(a+4-2)^2+(a-2+2)^2}=10$이므로 양변을 제곱하면

$(a+2)^2+a^2=100$, $a^2+2a-48=0$

$(a+8)(a-6)=0 \qquad \therefore a=-8$ 또는 $a=6$

018 답 16, -3, -3, 4, 3, 3

019 답 $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, $\mathrm{Q}(0, -4)$

$\mathrm{P}(a, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$a^2+(-1)^2=(a-3)^2$

$a^2+1=a^2-6a+9$

$6a=8 \qquad \therefore a=\frac{4}{3}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$이다.

$\mathrm{Q}(0, b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(b-1)^2=(-3)^2+b^2$

$b^2-2b+1=9+b^2$

$-2b=8 \qquad \therefore b=-4$

따라서 점 Q의 좌표는 $(0, -4)$이다.

020 답 $\mathrm{P}(5, 0)$, $\mathrm{Q}(0, 5)$

$\mathrm{P}(a, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(-2)^2=(a-3)^2+(-4)^2$

$a^2-2a+5=a^2-6a+25$

$4a=20 \qquad \therefore a=5$

따라서 점 P의 좌표는 $(5, 0)$이다.

$\mathrm{Q}(0, b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(-1)^2+(b-2)^2=(-3)^2+(b-4)^2$

$b^2-4b+5=b^2-8b+25$

$4b=20 \qquad \therefore b=5$

따라서 점 Q의 좌표는 $(0, 5)$이다.

021 답 $\mathrm{P}(-1, 0)$, $\mathrm{Q}(0, 2)$

$\mathrm{P}(a, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+2)^2+(-3)^2=(a-2)^2+(-1)^2$

$a^2+4a+13=a^2-4a+5$

$8a=-8 \qquad \therefore a=-1$

따라서 점 P의 좌표는 $(-1, 0)$이다.

Q(0, b)라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로
$2^2+(b-3)^2=(-2)^2+(b-1)^2$
$b^2-6b+13=b^2-2b+5$
$-4b=-8 \qquad \therefore b=2$
따라서 점 Q의 좌표는 (0, 2)이다.

022 답 P(3, 0), Q(0, 1)

P(a, 0)이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(a-1)^2+1^2=(a-2)^2+(-2)^2$
$a^2-2a+2=a^2-4a+8$
$2a=6 \qquad \therefore a=3$
따라서 점 P의 좌표는 (3, 0)이다.
Q(0, b)라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로
$(-1)^2+(b+1)^2=(-2)^2+(b-2)^2$
$b^2+2b+2=b^2-4b+8$
$6b=6 \qquad \therefore b=1$
따라서 점 Q의 좌표는 (0, 1)이다.

023 답 5, 5, CA

024 답 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형

$\overline{AB}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$
$\overline{BC}=\sqrt{(-2-5)^2+(4-5)^2}=5\sqrt{2}$
$\overline{CA}=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$
따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

025 답 ∠A=90°인 직각삼각형

$\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$
$\overline{BC}=\sqrt{(5-2)^2+4^2}=5$
$\overline{CA}=\sqrt{(1-5)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{5}$
따라서 $\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$이므로 삼각형 ABC는 ∠A=90°인 직각삼각형이다.

026 답 정삼각형

$\overline{AB}=\sqrt{(1+1)^2+(2\sqrt{3})^2}=4$
$\overline{BC}=\sqrt{(3-1)^2+(-2\sqrt{3})^2}=4$
$\overline{CA}=\sqrt{(-1-3)^2}=4$
따라서 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

027 답 ∠C=90°인 직각이등변삼각형

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$
$\overline{BC}=\sqrt{1^2+(1-5)^2}=\sqrt{17}$
$\overline{CA}=\sqrt{(-3-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$
따라서 $\overline{BC}=\overline{CA}$이고, $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$이므로 삼각형 ABC는 ∠C=90°인 직각이등변삼각형이다.

028 답 2, 18, 2, 18

029 답 47

P(0, a)라 하면
$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2&=(-3)^2+(a-2)^2+(-6)^2+a^2\\&=2a^2-4a+49\\&=2(a-1)^2+47\end{aligned}$$
따라서 $a=1$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 47이다.

030 답 25

P(a, 0)이라 하면
$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2&=(a-1)^2+(-4)^2+(a+3)^2+1^2\\&=2a^2+4a+27\\&=2(a+1)^2+25\end{aligned}$$
따라서 $a=-1$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 25이다.

031 답 22

P(0, a)라 하면
$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2&=(-2)^2+(a-3)^2+(-4)^2+(a-5)^2\\&=2a^2-16a+54\\&=2(a-4)^2+22\end{aligned}$$
따라서 $a=4$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 22이다.

032 답 $\frac{19}{2}$

P(a, 0)이라 하면
$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2&=(a+2)^2+(-1)^2+(a-1)^2+(-2)^2\\&=2a^2+2a+10\\&=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{2}\end{aligned}$$
따라서 $a=-\frac{1}{2}$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 $\frac{19}{2}$이다.

실전유형

12~14쪽

033 답 ⑤

$$\begin{aligned}\overline{AC}+\overline{BC}&=|1-(-5)|+|1-(-1)|\\&=6+2=8\end{aligned}$$

034 답 1

$\overline{AB}=4$이므로
$|3-x|=4$, $3-x=\pm 4$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=7$
그런데 $x<3$이므로 $x=-1$
따라서 A(-1)이므로
$\overline{OA}=|-1|=1$

035 답 ③

$\overline{AC}=3\overline{BC}$이므로

$|x-(-3)|=3|x-1| \qquad \therefore x+3=\pm 3(x-1)$

(i) $x+3=3(x-1)$일 때

$x+3=3x-3,\ -2x=-6 \qquad \therefore x=3$

(ii) $x+3=-3(x-1)$일 때

$x+3=-3x+3,\ 4x=0 \qquad \therefore x=0$

(i), (ii)에서 양수 x의 값은 3이다.

036 답 ③

$\overline{AB}=\sqrt{17}$이므로

$\sqrt{(2-1)^2+(a-3)^2}=\sqrt{17}$

양변을 제곱하면

$1+(a-3)^2=17,\ a^2-6a-7=0$

$(a+1)(a-7)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=7$

따라서 양수 a의 값은 7이다.

037 답 ②

$\overline{OA}=\overline{OB}$이므로

$\sqrt{5^2+(-5)^2}=\sqrt{1^2+a^2}$

양변을 제곱하면

$25+25=1+a^2,\ a^2=49 \qquad \therefore a=\pm 7$

따라서 양수 a의 값은 7이다.

038 답 3

$\overline{AB}\le 2$이므로

$\overline{AB}^2\le 2^2 \qquad \therefore \overline{AB}^2\le 4$

즉, $(a-2)^2+(4-a)^2\le 4$이므로

$a^2-6a+8\le 0,\ (a-2)(a-4)\le 0 \qquad \therefore 2\le a\le 4$

따라서 정수 a는 2, 3, 4의 3개이다.

039 답 29

$\overline{AB}=\sqrt{(3+2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{29}$

따라서 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

$\overline{AB}^2=29$

040 답 ②

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$3^2+(a-1)^2=(-5)^2+(a+1)^2$

$a^2-2a+10=a^2+2a+26$

$-4a=16 \qquad \therefore a=-4$

041 답 2

점 P가 x축 위의 점이므로 $b=0 \qquad \therefore P(a,\ 0)$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+2)^2+(-3)^2=(a-5)^2+(-4)^2$

$a^2+4a+13=a^2-10a+41$

$14a=28 \qquad \therefore a=2$

$\therefore a+b=2$

042 답 $3\sqrt{5}$

$P(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+1)^2+(-3)^2=(a-3)^2+(-5)^2$

$a^2+2a+10=a^2-6a+34$

$8a=24 \qquad \therefore a=3 \qquad \therefore P(3,\ 0)$

$Q(0,\ b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$1^2+(b-3)^2=(-3)^2+(b-5)^2$

$b^2-6b+10=b^2-10b+34$

$4b=24 \qquad \therefore b=6 \qquad \therefore Q(0,\ 6)$

따라서 선분 PQ의 길이는

$\sqrt{(-3)^2+6^2}=3\sqrt{5}$

043 답 ②

점 P가 직선 $y=-x$ 위의 점이므로 $P(a,\ -a)$라 하자.

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-2)^2+(-a-4)^2=(a-5)^2+(-a-1)^2$

$2a^2+4a+20=2a^2-8a+26$

$12a=6 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$이므로 선분 OP의 길이는

$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

044 답 ⑤

점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로

$b=a+2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-6)^2=(a-2)^2+(b-3)^2$

$a^2+b^2-2a-12b+37=a^2+b^2-4a-6b+13$

$\therefore a-3b=-12 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=5$

$\therefore a+b=8$

다른 풀이

점 P가 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로 $P(a,\ a+2)$라 하자.

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(a+2-6)^2=(a-2)^2+(a+2-3)^2$

$(a-4)^2=(a-2)^2,\ a^2-8a+16=a^2-4a+4$

$-4a=-12 \qquad \therefore a=3$

이때 $b=a+2$이므로 $b=5$

$\therefore a+b=8$

045 답 (1, 3)

세 점 A, B, C에서 같은 거리에 있는 점을 $P(a,\ b)$라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+4)^2+(b-1)^2=(a-6)^2+(b-5)^2$

$a^2+b^2+8a-2b+17=a^2+b^2-12a-10b+61$

$\therefore 5a+2b=11 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$(a+4)^2+(b-1)^2=(a-3)^2+(b+2)^2$

$a^2+b^2+8a-2b+17=a^2+b^2-6a+4b+13$

$\therefore 7a-3b=-2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(1, 3)$이다.

046 답 ②

$\overline{AB}=\sqrt{1^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$

$\overline{BC}=\sqrt{(8-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{65}$

$\overline{CA}=\sqrt{(-8)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{65}$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{BC}=\overline{CA}$인 이등변삼각형이다.

047 답 -4

$\overline{AB}=\sqrt{(4-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$

$\overline{BC}=\sqrt{(a-4)^2+1^2}=\sqrt{a^2-8a+17}$

$\overline{CA}=\sqrt{(2-a)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{a^2-4a+20}$

삼각형 ABC가 $\angle A=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$

$13+a^2-4a+20=a^2-8a+17$

$4a=-16 \qquad \therefore a=-4$

048 답 (1) $\angle B=90°$인 직각삼각형 (2) 10

(1) $\overline{AB}=\sqrt{(5+1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{10}$

$\overline{BC}=\sqrt{(4-5)^2+(6-3)^2}=\sqrt{10}$

$\overline{CA}=\sqrt{(-1-4)^2+(1-6)^2}=5\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로 삼각형 ABC는 $\angle B=90°$인 직각삼각형이다.

(2) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times\sqrt{10}=10$

049 답 ①

$P(a, 0)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a+6)^2+(-1)^2+(a-2)^2+(-3)^2$

$=2a^2+8a+50$

$=2(a+2)^2+42$

따라서 $a=-2$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 42이다.

050 답 ④

$P(0, a)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a+2)^2+(-1)^2+(a-5)^2$

$=2a^2-6a+30$

$=2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{51}{2}$

따라서 $a=\frac{3}{2}$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소가 되므로 이때의 점 P의 좌표는 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$이다.

051 답 24

점 P가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 $P(a, a+1)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a+1)^2+(a+1-2)^2+(a-1)^2+(a+1+4)^2$

$=4a^2+8a+28$

$=4(a+1)^2+24$

따라서 $a=-1$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 24이다.

개념유형

16~17쪽

052 답 1

053 답 3

054 답 C

055 답 3

056 답 2

057 답 D

058 답 8, 2, -2

059 답 2

$\frac{3\times8+2\times(-7)}{3+2}=2$

060 답 $\frac{1}{2}$

$\frac{-7+8}{2}=\frac{1}{2}$

061 답 6

$\frac{2\times12+3\times2}{2+3}=6$

062 답 -1

$\frac{4\times2+3\times(-5)}{4+3}=-1$

063 답 -6

$\frac{1\times(-3)+1\times(-9)}{1+1}=-6$

참고 선분 AB를 $1:1$로 내분하는 점은 선분 AB의 중점이므로 $\frac{-9-3}{2}=-6$과 같이 구할 수도 있다.

064 답 1, 3, -2

065 답 11

선분 AB를 5 : 2로 내분하는 점의 좌표가 7이므로

$\frac{5\times a+2\times(-3)}{5+2}=7$

$5a-6=49$ $\quad\therefore a=11$

066 답 -4

선분 AB의 중점의 좌표가 -1이므로

$\frac{a+2}{2}=-1,\ a+2=-2$ $\quad\therefore a=-4$

067 답 3, -4, 4, 5

068 답 $(-1, 0)$

$\left(\frac{1\times7+2\times(-5)}{1+2}, \frac{1\times8+2\times(-4)}{1+2}\right)$ $\quad\therefore (-1, 0)$

069 답 $(1, 2)$

$\left(\frac{-5+7}{2}, \frac{-4+8}{2}\right)$ $\quad\therefore (1, 2)$

070 답 $(3, 2)$

$\left(\frac{1\times7+4\times2}{1+4}, \frac{1\times6+4\times1}{1+4}\right)$ $\quad\therefore (3, 2)$

071 답 $(0, 3)$

$\left(\frac{2\times1+1\times(-2)}{2+1}, \frac{2\times6+1\times(-3)}{2+1}\right)$ $\quad\therefore (0, 3)$

072 답 $(-1, 2)$

$\left(\frac{3\times4+5\times(-4)}{3+5}, \frac{3\times(-3)+5\times5}{3+5}\right)$ $\quad\therefore (-1, 2)$

073 답 -3, 3, 2, 6

074 답 $a=0$, $b=4$

선분 AB의 중점의 좌표가 (2, 1)이므로

$\frac{a+4}{2}=2,\ \frac{-2+b}{2}=1$

$a+4=4,\ -2+b=2$

$\therefore a=0,\ b=4$

075 답 $a=8$, $b=18$

선분 AB를 4 : 3으로 내분하는 점의 좌표가 (5, 9)이므로

$\frac{4\times a+3\times1}{4+3}=5,\ \frac{4\times b+3\times(-3)}{4+3}=9$

$4a+3=35,\ 4b-9=63$

$\therefore a=8,\ b=18$

실전유형

18~19쪽

076 답 ㄱ

ㄴ. 점 C는 선분 BD를 2 : 3으로 내분하는 점이다.

ㄷ. 점 D는 선분 CE를 3 : 1로 내분하는 점이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

077 답 3

$\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로 점 P는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이다.

$\therefore x=\frac{2\times6+1\times(-3)}{2+1}=3$

참고 $-3<x<6$이므로 점 P는 선분 AB 위의 점이다.

078 답 ⑤

선분 AB의 중점 M의 좌표는

$\frac{-2+8}{2}=3$

선분 CM의 길이가 2이므로

$|3-x|=2,\ 3-x=\pm2$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

따라서 모든 x의 값의 합은

$1+5=6$

079 답 ⑤

선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times7+2\times(-3)}{3+2}, \frac{3\times(-3)+2\times2}{3+2}\right)$ $\quad\therefore (3, -1)$

따라서 $a=3,\ b=-1$이므로

$a+b=2$

080 답 $(0, 2)$

선분 AB를 3 : 4로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{3\times(-6)+4\times8}{3+4}, \frac{3\times(-1)+4\times6}{3+4}\right)$ $\quad\therefore (2, 3)$

선분 AB를 5 : 2로 내분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{5\times(-6)+2\times8}{5+2}, \frac{5\times(-1)+2\times6}{5+2}\right)$ $\quad\therefore (-2, 1)$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2-2}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$ $\quad\therefore (0, 2)$

081 답 ②

선분 AB를 1 : 5로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{1\times8+5\times2}{1+5}, \frac{1\times(-1)+5\times5}{1+5}\right)$ $\quad\therefore (3, 4)$

선분 AB의 중점 M의 좌표는

$\left(\frac{2+8}{2}, \frac{5-1}{2}\right)$ $\quad\therefore (5, 2)$

따라서 선분 PM의 길이는

$\sqrt{(5-3)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{2}$

082 답 ④

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표가 $(2,\ 3)$이므로

$\frac{1\times a+2\times 1}{1+2}=2,\ \frac{1\times b+2\times 2}{1+2}=3$

$a+2=6,\ b+4=9$

$\therefore\ a=4,\ b=5$

$\therefore\ a+b=9$

083 답 6

선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times(-9)+3\times a}{2+3},\ \frac{2\times 2+3\times(-2)}{2+3}\right)$

$\therefore\ \left(\frac{3a-18}{5},\ -\frac{2}{5}\right)$

이 점이 y축 위에 있으므로

$\frac{3a-18}{5}=0,\ 3a-18=0$

$\therefore\ a=6$

084 답 ③

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times 6+2\times 0}{1+2},\ \frac{1\times 0+2\times a}{1+2}\right)$

$\therefore\ \left(2,\ \frac{2a}{3}\right)$

이 점이 직선 $y=-x$ 위에 있으므로

$\frac{2a}{3}=-2\qquad \therefore\ a=-3$

085 답 3

선분 AB를 $1:m$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times 6+m\times(-6)}{1+m},\ \frac{1\times(-1)+m\times 3}{1+m}\right)$

$\therefore\ \left(\frac{-6m+6}{1+m},\ \frac{3m-1}{1+m}\right)$

이 점이 직선 $y=x+5$ 위에 있으므로

$\frac{3m-1}{1+m}=\frac{-6m+6}{1+m}+5$

$\frac{3m-1}{1+m}=\frac{-m+11}{1+m}$

$3m-1=-m+11,\ 4m=12$

$\therefore\ m=3$

086 답 6

대각선 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{4-2}{2}\right)\qquad \therefore\ \left(\frac{1+a}{2},\ 1\right)$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+8}{2},\ \frac{3+b}{2}\right)\qquad \therefore\ \left(3,\ \frac{3+b}{2}\right)$

두 대각선의 중점은 일치하므로

$\frac{1+a}{2}=3,\ 1=\frac{3+b}{2}$

$1+a=6,\ 3+b=2$

$\therefore\ a=5,\ b=-1$

$\therefore\ a-b=6$

087 답 $(-1,\ 5)$

대각선 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+5}{2},\ \frac{2+2}{2}\right)\qquad \therefore\ (1,\ 2)$

$D(a,\ b)$라 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+a}{2},\ \frac{-1+b}{2}\right)$

두 대각선의 중점은 일치하므로

$1=\frac{3+a}{2},\ 2=\frac{-1+b}{2}$

$3+a=2,\ -1+b=4$

$\therefore\ a=-1,\ b=5$

따라서 점 D의 좌표는 $(-1,\ 5)$이다.

088 답 ⑤

대각선 OB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3}{2},\ \frac{b}{2}\right)$

대각선 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+1}{2},\ \frac{a+2}{2}\right)\qquad \therefore\ \left(\frac{3}{2},\ \frac{a+2}{2}\right)$

두 대각선의 중점은 일치하므로

$\frac{b}{2}=\frac{a+2}{2}\qquad \therefore\ b=a+2\qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 $\overline{OA}=\overline{OC}$에서 $\overline{OA}^2=\overline{OC}^2$이므로

$2^2+a^2=1^2+2^2,\ a^2=1\qquad \therefore\ a=\pm 1$

그런데 $a>0$이므로 $a=1$

이를 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore\ a+b=4$

개념유형

21쪽

089 답 $(1,\ -1)$

$\left(\frac{3+1-1}{3},\ \frac{0+2-5}{3}\right)\qquad \therefore\ (1,\ -1)$

090 답 $(2,\ 3)$

$\left(\frac{-3+6+3}{3},\ \frac{-2+3+8}{3}\right)\qquad \therefore\ (2,\ 3)$

091 답 $\left(-\frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)$

$\left(\frac{-6-1+5}{3},\ \frac{3-2+4}{3}\right)\qquad \therefore\ \left(-\frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)$

092 답 $\left(\frac{8}{3}, 2\right)$

$\left(\frac{-4+2+10}{3}, \frac{1-3+8}{3}\right)$ $\therefore \left(\frac{8}{3}, 2\right)$

093 답 (5, −4)

$\left(\frac{5-2+12}{3}, \frac{3-6-9}{3}\right)$ $\therefore (5, -4)$

094 답 1, 3, −1, 10

095 답 $a=3$, $b=-7$

삼각형 ABC의 무게중심이 G(0, 0)이므로

$\frac{5-8+a}{3}=0$, $\frac{3+4+b}{3}=0$

$a-3=0$, $b+7=0$

$\therefore a=3, b=-7$

096 답 $a=1$, $b=4$

삼각형 ABC의 무게중심이 G(1, 1)이므로

$\frac{-5+b+4}{3}=1$, $\frac{a+3-1}{3}=1$

$b-1=3$, $a+2=3$

$\therefore a=1, b=4$

097 답 $a=3$, $b=-1$

삼각형 ABC의 무게중심이 $G(b, 4)$이므로

$\frac{-2-6+5}{3}=b$, $\frac{-1+a+10}{3}=4$

$-1=b$, $a+9=12$

$\therefore a=3, b=-1$

098 답 $a=4$, $b=2$

삼각형 ABC의 무게중심이 $G(2, b)$이므로

$\frac{-3+5+a}{3}=2$, $\frac{2-1+5}{3}=b$

$a+2=6$, $2=b$

$\therefore a=4, b=2$

실전유형 22쪽

099 답 −2

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-5-2+4}{3}, \frac{4-1+3}{3}\right)$ $\therefore (-1, 2)$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$ab=-2$

100 답 ③

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (1, 2)이므로

$\frac{a-2+3}{3}=1$, $\frac{3+5+b}{3}=2$

$a+1=3$, $b+8=6$

$\therefore a=2, b=-2$

$\therefore a+b=0$

101 답 ①

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(-2a, b-2)$이므로

$\frac{-2+3+b}{3}=-2a$, $\frac{3+a+7}{3}=b-2$

$b+1=-6a$, $a+10=3b-6$

$\therefore 6a+b=-1$, $a-3b=-16$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=5$

$\therefore a-b=-6$

102 답 ②

$A(a, b)$라 하면 삼각형 ABC의 무게중심이 G(4, −2)이므로

$\frac{a+2+7}{3}=4$, $\frac{b-6-1}{3}=-2$

$a+9=12$, $b-7=-6$

$\therefore a=3, b=1$

따라서 A(3, 1)이므로 선분 AG의 길이는

$\sqrt{(4-3)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{10}$

다른 풀이

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$\left(\frac{2+7}{2}, \frac{-6-1}{2}\right)$ $\therefore \left(\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AG}&=2\overline{GM}\\&=2\sqrt{\left(\frac{9}{2}-4\right)^2+\left(-\frac{7}{2}+2\right)^2}\\&=\sqrt{10}\end{aligned}$$

103 답 7

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2+4+8}{3}, \frac{6+1+a}{3}\right)$

$\therefore \left(\frac{14}{3}, \frac{a+7}{3}\right)$

이 점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$\frac{a+7}{3}=\frac{14}{3}$, $a+7=14$ $\therefore a=7$

104 답 ③

삼각형 ABC의 무게중심은 점 C(4, 2)와 변 AB의 중점 (1, −4)를 이은 선분을 2 : 1로 내분하는 점이므로 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2\times1+1\times4}{2+1}, \frac{2\times(-4)+1\times2}{2+1}\right)$

$\therefore (2, -2)$

실전유형으로 중단원 점검 23~24쪽

1 답 ①

$\overline{OB}=3$이므로

$|x|=3 \qquad \therefore x=\pm 3$

그런데 $x>0$이므로 $x=3$

따라서 B(3)이므로

$\overline{AB}=|3-(-2)|=5$

2 답 ②

$\overline{AB}=5\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(a+2+3)^2+(3-a)^2}=5\sqrt{2}$

양변을 제곱하면

$(a+5)^2+(3-a)^2=50$

$a^2+2a-8=0,\ (a+4)(a-2)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=2$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-4+2=-2$

참고 이차방정식 $a^2+2a-8=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 a의 값의 합이 -2임을 알 수도 있다.

3 답 $2\sqrt{5}$

P$(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+1^2=(a-3)^2+(-3)^2$

$a^2-2a+2=a^2-6a+18$

$4a=16 \qquad \therefore a=4$

$\therefore$ P$(4,\ 0)$ …… ⅰ

Q$(0,\ b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(-1)^2+(b+1)^2=(-3)^2+(b-3)^2$

$b^2+2b+2=b^2-6b+18$

$8b=16 \qquad \therefore b=2$

$\therefore$ Q$(0,\ 2)$ …… ⅱ

따라서 선분 PQ의 길이는

$\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$ …… ⅲ

채점 기준

ⅰ 점 P의 좌표 구하기	40 %
ⅱ 점 Q의 좌표 구하기	40 %
ⅲ 선분 PQ의 길이 구하기	20 %

4 답 ④

점 P$(a,\ b)$가 직선 $y=-x+3$ 위의 점이므로

$b=-a+3$ …… ㉠

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+1)^2+(b-2)^2=(a-5)^2+b^2$

$a^2+b^2+2a-4b+5=a^2+b^2-10a+25$

$\therefore 3a-b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=1$

$\therefore a-b=1$

5 답 정삼각형

$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2}=2$

$\overline{BC}=\sqrt{(2-3)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$\overline{CA}=\sqrt{(1-2)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

따라서 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

6 답 ⑤

$\overline{AB}=\sqrt{(1+1)^2+(a-7)^2}=\sqrt{a^2-14a+53}$

$\overline{BC}=\sqrt{(4-1)^2+(2-a)^2}=\sqrt{a^2-4a+13}$

$\overline{CA}=\sqrt{(-1-4)^2+(7-2)^2}=5\sqrt{2}$

삼각형 ABC가 $\angle B=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$

$a^2-14a+53+a^2-4a+13=50$

$a^2-9a+8=0,\ (a-1)(a-8)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=8$

그런데 $a>1$이므로 $a=8$

7 답 ④

P$(0,\ a)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=5^2+(a-1)^2+(-1)^2+(a+3)^2$

$=2a^2+4a+36$

$=2(a+1)^2+34$

따라서 $a=-1$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 34이다.

8 답 -6

선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표가 $(2,\ 4)$이므로

$\dfrac{3\times4+2\times a}{3+2}=2,\ \dfrac{3\times b+2\times 1}{3+2}=4$

$2a+12=10,\ 3b+2=20$

$\therefore a=-1,\ b=6$

$\therefore ab=-6$

9 답 -1

선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times8+3\times(-4)}{1+3},\ \dfrac{1\times(a+4)+3\times a}{1+3}\right)$

$\therefore (-1,\ a+1)$ …… ⅰ

이 점이 x축 위에 있으므로

$a+1=0 \qquad \therefore a=-1$ …… ⅱ

채점 기준

ⅰ 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표를 a로 나타내기	70 %
ⅱ a의 값 구하기	30 %

10 답 ③

대각선 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{6-2}{2}, \frac{a+4}{2}\right) \quad \therefore \left(2, \frac{a+4}{2}\right)$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{b-1}{2}, \frac{3+2}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{b-1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

두 대각선의 중점은 일치하므로

$2=\frac{b-1}{2}, \frac{a+4}{2}=\frac{5}{2}$

$b-1=4, a+4=5$

$\therefore a=1, b=5$

$\therefore a+b=6$

11 답 12

대각선 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a+7}{2}, \frac{2+6}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{a+7}{2}, 4\right)$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{6+b}{2}, \frac{3+5}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{6+b}{2}, 4\right)$

두 대각선의 중점은 일치하므로

$\frac{a+7}{2}=\frac{6+b}{2} \quad \therefore b=a+1$ …… ㉠ …… i

또 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(6-a)^2+(3-2)^2=(7-6)^2+(6-3)^2$

$a^2-12a+27=0, (a-3)(a-9)=0$

$\therefore a=3$ 또는 $a=9$

그런데 $a<6$이므로 $a=3$ …… ii

이를 ㉠에 대입하면 $b=4$ …… iii

$\therefore ab=12$ …… iv

채점 기준

i b를 a에 대한 식으로 나타내기	40 %
ii a의 값 구하기	40 %
iii b의 값 구하기	10 %
iv ab의 값 구하기	10 %

12 답 ③

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1, b)$이므로

$\frac{a+2a-3}{3}=1, \frac{1+5+b}{3}=b$

$a-1=1, b+6=3b$

$\therefore a=2, b=3$

$\therefore a+b=5$

13 답 ⑤

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-2+a-2+7}{3}, \frac{5+7+9}{3}\right) \quad \therefore \left(\frac{a+3}{3}, 7\right)$

이 점이 직선 $y=3x+1$ 위에 있으므로

$7=a+3+1 \quad \therefore a=3$

02 직선의 방정식

개념유형 26~27쪽

001 답 $y=3x$

002 답 $y=-x+7$

003 답 $y=4x-8$

점 $(2, 0)$을 지나므로

$y=4(x-2) \quad \therefore y=4x-8$

004 답 $y=6x-11$

$y-1=6(x-2) \quad \therefore y=6x-11$

005 답 $y=-2x+1$

$y-(-1)=-2(x-1) \quad \therefore y=-2x+1$

006 답 $y=x+5$

기울기가 1이므로

$y-3=x-(-2) \quad \therefore y=x+5$

007 답 $y=-6x+14$

기울기가 -6이므로

$y-(-4)=-6(x-3) \quad \therefore y=-6x+14$

008 답 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

기울기가 $\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

009 답 $y=x+1$

기울기가 $\tan 45°=1$이므로 $y=x+1$

010 답 $y=\sqrt{3}x-7$

기울기가 $\tan 60°=\sqrt{3}$이므로

$y-(-4)=\sqrt{3}(x-\sqrt{3}) \quad \therefore y=\sqrt{3}x-7$

011 답 $y=5$

012 답 $x=-3$

013 답 $x=-2$

014 답 $y=8$

015 답 $y=-x+5$

$y-4=\frac{2-4}{3-1}(x-1)$ $\therefore y=-x+5$

016 답 $y=2x-3$

$y-1=\frac{5-1}{4-2}(x-2)$ $\therefore y=2x-3$

017 답 $y=x+4$

$y-3=\frac{5-3}{1-(-1)}\{x-(-1)\}$ $\therefore y=x+4$

018 답 $y=-2x+4$

$y-8=\frac{-2-8}{3-(-2)}\{x-(-2)\}$ $\therefore y=-2x+4$

019 답 $y=-4x+18$

$y-(-2)=\frac{10-(-2)}{2-5}(x-5)$ $\therefore y=-4x+18$

020 답 $y=3x+15$

$y-3=\frac{9-3}{-2-(-4)}\{x-(-4)\}$ $\therefore y=3x+15$

021 답 $x=2$

두 점의 x좌표가 2로 서로 같으므로

$x=2$

022 답 $x=-4$

두 점의 x좌표가 -4로 서로 같으므로

$x=-4$

023 답 $y=-1$

두 점의 y좌표가 -1로 서로 같으므로

$y=-1$

024 답 $y=5$

두 점의 y좌표가 5로 서로 같으므로

$y=5$

025 답 $\frac{x}{3}-\frac{y}{6}=1$

026 답 $-\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=1$

027 답 $\frac{x}{2}-\frac{y}{8}=1$

x절편이 2이고 y절편이 -8이므로

$\frac{x}{2}-\frac{y}{8}=1$

실전유형

28~29쪽

028 답 ①

점 (3, 9)를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y-9=2(x-3)$ $\therefore y=2x+3$

따라서 구하는 y절편은 3이다.

029 답 ⑤

직선의 기울기는 $\tan 60°=\sqrt{3}$

x절편이 -3인 직선은 점 $(-3, 0)$을 지나므로 기울기가 $\sqrt{3}$이고 점 $(-3, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}(x+3)$ $\therefore y=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$

따라서 $a=\sqrt{3}$, $b=3\sqrt{3}$이므로

$a+b=4\sqrt{3}$

030 답 $y=5x-8$

두 점 $(5, -2)$, $(-3, -4)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{5-3}{2}, \frac{-2-4}{2}\right)$ $\therefore (1, -3)$

따라서 점 $(1, -3)$을 지나고 기울기가 5인 직선의 방정식은

$y+3=5(x-1)$ $\therefore y=5x-8$

031 답 6

두 점 $(-5, 6)$, $(5, 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=6$ $\therefore k=6$

032 답 ⑤

두 점 $(-1, 8)$, $(4, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-8=\frac{-2-8}{4+1}(x+1)$ $\therefore y=-2x+6$

$y=0$을 대입하면

$0=-2x+6$ $\therefore x=3$

따라서 구하는 x절편은 3이다.

033 답 $y=2x+7$

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times(-5)+1\times4}{2+1}, \frac{2\times4+1\times1}{2+1}\right)$ $\therefore (-2, 3)$

따라서 두 점 $(-2, 3)$, $(-4, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-1-3}{-4+2}(x+2)$ $\therefore y=2x+7$

034 답 ②

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{-3+5+7}{3}, \frac{2+8+2}{3}\right)$ $\therefore (3, 4)$

두 점 A, G를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{4-2}{3+3}(x+3)$ $\therefore y=\frac{1}{3}x+3$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=3$이므로

$ab=1$

035 답 4

x절편이 2이고 y절편이 1인 직선의 방정식은

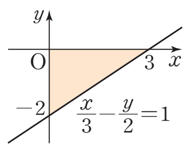
$\frac{x}{2}+y=1$

이 직선이 점 $(-6,\ a)$를 지나므로

$-3+a=1 \qquad \therefore a=4$

036 답 ③

직선 $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$의 x절편은 3이고 y절편은 -2이므로 이 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times2=3$

037 답 3

A$(-2,\ -3)$, B$(2,\ 5)$, C$(a,\ 7)$이라 하면 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

따라서 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같으므로

$\frac{5+3}{2+2}=\frac{7-5}{a-2}$

$2=\frac{2}{a-2},\ a-2=1$

$\therefore a=3$

다른 풀이

두 점 $(-2,\ -3)$, $(2,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+3=\frac{5+3}{2+2}(x+2) \qquad \therefore y=2x+1$

이 직선이 점 $(a,\ 7)$을 지나므로

$7=2a+1 \qquad \therefore a=3$

038 답 10

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같으므로

$\frac{-3-5}{a-6}=\frac{(a+3)-5}{2-6}$

$\frac{-8}{a-6}=\frac{a-2}{-4},\ (a-2)(a-6)=32$

$a^2-8a-20=0,\ (a+2)(a-10)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=10$

따라서 양수 a의 값은 10이다.

039 답 ②

점 A가 직선 BC 위에 있으므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

따라서 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같으므로

$\frac{(2a+1)-1}{0+1}=\frac{5-1}{a+1}$

$2a=\frac{4}{a+1},\ a(a+1)=2$

$a^2+a-2=0,\ (a+2)(a-1)=0$

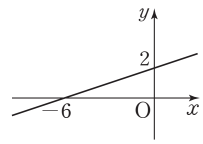
$\therefore a=-2$ 또는 $a=1$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-2+1=-1$

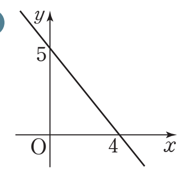
개념유형

040 답



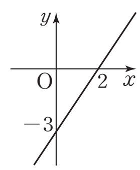
$x-3y+6=0$은 $y=\frac{1}{3}x+2$이므로 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 y절편이 2인 직선이다.

041 답



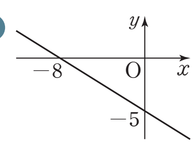
$5x+4y-20=0$은 $y=-\frac{5}{4}x+5$이므로 기울기가 $-\frac{5}{4}$이고 y절편이 5인 직선이다.

042 답



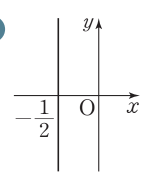
$3x-2y-6=0$은 $y=\frac{3}{2}x-3$이므로 기울기가 $\frac{3}{2}$이고 y절편이 -3인 직선이다.

043 답



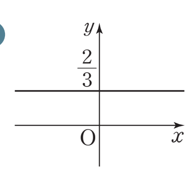
$5x+8y+40=0$은 $y=-\frac{5}{8}x-5$이므로 기울기가 $-\frac{5}{8}$이고 y절편이 -5인 직선이다.

044 답



$4x+2=0$은 $x=-\frac{1}{2}$이므로 y축에 평행한 직선이다.

045 답



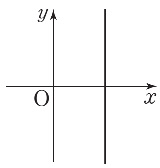
$6y-4=0$은 $y=\frac{2}{3}$이므로 x축에 평행한 직선이다.

046 답 풀이 참조

$a\neq0$, $b=0$이므로 $ax+by+c=0$에서 $x=-\frac{c}{a}$

이때 $a<0$, $c>0$이므로 $-\frac{c}{a}>0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$은 x절편이 양수이고 y축에 평행한 직선이므로 그 개형은 오른쪽 그림과 같다.

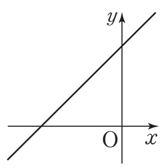


047 답 풀이 참조

$b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $a>0$, $b<0$, $c>0$이므로 $-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}>0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$은 기울기와 y절편이 모두 양수인 직선이므로 그 개형은 오른쪽 그림과 같다.

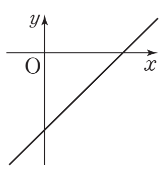


048 답 풀이 참조

$b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $a>0$, $b<0$, $c<0$이므로 $-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$은 기울기가 양수이고 y절편이 음수인 직선이므로 그 개형은 오른쪽 그림과 같다.

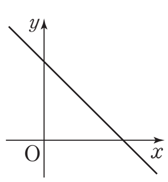


049 답 풀이 참조

$b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $a<0$, $b<0$, $c>0$이므로 $-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$은 기울기가 음수이고 y절편이 양수인 직선이므로 그 개형은 오른쪽 그림과 같다.

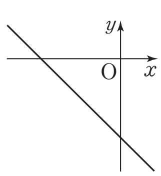


050 답 풀이 참조

$b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $a<0$, $b<0$, $c<0$이므로 $-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}<0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$은 기울기와 y절편이 모두 음수인 직선이므로 그 개형은 오른쪽 그림과 같다.



051 답 $b<0$, $c<0$

주어진 직선이 y축에 평행하지 않으므로 $b\neq0$

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

기울기가 양수이므로 $-\frac{a}{b}>0$ $\therefore ab<0$

이때 $a>0$이므로 $b<0$

y절편이 음수이므로 $-\frac{c}{b}<0$ $\therefore bc>0$

이때 $b<0$이므로 $c<0$

052 답 $b>0$, $c<0$

주어진 직선이 y축에 평행하지 않으므로 $b\neq0$

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

기울기가 음수이므로 $-\frac{a}{b}<0$ $\therefore ab>0$

이때 $a>0$이므로 $b>0$

y절편이 양수이므로 $-\frac{c}{b}>0$ $\therefore bc<0$

이때 $b>0$이므로 $c<0$

053 답 $b>0$, $c>0$

주어진 직선이 y축에 평행하지 않으므로 $b\neq0$

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

기울기가 음수이므로 $-\frac{a}{b}<0$ $\therefore ab>0$

이때 $a>0$이므로 $b>0$

y절편이 음수이므로 $-\frac{c}{b}<0$ $\therefore bc>0$

이때 $b>0$이므로 $c>0$

054 답 풀이 참조

주어진 직선이 y축에 평행하지 않으므로 $b\neq0$

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

기울기가 양수이므로 $-\frac{a}{b}>0$ $\therefore ab<0$

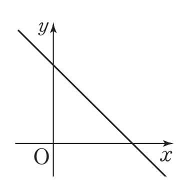
y절편이 양수이므로 $-\frac{c}{b}>0$ $\therefore bc<0$

$\therefore$ $a>0$, $b<0$, $c>0$ 또는 $a<0$, $b>0$, $c<0$

한편 $a\neq0$이므로 $cx+ay+b=0$에서 $y=-\frac{c}{a}x-\frac{b}{a}$

이때 $-\frac{c}{a}<0$, $-\frac{b}{a}>0$이므로 직선 $cx+ay+b=0$의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이다.

따라서 직선 $cx+ay+b=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



055 답 풀이 참조

주어진 직선이 y축에 평행하지 않으므로 $b\neq0$

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

기울기가 양수이므로 $-\frac{a}{b}>0$　　$\therefore ab<0$

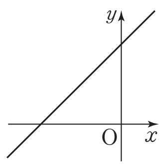
y절편이 음수이므로 $-\frac{c}{b}<0$　　$\therefore bc>0$

$\therefore a>0, b<0, c<0$ 또는 $a<0, b>0, c>0$

한편 $a\neq0$이므로 $cx+ay+b=0$에서 $y=-\frac{c}{a}x-\frac{b}{a}$

이때 $-\frac{c}{a}>0, -\frac{b}{a}>0$이므로 직선 $cx+ay+b=0$의 기울기와 y절편은 모두 양수이다.

따라서 직선 $cx+ay+b=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



056 답 풀이 참조

주어진 직선이 y축에 평행하지 않으므로 $b\neq0$

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

기울기가 음수이므로 $-\frac{a}{b}<0$　　$\therefore ab>0$

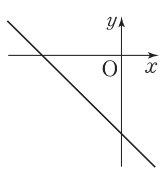
y절편이 음수이므로 $-\frac{c}{b}<0$　　$\therefore bc>0$

$\therefore a>0, b>0, c>0$ 또는 $a<0, b<0, c<0$

한편 $a\neq0$이므로 $cx+ay+b=0$에서 $y=-\frac{c}{a}x-\frac{b}{a}$

이때 $-\frac{c}{a}<0, -\frac{b}{a}<0$이므로 직선 $cx+ay+b=0$의 기울기와 y절편은 모두 음수이다.

따라서 직선 $cx+ay+b=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



실전유형

32쪽

057 답 ④

$ab=0, bc>0$에서 $a=0, b\neq0$

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{c}{b}$

이때 $bc>0$이므로 $-\frac{c}{b}<0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$의 개형은 ④이다.

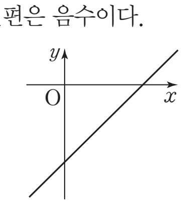
058 답 제2사분면

$b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ab<0, bc>0$이므로 $-\frac{a}{b}>0, -\frac{c}{b}<0$

즉, 직선 $ax+by+c=0$의 기울기는 양수이고 y절편은 음수이다.

따라서 직선 $ax+by+c=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.



059 답 ③

주어진 직선이 y축에 평행하지 않으므로 $b\neq0$

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

기울기가 음수이고 y절편이 양수이므로

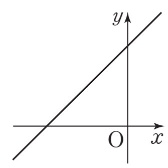
$-\frac{a}{b}<0, -\frac{c}{b}>0$　　$\therefore ab>0, bc<0$

$\therefore a>0, b>0, c<0$ 또는 $a<0, b<0, c>0$

한편 $c\neq0$이므로 $bx+cy+a=0$에서 $y=-\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}$

이때 $-\frac{b}{c}>0, -\frac{a}{c}>0$이므로 직선 $bx+cy+a=0$의 기울기와 y절편은 모두 양수이다.

따라서 직선 $bx+cy+a=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 3사분면을 지난다.



개념유형

33~34쪽

060 답 1, 5, 2, −1, 2, −1

061 답 (−2, 0)

주어진 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$2x+y+4=0, x-3y+2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-2, y=0$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-2, 0)$이다.

062 답 (3, −2)

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$2y+4+k(x-3)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$2y+4=0, x-3=0$　　$\therefore x=3, y=-2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(3, -2)$이다.

063 답 (2, −4)

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$x-y-6+k(3x+y-2)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x-y-6=0, 3x+y-2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=2, y=-4$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(2, -4)$이다.

064 답 2, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 5

065 답 $x-3y+3=0$

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x+2y-1+k(2x-y+2)=0$ (단, k는 실수)

이 직선이 점 P(0, 1)을 지나므로

$2-1+k(-1+2)=0$

$1+k=0 \qquad \therefore k=-1$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$x+2y-1-(2x-y+2)=0$

$\therefore x-3y+3=0$

066 답 $3x+5y-6=0$

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$3x-2y+3+k(x+4y-5)=0$ (단, k는 실수)

이 직선이 점 P(2, 0)을 지나므로

$6+3+k(2-5)=0$

$9-3k=0 \qquad \therefore k=3$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$3x-2y+3+3(x+4y-5)=0$

$\therefore 3x+5y-6=0$

067 답 $5x-12y+9=0$

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$2x+3y+6+k(4x-7y+8)=0$ (단, k는 실수)

이 직선이 점 P(3, 2)를 지나므로

$6+6+6+k(12-14+8)=0$

$18+6k=0 \qquad \therefore k=-3$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$2x+3y+6-3(4x-7y+8)=0$

$\therefore 5x-12y+9=0$

실전유형 34쪽

068 답 5

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$3x+5y-7+k(2x+3y-5)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$3x+5y-7=0,\ 2x+3y-5=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=4,\ y=-1$

따라서 $a=4,\ b=-1$이므로

$a-b=5$

069 답 ⑤

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$3x+4y+1+k(2x+5y-3)=0$ (단, k는 실수)

이 직선이 점 $(-2, 2)$를 지나므로

$-6+8+1+k(-4+10-3)=0$

$3+3k=0 \qquad \therefore k=-1$

즉, 직선의 방정식은

$3x+4y+1-(2x+5y-3)=0$

$\therefore x-y+4=0$

따라서 $a=-1,\ b=4$이므로

$a+b=3$

070 답 $\sqrt{5}$

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$x-2y+3+k(3x-y-1)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x-2y+3=0,\ 3x-y-1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=2$

따라서 P(1, 2)이므로 점 P와 원점 사이의 거리는

$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

개념유형 36~37쪽

071 답 평행하다.

두 직선의 기울기가 같고 y절편이 다르므로 두 직선은 서로 평행하다.

072 답 수직이다.

두 직선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{3}\times(-3)=-1$이므로 두 직선은 서로 수직이다.

073 답 평행하다.

$\frac{2}{2}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{6}{2}$이므로 두 직선은 서로 평행하다.

074 답 수직이다.

$3\times2+(-2)\times3=0$이므로 두 직선은 서로 수직이다.

075 답 4

두 직선이 서로 평행하려면 기울기가 같아야 하므로

$k=4$

076 답 -2

두 직선이 서로 평행하려면 기울기가 같아야 하므로

$k+1=-1 \qquad \therefore k=-2$

077 답 -6

두 직선이 서로 평행하려면 $\frac{4}{2}=\frac{k}{-3}\neq\frac{1}{-5}$이어야 하므로

$\frac{4}{2}=\frac{k}{-3}$에서 $k=-6$

078 답 4

두 직선이 서로 평행하려면 $\frac{3}{6}=\frac{1}{k-2}\neq\frac{-3}{9}$이어야 하므로

$\frac{3}{6}=\frac{1}{k-2}$에서 $k-2=2$ $\therefore k=4$

079 답 $-\frac{1}{2}$

두 직선이 서로 수직이 되려면 $k\times2=-1$이어야 하므로

$k=-\frac{1}{2}$

080 답 3

두 직선이 서로 수직이 되려면 $-\frac{1}{2}\times(k-1)=-1$이어야 하므로

$k-1=2$ $\therefore k=3$

081 답 1

두 직선이 서로 수직이 되려면 $k\times6+3\times(k-3)=0$이어야 하므로

$9k-9=0$ $\therefore k=1$

082 답 -3

두 직선이 서로 수직이 되려면 $4\times(k+2)+(k-1)\times(-1)=0$이어야 하므로

$3k+9=0$ $\therefore k=-3$

083 답 $y=-x+2$

직선 $y=-x+6$에 평행하므로 구하는 직선의 기울기는 -1이다.
따라서 기울기가 -1이고 점 $(3, -1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y+1=-(x-3)$ $\therefore y=-x+2$

084 답 $y=4x-13$

직선 $4x-y+3=0$, 즉 $y=4x+3$에 평행하므로 구하는 직선의 기울기는 4이다.
따라서 기울기가 4이고 점 $(3, -1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y+1=4(x-3)$ $\therefore y=4x-13$

085 답 $y=-\frac{2}{3}x+1$

직선 $2x+3y-5=0$, 즉 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$에 평행하므로 구하는 직선의 기울기는 $-\frac{2}{3}$이다.

따라서 기울기가 $-\frac{2}{3}$이고 점 $(3, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+1=-\frac{2}{3}(x-3)$ $\therefore y=-\frac{2}{3}x+1$

086 답 $y=\frac{1}{3}x+7$

직선 $y=-3x+2$에 수직이므로 구하는 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 점 $(-6, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=\frac{1}{3}(x+6)$ $\therefore y=\frac{1}{3}x+7$

087 답 $y=-2x-7$

직선 $y=\frac{1}{2}x-3$에 수직이므로 구하는 직선의 기울기는 -2이다.
따라서 기울기가 -2이고 점 $(-6, 5)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-5=-2(x+6)$ $\therefore y=-2x-7$

088 답 $y=\frac{5}{2}x+20$

직선 $2x+5y-1=0$, 즉 $y=-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}$에 수직이므로 구하는 직선의 기울기는 $\frac{5}{2}$이다.

따라서 기울기가 $\frac{5}{2}$이고 점 $(-6, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=\frac{5}{2}(x+6)$ $\therefore y=\frac{5}{2}x+20$

089 답 -2, $\frac{1}{2}$, 1, 0, $\frac{1}{2}$, 1, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$

090 답 $y=4x-6$

두 점 $A(-2, 3)$, $B(6, 1)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1-3}{6+2}=-\frac{1}{4}$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 4이다.
또 선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$ $\therefore (2, 2)$
따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 4이고 점 $(2, 2)$를 지나는 직선이므로
$y-2=4(x-2)$ $\therefore y=4x-6$

091 답 $y=-x+1$

두 점 $A(2, -7)$, $B(8, -1)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{-1+7}{8-2}=1$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 -1이다.
또 선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\frac{2+8}{2}, \frac{-7-1}{2}\right)$ $\therefore (5, -4)$
따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 -1이고 점 $(5, -4)$를 지나는 직선이므로
$y+4=-(x-5)$ $\therefore y=-x+1$

092 답 $y=-5x-5$

두 점 $A(-7, 4)$, $B(3, 6)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{6-4}{3+7}=\frac{1}{5}$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 -5이다.

또 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-7+3}{2}, \frac{4+6}{2}\right)$ $\therefore (-2, 5)$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 -5이고 점 $(-2, 5)$를 지나는 직선이므로

$y-5=-5(x+2)$ $\therefore y=-5x-5$

실전유형

38~39쪽

093 답 ①

직선 $3x+2y-5=0$, 즉 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$에 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$이므로 기울기가 $-\frac{3}{2}$이고 점 $(2, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=-\frac{3}{2}(x-2)$ $\therefore y=-\frac{3}{2}x+6$

따라서 구하는 y절편은 6이다.

094 답 -1

두 점 $(0, 2)$, $(-3, 8)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{8-2}{-3}=-2$이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 -2이다.

따라서 기울기가 -2이고 점 $(-1, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=-2(x+1)$ $\therefore y=-2x+1$

즉, $a=-2$, $b=1$이므로

$a+b=-1$

095 답 -3

직선 $x-5y+12=0$, 즉 $y=\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}$에 수직인 직선의 기울기는 -5이므로 기울기가 -5이고 점 $(1, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=-5(x-1)$ $\therefore y=-5x+7$

이 직선이 점 $(2, a)$를 지나므로

$a=-10+7=-3$

096 답 3

두 점 $A(-3, 1)$, $B(7, -4)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-4-1}{7+3}=-\frac{1}{2}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 2이다.

선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times7+2\times(-3)}{3+2}, \frac{3\times(-4)+2\times1}{3+2}\right)$ $\therefore (3, -2)$

따라서 기울기가 2이고 점 $(3, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+2=2(x-3)$ $\therefore 2x-y-8=0$

즉, $a=2$, $b=-1$이므로

$a-b=3$

097 답 8

직선 $2x+ay+b=0$이 직선 $3x+2y-4=0$에 수직이므로

$2\times3+a\times2=0$ $\therefore a=-3$

따라서 직선 $2x-3y+b=0$이 점 $(2, 5)$를 지나므로

$4-15+b=0$ $\therefore b=11$

$\therefore a+b=8$

098 답 ④

직선 $x+ay+3=0$이 직선 $2x+by-1=0$에 평행하므로

$\frac{1}{2}=\frac{a}{b}\neq\frac{3}{-1}$

$\frac{1}{2}=\frac{a}{b}$에서 $b=2a$ …… ㉠

직선 $x+ay+3=0$이 직선 $(b-2)x-y-5=0$에 수직이므로

$1\times(b-2)+a\times(-1)=0$

$\therefore a-b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$

$\therefore ab=8$

099 답 18

두 직선 $2x+(k-5)y+1=0$, $4x+(k+4)y+3=0$이 서로 평행하려면

$\frac{2}{4}=\frac{k-5}{k+4}\neq\frac{1}{3}$

$\frac{2}{4}=\frac{k-5}{k+4}$에서 $k+4=2(k-5)$

$k+4=2k-10$ $\therefore k=14$

$\therefore \alpha=14$

두 직선이 서로 수직이 되려면

$2\times4+(k-5)(k+4)=0$

$k^2-k-12=0$, $(k+3)(k-4)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=4$

그런데 $\beta>0$이므로 $\beta=4$

$\therefore \alpha+\beta=18$

100 답 2

두 직선 $kx+y+1=0$, $2x+(k-1)y-2=0$의 교점이 존재하지 않으려면 두 직선이 서로 평행해야 하므로

$\frac{k}{2}=\frac{1}{k-1}\neq\frac{1}{-2}$

(i) $\frac{k}{2}=\frac{1}{k-1}$에서 $k(k-1)=2$

$k^2-k-2=0$, $(k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$

(ii) $\frac{k}{2}\neq\frac{1}{-2}$에서 $k\neq-1$

(i), (ii)에서 $k=2$

101 답 ⑤

두 점 $A(2, -1)$, $B(6, 3)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{3+1}{6-2}=1$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 -1이다.

또 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+6}{2}, \frac{-1+3}{2}\right)$ $\therefore (4, 1)$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 -1이고 점 $(4, 1)$을 지나는 직선이므로

$y-1=-(x-4)$ $\quad\therefore y=-x+5$

즉, $m=-1$, $n=5$이므로

$m+n=4$

102 답 ④

두 점 $A(-3, -2)$, $B(9, 2)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{2+2}{9+3}=\frac{1}{3}$

이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 -3이다.

또 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+9}{2}, \frac{-2+2}{2}\right)$ $\quad\therefore (3, 0)$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 -3이고 점 $(3, 0)$을 지나는 직선이므로

$y=-3(x-3)$ $\quad\therefore y=-3x+9$

이 직선이 점 $(a, -3)$을 지나므로

$-3=-3a+9$ $\quad\therefore a=4$

103 답 7

두 점 $A(1, a)$, $B(5, 1)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1-a}{5-1}=\frac{1-a}{4}$

직선 AB와 직선 $2x-y+b=0$, 즉 $y=2x+b$가 서로 수직이므로

$\frac{1-a}{4}\times 2=-1$, $1-a=-2$ $\quad\therefore a=3$

즉, $A(1, 3)$이므로 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$ $\quad\therefore (3, 2)$

따라서 직선 $2x-y+b=0$은 점 $(3, 2)$를 지나므로

$6-2+b=0$ $\quad\therefore b=-4$

$\therefore a-b=7$

104 답 -1

세 직선에 의하여 생기는 교점이 2개가 되려면 세 직선 중 두 직선이 서로 평행해야 한다.

(i) 두 직선 $x+y=0$, $ax+y-2=0$이 서로 평행할 때

$\frac{1}{a}=\frac{1}{1}\neq\frac{0}{-2}$ $\quad\therefore a=1$

(ii) 두 직선 $x-y+3=0$, $ax+y-2=0$이 서로 평행할 때

$\frac{1}{a}=\frac{-1}{1}\neq\frac{3}{-2}$ $\quad\therefore a=-1$

(i), (ii)에서 모든 a의 값의 곱은

$1\times(-1)=-1$

참고 두 직선 $x+y=0$, $x-y+3=0$은 서로 평행하지 않으므로 한 점에서 만난다.

105 답 ②

서로 다른 세 직선이 좌표평면을 4개의 영역으로 나누려면 세 직선이 모두 평행해야 한다.

(i) 두 직선 $ax+2y+1=0$, $3x-6y-4=0$이 서로 평행할 때

$\frac{a}{3}=\frac{2}{-6}\neq\frac{1}{-4}$ $\quad\therefore a=-1$

(ii) 두 직선 $x+by-5=0$, $3x-6y-4=0$이 서로 평행할 때

$\frac{1}{3}=\frac{b}{-6}\neq\frac{-5}{-4}$ $\quad\therefore b=-2$

(i), (ii)에서 $a+b=-3$

106 답 6

세 직선이 삼각형을 이루지 않으려면 세 직선이 모두 평행하거나 세 직선 중 두 직선이 서로 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

이때 두 직선 $x+2y-5=0$, $x-y+1=0$은 서로 평행하지 않으므로 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 $x+2y-5=0$, $ax-2y-1=0$이 서로 평행할 때

$\frac{1}{a}=\frac{2}{-2}\neq\frac{-5}{-1}$ $\quad\therefore a=-1$

(ii) 두 직선 $x-y+1=0$, $ax-2y-1=0$이 서로 평행할 때

$\frac{1}{a}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{1}{-1}$ $\quad\therefore a=2$

(iii) 직선 $ax-2y-1=0$이 두 직선 $x+2y-5=0$, $x-y+1=0$의 교점을 지날 때

$x+2y-5=0$, $x-y+1=0$을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=2$

따라서 직선 $ax-2y-1=0$이 점 $(1, 2)$를 지나야 하므로

$a-4-1=0$ $\quad\therefore a=5$

(i), (ii), (iii)에서 모든 a의 값의 합은

$-1+2+5=6$

개념유형

41쪽

107 답 1

$\frac{|-13|}{\sqrt{5^2+12^2}}=1$

108 답 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

$\frac{|3\times(-4)-1\times 2+10|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

109 답 3

$\frac{|4\times(-2)+3\times(-5)+8|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$

110 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

점 $P(3, -1)$과 직선 $y=-x+3$, 즉 $x+y-3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1\times 3+1\times(-1)-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

111 답 -5, 5

$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$이므로

$|k|=5$ $\quad\therefore k=\pm 5$

112 답 0, 4

$\frac{|1\times(-1)-1\times1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$이므로

$|k-2|=2$, $k-2=\pm2$

$\therefore$ $k=0$ 또는 $k=4$

113 답 -2, 3

$\frac{|1\times2+2\times k-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$이므로

$|2k-1|=5$, $2k-1=\pm5$

$\therefore$ $k=-2$ 또는 $k=3$

114 답 1, 1, 3, $\sqrt{5}$

115 답 2

주어진 두 직선이 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+4y-4=0$ 위의 한 점 $(0, 1)$과 직선 $3x+4y+6=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$\frac{|4\times1+6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

116 답 $\sqrt{13}$

주어진 두 직선이 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x-3y+4=0$ 위의 한 점 $(-2, 0)$과 직선 $2x-3y-9=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$\frac{|2\times(-2)-9|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\sqrt{13}$

117 답 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

주어진 두 직선의 방정식을 각각 변형하면

$3x-y-2=0$, $3x-y+3=0$

두 직선이 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-y+3=0$ 위의 한 점 $(-1, 0)$과 직선 $3x-y-2=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$\frac{|3\times(-1)-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

118 답 3

주어진 두 직선의 방정식을 각각 변형하면

$4x+3y+6=0$, $4x+3y-9=0$

두 직선이 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $4x+3y+6=0$ 위의 한 점 $(0, -2)$와 직선 $4x+3y-9=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$\frac{|3\times(-2)-9|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$

실전유형

119 답 $5\sqrt{2}$

두 점 $(-1, 1)$, $(3, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{5-1}{3+1}(x+1)$ $\therefore$ $x-y+2=0$

따라서 점 $(5, -3)$과 직선 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|5+3+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=5\sqrt{2}$

120 답 ⑤

점 $\mathrm{P}(a, 5)$와 직선 $2x-y-5=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$이므로

$\frac{|2a-5-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$, $|2a-10|=10$

$2a-10=\pm10$ $\therefore$ $a=0$ 또는 $a=10$

따라서 양수 a의 값은 10이다.

121 답 ④

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$x+2y-3+k(x-y+3)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x+2y-3=0$, $x-y+3=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=2$

따라서 $\mathrm{P}(-1, 2)$이므로 점 P와 직선 $x-3y-3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-1-6-3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\sqrt{10}$

122 답 14

점 $(1, 3)$과 직선 $3x-2y+1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3-6+1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$

점 $(1, 3)$과 직선 $2x-3y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2-9+k|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|k-7|}{\sqrt{13}}$

점 $(1, 3)$에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{|k-7|}{\sqrt{13}}$, $|k-7|=2$

$k-7=\pm2$ $\therefore$ $k=5$ 또는 $k=9$

따라서 모든 k의 값의 합은

$5+9=14$

123 답 5

직선 $4x+3y-2=0$에 이르는 거리가 2인 x축 위의 점의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면

$\frac{|4a-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$, $|4a-2|=10$

$4a-2=\pm10$ $\therefore$ $a=-2$ 또는 $a=3$

따라서 $\mathrm{A}(-2, 0)$, $\mathrm{B}(3, 0)$ 또는 $\mathrm{A}(3, 0)$, $\mathrm{B}(-2, 0)$이므로 선분 AB의 길이는

$|3-(-2)|=5$

124 답 ③

점 $(1, 3)$을 지나고 기울기가 k인 직선 l의 방정식은

$y-3=k(x-1)$ $\quad\therefore kx-y-k+3=0$

원점과 직선 l 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{|-k+3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$|-k+3|=\sqrt{5}\times\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하면

$k^2-6k+9=5(k^2+1)$, $2k^2+3k-2=0$

$(k+2)(2k-1)=0$ $\quad\therefore k=-2$ 또는 $k=\dfrac{1}{2}$

따라서 양수 k의 값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

125 답 $4x-y-26=0$, $4x-y+8=0$

직선 $4x-y+5=0$, 즉 $y=4x+5$에 평행한 직선의 기울기는 4이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=4x+a$ (a는 상수)라 하면

$4x-y+a=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

점 $(2, -1)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 $\sqrt{17}$이므로

$\dfrac{|8+1+a|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\sqrt{17}$, $|a+9|=17$

$a+9=\pm17$ $\quad\therefore a=-26$ 또는 $a=8$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$4x-y-26=0$ 또는 $4x-y+8=0$

126 답 9

주어진 두 직선이 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $4x+3y+6=0$ 위의 한 점 $(0, -2)$와 직선 $4x+3y-a=0$ 사이의 거리와 같다.

이때 두 직선 사이의 거리가 3이므로

$\dfrac{|-6-a|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$, $|-6-a|=15$

$-6-a=\pm15$ $\quad\therefore a=-21$ 또는 $a=9$

따라서 양수 a의 값은 9이다.

127 답 $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

주어진 두 직선이 서로 평행하므로

$\dfrac{3}{a}=\dfrac{1}{3}\neq\dfrac{-3}{1}$ $\quad\therefore a=9$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+y-3=0$ 위의 한 점 $(1, 0)$과 직선 $9x+3y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|9+1|}{\sqrt{9^2+3^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

128 답 ④

사각형 ABCD가 평행사변형이므로 두 직선 AB, CD는 서로 평행하다.

즉, 두 직선 AB, CD 사이의 거리는 직선 AB 위의 한 점 $B(3, 0)$과 직선 CD 사이의 거리와 같다.

직선 CD의 방정식은

$y-5=\dfrac{5-3}{-4}x$ $\quad\therefore x+2y-10=0$

따라서 구하는 거리는

$\dfrac{|3-10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$

129 답 ③

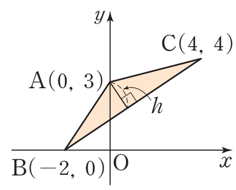
변 BC의 길이는

$\sqrt{(4+2)^2+4^2}=2\sqrt{13}$

직선 BC의 방정식은

$y=\dfrac{4}{4+2}(x+2)$ $\quad\therefore 2x-3y+4=0$

오른쪽 그림과 같이 점 $A(0, 3)$과 직선 BC 사이의 거리를 h라 하면



$h=\dfrac{|-9+4|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{13}}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times h=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{13}\times\dfrac{5}{\sqrt{13}}=5$

130 답 4

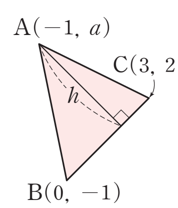
변 BC의 길이는

$\sqrt{3^2+(2+1)^2}=3\sqrt{2}$

직선 BC의 방정식은

$y+1=\dfrac{2+1}{3}x$ $\quad\therefore x-y-1=0$

오른쪽 그림과 같이 점 $A(-1, a)$와 직선 BC 사이의 거리를 h라 하면



$h=\dfrac{|-1-a-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-a-2|}{\sqrt{2}}$

삼각형 ABC의 넓이가 9이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times h=9$

$\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\dfrac{|-a-2|}{\sqrt{2}}=9$

$|-a-2|=6$, $-a-2=\pm6$

$\therefore a=-8$ 또는 $a=4$

따라서 양수 a의 값은 4이다.

131 답 $\dfrac{9}{2}$

직선 OA의 기울기는 $\dfrac{3}{4}$이므로 직선 OA는 직선 $3x-4y+9=0$, 즉 $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{9}{4}$와 서로 평행하다.

이때 삼각형 OAP에서 $\overline{OA}$를 밑변으로 하면 원점과 직선 $3x-4y+9=0$ 사이의 거리가 높이가 된다.

변 OA의 길이는

$\sqrt{4^2+3^2}=5$

원점과 직선 $3x-4y+9=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{9}{5}$

따라서 삼각형 OAP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{9}{5}=\dfrac{9}{2}$

실전유형으로 중단원 점검 44~45쪽

1 답 ④

선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times5+3\times1}{1+3}, \frac{1\times(-2)+3\times2}{1+3}\right)$ $\therefore (2, 1)$

따라서 점 $(2, 1)$을 지나고 기울기가 4인 직선의 방정식은

$y-1=4(x-2)$ $\therefore 4x-y-7=0$

즉, $a=4$, $b=-1$이므로

$a-b=5$

2 답 2

두 점 $(-6, -1)$, $(4, -6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+1=\frac{-6+1}{4+6}(x+6)$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x-4$

따라서 $m=-\frac{1}{2}$, $n=-4$이므로

$mn=2$

3 답 13

x절편이 4이고 y절편이 -5인 직선의 방정식은

$\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$ …… ⅰ

이 직선이 점 $(8, a)$를 지나므로

$2-\frac{a}{5}=1$ $\therefore a=5$ …… ⅱ

또 점 $(b, 5)$를 지나므로

$\frac{b}{4}-1=1$ $\therefore b=8$ …… ⅲ

$\therefore a+b=13$ …… ⅳ

채점 기준

ⅰ x절편이 4이고 y절편이 -5인 직선의 방정식 구하기	30 %
ⅱ a의 값 구하기	30 %
ⅲ b의 값 구하기	30 %
ⅳ $a+b$의 값 구하기	10 %

4 답 ②

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같으므로

$\frac{4-a}{1+1}=\frac{10-4}{(2a+7)-1}$, $\frac{4-a}{2}=\frac{3}{a+3}$

$(4-a)(a+3)=6$, $a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

따라서 양수 a의 값은 3이다.

5 답 ③

$b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

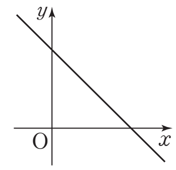
이때 $ac<0$, $bc<0$이므로

$a>0$, $b>0$, $c<0$ 또는 $a<0$, $b<0$, $c>0$

$\therefore -\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$

즉, 직선 $ax+by+c=0$의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이다.

따라서 직선 $ax+by+c=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



다른 풀이

$a\neq0$, $b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서

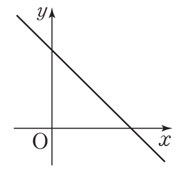
$y=0$일 때, $ax+c=0$ $\therefore x=-\frac{c}{a}$

$x=0$일 때, $by+c=0$ $\therefore y=-\frac{c}{b}$

이때 $ac<0$, $bc<0$이므로 $-\frac{c}{a}>0$, $-\frac{c}{b}>0$

즉, 직선 $ax+by+c=0$의 x절편과 y절편은 모두 양수이다.

따라서 직선 $ax+by+c=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



6 답 1

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$2x+3y-5+k(3x+2y)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$2x+3y-5=0$, $3x+2y=0$

두 식을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=3$

따라서 주어진 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 3)$을 지나므로

$a=-2$, $b=3$

$\therefore a+b=1$

7 답 ③

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$3x+4y-5+k(2x-3y-9)=0$ (단, k는 실수)

이 직선이 점 $(1, -3)$을 지나므로

$3-12-5+k(2+9-9)=0$

$-14+2k=0$ $\therefore k=7$

즉, 직선의 방정식은

$3x+4y-5+7(2x-3y-9)=0$ $\therefore y=x-4$

따라서 $m=1$, $n=-4$이므로

$m^2+n^2=17$

8 답 ③

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4+6}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$ $\therefore (1, 2)$

직선 $4x-y-3=0$, 즉 $y=4x-3$에 평행한 직선의 기울기는 4이므로 기울기가 4이고 점 $(1, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=4(x-1)$ $\therefore y=4x-2$

따라서 구하는 x절편은 $\frac{1}{2}$이다.

9 답 32

직선 $ax-3y+1=0$이 직선 $6x+by-3=0$에 수직이므로

$a\times6+(-3)\times b=0$

$\therefore 2a-b=0$ …… ㉠ …… i

직선 $ax-3y+1=0$이 직선 $(b+4)x-9y+2=0$에 평행하므로

$\frac{a}{b+4}=\frac{-3}{-9}\neq\frac{1}{2}$

$\frac{a}{b+4}=\frac{-3}{-9}$에서 $3a=b+4$

$\therefore 3a-b=4$ …… ㉡ …… ii

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=8$

$\therefore ab=32$ …… iii

채점 기준

i 직선 $ax-3y+1=0$이 직선 $6x+by-3=0$에 수직임을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	40 %
ii 직선 $ax-3y+1=0$이 직선 $(b+4)x-9y+2=0$에 평행함을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	40 %
iii ab의 값 구하기	20 %

10 답 1

두 점 $A(-2, 5)$, $B(4, 3)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{3-5}{4+2}=-\frac{1}{3}$

이므로 직선 l의 기울기는 3이다.

또 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{5+3}{2}\right)$ $\therefore (1, 4)$

따라서 직선 l은 기울기가 3이고 점 $(1, 4)$를 지나는 직선이므로

$y-4=3(x-1)$ $\therefore y=3x+1$

따라서 직선 l의 y절편은 1이다.

11 답 18

세 직선이 삼각형을 이루지 않으려면 세 직선이 모두 평행하거나 세 직선 중 두 직선이 서로 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

…… i

이때 두 직선 $x-y-2=0$, $2x+y-7=0$은 서로 평행하지 않으므로 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 $x-y-2=0$, $2x+ay+3=0$이 서로 평행할 때

$\frac{1}{2}=\frac{-1}{a}\neq\frac{-2}{3}$ $\therefore a=-2$

(ii) 두 직선 $2x+y-7=0$, $2x+ay+3=0$이 서로 평행할 때

$\frac{2}{2}=\frac{1}{a}\neq\frac{-7}{3}$ $\therefore a=1$ …… ii

(iii) 직선 $2x+ay+3=0$이 두 직선 $x-y-2=0$, $2x+y-7=0$의 교점을 지날 때

$x-y-2=0$, $2x+y-7=0$을 연립하여 풀면

$x=3,\ y=1$

따라서 직선 $2x+ay+3=0$이 점 $(3, 1)$을 지나야 하므로

$6+a+3=0$ $\therefore a=-9$ …… iii

(i), (ii), (iii)에서 모든 a의 값의 곱은

$-2\times1\times(-9)=18$ …… iv

채점 기준

i 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우 파악하기	30 %
ii 세 직선 중 두 직선이 서로 평행할 때, a의 값 구하기	30 %
iii 세 직선이 한 점에서 만날 때, a의 값 구하기	30 %
iv 모든 a의 값의 곱 구하기	10 %

12 답 ⑤

점 $(-2, 3)$과 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리가 4이므로

$\frac{|-8-9+k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=4$, $|k-17|=20$

$k-17=\pm20$ $\therefore k=-3$ 또는 $k=37$

따라서 음수 k의 값은 -3이다.

13 답 8

직선 $x+3y+2=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 3이므로 직선의 방정식을 $y=3x+k$ (k는 상수)라 하면

$3x-y+k=0$ …… ㉠

점 $(1, -2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\frac{|3+2+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$, $|k+5|=10$

$k+5=\pm10$ $\therefore k=-15$ 또는 $k=5$

이를 ㉠에 대입하면 직선의 방정식은

$3x-y-15=0$ 또는 $3x-y+5=0$

$\therefore a=3,\ b=-15$ 또는 $a=3,\ b=5$

그런데 $b>0$이므로 $a=3,\ b=5$

$\therefore a+b=8$

14 답 16

주어진 두 직선이 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-2y+8=0$ 위의 한 점 $(0, 4)$와 직선 $3x-2y+a=0$ 사이의 거리와 같다.

이때 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{13}$이므로

$\frac{|-8+a|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\sqrt{13}$, $|-8+a|=13$

$-8+a=\pm13$ $\therefore a=-5$ 또는 $a=21$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-5+21=16$

15 답 ①

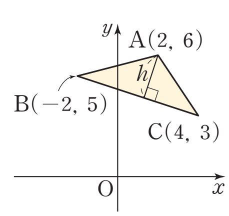
변 BC의 길이는

$\sqrt{(4+2)^2+(3-5)^2}=2\sqrt{10}$

직선 BC의 방정식은

$y-5=\frac{3-5}{4+2}(x+2)$ $\therefore x+3y-13=0$

오른쪽 그림과 같이 점 $A(2, 6)$과 직선 BC 사이의 거리를 h라 하면



$h=\frac{|2+18-13|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{7}{\sqrt{10}}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times h=\frac{1}{2}\times2\sqrt{10}\times\frac{7}{\sqrt{10}}=7$

03 원의 방정식

개념유형 46~47쪽

001 답 중심의 좌표: $(1, 0)$, 반지름의 길이: 2

002 답 중심의 좌표: $(3, 2)$, 반지름의 길이: $\sqrt{7}$

003 답 중심의 좌표: $(-4, 5)$, 반지름의 길이: 4

004 답 중심의 좌표: $(6, -3)$, 반지름의 길이: 5

005 답 $x^2+y^2=9$

006 답 $(x-2)^2+(y+1)^2=36$

007 답 $(x+3)^2+(y-7)^2=18$

008 답 $(x+4)^2+(y+6)^2=5$

009 답 $1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2$

010 답 $x^2+y^2=5$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$x^2+y^2=r^2$

이 원이 점 $(-2, 1)$을 지나므로

$(-2)^2+1^2=r^2 \quad \therefore r^2=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2=5$

011 답 $(x-3)^2+(y+5)^2=34$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+5)^2=r^2$

이 원이 원점을 지나므로

$(0-3)^2+(0+5)^2=r^2$

$\therefore r^2=34$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+5)^2=34$

012 답 $(x+2)^2+(y-4)^2=13$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-4)^2=r^2$

이 원이 점 $(-4, 1)$을 지나므로

$(-4+2)^2+(1-4)^2=r^2$

$\therefore r^2=13$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-4)^2=13$

013 답 $(x+5)^2+(y+6)^2=40$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y+6)^2=r^2$

이 원이 점 $(1, -8)$을 지나므로

$(1+5)^2+(-8+6)^2=r^2$

$\therefore r^2=40$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y+6)^2=40$

014 답 $2, 1, 3\sqrt{2}, 2, 1, 18$

015 답 $x^2+y^2=13$

원의 중심은 두 점 $(-2, 3)$, $(2, -3)$을 이은 선분의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{3-3}{2}\right) \quad \therefore (0, 0)$

원의 반지름의 길이는 두 점 $(-2, 3)$, $(2, -3)$ 사이의 거리의 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{(2+2)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2=13$

016 답 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$

원의 중심은 두 점 $(3, -1)$, $(3, 9)$를 이은 선분의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{3+3}{2}, \frac{-1+9}{2}\right) \quad \therefore (3, 4)$

원의 반지름의 길이는 두 점 $(3, -1)$, $(3, 9)$ 사이의 거리의 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times|9-(-1)|=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-4)^2=25$

017 답 $x^2+(y-3)^2=20$

원의 중심은 두 점 $(4, 1)$, $(-4, 5)$를 이은 선분의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{4-4}{2}, \frac{1+5}{2}\right) \quad \therefore (0, 3)$

원의 반지름의 길이는 두 점 $(4, 1)$, $(-4, 5)$ 사이의 거리의 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{(-4-4)^2+(5-1)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+(y-3)^2=20$

018 답 $(x+4)^2+(y-2)^2=17$

원의 중심은 두 점 $(-3,\ -2)$, $(-5,\ 6)$을 이은 선분의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{-3-5}{2},\ \frac{-2+6}{2}\right)$ $\therefore (-4,\ 2)$

원의 반지름의 길이는 두 점 $(-3,\ -2)$, $(-5,\ 6)$ 사이의 거리의 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{(-5+3)^2+(6+2)^2}=\sqrt{17}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+4)^2+(y-2)^2=17$

실전유형 48쪽

019 답 $(x-3)^2+(y+1)^2=16$

원 $x^2+(y-2)^2=16$의 반지름의 길이는 4이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+1)^2=16$

020 답 ②

원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-5)^2=r^2$

이 원이 점 $(-1,\ 6)$을 지나므로

$(-1+2)^2+(6-5)^2=r^2$ $\therefore r^2=2$

즉, 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-5)^2=2$

따라서 $a=-2$, $b=5$, $c=2$이므로

$a+b+c=5$

021 답 ③

원 $(x-1)^2+(y+4)^2=9$의 중심의 좌표가 $(1,\ -4)$이므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y+4)^2=r^2$

이 원이 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$(-1)^2+(-2+4)^2=r^2$ $\therefore r^2=5$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi r^2=\pi\times 5=5\pi$

022 답 21

원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{-3+5}{2},\ \frac{2+4}{2}\right)$ $\therefore (1,\ 3)$

$\therefore a=1,\ b=3$

원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{(5+3)^2+(4-2)^2}=\sqrt{17}$

$\therefore r=\sqrt{17}$

$\therefore a+b+r^2=21$

023 답 $x^2+(y-1)^2=5$

선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{1\times4+3\times(-4)}{1+3},\ \frac{1\times(-1)+3\times3}{1+3}\right)$ $\therefore (-2,\ 2)$

선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{3\times4+1\times(-4)}{3+1},\ \frac{3\times(-1)+1\times3}{3+1}\right)$ $\therefore (2,\ 0)$

원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{-2+2}{2},\ \frac{2}{2}\right)$ $\therefore (0,\ 1)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{(2+2)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+(y-1)^2=5$

024 답 ④

원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{2-4}{2}\right)$ $\therefore (2,\ -1)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{(3-1)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{10}$

따라서 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+1)^2=10$

$y=0$을 대입하면

$(x-2)^2+1^2=10$, $x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 P$(-1,\ 0)$, Q$(5,\ 0)$ 또는 P$(5,\ 0)$, Q$(-1,\ 0)$이므로 선분 PQ의 길이는

$|5-(-1)|=6$

개념유형 49~51쪽

025 답 중심의 좌표: $(-1,\ 0)$, 반지름의 길이: 1

$x^2+y^2+2x=0$에서

$(x+1)^2+y^2=1$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(-1,\ 0)$이고 반지름의 길이는 1이다.

026 답 중심의 좌표: $(0,\ 2)$, 반지름의 길이: $\sqrt{11}$

$x^2+y^2-4y-7=0$에서

$x^2+(y-2)^2=11$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(0,\ 2)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{11}$이다.

027 답 중심의 좌표: $(-2,\ -1)$, 반지름의 길이: 2

$x^2+y^2+4x+2y+1=0$에서

$(x+2)^2+(y+1)^2=4$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(-2,\ -1)$이고 반지름의 길이는 2이다.

028 답 중심의 좌표: (4, 1), 반지름의 길이: $2\sqrt{3}$

$x^2+y^2-8x-2y+5=0$에서

$(x-4)^2+(y-1)^2=12$

따라서 원의 중심의 좌표는 (4, 1)이고 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$이다.

029 답 중심의 좌표: (3, −2), 반지름의 길이: 3

$x^2+y^2-6x+4y+4=0$에서

$(x-3)^2+(y+2)^2=9$

따라서 원의 중심의 좌표는 (3, −2)이고 반지름의 길이는 3이다.

030 답 중심의 좌표: (−4, 2), 반지름의 길이: $3\sqrt{3}$

$x^2+y^2+8x-4y-7=0$에서

$(x+4)^2+(y-2)^2=27$

따라서 원의 중심의 좌표는 (−4, 2)이고 반지름의 길이는 $3\sqrt{3}$이다.

031 답 중심의 좌표: (1, 3), 반지름의 길이: $\sqrt{7}$

$x^2+y^2-2x-6y+3=0$에서

$(x-1)^2+(y-3)^2=7$

따라서 원의 중심의 좌표는 (1, 3)이고 반지름의 길이는 $\sqrt{7}$이다.

032 답 2, 4, 4, 4

033 답 $k<7$

$x^2+y^2+6y+2k-5=0$에서

$x^2+(y+3)^2=14-2k$

이 방정식이 원을 나타내려면

$14-2k>0 \qquad \therefore k<7$

034 답 $k>-1$

$x^2+y^2+2x+2y-3k-1=0$에서

$(x+1)^2+(y+1)^2=3+3k$

이 방정식이 원을 나타내려면

$3+3k>0 \qquad \therefore k>-1$

035 답 $k<-2\sqrt{3}$ 또는 $k>2\sqrt{3}$

$x^2+y^2+4x-6y-k^2+25=0$에서

$(x+2)^2+(y-3)^2=-12+k^2$

이 방정식이 원을 나타내려면

$-12+k^2>0,\ (k+2\sqrt{3})(k-2\sqrt{3})>0$

$\therefore k<-2\sqrt{3}$ 또는 $k>2\sqrt{3}$

036 답 $-3<k<2$

$x^2+y^2-8x+4y+k^2+k+14=0$에서

$(x-4)^2+(y+2)^2=6-k^2-k$

이 방정식이 원을 나타내려면

$6-k^2-k>0,\ k^2+k-6<0$

$(k+3)(k-2)<0 \qquad \therefore -3<k<2$

037 답 0, 2, −5, 4, 25, 13, 9, 13, 9

038 답 $x^2+y^2+2x+6y=0$

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 이 원이 점 O(0, 0)을 지나므로 $C=0$

$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

원 ㉠이 점 P(−2, 0)을 지나므로

$4-2A=0 \qquad \therefore A=2$

원 ㉠이 점 Q(2, −2)를 지나므로

$4+4+2A-2B=0$

$4+4+4-2B=0 \qquad \therefore B=6$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2+2x+6y=0$

039 답 $x^2+y^2-8x-4y=0$

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 이 원이 점 O(0, 0)을 지나므로 $C=0$

$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

원 ㉠이 점 P(2, 6)을 지나므로

$4+36+2A+6B=0 \qquad \therefore A+3B=-20 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

원 ㉠이 점 Q(6, −2)를 지나므로

$36+4+6A-2B=0 \qquad \therefore 3A-B=-20 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$A=-8,\ B=-4$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2-8x-4y=0$

040 답 $x^2+y^2+4x-6y=0$

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 이 원이 점 O(0, 0)을 지나므로 $C=0$

$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

원 ㉠이 점 P(−4, 6)을 지나므로

$16+36-4A+6B=0 \qquad \therefore 2A-3B=26 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

원 ㉠이 점 Q(1, 1)을 지나므로

$1+1+A+B=0 \qquad \therefore A+B=-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$A=4,\ B=-6$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2+4x-6y=0$

041 답 13, 6, 1, 4, 1, 4, $\sqrt{10}$, 1, 4, 10

042 답 $(x-5)^2+(y-2)^2=20$

원의 중심을 P(a, b)라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+b^2=(a-3)^2+(b+2)^2$

$\therefore a-b=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}$에서 $\overline{\mathrm{BP}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$이므로
$(a-3)^2+(b+2)^2=(a-3)^2+(b-6)^2$
$(b+2)^2=(b-6)^2$, $16b=32$ $\quad\therefore b=2$
이를 ㉠에 대입하면
$a-2=3$ $\quad\therefore a=5$
즉, $\mathrm{P}(5, 2)$이므로 원의 반지름의 길이는
$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(5-1)^2+2^2}=2\sqrt{5}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-5)^2+(y-2)^2=20$

043 답 $x^2+(y-3)^2=5$

원의 중심을 $\mathrm{P}(a, b)$라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}$
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로
$(a+2)^2+(b-4)^2=(a+1)^2+(b-1)^2$
$\therefore a-3b=-9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{CP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$이므로
$(a+2)^2+(b-4)^2=(a-1)^2+(b-5)^2$
$\therefore 3a+b=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=3$
즉, $\mathrm{P}(0, 3)$이므로 원의 반지름의 길이는
$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{2^2+(3-4)^2}=\sqrt{5}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+(y-3)^2=5$

044 답 $(x-2)^2+(y+2)^2=17$

원의 중심을 $\mathrm{P}(a, b)$라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}$
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로
$(a+2)^2+(b+1)^2=(a-3)^2+(b-2)^2$
$\therefore 5a+3b=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{CP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$이므로
$(a+2)^2+(b+1)^2=(a-6)^2+(b+3)^2$
$\therefore 4a-b=10$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-2$
즉, $\mathrm{P}(2, -2)$이므로 원의 반지름의 길이는
$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(2+2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{17}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-2)^2+(y+2)^2=17$

실전유형

51~53쪽

045 답 ②

$x^2+y^2+2x-6y+6=0$에서
$(x+1)^2+(y-3)^2=4$
이 원의 중심의 좌표는 $(-1, 3)$이고 반지름의 길이는 2이므로
$a=-1$, $b=3$, $r=2$
$\therefore a-b+r=-2$

046 답 25

$x^2+y^2-8x+6y=0$에서
$(x-4)^2+(y+3)^2=25$
따라서 이 원의 넓이는 25π이므로
$k=25$

047 답 ④

$x^2+y^2-6x-4y+8=0$에서
$(x-3)^2+(y-2)^2=5$
이 원의 중심의 좌표는 $(3, 2)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 이 원과 중심이 같고 반지름의 길이가 2배인 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-2)^2=(2\sqrt{5})^2$
$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=20$

048 답 ④

$x^2+y^2-4x-2ay-19=0$에서
$(x-2)^2+(y-a)^2=a^2+23$
직선 $y=2x+3$이 이 원의 중심 $(2, a)$를 지나므로
$a=4+3=7$

049 답 2

$x^2+y^2+4x+2y+3k-17=0$에서
$(x+2)^2+(y+1)^2=22-3k$
이 원의 반지름의 길이가 4이므로
$22-3k=4^2$ $\quad\therefore k=2$

050 답 ⑤

① $(x-2)^2+y^2=-1$
② $x^2+(y+3)^2=-3$
③ $(x-1)^2+(y-2)^2=0$
④ $(x+1)^2+(y+1)^2=-2$
⑤ $(x+4)^2+(y-1)^2=1$
따라서 원을 나타내는 방정식인 것은 ⑤이다.

051 답 4

$x^2+y^2-2ax+2a^2-3a-10=0$에서
$(x-a)^2+y^2=-a^2+3a+10$
이 방정식이 원을 나타내려면
$-a^2+3a+10>0$, $a^2-3a-10<0$
$(a+2)(a-5)<0$ $\quad\therefore -2<a<5$
따라서 정수 a의 최댓값은 4이다.

052 답 ③

$x^2+y^2+2x-4y+k=0$에서
$(x+1)^2+(y-2)^2=5-k$
이 방정식이 반지름의 길이가 3 이하인 원을 나타내려면
$0<\sqrt{5-k}\le 3$, $0<5-k\le 9$
$\therefore -4\le k<5$

053 답 ②

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 이 원이 원점을 지나므로 $C=0$

$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0$ …… ㉠

원 ㉠이 점 $(-4, 2)$를 지나므로

$16+4-4A+2B=0$ $\quad \therefore 2A-B=10$ …… ㉡

원 ㉠이 점 $(-1, 3)$을 지나므로

$1+9-A+3B=0$ $\quad \therefore A-3B=10$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $A=4$, $B=-2$

즉, 원의 방정식은

$x^2+y^2+4x-2y=0$ $\quad \therefore (x+2)^2+(y-1)^2=5$

따라서 구하는 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

054 답 ③

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 0)$을 지나므로 $C=0$

$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0$ …… ㉠

원 ㉠이 점 $(5, -3)$을 지나므로

$25+9+5A-3B=0$ $\quad \therefore 5A-3B=-34$ …… ㉡

원 ㉠이 점 $(8, 2)$를 지나므로

$64+4+8A+2B=0$ $\quad \therefore 4A+B=-34$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $A=-8$, $B=-2$

즉, 원의 방정식은

$x^2+y^2-8x-2y=0$

이 원이 점 $(3, k)$를 지나므로

$9+k^2-24-2k=0$, $k^2-2k-15=0$

$(k+3)(k-5)=0$ $\quad \therefore k=-3$ 또는 $k=5$

따라서 양수 k의 값은 5이다.

055 답 30

원의 중심을 $\mathrm{P}(a, b)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(a+1)^2+(b-5)^2=a^2+(b-6)^2$

$\therefore a+b=5$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}$에서 $\overline{\mathrm{BP}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$이므로

$a^2+(b-6)^2=(a-7)^2+(b+1)^2$

$\therefore a-b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

즉, $\mathrm{P}(3, 2)$이므로 원의 반지름의 길이는

$r=\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{3^2+(2-6)^2}=5$

$\therefore abr=30$

056 답 ④

원의 중심을 $\mathrm{P}(a, b)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(a+2)^2+(b-3)^2=(a-2)^2+(b+1)^2$

$\therefore a-b=-1$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{CP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$이므로

$(a+2)^2+(b-3)^2=(a-4)^2+(b-1)^2$

$\therefore 3a-b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

즉, $\mathrm{P}(1, 2)$이므로 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(1+2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=10$

$\therefore x^2+y^2-2x-4y-5=0$

057 답 (1) 5 (2) 6 (3) 4

(1) $x^2+y^2-6x+8y+24=0$에서

$(x-3)^2+(y+4)^2=1$

원점 O와 원의 중심 $(3, -4)$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

(2) 원의 반지름의 길이를 r라 하면

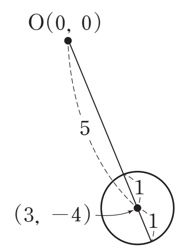
$r=1$

오른쪽 그림에서 선분 OP의 길이의 최댓값은

$d+r=5+1=6$

(3) 오른쪽 그림에서 선분 OP의 길이의 최솟값은

$d-r=5-1=4$



058 답 ②

점 $\mathrm{A}(5, 5)$와 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리를 d라 하면

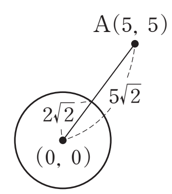
$d=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이를 r라 하면

$r=2\sqrt{2}$

따라서 오른쪽 그림에서 선분 AP의 길이의 최솟값은

$d-r=5\sqrt{2}-2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$



059 답 96

$x^2+y^2+6x+4y+9=0$에서

$(x+3)^2+(y+2)^2=4$

점 $\mathrm{A}(-9, 6)$과 원의 중심 $(-3, -2)$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\sqrt{(-3+9)^2+(-2-6)^2}=10$

원의 반지름의 길이를 r라 하면

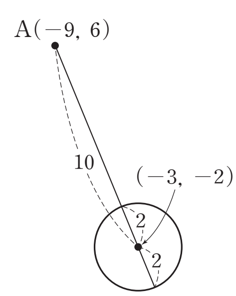
$r=2$

따라서 오른쪽 그림에서

$M=d+r=10+2=12$

$m=d-r=10-2=8$

$\therefore Mm=96$



060 답 $(x+5)^2+(y-3)^2=9$

주어진 원은 중심이 점 $(-5,\ 3)$이고 x축에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 y좌표)$|=|3|=3$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+5)^2+(y-3)^2=9$

061 답 $(x+3)^2+(y+2)^2=4$

주어진 원은 중심이 점 $(-3,\ -2)$이고 x축에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 y좌표)$|=|-2|=2$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y+2)^2=4$

062 답 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$

주어진 원은 중심이 점 $(2,\ 3)$이고 y축에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|2|=2$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-2)^2+(y-3)^2=4$

063 답 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

주어진 원은 중심이 점 $(1,\ -2)$이고 y축에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|1|=1$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y+2)^2=1$

064 답 1, 2, 1, 1

065 답 $(x-7)^2+(y-5)^2=25$

원의 중심이 점 $(7,\ 5)$이고 x축에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 y좌표)$|=|5|=5$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-7)^2+(y-5)^2=25$

066 답 $(x+6)^2+(y-2)^2=4$

원의 중심이 점 $(-6,\ 2)$이고 x축에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 y좌표)$|=|2|=2$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+6)^2+(y-2)^2=4$

067 답 $(x-4)^2+(y+3)^2=9$

원의 중심이 점 $(4,\ -3)$이고 x축에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 y좌표)$|=|-3|=3$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-4)^2+(y+3)^2=9$

068 답 $(x+8)^2+(y+4)^2=16$

원의 중심이 점 $(-8,\ -4)$이고 x축에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 y좌표)$|=|-4|=4$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+8)^2+(y+4)^2=16$

069 답 2, 2, 3, 4

070 답 $(x-3)^2+(y-5)^2=9$

원의 중심이 점 $(3,\ 5)$이고 y축에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|3|=3$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-5)^2=9$

071 답 $(x+7)^2+(y-6)^2=49$

원의 중심이 점 $(-7,\ 6)$이고 y축에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|-7|=7$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+7)^2+(y-6)^2=49$

072 답 $(x-5)^2+(y+8)^2=25$

원의 중심이 점 $(5,\ -8)$이고 y축에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|5|=5$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-5)^2+(y+8)^2=25$

073 답 $(x+6)^2+(y+10)^2=36$

원의 중심이 점 $(-6,\ -10)$이고 y축에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|-6|=6$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+6)^2+(y+10)^2=36$

074 답 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

주어진 원은 중심이 점 $(2,\ 2)$이고 x축과 y축에 동시에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|$(중심의 y좌표)$|=2$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-2)^2+(y-2)^2=4$

075 답 $(x+4)^2+(y-4)^2=16$

주어진 원은 중심이 점 $(-4,\ 4)$이고 x축과 y축에 동시에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|$(중심의 y좌표)$|=4$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+4)^2+(y-4)^2=16$

076 답 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

주어진 원은 중심이 점 $(-1,\ -1)$이고 x축과 y축에 동시에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|$(중심의 y좌표)$|=1$

따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y+1)^2=1$

077 답 $(x-7)^2+(y+7)^2=49$

주어진 원은 중심이 점 $(7,\ -7)$이고 x축과 y축에 동시에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|$(중심의 y좌표)$|=7$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-7)^2+(y+7)^2=49$

078 답 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

원의 중심이 점 $(1,\ 1)$이고 x축과 y축에 동시에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|$(중심의 y좌표)$|=1$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

079 답 $(x+3)^2+(y-3)^2=9$

원의 중심이 점 $(-3,\ 3)$이고 x축과 y축에 동시에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|$(중심의 y좌표)$|=3$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-3)^2=9$

080 답 $(x-6)^2+(y+6)^2=36$

원의 중심이 점 $(6,\ -6)$이고 x축과 y축에 동시에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|$(중심의 y좌표)$|=6$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-6)^2+(y+6)^2=36$

081 답 $(x+2)^2+(y+2)^2=4$

원의 중심이 점 $(-2,\ -2)$이고 x축과 y축에 동시에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|$(중심의 y좌표)$|=2$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y+2)^2=4$

082 답 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$

구하는 원은 중심이 점 $(5,\ 5)$이고 반지름의 길이가 5인 원이므로
$(x-5)^2+(y-5)^2=25$

083 답 $(x+5)^2+(y-5)^2=25$

구하는 원은 중심이 점 $(-5,\ 5)$이고 반지름의 길이가 5인 원이므로
$(x+5)^2+(y-5)^2=25$

084 답 $(x+5)^2+(y+5)^2=25$

구하는 원은 중심이 점 $(-5,\ -5)$이고 반지름의 길이가 5인 원이므로
$(x+5)^2+(y+5)^2=25$

085 답 $(x-5)^2+(y+5)^2=25$

구하는 원은 중심이 점 $(5,\ -5)$이고 반지름의 길이가 5인 원이므로
$(x-5)^2+(y+5)^2=25$

실전유형

57~58쪽

086 답 ④

원 $(x+4)^2+(y-2)^2=20$의 중심의 좌표는 $(-4,\ 2)$이므로 이 원과 중심이 같고 y축에 접하는 원의 반지름의 길이는
$|-4|=4$
따라서 구하는 원의 둘레의 길이는
$2\pi\times4=8\pi$

087 답 ④

$x^2+y^2-6x+2y+k=0$에서
$(x-3)^2+(y+1)^2=10-k$
원의 중심의 좌표가 $(3,\ -1)$이고 이 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이는
$|-1|=1$
따라서 $10-k=1^2$이므로
$k=9$

088 답 4

중심의 좌표가 $(-2,\ a)$이고 y축에 접하는 원의 반지름의 길이는
$|-2|=2$
따라서 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y-a)^2=4$
이 원이 점 $(0,\ 4)$를 지나므로
$2^2+(4-a)^2=4$
$(4-a)^2=0 \qquad \therefore\ a=4$

089 답 ③

원의 중심의 좌표를 $(a,\ a+2)$라 하면 이 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이는 $|a+2|$이다.
따라서 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-a-2)^2=(a+2)^2$
이 원이 점 $(-2,\ 3)$을 지나므로
$(-2-a)^2+(1-a)^2=(a+2)^2$
$(1-a)^2=0 \qquad \therefore\ a=1$
따라서 구하는 반지름의 길이는
$|1+2|=3$

090 답 26π

원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 이 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이는 $|b|$이다.

따라서 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ …… ㉠

원 ㉠이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$(-a)^2+(1-b)^2=b^2$

$\therefore\ a^2-2b+1=0$ …… ㉡

원 ㉠이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$(1-a)^2+(2-b)^2=b^2$

$\therefore\ a^2-2a-4b+5=0$ …… ㉢

㉡−㉢을 하면

$2a+2b-4=0 \qquad \therefore\ b=-a+2$ …… ㉣

이를 ㉡에 대입하면

$a^2-2(-a+2)+1=0$

$a^2+2a-3=0,\ (a+3)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=1$

이를 ㉣에 대입하면 $b=5$ 또는 $b=1$

따라서 두 원의 반지름의 길이는 각각 1, 5이므로 두 원의 넓이의 합은

$\pi\times1^2+\pi\times5^2=26\pi$

091 답 ⑤

점 $(0,\ 3)$에서 y축에 접하는 원의 중심의 y좌표는 3이고 중심이 제1사분면 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a,\ 3)\ (a>0)$이라 하면 반지름의 길이는

$|a|=a$

이때 원의 넓이가 36π이므로

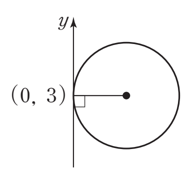
$\pi a^2=36\pi,\ a^2=36 \qquad \therefore\ a=\pm6$

그런데 $a>0$이므로 $a=6$

따라서 중심의 좌표가 $(6,\ 3)$이고 반지름의 길이가 6이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-6)^2+(y-3)^2=36$

참고 점 $(0,\ 3)$에서 y축에 접하는 원은 반지름의 길이에 관계없이 중심의 y좌표가 항상 3이다.



092 답 ⑤

중심이 점 $(4,\ -4)$이고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이는 4이므로 이 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y+4)^2=16$

따라서 이 원 위의 점인 것은 ⑤이다.

093 답 -4

원의 중심이 제1사분면 위에 있고 x축과 y축에 동시에 접하므로 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(r,\ r)$이다.

이때 원의 중심이 직선 $5x-3y-4=0$ 위에 있으므로

$5r-3r-4=0 \qquad \therefore\ r=2$

따라서 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=4 \qquad \therefore\ x^2+y^2-4x-4y+4=0$

즉, $a=-4,\ b=-4,\ c=4$이므로

$a+b+c=-4$

094 답 $8\sqrt{2}$

점 $(-2,\ 4)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하므로 원의 중심은 제2사분면 위에 있다.

따라서 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(-r,\ r)$이므로 원의 방정식은

$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원이 점 $(-2,\ 4)$를 지나므로

$(-2+r)^2+(4-r)^2=r^2$

$r^2-12r+20=0,\ (r-2)(r-10)=0$

$\therefore\ r=2$ 또는 $r=10$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(-2,\ 2),\ (-10,\ 10)$이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-10+2)^2+(10-2)^2}=8\sqrt{2}$

095 답 3

$x^2+y^2+2x+2ay+3-b=0$에서

$(x+1)^2+(y+a)^2=a^2+b-2$

따라서 이 원의 중심의 좌표는 $(-1,\ -a)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2+b-2}$이다.

이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$\sqrt{a^2+b-2}=|-1|=|-a|$

$|-1|=|-a|$에서 $a=\pm1$

그런데 $a>0$이므로 $a=1$

$\sqrt{a^2+b-2}=|-1|$에서 양변을 제곱하면

$a^2+b-2=1$

$1+b-2=1 \qquad \therefore\ b=2$

$\therefore\ a+b=3$

개념유형

59~61쪽

096 답 1, 2, 1, 3

097 답 한 점에서 만난다(접한다).

$y=x+2$를 $x^2+y^2=2$에 대입하면

$x^2+(x+2)^2=2 \qquad \therefore\ x^2+2x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-1\times1=0$

따라서 원 $x^2+y^2=2$와 직선 $y=x+2$는 한 점에서 만난다(접한다).

098 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

$y=2x-3$을 $x^2+y^2=2$에 대입하면

$x^2+(2x-3)^2=2 \qquad \therefore\ 5x^2-12x+7=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-6)^2-5\times7=1>0$

따라서 원 $x^2+y^2=2$와 직선 $y=2x-3$은 서로 다른 두 점에서 만난다.

099 답 만나지 않는다.

$x-y+4=0$에서 $y=x+4$

이를 $x^2+y^2=2$에 대입하면

$x^2+(x+4)^2=2 \qquad \therefore x^2+4x+7=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\times7=-3<0$

따라서 원 $x^2+y^2=2$와 직선 $x-y+4=0$은 만나지 않는다.

100 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

$3x-y-1=0$에서 $y=3x-1$

이를 $x^2+y^2=2$에 대입하면

$x^2+(3x-1)^2=2 \qquad \therefore 10x^2-6x-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-10\times(-1)=19>0$

따라서 원 $x^2+y^2=2$와 직선 $3x-y-1=0$은 서로 다른 두 점에서 만난다.

101 답 2, 1, 10, 2, -1, $2\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$

102 답 만나지 않는다.

원의 중심 $(2, -1)$과 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|2+1+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=\sqrt{10}$

$\therefore d>r$

따라서 원 $x^2+y^2-4x+2y-5=0$과 직선 $x-y+3=0$은 만나지 않는다.

103 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

원의 중심 $(2, -1)$과 직선 $3x-y-2=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|6+1-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=\sqrt{10}$

$\therefore d<r$

따라서 원 $x^2+y^2-4x+2y-5=0$과 직선 $3x-y-2=0$은 서로 다른 두 점에서 만난다.

104 답 한 점에서 만난다(접한다).

원의 중심 $(2, -1)$과 직선 $y=3x+3$, 즉 $3x-y+3=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|6+1+3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=\sqrt{10}$

$\therefore d=r$

따라서 원 $x^2+y^2-4x+2y-5=0$과 직선 $y=3x+3$은 한 점에서 만난다(접한다).

105 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

원의 중심 $(2, -1)$과 직선 $y=x+1$, 즉 $x-y+1=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|2+1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=\sqrt{10}$

$\therefore d<r$

따라서 원 $x^2+y^2-4x+2y-5=0$과 직선 $y=x+1$은 서로 다른 두 점에서 만난다.

106 답 $-4<k<4$

$y=x+k$를 $x^2+y^2=8$에 대입하면

$x^2+(x+k)^2=8 \qquad \therefore 2x^2+2kx+k^2-8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-8)=-k^2+16$

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$-k^2+16>0$, $k^2-16<0$

$(k+4)(k-4)<0 \qquad \therefore -4<k<4$

다른 풀이

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=2\sqrt{2}$

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<r$이어야 하므로

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}$, $|k|<4$

$\therefore -4<k<4$

107 답 $k=\pm4$

원과 직선이 한 점에서 만나려면 $D=0$이어야 하므로

$-k^2+16=0$, $k^2=16$

$\therefore k=\pm4$

다른 풀이

원과 직선이 한 점에서 만나려면 $d=r$이어야 하므로

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$, $|k|=4$

$\therefore k=\pm4$

108 답 $k<-4$ 또는 $k>4$

원과 직선이 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로

$-k^2+16<0$, $k^2-16>0$

$(k+4)(k-4)>0 \qquad \therefore k<-4$ 또는 $k>4$

다른 풀이

원과 직선이 만나지 않으려면 $d>r$이어야 하므로

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}$, $|k|>4$

$\therefore k<-4$ 또는 $k>4$

109 답 $-3\sqrt{5}<k<3\sqrt{5}$

$y=2x+k$를 $x^2+y^2=9$에 대입하면

$x^2+(2x+k)^2=9 \qquad \therefore 5x^2+4kx+k^2-9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-9)=-k^2+45$

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$-k^2+45>0,\ k^2-45<0$

$(k+3\sqrt{5})(k-3\sqrt{5})<0 \qquad \therefore -3\sqrt{5}<k<3\sqrt{5}$

다른 풀이

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=3$

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<r$이어야 하므로

$\frac{|k|}{\sqrt{5}}<3,\ |k|<3\sqrt{5} \qquad \therefore -3\sqrt{5}<k<3\sqrt{5}$

110 답 $k=\pm3\sqrt{5}$

원과 직선이 한 점에서 만나려면 $D=0$이어야 하므로

$-k^2+45=0,\ k^2=45 \qquad \therefore k=\pm3\sqrt{5}$

다른 풀이

원과 직선이 한 점에서 만나려면 $d=r$이어야 하므로

$\frac{|k|}{\sqrt{5}}=3,\ |k|=3\sqrt{5} \qquad \therefore k=\pm3\sqrt{5}$

111 답 $k<-3\sqrt{5}$ 또는 $k>3\sqrt{5}$

원과 직선이 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로

$-k^2+45<0,\ k^2-45>0$

$(k+3\sqrt{5})(k-3\sqrt{5})>0 \qquad \therefore k<-3\sqrt{5}$ 또는 $k>3\sqrt{5}$

다른 풀이

원과 직선이 만나지 않으려면 $d>r$이어야 하므로

$\frac{|k|}{\sqrt{5}}>3,\ |k|>3\sqrt{5} \qquad \therefore k<-3\sqrt{5}$ 또는 $k>3\sqrt{5}$

112 답 $0<k<4$

원 C의 중심 $(0,\ -2)$와 직선 l: $x+y+k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|-2+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-2+k|}{\sqrt{2}}$

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=\sqrt{2}$

원 C와 직선 l이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<r$이어야 하므로

$\frac{|-2+k|}{\sqrt{2}}<\sqrt{2},\ |-2+k|<2$

$-2<-2+k<2 \qquad \therefore 0<k<4$

다른 풀이

$x+y+k=0$에서 $x=-y-k$

이를 $x^2+(y+2)^2=2$에 대입하면

$(-y-k)^2+(y+2)^2=2$

$\therefore 2y^2+2(k+2)y+k^2+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 원 C와 직선 l이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(k+2)^2-2(k^2+2)>0$

$k^2-4k<0,\ k(k-4)<0$

$\therefore 0<k<4$

참고 원의 중심이 원점이 아닌 경우에는 판별식을 이용하는 것보다 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하는 것이 더 편리하다.

113 답 $-5<k<5$

원 C의 중심 $(2,\ 1)$과 직선 l: $x-2y+k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|2-2+k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=\sqrt{5}$

원 C와 직선 l이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<r$이어야 하므로

$\frac{|k|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5},\ |k|<5 \qquad \therefore -5<k<5$

114 답 $-1,\ 7$

원 C의 중심 $(-3,\ 0)$과 직선 l: $x-y+k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|-3+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-3+k|}{\sqrt{2}}$

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=2\sqrt{2}$

원 C와 직선 l이 한 점에서 만나려면 $d=r$이어야 하므로

$\frac{|-3+k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2},\ |-3+k|=4$

$-3+k=\pm4 \qquad \therefore k=-1$ 또는 $k=7$

115 답 $-14,\ 26$

원 C의 중심 $(2,\ -3)$과 직선 l: $3x+4y+k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|6-12+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|k-6|}{5}$

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=4$

원 C와 직선 l이 한 점에서 만나려면 $d=r$이어야 하므로

$\frac{|k-6|}{5}=4,\ |k-6|=20$

$k-6=\pm20 \qquad \therefore k=-14$ 또는 $k=26$

116 답 $k<-11$ 또는 $k>9$

원 C의 중심 $(0,\ -1)$과 직선 l: $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|1+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|1+k|}{\sqrt{10}}$

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=\sqrt{10}$

원 C와 직선 l이 만나지 않으려면 $d>r$이어야 하므로

$\frac{|1+k|}{\sqrt{10}}>\sqrt{10},\ |1+k|>10$

$k+1<-10$ 또는 $1+k>10$

$\therefore k<-11$ 또는 $k>9$

117 답 $k<-15$ 또는 $k>11$

$x^2+y^2-8x-4y+7=0$에서

$(x-4)^2+(y-2)^2=13$

원 C의 중심 $(4, 2)$와 직선 l: $2x-3y+k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|8-6+k|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|k+2|}{\sqrt{13}}$

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=\sqrt{13}$

원 C와 직선 l이 만나지 않으려면 $d>r$이어야 하므로

$\frac{|k+2|}{\sqrt{13}}>\sqrt{13}$, $|k+2|>13$

$k+2<-13$ 또는 $k+2>13$

$\therefore$ $k<-15$ 또는 $k>11$

실전유형

61~63쪽

118 답 ③

$x-y+k=0$에서 $y=x+k$

이를 $x^2+y^2=3$에 대입하면

$x^2+(x+k)^2=3$ $\quad\therefore 2x^2+2kx+k^2-3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-3)>0$

$k^2-6<0$, $(k+\sqrt{6})(k-\sqrt{6})<0$

$\therefore -\sqrt{6}<k<\sqrt{6}$

따라서 정수 k는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

다른 풀이

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<\sqrt{3}$, $|k|<\sqrt{6}$

$\therefore -\sqrt{6}<k<\sqrt{6}$

따라서 정수 k는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

119 답 13

원의 중심 $(-2, 1)$과 직선 $2x+3y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-4+3+k|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|k-1|}{\sqrt{13}}$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|k-1|}{\sqrt{13}}<\sqrt{13}$, $|k-1|<13$

$-13<k-1<13$ $\quad\therefore -12<k<14$

따라서 자연수 k의 최댓값은 13이다.

120 답 ②

원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$ $\quad\therefore (-1, 2)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{(2+4)^2+(1-3)^2}=\sqrt{10}$

원의 중심 $(-1, 2)$와 직선 $x+3y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-1+6+k|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|k+5|}{\sqrt{10}}$

따라서 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|k+5|}{\sqrt{10}}<\sqrt{10}$, $|k+5|<10$

$-10<k+5<10$ $\quad\therefore -15<k<5$

121 답 ②

원과 직선이 접하므로 원의 반지름의 길이 r는 원의 중심 $(1, 0)$과 직선 $x+2y+5=0$ 사이의 거리와 같다.

$\therefore r=\frac{|1+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

다른 풀이

$x+2y+5=0$에서 $x=-2y-5$

이를 $(x-1)^2+y^2=r^2$에 대입하면

$(-2y-5-1)^2+y^2=r^2$ $\quad\therefore 5y^2+24y+36-r^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 원과 직선이 접하므로

$\frac{D}{4}=12^2-5(36-r^2)=0$

$5r^2-36=0$, $r^2=\frac{36}{5}$ $\quad\therefore r=\pm\frac{6\sqrt{5}}{5}$

따라서 양수 r의 값은 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$이다.

122 답 -2

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이는 1이므로 원과 직선이 한 점에서 만나려면

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=1$, $|k|=\sqrt{2}$ $\quad\therefore k=\pm\sqrt{2}$

따라서 모든 k의 값의 곱은

$-\sqrt{2}\times\sqrt{2}=-2$

123 답 $-5\le k\le 15$

$x^2+y^2+4x-2y+1=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=4$

원의 중심 $(-2, 1)$과 직선 $4x+3y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-8+3+k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|k-5|}{5}$

원의 반지름의 길이는 2이므로 원과 직선이 만나려면

$\frac{|k-5|}{5}\le 2$, $|k-5|\le 10$

$-10\le k-5\le 10$ $\quad\therefore -5\le k\le 15$

124 답 6

원의 중심 $(0,\ k)$와 직선 $3x+2y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2k+1|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|2k+1|}{\sqrt{13}}$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|2k+1|}{\sqrt{13}}=\sqrt{13},\ |2k+1|=13$$

$2k+1=\pm13\qquad \therefore k=-7$ 또는 $k=6$

따라서 자연수 k의 값은 6이다.

125 답 ①

원의 중심 $(-5,\ 0)$과 직선 $y=-x+2$, 즉 $x+y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-5-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

이때 $r>0$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$0<r<\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

126 답 6

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}}>\sqrt{5},\ |k|>5$$

$\therefore k<-5$ 또는 $k>5$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다.

다른 풀이

$y=2x+k$를 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(2x+k)^2=5\qquad \therefore 5x^2+4kx+k^2-5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-5)<0$$

$k^2-25>0,\ (k+5)(k-5)>0$

$\therefore k<-5$ 또는 $k>5$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다.

127 답 ②

$x^2+y^2-8x+6y+8=0$에서

$(x-4)^2+(y+3)^2=17$

원의 중심 $(4,\ -3)$과 직선 $4x+y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|16-3+k|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{|k+13|}{\sqrt{17}}$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{17}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|k+13|}{\sqrt{17}}>\sqrt{17},\ |k+13|>17$$

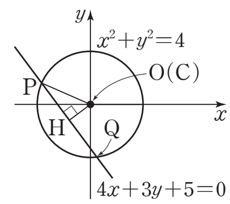
$k+13<-17$ 또는 $k+13>17$

$\therefore k<-30$ 또는 $k>4$

따라서 $\alpha=-30,\ \beta=4$이므로

$\alpha+\beta=-26$

128 답 ④



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C$(0,\ 0)$이라 하고, 원과 직선의 두 교점을 각각 P, Q라 하자.

점 C에서 직선 $4x+3y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\text{CH}}=\frac{|5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$$

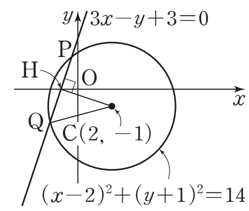
직각삼각형 CPH에서 $\overline{\text{CP}}$의 길이는 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\overline{\text{PH}}=\sqrt{\overline{\text{CP}}^2-\overline{\text{CH}}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$

따라서 구하는 현의 길이는

$\overline{\text{PQ}}=2\overline{\text{PH}}=2\sqrt{3}$

129 답 4



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C$(2,\ -1)$이라 하고, 점 C에서 직선 $3x-y+3=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

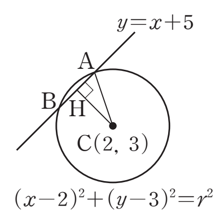
$$\overline{\text{CH}}=\frac{|6+1+3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

직각삼각형 CHQ에서 $\overline{\text{CQ}}$의 길이는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{14}$와 같으므로

$$\overline{\text{QH}}=\sqrt{\overline{\text{CQ}}^2-\overline{\text{CH}}^2}=\sqrt{(\sqrt{14})^2-(\sqrt{10})^2}=2$$

$\therefore \overline{\text{PQ}}=2\overline{\text{QH}}=4$

130 답 ②



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C$(2,\ 3)$이라 하고, 점 C에서 직선 $y=x+5$, 즉 $x-y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\text{CH}}=\frac{|2-3+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{\text{CA}}$의 길이는 원의 반지름의 길이 r와 같으므로

$$\overline{\text{AH}}=\sqrt{\overline{\text{CA}}^2-\overline{\text{CH}}^2}=\sqrt{r^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{r^2-8}$$

$\therefore \overline{\text{AB}}=2\overline{\text{AH}}=2\sqrt{r^2-8}$

이때 $\overline{\text{AB}}=2\sqrt{2}$이므로 $2\sqrt{r^2-8}=2\sqrt{2},\ \sqrt{r^2-8}=\sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $r^2-8=2,\ r^2=10\qquad \therefore r=\pm\sqrt{10}$

따라서 양수 r의 값은 $\sqrt{10}$이다.

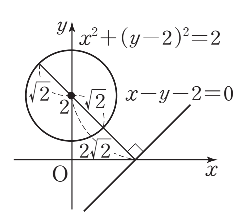
131 답 6

원의 중심 $(0,\ 2)$와 직선 $x-y-2=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|-2-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=\sqrt{2}$

따라서 오른쪽 그림에서



$M=d+r=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

$m=d-r=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

$\therefore Mm=6$

132 답 4

$x^2+y^2+8x-6y+5=0$에서

$(x+4)^2+(y-3)^2=20$

원의 중심 $(-4, 3)$과 직선 $y=2x-k$, 즉 $2x-y-k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|-8-3-k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-k-11|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=2\sqrt{5}$

원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값이 $5\sqrt{5}$이므로

$d+r=5\sqrt{5}$

$\frac{|-k-11|}{\sqrt{5}}+2\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

$\frac{|-k-11|}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$, $|-k-11|=15$

$-k-11=\pm15$ $\quad\therefore k=-26$ 또는 $k=4$

따라서 양수 k의 값은 4이다.

133 답 ③

원의 중심 $(3, 0)$과 직선 $3x-4y+16=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|9+16|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=2$

원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값과 최솟값은 각각

$d+r=5+2=7$, $d-r=5-2=3$

따라서 원 위의 점과 직선 사이의 거리 중 자연수인 것은 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다.

이때 거리가 3, 7인 점은 각각 1개씩이고, 거리가 4, 5, 6인 점은 각각 2개씩이므로 구하는 점의 개수는

$1+2\times3+1=8$

개념유형 65쪽

134 답 [방법1] n, 4, 8, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$
[방법2] 0, 0, 2, n, 2, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$

135 답 $y=2x\pm5$

[방법1] 판별식 이용

기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+n$이라 하고 이를 원 C의 방정식에 대입하면

$x^2+(2x+n)^2=5$ $\quad\therefore 5x^2+4nx+n^2-5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 원과 직선이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(2n)^2-5(n^2-5)=0$

$n^2=25$ $\quad\therefore n=\pm5$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=2x\pm5$

[방법2] 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+n$, 즉 $2x-y+n=0$이라 할 때, 원과 직선이 접하려면 원 C의 중심 $(0, 0)$과 직선 $2x-y+n=0$ 사이의 거리가 원 C의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$\frac{|n|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|n|=5$ $\quad\therefore n=\pm5$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=2x\pm5$

136 답 2, $\sqrt{2}$, 2, 1, 2, $\sqrt{10}$

137 답 $y=\sqrt{3}x\pm2$

원 $x^2+y^2=1$에 접하고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}\times x\pm1\times\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}$

$\therefore y=\sqrt{3}x\pm2$

138 답 $y=-x\pm4$

원 $x^2+y^2=8$에 접하고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y=-1\times x\pm2\sqrt{2}\times\sqrt{(-1)^2+1}$

$\therefore y=-x\pm4$

139 답 $y=3x\pm3\sqrt{10}$

원 $x^2+y^2=9$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y=3\times x\pm3\times\sqrt{3^2+1}$

$\therefore y=3x\pm3\sqrt{10}$

140 답 $y=-2x\pm4\sqrt{5}$

원 $x^2+y^2=16$에 접하고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y=-2\times x\pm4\times\sqrt{(-2)^2+1}$

$\therefore y=-2x\pm4\sqrt{5}$

실전유형 66쪽

141 답 67

원 $x^2+y^2=3$에 접하고 기울기가 -4인 직선의 방정식은

$y=-4x\pm\sqrt{3}\times\sqrt{(-4)^2+1}$

$\therefore y=-4x\pm\sqrt{51}$

따라서 $m=-4$, $n=\pm\sqrt{51}$이므로

$m^2+n^2=67$

142 답 ⑤

직선 $y=2x-5$에 평행한 직선의 기울기는 2이므로 원 $x^2+y^2=10$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{10}\times\sqrt{2^2+1}$

$\therefore y=2x\pm5\sqrt{2}$

143 답 -36

직선 $x-y-7=0$, 즉 $y=x-7$에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 원 $x^2+y^2=18$에 접하고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y=-x\pm3\sqrt{2}\times\sqrt{(-1)^2+1}$

$\therefore$ $y=-x-6$ 또는 $y=-x+6$

따라서 두 직선의 y절편은 -6, 6이므로 구하는 곱은

$-6\times6=-36$

144 답 ④

원 $x^2+y^2=13$에 접하고 기울기가 5인 직선의 방정식은

$y=5x\pm\sqrt{13}\times\sqrt{5^2+1}$ $\qquad\therefore$ $y=5x\pm13\sqrt{2}$

이때 두 직선의 기울기가 모두 양수이므로 두 직선 중 제2사분면을 지나지 않는 직선은 y절편이 음수이어야 한다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=5x-13\sqrt{2}$

145 답 2

원 $x^2+y^2=1$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{2^2+1}$

$\therefore$ $2x-y+\sqrt{5}=0$ 또는 $2x-y-\sqrt{5}=0$

따라서 구하는 거리는 직선 $2x-y+\sqrt{5}=0$ 위의 한 점 $(0, \sqrt{5})$와 직선 $2x-y-\sqrt{5}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-\sqrt{5}-\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2$$

146 답 ④

직선 $3x-y+2=0$, 즉 $y=3x+2$에 평행한 직선의 기울기는 3이므로 원 $x^2+y^2=36$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y=3x\pm6\sqrt{3^2+1}$ $\qquad\therefore$ $y=3x\pm6\sqrt{10}$

$y=0$을 대입하면

$0=3x\pm6\sqrt{10}$ $\qquad\therefore$ $x=\pm2\sqrt{10}$

따라서 $\mathrm{A}(-2\sqrt{10}, 0)$, $\mathrm{B}(2\sqrt{10}, 0)$ 또는 $\mathrm{A}(2\sqrt{10}, 0)$, $\mathrm{B}(-2\sqrt{10}, 0)$이므로 선분 AB의 길이는

$|2\sqrt{10}-(-2\sqrt{10})|=4\sqrt{10}$

개념유형 68쪽

147 답 -3, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, 3, $\frac{1}{3}$, 1, 3, 10

148 답 $x+y-2=0$

원 C의 중심을 $\mathrm{C}(0, 0)$이라 하면 점 C와 접점 $\mathrm{P}(1, 1)$을 지나는 직선 CP의 기울기는 1이다.

이때 점 P에서의 접선은 직선 CP에 수직이므로 접선의 기울기는 -1이다.

따라서 기울기가 -1이고 점 $\mathrm{P}(1, 1)$을 지나는 접선의 방정식은

$y-1=-(x-1)$ $\qquad\therefore$ $x+y-2=0$

149 답 $5x-y+26=0$

원 C의 중심을 $\mathrm{C}(0, 0)$이라 하면 점 C와 접점 $\mathrm{P}(-5, 1)$을 지나는 직선 CP의 기울기는 $-\frac{1}{5}$이다.

이때 점 P에서의 접선은 직선 CP에 수직이므로 접선의 기울기는 5이다.

따라서 기울기가 5이고 점 $\mathrm{P}(-5, 1)$을 지나는 접선의 방정식은

$y-1=5(x+5)$ $\qquad\therefore$ $5x-y+26=0$

150 답 2, -2, 8, 4

151 답 $2x-3y+13=0$

원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $\mathrm{P}(-2, 3)$에서의 접선의 방정식은

$-2\times x+3\times y=13$

$\therefore$ $2x-3y+13=0$

152 답 $x+4y-17=0$

원 $x^2+y^2=17$ 위의 점 $\mathrm{P}(1, 4)$에서의 접선의 방정식은

$1\times x+4\times y=17$

$\therefore$ $x+4y-17=0$

153 답 $3x+4y+25=0$

원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $\mathrm{P}(-3, -4)$에서의 접선의 방정식은

$-3\times x+(-4)\times y=25$

$\therefore$ $3x+4y+25=0$

154 답 $2x-y-15=0$

원 $x^2+y^2=45$ 위의 점 $\mathrm{P}(6, -3)$에서의 접선의 방정식은

$6\times x+(-3)\times y=45$

$\therefore$ $2x-y-15=0$

실전유형 69쪽

155 답 7

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(-2, 1)$에서의 접선의 방정식은

$-2x+y=5$ $\qquad\therefore$ $2x-y+5=0$

따라서 $a=2$, $b=5$이므로

$a+b=7$

156 답 ④

원 $x^2+y^2=40$ 위의 점 $(6, -2)$에서의 접선의 방정식은

$6x-2y=40$ $\qquad\therefore$ $y=3x-20$

따라서 구하는 기울기는 3이다.

157 답 ⑤

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3, 1)$에서의 접선의 방정식은

$3x+y=10$

이 직선이 점 $(1, a)$를 지나므로

$3+a=10 \qquad \therefore a=7$

158 답 $(5, -1)$

원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(2, -3)$에서의 접선 l의 방정식은

$2x-3y=13 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(3, 2)$에서의 접선 m의 방정식은

$3x+2y=13 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=5$, $y=-1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(5, -1)$이다.

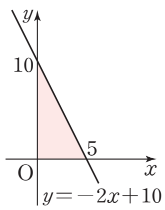
159 답 ②

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(4, 2)$에서의 접선의 방정식은

$4x+2y=20 \qquad \therefore y=-2x+10$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times10=25$



160 답 ④

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(a, 4\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$ax+4\sqrt{3}y=r^2 \qquad \therefore ax+4\sqrt{3}y-r^2=0$

이 직선과 직선 $x-\sqrt{3}y+b=0$이 일치하므로

$\frac{a}{1}=\frac{4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=\frac{-r^2}{b}$

$\frac{a}{1}=\frac{4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}$에서 $a=-4$

$\frac{4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=\frac{-r^2}{b}$에서 $r^2=4b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

점 $(a, 4\sqrt{3})$, 즉 $(-4, 4\sqrt{3})$이 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로

$16+48=r^2$, $r^2=64 \qquad \therefore r=\pm8$

따라서 양수 r의 값은 8이다.

또 ㉠에서 $64=4b$이므로 $b=16$

$\therefore a+b+r=20$

161 답 -6

원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(-4, -3)$에서의 접선의 방정식은

$-4x-3y=25 \qquad \therefore 4x+3y+25=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+y^2-2x+6y+k=0$에서

$(x-1)^2+(y+3)^2=10-k \qquad \cdots\cdots$ ㉡

직선 ㉠이 원 ㉡에 접하려면 원 ㉡의 중심 $(1, -3)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원 ㉡의 반지름의 길이 $\sqrt{10-k}$와 같아야 하므로

$\frac{|4-9+25|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\sqrt{10-k}$, $4=\sqrt{10-k}$

양변을 제곱하면

$16=10-k \qquad \therefore k=-6$

개념유형

70쪽

162 답 [방법1] 2, 1, 2, 1, 2, 2

[방법2] 2, 2m, −1, $\sqrt{2}$, 1, 2, 2

163 답 $\sqrt{3}x-y-4=0$ 또는 $\sqrt{3}x+y+4=0$

[방법1] 원 위의 점에서의 접선의 방정식 이용

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=4$

이 직선이 점 $\mathrm{P}(0, -4)$를 지나므로

$-4y_1=4 \qquad \therefore y_1=-1$

한편 점 (x_1, y_1)은 원 C 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=4$

$y_1=-1$을 대입하면

$x_1^2+1=4$, $x_1^2=3 \qquad \therefore x_1=\pm\sqrt{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$\sqrt{3}x-y-4=0$ 또는 $\sqrt{3}x+y+4=0$

[방법2] 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $\mathrm{P}(0, -4)$를 지나므로 접선의 방정식은

$y+4=mx \qquad \therefore mx-y-4=0$

원과 직선이 접하려면 원 C의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y-4=0$ 사이의 거리가 원 C의 반지름의 길이 2와 같아야 하므로

$\frac{|-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$, $2=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$4=m^2+1$, $m^2=3 \qquad \therefore m=\pm\sqrt{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$\sqrt{3}x-y-4=0$ 또는 $\sqrt{3}x+y+4=0$

164 답 $2x-y+5=0$ 또는 $x+2y-5=0$

[방법1] 원 위의 점에서의 접선의 방정식 이용

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=5$

이 직선이 점 $\mathrm{P}(-1, 3)$을 지나므로

$-x_1+3y_1=5 \qquad \therefore x_1=3y_1-5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

한편 점 (x_1, y_1)은 원 C 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(3y_1-5)^2+y_1^2=5$, $y_1^2-3y_1+2=0$

$(y_1-1)(y_1-2)=0 \qquad \therefore y_1=1$ 또는 $y_1=2$

이를 ㉠에 대입하면

$x_1=-2$, $y_1=1$ 또는 $x_1=1$, $y_1=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$2x-y+5=0$ 또는 $x+2y-5=0$

[방법2] 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $\mathrm{P}(-1, 3)$을 지나므로 접선의 방정식은

$y-3=m(x+1) \qquad \therefore mx-y+m+3=0$

원과 직선이 접하려면 원 C의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y+m+3=0$ 사이의 거리가 원 C의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$\dfrac{|m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|m+3|=\sqrt{5}\times\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$m^2+6m+9=5m^2+5$, $2m^2-3m-2=0$

$(2m+1)(m-2)=0$ $\quad\therefore m=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $m=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$2x-y+5=0$ 또는 $x+2y-5=0$

실전유형 71쪽

165 답 7

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=4$

이 직선이 점 $(2, 4)$를 지나므로

$2x_1+4y_1=4$ $\quad\therefore x_1=-2y_1+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(-2y_1+2)^2+y_1^2=4$, $5y_1^2-8y_1=0$

$y_1(5y_1-8)=0$ $\quad\therefore y_1=0$ 또는 $y_1=\dfrac{8}{5}$

이를 ㉠에 대입하면

$x_1=2$, $y_1=0$ 또는 $x_1=-\dfrac{6}{5}$, $y_1=\dfrac{8}{5}$

따라서 접선의 방정식은

$x-2=0$ 또는 $3x-4y+10=0$

$x-2=0$, 즉 $-5x+10=0$일 때, $a=-5$, $b=0$

$3x-4y+10=0$일 때, $a=3$, $b=-4$

그런데 $b\neq0$이므로 $a=3$, $b=-4$

$\therefore a-b=7$

166 답 ②

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(-2, -3)$을 지나므로 접선의 방정식은

$y+3=m(x+2)$ $\quad\therefore mx-y+2m-3=0$

원과 직선이 접하려면 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y+2m-3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 3과 같아야 하므로

$\dfrac{|2m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$, $|2m-3|=3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$4m^2-12m+9=9m^2+9$, $5m^2+12m=0$

$m(5m+12)=0$ $\quad\therefore m=-\dfrac{12}{5}$ 또는 $m=0$

따라서 기울기가 음수인 접선의 기울기는 $-\dfrac{12}{5}$이므로

$p=5$, $q=12$

$\therefore p+q=17$

167 답 (2, 2)

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=8$

이 직선이 점 $(6, -2)$를 지나므로

$6x_1-2y_1=8$ $\quad\therefore y_1=3x_1-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$x_1^2+(3x_1-4)^2=8$, $5x_1^2-12x_1+4=0$

$(5x_1-2)(x_1-2)=0$ $\quad\therefore x_1=\dfrac{2}{5}$ 또는 $x_1=2$

이를 ㉠에 대입하면

$x_1=\dfrac{2}{5}$, $y_1=-\dfrac{14}{5}$ 또는 $x_1=2$, $y_1=2$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\dfrac{2}{5}, -\dfrac{14}{5}\right)$, $(2, 2)$이므로 제1사분면 위에 있는 점의 좌표는 $(2, 2)$이다.

168 답 18

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=1$

이 직선이 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3y_1=1$ $\quad\therefore y_1=\dfrac{1}{3}$

한편 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=1$

$y_1=\dfrac{1}{3}$을 대입하면

$x_1^2+\dfrac{1}{9}=1$, $x_1^2=\dfrac{8}{9}$ $\quad\therefore x_1=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

즉, 접선의 방정식은

$\pm2\sqrt{2}x+y-3=0$

$y=0$을 대입하면

$\pm2\sqrt{2}x-3=0$ $\quad\therefore x=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

따라서 $k=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$이므로

$16k^2=16\times\dfrac{18}{16}=18$

169 답 ⑤

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(6, 1)$을 지나므로 접선의 방정식은

$y-1=m(x-6)$ $\quad\therefore mx-y-6m+1=0$

원과 직선이 접하려면 원의 중심 $(3, 2)$와 직선 $mx-y-6m+1=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$\dfrac{|3m-2-6m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\times\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$9m^2+6m+1=5m^2+5$, $2m^2+3m-2=0$

$(m+2)(2m-1)=0$ $\quad\therefore m=-2$ 또는 $m=\dfrac{1}{2}$

따라서 접선의 방정식은

$2x+y-13=0$ 또는 $x-2y-4=0$

170 답 ②

접선의 기울기를 m이라 하면 원점을 지나므로 접선의 방정식은

$y=mx \quad \therefore mx-y=0$

원과 직선이 접하려면 원의 중심 $(-2, 4)$와 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같아야 하므로

$\dfrac{|-2m-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$, $|-2m-4|=\sqrt{10}\times\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$4m^2+16m+16=10m^2+10$, $3m^2-8m-3=0$

$(3m+1)(m-3)=0 \quad \therefore m=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $m=3$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$-\dfrac{1}{3}\times3=-1$

참고 두 접선의 기울기의 곱이 -1이므로 두 접선은 서로 수직이다.

실전유형으로 중단원 점검 72~73쪽

1 답 ③

원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+2)^2=r^2$

이 원이 점 $(5, -1)$을 지나므로

$(5-3)^2+(-1+2)^2=r^2 \quad \therefore r^2=5$

즉, 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+2)^2=5 \quad \therefore x^2+y^2-6x+4y+8=0$

따라서 $a=-6$, $b=4$, $c=8$이므로

$a+b+c=6$

2 답 9

원의 중심의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+4}{2}, \dfrac{3+7}{2}\right) \quad \therefore (1, 5)$

원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{(4+2)^2+(7-3)^2}=\sqrt{13}$

따라서 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-5)^2=13$

즉, $a=1$, $b=5$, $c=13$이므로

$a-b+c=9$

3 답 32

$x^2+y^2+4x+8y+8=0$에서

$(x+2)^2+(y+4)^2=12$

이 원의 중심의 좌표는 $(-2, -4)$이고 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$이므로

$a=-2$, $b=-4$, $c=2\sqrt{3}$

$\therefore a^2+b^2+c^2=32$

4 답 ⑤

$x^2+y^2+2kx-4y+5k=0$에서

$(x+k)^2+(y-2)^2=k^2-5k+4$

이 방정식이 원을 나타내려면

$k^2-5k+4>0$, $(k-1)(k-4)>0$

$\therefore k<1$ 또는 $k>4$

따라서 자연수 k의 최솟값은 5이다.

5 답 ④

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 0)$을 지나므로 $C=0$

$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

원 ㉠이 점 $(-6, 2)$를 지나므로

$36+4-6A+2B=0 \quad \therefore 3A-B=20 \quad \cdots\cdots$ ㉡

원 ㉠이 점 $(-4, -2)$를 지나므로

$16+4-4A-2B=0 \quad \therefore 2A+B=10 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$A=6$, $B=-2$

즉, 원의 방정식은

$x^2+y^2+6x-2y=0$

$\therefore (x+3)^2+(y-1)^2=10$

따라서 구하는 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

6 답 4

$x^2+y^2+8x+12y+9k=0$에서

$(x+4)^2+(y+6)^2=52-9k \quad \cdots\cdots$ i

원의 중심의 좌표가 $(-4, -6)$이고 이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는

$|-4|=4 \quad \cdots\cdots$ ii

따라서 $52-9k=4^2$이므로

$k=4 \quad \cdots\cdots$ iii

채점 기준

i 식 변형하기	30 %
ii 원의 반지름의 길이 구하기	40 %
iii k의 값 구하기	30 %

7 답 ①

점 $(2, -1)$을 지나고 x축과 y축에 동시에 접하므로 원의 중심은 제4사분면 위에 있다.

따라서 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(r, -r)$이므로 원의 방정식은

$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

이 원이 점 $(2, -1)$을 지나므로

$(2-r)^2+(-1+r)^2=r^2$

$r^2-6r+5=0$, $(r-1)(r-5)=0$

$\therefore r=1$ 또는 $r=5$

따라서 두 원의 넓이의 합은

$\pi\times1^2+\pi\times5^2=26\pi$

8 답 27

원의 중심 $(1,\ 3)$과 직선 $2x-3y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-9+k|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|k-7|}{\sqrt{13}} \qquad \cdots\cdots \text{ i}$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$이므로 원과 직선이 만나려면

$$\frac{|k-7|}{\sqrt{13}}\le\sqrt{13},\ |k-7|\le 13$$

$$-13\le k-7\le 13 \qquad \therefore\ -6\le k\le 20 \qquad \cdots\cdots \text{ ii}$$

따라서 정수 k는 $-6,\ -5,\ -4,\ \dots,\ 20$의 27개이다. $\cdots\cdots$ iii

채점 기준

i 원의 중심과 직선 사이의 거리를 k에 대한 식으로 나타내기	30 %
ii k의 값의 범위 구하기	50 %
iii 정수 k의 개수 구하기	20 %

9 답 ②

$x^2+y^2-8x+2y+9=0$에서

$(x-4)^2+(y+1)^2=8$

원의 중심 $(4,\ -1)$과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4-1+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k+3|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

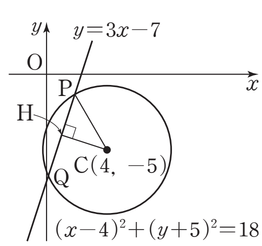
$$\frac{|k+3|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2},\ |k+3|>4$$

$k+3<-4$ 또는 $k+3>4$

$\therefore\ k<-7$ 또는 $k>1$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

10 답 ④



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C$(4,\ -5)$라 하고, 원과 직선의 두 교점을 각각 P, Q라 하자.

점 C에서 직선 $y=3x-7$, 즉 $3x-y-7=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\text{CH}}=\frac{|12+5-7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

직각삼각형 CPH에서 $\overline{\text{CP}}$의 길이는 원의 반지름의 길이 $3\sqrt{2}$와 같으므로

$$\overline{\text{PH}}=\sqrt{\overline{\text{CP}}^2-\overline{\text{CH}}^2}$$

$$=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{10})^2}=2\sqrt{2}$$

따라서 구하는 현의 길이는

$\overline{\text{PQ}}=2\overline{\text{PH}}=4\sqrt{2}$

11 답 35

$x^2+y^2-4x+6y+3=0$에서

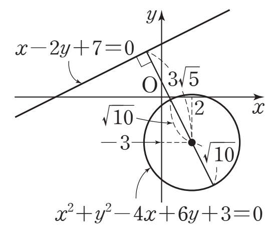
$(x-2)^2+(y+3)^2=10$

원의 중심 $(2,\ -3)$과 직선 $x-2y+7=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|2+6+7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=3\sqrt{5}$$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=\sqrt{10}$

따라서 오른쪽 그림에서



$M=d+r=3\sqrt{5}+\sqrt{10}$

$m=d-r=3\sqrt{5}-\sqrt{10}$

$\therefore\ Mm=(3\sqrt{5})^2-(\sqrt{10})^2=35$

12 답 ③

직선 $3x-y-4=0$, 즉 $y=3x-4$에 평행한 직선의 기울기는 3이므로 원 $x^2+y^2=2$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{2}\times\sqrt{3^2+1}$

$\therefore\ y=3x\pm 2\sqrt{5}$

따라서 $m=3,\ n=\pm 2\sqrt{5}$이므로

$m^2+n^2=29$

13 답 ①

원 $x^2+y^2=29$ 위의 점 $(-5,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$-5x+2y=29$

이 직선이 점 $(-1,\ a)$를 지나므로

$5+2a=29 \qquad \therefore\ a=12$

14 답 13

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=10$

이 직선이 점 $(2,\ -4)$를 지나므로

$2x_1-4y_1=10 \qquad \therefore\ x_1=2y_1+5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

한편 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점이므로

$x_1{}^2+y_1{}^2=10 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(2y_1+5)^2+y_1{}^2=10$

$y_1{}^2+4y_1+3=0,\ (y_1+3)(y_1+1)=0$

$\therefore\ y_1=-3$ 또는 $y_1=-1$

이를 ㉠에 대입하면

$x_1=-1,\ y_1=-3$ 또는 $x_1=3,\ y_1=-1 \qquad \cdots\cdots$ i

따라서 접선의 방정식은

$x+3y+10=0$ 또는 $3x-y-10=0 \qquad \cdots\cdots$ ii

$x+3y+10=0$일 때, $a=3,\ b=10$

$3x-y-10=0$, 즉 $x-\frac{1}{3}y-\frac{10}{3}=0$일 때, $a=-\frac{1}{3},\ b=-\frac{10}{3}$

그런데 $a,\ b$는 정수이므로

$a=3,\ b=10 \qquad \cdots\cdots$ iii

$\therefore\ a+b=13 \qquad \cdots\cdots$ iv

채점 기준

i 접점의 x좌표, y좌표 구하기	50 %
ii 접선의 방정식 구하기	20 %
iii 정수 $a,\ b$의 값 구하기	20 %
iv $a+b$의 값 구하기	10 %

04 도형의 이동

개념유형
74~75쪽

001 답 $(3,\ 3)$

$(2+1,\ 1+2)$ $\therefore (3,\ 3)$

002 답 $(0,\ 4)$

$(2-2,\ 1+3)$ $\therefore (0,\ 4)$

003 답 $(5,\ 0)$

$(2+3,\ 1-1)$ $\therefore (5,\ 0)$

004 답 $(-2,\ -1)$

$(2-4,\ 1-2)$ $\therefore (-2,\ -1)$

005 답 $(5,\ 1)$

$(2,\ 3) \longrightarrow (2+3,\ 3-2)$ $\therefore (5,\ 1)$

006 답 $(-1,\ 2)$

$(-4,\ 4) \longrightarrow (-4+3,\ 4-2)$ $\therefore (-1,\ 2)$

007 답 $(6,\ -7)$

$(3,\ -5) \longrightarrow (3+3,\ -5-2)$ $\therefore (6,\ -7)$

008 답 $(1,\ -6)$

$(-2,\ -4) \longrightarrow (-2+3,\ -4-2)$ $\therefore (1,\ -6)$

009 답 $b,\ 3,\ b,\ 5,\ 6$

010 답 $a=4,\ b=1$

$(-4,\ 3) \longrightarrow (-4+a,\ 3+b)$이므로

$-4+a=0,\ 3+b=4$

$\therefore a=4,\ b=1$

011 답 $a=-3,\ b=3$

$(1,\ -5) \longrightarrow (1+a,\ -5+b)$이므로

$1+a=-2,\ -5+b=-2$

$\therefore a=-3,\ b=3$

012 답 $a=2,\ b=-6$

$(-3,\ -2) \longrightarrow (-3+a,\ -2+b)$이므로

$-3+a=-1,\ -2+b=-8$

$\therefore a=2,\ b=-6$

013 답 $a=-3,\ b=-5$

$(7,\ 4) \longrightarrow (7+a,\ 4+b)$이므로

$7+a=4,\ 4+b=-1$

$\therefore a=-3,\ b=-5$

실전유형
75쪽

014 답 6

점 $(2,\ -1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(2+a,\ -1+5)$ $\therefore (2+a,\ 4)$

따라서 $2+a=4,\ 4=b$이므로

$a=2,\ b=4$

$\therefore a+b=6$

015 답 ⑤

점 $(5,\ -3)$이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(5-2,\ -3+1)$ $\therefore (3,\ -2)$

이 점이 직선 $y=-3x+k$ 위에 있으므로

$-2=-9+k$ $\therefore k=7$

016 답 ①

점 $(2,\ 5)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-1,\ 3)$이라 하면

$2+m=-1,\ 5+n=3$

$\therefore m=-3,\ n=-2$

따라서 점 $(-2,\ 7)$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-2-3,\ 7-2)$ $\therefore (-5,\ 5)$

개념유형
77~78쪽

017 답 $2,\ 4,\ 2,\ 4,\ 5$

018 답 $x-3y-4=0$

x 대신 $x-3$을, y 대신 $y+2$를 대입하면

$(x-3)-3(y+2)+5=0$

$\therefore x-3y-4=0$

019 답 $(x+2)^2+(y-2)^2=9$

x 대신 $x+1$을, y 대신 $y-6$을 대입하면

$(x+1+1)^2+(y-6+4)^2=9$

$\therefore (x+2)^2+(y-2)^2=9$

020 답 $(x+1)^2+(y+10)^2=16$

x 대신 $x+4$를, y 대신 $y+5$를 대입하면
$(x+4-3)^2+(y+5+5)^2=16$
$\therefore\ (x+1)^2+(y+10)^2=16$

021 답 $y=2x^2+8x+15$

x 대신 $x+2$를, y 대신 $y-8$을 대입하면
$y-8=2(x+2)^2-1$
$\therefore\ y=2x^2+8x+15$

022 답 $y=x^2-5x+3$

x 대신 $x-4$를, y 대신 $y+1$을 대입하면
$y+1=(x-4)^2+3(x-4)$
$\therefore\ y=x^2-5x+3$

023 답 $y=4x-6$

주어진 평행이동은 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하는 것이다.
따라서 x 대신 $x-2$를, y 대신 $y+3$을 대입하면
$y+3=4(x-2)+5$
$\therefore\ y=4x-6$

024 답 $x-2y-1=0$

x 대신 $x-2$를, y 대신 $y+3$을 대입하면
$(x-2)-2(y+3)+7=0$
$\therefore\ x-2y-1=0$

025 답 $(x-4)^2+(y+4)^2=8$

x 대신 $x-2$를, y 대신 $y+3$을 대입하면
$(x-2-2)^2+(y+3+1)^2=8$
$\therefore\ (x-4)^2+(y+4)^2=8$

026 답 $x^2+y^2-2x+2y-4=0$

x 대신 $x-2$를, y 대신 $y+3$을 대입하면
$(x-2)^2+(y+3)^2+2(x-2)-4(y+3)-1=0$
$\therefore\ x^2+y^2-2x+2y-4=0$

027 답 $y=-2x^2+9x-13$

x 대신 $x-2$를, y 대신 $y+3$을 대입하면
$y+3=-2(x-2)^2+(x-2)$
$\therefore\ y=-2x^2+9x-13$

028 답 $y=x^2-6x+9$

x 대신 $x-2$를, y 대신 $y+3$을 대입하면
$y+3=(x-2)^2-2(x-2)+4$
$\therefore\ y=x^2-6x+9$

029 답 -4, 5, 4, 5, 5, 4, 6

030 답 $3x+2y-2=0$

x 대신 $x+4$를, y 대신 $y-5$를 대입하면
$3(x+4)+2(y-5)-4=0$
$\therefore\ 3x+2y-2=0$

031 답 $(x+8)^2+(y-6)^2=12$

x 대신 $x+4$를, y 대신 $y-5$를 대입하면
$(x+4+4)^2+(y-5-1)^2=12$
$\therefore\ (x+8)^2+(y-6)^2=12$

032 답 $x^2+y^2+3x-2y-17=0$

x 대신 $x+4$를, y 대신 $y-5$를 대입하면
$(x+4)^2+(y-5)^2-5(x+4)+8(y-5)+2=0$
$\therefore\ x^2+y^2+3x-2y-17=0$

033 답 $y=3x^2+24x+45$

x 대신 $x+4$를, y 대신 $y-5$를 대입하면
$y-5=3(x+4)^2-8$
$\therefore\ y=3x^2+24x+45$

034 답 $y=2x^2+15x+30$

x 대신 $x+4$를, y 대신 $y-5$를 대입하면
$y-5=2(x+4)^2-(x+4)-3$
$\therefore\ y=2x^2+15x+30$

035 답 [방법1] a, b, a, b, -4, 7
[방법2] -2, -3, a, -2, a, -3, -2, -4, 7

036 답 $a=-5$, $b=-1$

[방법1] 원의 평행이동 이용
원 C를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=9$
이 원이 원 C'과 일치하므로
$-a=5$, $-b=1$
$\therefore\ a=-5$, $b=-1$
[방법2] 원의 중심의 평행이동 이용
원 C의 중심의 좌표는 $(0, 0)$ …… ㉠
원 C'의 중심의 좌표는 $(-5, -1)$ …… ㉡
점 ㉠을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는
(a, b)
이 점이 점 ㉡과 일치하므로
$a=-5$, $b=-1$

037 답 $a=3$, $b=4$

[방법1] 원의 평행이동 이용

원 C를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a+1)^2+(y-b-3)^2=4$

이 원이 원 C'과 일치하므로

$-a+1=-2$, $-b-3=-7$

$\therefore a=3$, $b=4$

[방법2] 원의 중심의 평행이동 이용

원 C의 중심의 좌표는 $(-1, 3)$ ...... ㉠

원 C'의 중심의 좌표는 $(2, 7)$ ...... ㉡

점 ㉠을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-1+a, 3+b)$

이 점이 점 ㉡과 일치하므로

$-1+a=2$, $3+b=7$

$\therefore a=3$, $b=4$

실전유형 79~80쪽

038 답 ②

직선 $2x+y+5=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x-2)+(y+1)+5=0$

$\therefore 2x+y+2=0$

$\therefore a=2$

039 답 4

직선 $4x-y+3=0$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$4(x-3)-(y-a)+3=0$

$\therefore 4x-y+a-9=0$

이 직선이 점 $(2, 3)$을 지나므로

$8-3+a-9=0$ $\quad\therefore a=4$

040 답 1

주어진 평행이동은 x축의 방향으로 $-m$만큼, y축의 방향으로 m만큼 평행이동하는 것이므로 직선 $y=3x+5$가 이 평행이동에 의하여 옮겨지는 직선의 방정식은

$y-m=3(x+m)+5$

$\therefore y=3x+4m+5$

따라서 $4m+5=9$이므로

$m=1$

041 답 ②

직선 $2x-3y-1=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x-a)-3(y+2)-1=0$

$\therefore 2x-3y-2a-7=0$

이 직선이 처음 직선 $2x-3y-1=0$과 일치하므로

$-2a-7=-1$ $\quad\therefore a=-3$

042 답 24

점 $A(3, -1)$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점 B의 좌표는

$(3+1, -1-4)$ $\quad\therefore (4, -5)$

직선 AB의 방정식은

$y+1=\frac{-5+1}{4-3}(x-3)$

$\therefore y=-4x+11$

직선 AB를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-1=-4(x-3)+11$

$\therefore y=-4x+24$

따라서 구하는 y절편은 24이다.

043 답 ④

직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+7=a(x-5)+b$

$\therefore y=ax-5a+b-7$ ...... ㉠

직선 ㉠이 직선 $y=-5x+2$와 서로 수직이므로

$a\times(-5)=-1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{5}$

직선 $y=-5x+2$와 y축의 교점의 좌표는 $(0, 2)$이므로 직선 ㉠은 점 $(0, 2)$를 지난다.

따라서 $2=-5a+b-7$이므로

$2=-1+b-7$ $\quad\therefore b=10$

$\therefore ab=2$

044 답 ④

원 $x^2+y^2=16$을 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-4)^2+y^2=16$

이 원이 점 $(4, a)$를 지나므로

$a^2=16$ $\quad\therefore a=\pm4$

따라서 양수 a의 값은 4이다.

045 답 4

원 $(x-5)^2+(y+2)^2=5$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-5)^2+(y-b+2)^2=5$ ...... ㉠

$x^2+y^2-6x+2y+c=0$에서

$(x-3)^2+(y+1)^2=10-c$ ...... ㉡

두 원 ㉠, ㉡이 일치하므로
$-a-5=-3,\ -b+2=1,\ 5=10-c$
$\therefore\ a=-2,\ b=1,\ c=5$
$\therefore\ a+b+c=4$

다른 풀이
원 $(x-5)^2+(y+2)^2=5$의 중심의 좌표는
$(5,\ -2)$ ······ ㉠
원 $x^2+y^2-6x+2y+c=0$, 즉 $(x-3)^2+(y+1)^2=10-c$의 중심의 좌표는
$(3,\ -1)$ ······ ㉡
점 ㉠을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(5+a,\ -2+b)$
이 점이 점 ㉡과 일치하므로
$5+a=3,\ -2+b=-1$
$\therefore\ a=-2,\ b=1$
원은 평행이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로
$10-c=5$ $\therefore\ c=5$
$\therefore\ a+b+c=4$

046 답 $2x-y+6=0$

원 $x^2+(y+4)^2=3$의 중심의 좌표는 $(0,\ -4)$
원 $(x+2)^2+(y-5)^2=3$의 중심의 좌표는 $(-2,\ 5)$
점 $(0,\ -4)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-2,\ 5)$라 하면
$0+m=-2,\ -4+n=5$
$\therefore\ m=-2,\ n=9$
따라서 직선 $2x-y-7=0$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 9만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$2(x+2)-(y-9)-7=0$
$\therefore\ 2x-y+6=0$

047 답 11

원 $(x+2)^2+(y-a)^2=9$를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x-b+2)^2+(y+3-a)^2=9$
이 원의 중심 $(b-2,\ a-3)$이 제1사분면 위에 있고 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로
$b-2=3,\ a-3=3$
$\therefore\ a=6,\ b=5$
$\therefore\ a+b=11$

048 답 ①

포물선 $y=2x^2+7x+3$을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
$y+2=2(x-5)^2+7(x-5)+3$
$\therefore\ y=2x^2-13x+16$
따라서 $a=-13,\ b=16$이므로
$a+b=3$

049 답 -30

점 $(3,\ -2)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(5,\ 1)$이라 하면
$3+m=5,\ -2+n=1$
$\therefore\ m=2,\ n=3$
따라서 포물선 $y=x^2-6x$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
$y-3=(x-2)^2-6(x-2)$
$\therefore\ y=x^2-10x+19=(x-5)^2-6$
이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(5,\ -6)$이므로
$a=5,\ b=-6$
$\therefore\ ab=-30$

다른 풀이
주어진 평행이동은 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하는 것이다.
포물선 $y=x^2-6x=(x-3)^2-9$의 꼭짓점의 좌표는
$(3,\ -9)$
따라서 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 포물선의 꼭짓점의 좌표는 점 $(3,\ -9)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표와 같으므로
$(3+2,\ -9+3)$ $\therefore\ (5,\ -6)$
즉, $a=5,\ b=-6$이므로
$ab=-30$

050 답 5

포물선 $y=x^2+2x-2$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
$y-a=(x+1)^2+2(x+1)-2$
$\therefore\ y=x^2+4x+a+1$
이 포물선이 점 $(-3,\ 3)$을 지나므로
$3=9-12+a+1$ $\therefore\ a=5$

개념유형 81~82쪽

051 답 $(-3,\ -5)$

052 답 $(3,\ 5)$

053 답 $(3,\ -5)$

054 답 $(5,\ -3)$

055 답 $(-2,\ 1)$

056 답 $(2,\ -1)$

057 답 $(2,\ 1)$

058 답 $(-1,\ -2)$

059 답 $(-9,\ -1)$

점 $(9,\ -1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(9,\ 1)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-9,\ -1)$

참고 x축에 대하여 대칭이동한 후 원점에 대하여 대칭이동하는 것은 y축에 대하여 대칭이동하는 것과 같다.

060 답 $(2,\ -3)$

점 $(3,\ 2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-3,\ 2)$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(2,\ -3)$

061 답 $(-4,\ 7)$

점 $(-4,\ -7)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(4,\ 7)$

이 점을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-4,\ 7)$

참고 원점에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동하는 것은 x축에 대하여 대칭이동하는 것과 같다.

062 답 $(6,\ 5)$

점 $(-5,\ 6)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(6,\ -5)$

이 점을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(6,\ 5)$

063 답 $(0,\ -7)$

점 $(1,\ 4)$가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(1-1,\ 4+3)$ $\quad\therefore (0,\ 7)$

이 점을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(0,\ -7)$

064 답 $(7,\ 8)$

점 $(-6,\ 5)$가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(-6-1,\ 5+3)$ $\quad\therefore (-7,\ 8)$

이 점을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(7,\ 8)$

065 답 $(-1,\ 4)$

점 $(2,\ -7)$이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(2-1,\ -7+3)$ $\quad\therefore (1,\ -4)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-1,\ 4)$

066 답 $(-5,\ -4)$

점 $(-3,\ -8)$이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(-3-1,\ -8+3)$ $\quad\therefore (-4,\ -5)$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-5,\ -4)$

실전유형

82~83쪽

067 답 $2\sqrt{10}$

점 $(3,\ -1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점 A의 좌표는

$(3,\ 1)$

점 $(3,\ -1)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$(-3,\ -1)$

따라서 선분 AB의 길이는

$\sqrt{(-3-3)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{10}$

068 답 ①

점 $(1,\ a)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 A의 좌표는

$(a,\ 1)$

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a,\ -1)$

따라서 $a=2,\ b=-1$이므로

$a+b=1$

069 답 2

점 $(-1,\ 2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(1,\ -2)$

이 점과 직선 $3x+4y-5=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3-8-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

070 답 24

점 $(2,\ -6)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점 A의 좌표는

$(-2,\ -6)$

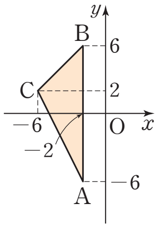
점 $(2,\ -6)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$(-2,\ 6)$

점 $(2,\ -6)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는

$(-6,\ 2)$

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형 ABC의 넓이는



$\dfrac{1}{2}\times|6-(-6)|\times|-2-(-6)|$

$=\dfrac{1}{2}\times12\times4$

$=24$

071 답 5

점 $(3,\ a)$를 y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(3,\ a-6)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-3,\ -a+6)$

따라서 $-3=b,\ -a+6=4$이므로

$a=2,\ b=-3$

$\therefore\ a-b=5$

072 답 ④

점 $\mathrm{A}(-3,\ 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$(4,\ -3)$

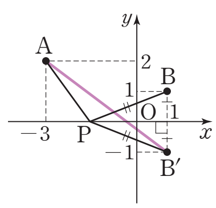
점 B를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점 C의 좌표는

$(4+2,\ -3+k) \qquad \therefore\ (6,\ -3+k)$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\dfrac{-3-4}{4+3}=\dfrac{-3+k+3}{6-4},\ -1=\dfrac{k}{2} \qquad \therefore\ k=-2$

073 답 ②



점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

$\mathrm{B}'(1,\ -1)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$

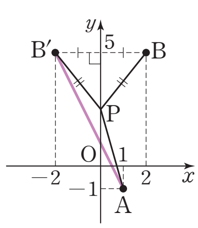
$\geq \overline{\mathrm{AB'}}$

$=\sqrt{(1+3)^2+(-1-2)^2}$

$=5$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 5이다.

074 답 (0, 1)



점 B를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

$\mathrm{B}'(-2,\ 5)$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$이므로

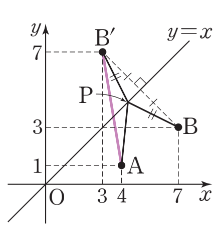
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$가 최솟값을 갖는 점 P는 직선 AB′과 y축의 교점이다.

직선 AB′의 방정식은

$y+1=\dfrac{5+1}{-2-1}(x-1) \qquad \therefore\ y=-2x+1$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

075 답 ④



점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

$\mathrm{B}'(3,\ 7)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$

$\geq\overline{\mathrm{AB'}}$

$=\sqrt{(3-4)^2+(7-1)^2}$

$=\sqrt{37}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\sqrt{37}$이다.

개념유형

84~85쪽

076 답 $3x+2y-1=0$

$3x-2(-y)-1=0 \qquad \therefore\ 3x+2y-1=0$

077 답 $3x+2y+1=0$

$3(-x)-2y-1=0 \qquad \therefore\ 3x+2y+1=0$

078 답 $3x-2y+1=0$

$3(-x)-2(-y)-1=0 \qquad \therefore\ 3x-2y+1=0$

079 답 $2x-3y+1=0$

$3y-2x-1=0 \qquad \therefore\ 2x-3y+1=0$

080 답 $(x-1)^2+(y-4)^2=1$

$(x-1)^2+(-y+4)^2=1 \qquad \therefore\ (x-1)^2+(y-4)^2=1$

081 답 $(x+1)^2+(y+4)^2=1$

$(-x-1)^2+(y+4)^2=1 \qquad \therefore\ (x+1)^2+(y+4)^2=1$

082 답 $(x+1)^2+(y-4)^2=1$

$(-x-1)^2+(-y+4)^2=1 \qquad \therefore\ (x+1)^2+(y-4)^2=1$

083 답 $(x+4)^2+(y-1)^2=1$

$(y-1)^2+(x+4)^2=1 \qquad \therefore\ (x+4)^2+(y-1)^2=1$

084 답 $x^2+y^2+6x+2y+1=0$

$x^2+(-y)^2+6x-2(-y)+1=0$

$\therefore\ x^2+y^2+6x+2y+1=0$

085 답 $x^2+y^2-6x-2y+1=0$

$(-x)^2+y^2+6(-x)-2y+1=0$

$\therefore\ x^2+y^2-6x-2y+1=0$

086 답 $x^2+y^2-6x+2y+1=0$

$(-x)^2+(-y)^2+6(-x)-2(-y)+1=0$

$\therefore\ x^2+y^2-6x+2y+1=0$

087 답 $x^2+y^2-2x+6y+1=0$

$y^2+x^2+6y-2x+1=0$

$\therefore\ x^2+y^2-2x+6y+1=0$

088 답 $y=-x^2-2x+3$

$-y=x^2+2x-3 \qquad \therefore\ y=-x^2-2x+3$

089 답 $y=x^2-2x-3$

$y=(-x)^2+2(-x)-3 \qquad \therefore y=x^2-2x-3$

090 답 $y=-x^2+2x+3$

$-y=(-x)^2+2(-x)-3 \qquad \therefore y=-x^2+2x+3$

091 답 $3x-y+2=0$

직선 $x+3y-2=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$x+3(-y)-2=0 \qquad \therefore x-3y-2=0$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y-3x-2=0 \qquad \therefore 3x-y+2=0$

092 답 $y=-2x+5$

직선 $y=2x-5$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=2(-x)-5 \qquad \therefore y=-2x-5$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=-2(-x)-5 \qquad \therefore y=-2x+5$

093 답 $(x-3)^2+(y-2)^2=9$

원 $(x-2)^2+(y+3)^2=9$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-2)^2+(x+3)^2=9 \qquad \therefore (x+3)^2+(y-2)^2=9$

이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+3)^2+(y-2)^2=9 \qquad \therefore (x-3)^2+(y-2)^2=9$

094 답 $y=-2x^2-3x$

포물선 $y=-2x^2+3x$를 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=-2x^2+3x \qquad \therefore y=2x^2-3x$

이 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=2(-x)^2-3(-x) \qquad \therefore y=-2x^2-3x$

095 답 $y=-x+4$

주어진 평행이동은 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하는 것이다.

$y=x+3$이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 도형의 방정식은

$y+2=(x-5)+3 \qquad \therefore y=x-4$

이 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$-y=x-4 \qquad \therefore y=-x+4$

096 답 $4x-y+16=0$

$4x-y+6=0$이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 도형의 방정식은

$4(x-5)-(y+2)+6=0 \qquad \therefore 4x-y-16=0$

이 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$4(-x)-(-y)-16=0 \qquad \therefore 4x-y+16=0$

097 답 $(x+4)^2+y^2=4$

$(x+5)^2+(y+2)^2=4$가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 도형의 방정식은

$(x-5+5)^2+(y+2+2)^2=4 \qquad \therefore x^2+(y+4)^2=4$

이 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$y^2+(x+4)^2=4 \qquad \therefore (x+4)^2+y^2=4$

098 답 $y=x^2+10x+28$

$y=x^2+5$가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 도형의 방정식은

$y+2=(x-5)^2+5 \qquad \therefore y=x^2-10x+28$

이 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$y=(-x)^2-10\times(-x)+28 \qquad \therefore y=x^2+10x+28$

실전유형

86~88쪽

099 답 5

직선 $2x+3y-1=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-2x+3y-1=0$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$3x-2y-1=0$

따라서 $a=3$, $b=-2$이므로

$a-b=5$

100 답 ①

직선 $y=ax-6$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=ax-6 \qquad \therefore y=-ax+6$

이 직선이 점 $(2, 4)$를 지나므로

$4=-2a+6 \qquad \therefore a=1$

101 답 ④

직선 $y=4x-1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$x=4y-1 \qquad \therefore y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$

이 직선과 서로 수직인 직선의 기울기는 -4이므로 기울기가 -4이고 점 $(1, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=-4(x-1) \qquad \therefore 4x+y-7=0$

102 답 ②

직선 $ax+(b+1)y-1=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-ax-(b+1)y-1=0$

이 직선이 직선 $(b-7)x-(2a-1)y-1=0$과 일치하므로

$-a=b-7$, $b+1=2a-1$

$\therefore a+b=7$, $2a-b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=4$

$\therefore a-b=-1$

103 답 1

직선 $y=mx+3$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=mx+3 \qquad \therefore y=-mx-3$

직선 $y=mx+3$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=-mx+3 \qquad \therefore y=mx-3$

두 직선이 서로 수직이므로

$-m\times m=-1,\ m^2=1 \qquad \therefore m=\pm1$

따라서 양수 m의 값은 1이다.

104 답 ①

직선 $x-2y=9$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y-2x=9 \qquad \therefore 2x-y+9=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

원 $(x-3)^2+(y+5)^2=k$의 중심의 좌표가 $(3,\ -5)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{k}$이므로 직선 ㉠이 이 원에 접하려면

$\dfrac{|6+5+9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{k},\ 4\sqrt{5}=\sqrt{k}$

양변을 제곱하면 $k=80$

105 답 7

$x^2+y^2-2ax+2y+8=0$에서

$(x-a)^2+(y+1)^2=a^2-7$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-a)^2=a^2-7$

이 원이 원 $(x+1)^2+(y-4)^2=b^2$과 일치하므로

$a=4,\ a^2-7=b^2$

$a^2-7=b^2$에서 $16-7=b^2$

$b^2=9 \qquad \therefore b=\pm3$

그런데 $b>0$이므로 $b=3$

$\therefore a+b=7$

다른 풀이

$x^2+y^2-2ax+2y+8=0$에서

$(x-a)^2+(y+1)^2=a^2-7$

이 원의 중심의 좌표는

$(a,\ -1) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

원 $(x+1)^2+(y-4)^2=b^2$의 중심의 좌표는

$(-1,\ 4) \qquad \cdots\cdots$ ㉡

점 ㉠을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-1,\ a)$

이 점이 점 ㉡과 일치하므로 $a=4$

원은 대칭이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로

$a^2-7=b^2,\ 16-7=b^2$

$b^2=9 \qquad \therefore b=\pm3$

그런데 $b>0$이므로 $b=3$

$\therefore a+b=7$

106 답 56

원 $x^2+y^2+10x-12y+45=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 원 C_1의 방정식은

$x^2+y^2-10x+12y+45=0$

원 C_1을 x축에 대하여 대칭이동한 원 C_2의 방정식은

$x^2+y^2-10x-12y+45=0$

$\therefore (x-5)^2+(y-6)^2=16$

따라서 원 C_2의 중심의 좌표가 $(5,\ 6)$이므로

$a=5,\ b=6$

$\therefore 10a+b=56$

107 답 ③

원 $(x+3)^2+(y-2)^2=25$를 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+3)^2+(y-2)^2=25$

$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=25$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-3)^2=25$

$y=0$을 대입하면

$(x-2)^2+(-3)^2=25,\ x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=6$

따라서 $A(-2,\ 0)$, $B(6,\ 0)$ 또는 $A(6,\ 0)$, $B(-2,\ 0)$이므로 선분 AB의 길이는

$|6-(-2)|=8$

108 답 ④

포물선 $y=x^2-3x+1$을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=x^2+3x+1 \qquad \therefore y=-x^2-3x-1$

이 포물선이 점 $(-1,\ k)$를 지나므로

$k=-1+3-1=1$

109 답 7

포물선 $y=x^2+2ax+9$를 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=x^2-2ax+9=(x-a)^2+9-a^2$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$(a,\ 9-a^2)$

따라서 $a=2,\ 9-a^2=b$이므로

$a=2,\ b=5$

$\therefore a+b=7$

다른 풀이

포물선 $y=x^2+2ax+9=(x+a)^2+9-a^2$의 꼭짓점의 좌표는

$(-a,\ 9-a^2)$

이 점을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a,\ 9-a^2)$

이 점이 점 $(2,\ b)$와 일치하므로

$a=2,\ 9-a^2=b \qquad \therefore a=2,\ b=5$

$\therefore a+b=7$

110 답 ③

$y=x^2+2x=(x+1)^2-1$

ㄱ. $y=x^2+8x+9=(x+4)^2-7$이므로 이 포물선은 주어진 포물선을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동하면 겹쳐진다.

ㄴ. $y=2x^2+4x=2(x+1)^2-2$이므로 이 포물선은 주어진 포물선을 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄷ. $y=\frac{1}{2}x^2-2x=\frac{1}{2}(x-2)^2-2$이므로 이 포물선은 주어진 포물선을 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄹ. $y=-(x+1)^2+1$은 주어진 포물선을 x축에 대하여 대칭이동하면 겹쳐진다.

따라서 보기에서 주어진 포물선을 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 포물선인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

111 답 ①

직선 $3x+2y-4=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$3x-2y-4=0$

주어진 평행이동은 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하는 것이므로 직선 $3x-2y-4=0$이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 직선의 방정식은

$3(x-4)-2(y+3)-4=0$

$3x-2y-22=0 \qquad \therefore\ y=\frac{3}{2}x-11$

따라서 구하는 y절편은 -11이다.

112 답 $(-3,\ -1)$

직선 $x-4y-1=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$(x-2)-4(y+1)-1=0$

$\therefore\ x-4y-7=0$

이 직선을 y축에 대하여 대칭이동한 직선 l'의 방정식은

$-x-4y-7=0 \qquad \therefore\ x+4y+7=0$

$x-4y-1=0$, $x+4y+7=0$을 연립하여 풀면

$x=-3$, $y=-1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-3,\ -1)$이다.

113 답 3

직선 $ax+y-5=0$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$a(x-4)+(y-2)-5=0$

$\therefore\ ax+y-4a-7=0$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$x+ay-4a-7=0$

이 직선이 점 $(4,\ 5)$를 지나므로

$4+5a-4a-7=0 \qquad \therefore\ a=3$

114 답 ③

원 $(x+5)^2+(y+11)^2=25$를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y-1+11)^2=25$

$\therefore\ (x+5)^2+(y+10)^2=25$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+5)^2+(-y+10)^2=25$

$\therefore\ (x+5)^2+(y-10)^2=25$

이 원이 점 $(0,\ a)$를 지나므로

$5^2+(a-10)^2=25$

$(a-10)^2=0 \qquad \therefore\ a=10$

115 답 ①

포물선 $y=2x^2-x+1$을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=2x^2+x+1$

이 포물선을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-b=2(x-a)^2+(x-a)+1$

$\therefore\ y=2x^2-(4a-1)x+2a^2-a+b+1$

따라서 $4a-1=11$, $2a^2-a+b+1=10$이므로

$a=3$, $b=-6$

$\therefore\ a+b=-3$

116 답 -2

원 $(x-5)^2+(y-a)^2=8$을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+4-5)^2+(y-2-a)^2=8$

$\therefore\ (x-1)^2+(y-2-a)^2=8$

이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-1)^2+(-y-2-a)^2=8$

$\therefore\ (x+1)^2+(y+2+a)^2=8$

이 원이 점 $(-3,\ -1)$을 지나므로

$(-2)^2+(a+1)^2=8$

$a^2+2a-3=0$, $(a+3)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-3+1=-2$

개념유형

90쪽

117 답 2, 2, 0, 5, 0, 5

118 답 $(-2,\ 7)$

점 $\mathrm{P}(2,\ -1)$을 점 $(0,\ 3)$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(a,\ b)$라 하면 점 $(0,\ 3)$은 선분 PP'의 중점이므로

$\frac{2+a}{2}=0$, $\frac{-1+b}{2}=3$

$2+a=0$, $-1+b=6$

$\therefore\ a=-2$, $b=7$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 7)$이다.

119 답 (6, 1)

점 P(2, -1)을 점 (4, 0)에 대하여 대칭이동한 점을 P′(a, b)라 하면 점 (4, 0)은 선분 PP′의 중점이므로

$\frac{2+a}{2}=4$, $\frac{-1+b}{2}=0$

$2+a=8$, $-1+b=0$

$\therefore$ $a=6$, $b=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 (6, 1)이다.

120 답 (8, -5)

점 P(2, -1)을 점 (5, -3)에 대하여 대칭이동한 점을 P′(a, b)라 하면 점 (5, -3)은 선분 PP′의 중점이므로

$\frac{2+a}{2}=5$, $\frac{-1+b}{2}=-3$

$2+a=10$, $-1+b=-6$

$\therefore$ $a=8$, $b=-5$

따라서 구하는 점의 좌표는 (8, -5)이다.

121 답 (-4, 13)

점 P(2, -1)을 점 (-1, 6)에 대하여 대칭이동한 점을 P′(a, b)라 하면 점 (-1, 6)은 선분 PP′의 중점이므로

$\frac{2+a}{2}=-1$, $\frac{-1+b}{2}=6$

$2+a=-2$, $-1+b=12$

$\therefore$ $a=-4$, $b=13$

따라서 구하는 점의 좌표는 (-4, 13)이다.

122 답 -4, b, b, -4, 10, 2, 0, 4, -2, 4, -2

123 답 (2, 4)

점 P(-4, 2)를 직선 $y=-3x$에 대하여 대칭이동한 점을 P′(a, b)라 하자.

선분 PP′의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=-3x$ 위에 있으므로

$\frac{2+b}{2}=-3\times\frac{-4+a}{2}$

$\therefore$ $3a+b=10$ …… ㉠

직선 PP′과 직선 $y=-3x$가 서로 수직이므로

$\frac{b-2}{a+4}\times(-3)=-1$

$\therefore$ $a-3b=-10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$

따라서 구하는 점의 좌표는 (2, 4)이다.

124 답 (0, -2)

점 P(-4, 2)를 직선 $y=x+2$에 대하여 대칭이동한 점을 P′(a, b)라 하자.

선분 PP′의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로

$\frac{2+b}{2}=\frac{-4+a}{2}+2$

$\therefore$ $a-b=2$ …… ㉠

직선 PP′과 직선 $y=x+2$가 서로 수직이므로

$\frac{b-2}{a+4}\times1=-1$

$\therefore$ $a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-2$

따라서 구하는 점의 좌표는 (0, -2)이다.

125 답 (0, 4)

점 P(-4, 2)를 직선 $y=-2x-1$에 대하여 대칭이동한 점을 P′(a, b)라 하자.

선분 PP′의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=-2x-1$ 위에 있으므로

$\frac{2+b}{2}=-2\times\frac{-4+a}{2}-1$

$\therefore$ $2a+b=4$ …… ㉠

직선 PP′과 직선 $y=-2x-1$이 서로 수직이므로

$\frac{b-2}{a+4}\times(-2)=-1$

$\therefore$ $a-2b=-8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=4$

따라서 구하는 점의 좌표는 (0, 4)이다.

실전유형

91쪽

126 답 ①

점 (2, 3)은 두 점 (a, 2), (9, b)를 이은 선분의 중점이므로

$\frac{a+9}{2}=2$, $\frac{2+b}{2}=3$

$a+9=4$, $2+b=6$

$\therefore$ $a=-5$, $b=4$

$\therefore$ $ab=-20$

127 답 ②

포물선 $y=x^2+4x+6=(x+2)^2+2$의 꼭짓점의 좌표는 (-2, 2)

포물선 $y=-x^2+4x+a=-(x-2)^2+a+4$의 꼭짓점의 좌표는 (2, $a+4$)

따라서 점 (0, 2)는 두 점 (-2, 2), (2, $a+4$)를 이은 선분의 중점이므로

$\frac{2+(a+4)}{2}=2$

$a+6=4$ $\therefore$ $a=-2$

128 답 3

$x^2+y^2+4x-2y+4=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=1$

이 원의 중심의 좌표는 $(-2, 1)$

$x^2+y^2-8x-6y+24=0$에서

$(x-4)^2+(y-3)^2=1$

이 원의 중심의 좌표는 $(4, 3)$

따라서 점 (a, b)는 두 점 $(-2, 1)$, $(4, 3)$을 이은 선분의 중점이므로

$a=\frac{-2+4}{2}=1$, $b=\frac{1+3}{2}=2$

$\therefore a+b=3$

129 답 11

두 점 $(-5, 6)$, (a, b)를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-5+a}{2}, \frac{6+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $4x+y-3=0$ 위에 있으므로

$4\times\frac{-5+a}{2}+\frac{6+b}{2}-3=0 \qquad \therefore 4a+b=20 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

두 점 $(-5, 6)$, (a, b)를 지나는 직선과 직선 $4x+y-3=0$, 즉 $y=-4x+3$이 서로 수직이므로

$\frac{b-6}{a+5}\times(-4)=-1 \qquad \therefore a-4b=-29 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=8$

$\therefore a+b=11$

130 답 ⑤

두 점 $(-3, 5)$, $(7, 3)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+7}{2}, \frac{5+3}{2}\right) \qquad \therefore (2, 4)$

이 점이 직선 $y=mx+n$ 위에 있으므로

$4=2m+n \qquad \cdots\cdots$ ㉠

두 점 $(-3, 5)$, $(7, 3)$을 지나는 직선과 직선 $y=mx+n$이 서로 수직이므로

$\frac{3-5}{7+3}\times m=-1 \qquad \therefore m=5$

이를 ㉠에 대입하면

$4=10+n \qquad \therefore n=-6$

$\therefore m-n=11$

131 답 9

원 $(x-1)^2+(y+2)^2=6$의 중심의 좌표는

$(1, -2)$

이 점을 직선 $y=x+1$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (p, q)라 하면 두 점 $(1, -2)$, (p, q)를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+p}{2}, \frac{-2+q}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로

$\frac{-2+q}{2}=\frac{1+p}{2}+1 \qquad \therefore p-q=-5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

두 점 $(1, -2)$, (p, q)를 지나는 직선과 직선 $y=x+1$이 서로 수직이므로

$\frac{q+2}{p-1}\times 1=-1 \qquad \therefore p+q=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=-3$, $q=2$

따라서 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 $(-3, 2)$이고 원은 대칭이동하여도 반지름의 길이가 바뀌지 않으므로 반지름의 길이는 $\sqrt{6}$이다.

따라서 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-2)^2=6$

$\therefore x^2+y^2+6x-4y+7=0$

즉, $a=6$, $b=-4$, $c=7$이므로

$a+b+c=9$

실전유형으로 중단원 점검

92~93쪽

1 답 ④

점 $(a, 2)$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a-3, 2+1) \qquad \therefore (a-3, 3)$

따라서 $a-3=-5$, $3=b$이므로

$a=-2$, $b=3$

$\therefore a+b=1$

2 답 ④

직선 $3x+4y+k=0$을 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x-6)+4(y+2)+k=0$

$\therefore 3x+4y+k-10=0$

따라서 $k-10=-4$이므로

$k=6$

3 답 19

$x^2+y^2-4x-5=0$에서

$(x-2)^2+y^2=9$

이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-2)^2+(y-b)^2=9 \qquad \cdots\cdots$ ㉠ $\qquad \cdots\cdots$ i

$x^2+y^2-10x+2y+c=0$에서

$(x-5)^2+(y+1)^2=26-c \qquad \cdots\cdots$ ㉡ $\qquad \cdots\cdots$ ii

두 원 ㉠, ㉡이 일치하므로

$-a-2=-5$, $-b=1$, $9=26-c$

$\therefore a=3$, $b=-1$, $c=17 \qquad \cdots\cdots$ iii

$\therefore a+b+c=19 \qquad \cdots\cdots$ iv

채점 기준

i 원 $x^2+y^2-4x-5=0$을 평행이동한 원의 방정식을 표준형으로 나타내기	40 %
ii 원 $x^2+y^2-10x+2y+c=0$을 표준형으로 나타내기	20 %
iii a, b, c의 값 구하기	30 %
iv $a+b+c$의 값 구하기	10 %

4 답 ③

포물선 $y=x^2+8x+1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y+5=(x+2)^2+8(x+2)+1$

$\therefore\ y=x^2+12x+16$

따라서 $a=12$, $b=16$이므로

$b-a=4$

5 답 $y=-5x+13$

점 $(-2,\ 3)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점 A의 좌표는

$(2,\ 3)$ …… ⅰ

점 $(-2,\ 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$(3,\ -2)$ …… ⅱ

따라서 직선 AB의 방정식은

$y-3=\dfrac{-2-3}{3-2}(x-2)$

$\therefore\ y=-5x+13$ …… ⅲ

채점 기준

ⅰ 점 A의 좌표 구하기	40 %
ⅱ 점 B의 좌표 구하기	40 %
ⅲ 직선 AB의 방정식 구하기	20 %

6 답 ②

점 $(a,\ b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a,\ -b)$

이 점을 x축의 방향으로 -6만큼, y축의 방향으로 8만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a-6,\ -b+8)$

따라서 $a-6=8-a$, $-b+8=-3b+4$이므로

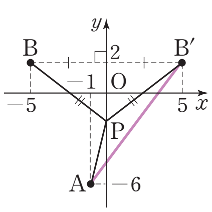
$2a=14$, $2b=-4$ $\quad\therefore\ a=7$, $b=-2$

$\therefore\ a+b=5$

7 답 ⑤

점 B를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

B′$(5,\ 2)$



$\therefore\ \overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$

$\geq\overline{AB'}$

$=\sqrt{(5+1)^2+(2+6)^2}$

$=10$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 10이다.

8 답 ②

직선 $5x-ay-1=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-5x+ay-1=0$ $\quad\therefore\ 5x-ay+1=0$

이 직선이 점 $(3,\ 4)$를 지나므로

$15-4a+1=0$ $\quad\therefore\ a=4$

9 답 3

원 $(x+3)^2+(y-a)^2=5$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y+3)^2=5$

이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-a)^2+(-y+3)^2=5$

$\therefore\ (x+a)^2+(y-3)^2=5$

이 원이 처음 원과 일치하므로

$a=3$

10 답 5

직선 $2x-y+3=0$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x+1)-(y-a)+3=0$

$\therefore\ 2x-y+a+5=0$ …… ⅰ

이 직선을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-2x-y+a+5=0$

$\therefore\ 2x+y-a-5=0$ …… ⅱ

이 직선이 점 $(4,\ 2)$를 지나므로

$8+2-a-5=0$ $\quad\therefore\ a=5$ …… ⅲ

채점 기준

ⅰ 평행이동한 직선의 방정식 구하기	40 %
ⅱ 대칭이동한 직선의 방정식 구하기	40 %
ⅲ a의 값 구하기	20 %

11 답 ③

점 $(3,\ 1)$은 두 점 $(-2,\ 3a+5)$, $(b+3,\ 6)$을 이은 선분의 중점이므로

$\dfrac{-2+(b+3)}{2}=3$, $\dfrac{(3a+5)+6}{2}=1$

$b+1=6$, $3a+11=2$

$\therefore\ a=-3$, $b=5$

$\therefore\ a+b=2$

12 답 ①

두 점 $(4,\ 3)$, $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{4+a}{2},\ \dfrac{3+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $3x-y+1=0$ 위에 있으므로

$3\times\dfrac{4+a}{2}-\dfrac{3+b}{2}+1=0$

$\therefore\ 3a-b=-11$ …… ㉠

두 점 $(4,\ 3)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선과 직선 $3x-y+1=0$, 즉 $y=3x+1$이 서로 수직이므로

$\dfrac{b-3}{a-4}\times3=-1$

$\therefore\ a+3b=13$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=5$

$\therefore\ b-a=7$

05 집합의 뜻과 집합 사이의 포함 관계

개념유형

97~98쪽

001 답 ○

5보다 큰 자연수는 6, 7, 8, 9, …로 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.

002 답 ×

'잘하는'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

003 답 ○

가장 작은 자연수는 1로 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.

004 답 ×

'큰'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

005 답 ○

대한민국의 광역시는 부산, 인천, 대구, 대전, 광주, 울산으로 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.

006 답 ×

'가까운'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

007 답 **1, 2, 5, 10**

008 답 **6, 12, 18, 24, 30**

009 답 $\in$

1은 12의 양의 약수이므로 $1\in A$

010 답 $\in$

4는 12의 양의 약수이므로 $4\in A$

011 답 $\notin$

8은 12의 양의 약수가 아니므로 $8\notin A$

012 답 $\notin$

10은 12의 양의 약수가 아니므로 $10\notin A$

013 답 $\notin$

2는 6과 서로소가 아니므로 $2\notin A$

014 답 $\in$

5는 6과 서로소이므로 $5\in A$

015 답 $\in$

7은 6과 서로소이므로 $7\in A$

016 답 $\notin$

9는 6과 서로소가 아니므로 $9\notin A$

017 답 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

018 답 $B=\{1, 2, 7, 14\}$

019 답 $C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

020 답 $D=\{3, 6, 9\}$

참고 3으로 나누어떨어지는 자연수는 3의 배수이다.

021 답 $E=\{\mathrm{c}, \mathrm{h}, \mathrm{l}, \mathrm{o}, \mathrm{s}\}$

참고 같은 원소는 중복하여 쓰지 않으므로 o는 한 번만 쓴다.

022 답 예 $A=\{x\,|\,x$는 모음인 알파벳 소문자$\}$

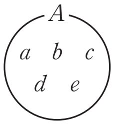
023 답 예 $B=\{x\,|\,x$는 50 이하의 자연수$\}$

024 답 예 $C=\{x\,|\,x$는 일주일을 나타내는 요일$\}$

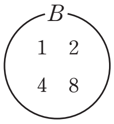
025 답 예 $D=\{x\,|\,x$는 100 이하의 9의 양의 배수$\}$

026 답 예 $E=\{x\,|\,x$는 20 이하의 소수$\}$

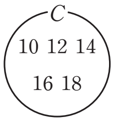
027 답



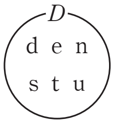
028 답



029 답



030 답



실전유형 99~100쪽

031 답 ②

② '적은'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

032 답 ④

ㄱ, ㄷ. '유명한', '달콤한'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
따라서 보기에서 집합인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

033 답 ③

집합 A의 원소는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24이므로
① $3\in A$ ② $9\notin A$ ③ $16\notin A$
④ $18\notin A$ ⑤ $24\in A$
따라서 옳은 것은 ③이다.

034 답 ④

$x^3-2x^2-3x=0$에서 $x(x+1)(x-3)=0$
$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$
따라서 집합 A의 원소는 -1, 0, 3이므로
① $-3\notin A$ ② $-1\in A$ ③ $0\in A$
④ $2\notin A$ ⑤ $3\in A$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

035 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $\frac{6}{2}=3$은 정수이므로 $\frac{6}{2}\in Z$
ㄴ. $\sqrt{3}$은 무리수이므로 $\sqrt{3}\notin Q$
ㄷ. $-\frac{3}{4}$은 유리수이므로 $-\frac{3}{4}\in Q$
ㄹ. $\sqrt{5}-1$은 무리수이고, 무리수는 실수이므로 $\sqrt{5}-1\in R$
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

036 답 ②

한 자리의 소수는 2, 3, 5, 7이므로 집합 A를 원소나열법으로 나타내면
$A=\{2, 3, 5, 7\}$

037 답 ④

① $A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$
② $A=\{2, 4, 6, 8, \dots, 20\}$
③ $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$
④ $A=\{4, 8, 12, 16, 20\}$
⑤ $A=\{8, 16\}$
따라서 집합 A를 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은 ④이다.

038 답 ⑤

①, ②, ③, ④ $\{2, 4, 6, 8\}$
⑤ $\{2, 4, 6, 8, 10\}$
따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

039 답 $B=\{0, 1, 2, 4\}$

$a\in A$, $b\in A$인 a, b에 대하여 ab의 값은 오른쪽 표와 같으므로
$B=\{0, 1, 2, 4\}$

a \ b	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

040 답 ①

$a\in A$, $b\in B$인 a, b에 대하여 $a-b$의 값은 오른쪽 표와 같으므로
$C=\{-1, 0, 1, 3, 4, 5\}$
따라서 집합 C의 원소가 아닌 것은 ①이다.

a \ b	-2	2
1	3	-1
2	4	0
3	5	1

041 답 21

$a\in A$, $b\in B$인 a, b에 대하여 $a+b$의 값은 오른쪽 표와 같으므로
$C=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
따라서 집합 C의 모든 원소의 합은
$0+1+2+3+4+5+6=21$

a \ b	1	3	5
-1	0	2	4
0	1	3	5
1	2	4	6

개념유형 101쪽

042 답 유

043 답 무

044 답 무

주어진 집합은 $\{\dots, 7, 8, 9, 10\}$이므로 무한집합이다.

045 답 유

$0<x<1$인 자연수는 존재하지 않는다.
따라서 주어진 집합은 공집합이므로 유한집합이다.

046 답 $n(A)=50$

047 답 $n(B)=6$

$B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이므로 $n(B)=6$

048 답 $n(C)=5$

$|x|<3$에서 $-3<x<3$이므로
$C=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $\therefore$ $n(C)=5$

049 답 $n(D)=0$

$x^2+1=0$에서 $x^2=-1$
이를 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로
$D=\varnothing$ $\therefore$ $n(D)=0$

실전유형 102쪽

050 답 ④

② $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$
③ $\{5, 10, 15, 20, \dots\}$
④ $\{0\}$
⑤ $\{1, 2, 4, 5, \dots\}$
따라서 유한집합인 것은 ④이다.

051 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\{100, 101, 102, 103, \dots, 999\}$ ➡ 유한집합
ㄴ. $x<1$인 양의 실수는 무한히 많다. ➡ 무한집합
ㄷ. $\{6, 12, 18, 24, \dots\}$ ➡ 무한집합
ㄹ. 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times3=-2<0$
따라서 $x^2-2x+3=0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 주어진 집합은 공집합이다. ➡ 유한집합
따라서 보기에서 무한집합인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

052 답 ④

① 원소가 1개 있으므로 공집합이 아니다.
② $\{2\}$이므로 공집합이 아니다.
③ $2<x<3$인 유리수는 무한히 많으므로 공집합이 아니다.
④ $x^2+x=0$에서
$x(x+1)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=0$
이때 자연수 x는 존재하지 않으므로 공집합이다.
⑤ $\{1\}$이므로 공집합이 아니다.
따라서 공집합인 것은 ④이다.

053 답 ⑤

③ $n(\{x|x$는 21의 양의 약수$\})=n(\{1, 3, 7, 21\})=4$
④ $n(\{1, 2, 3\})=3$, $n(\{a, b\})=2$이므로
$n(\{1, 2, 3\})>n(\{a, b\})$
⑤ $n(\{4\})-n(\{2\})=1-1=0$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

054 답 13

$A=\{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$이므로 $n(A)=6$
$x^2-9\le0$에서 $(x+3)(x-3)\le0 \qquad \therefore -3\le x\le3$
따라서 $B=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$이므로 $n(B)=7$
$\therefore n(A)+n(B)=13$

055 답 5

$a\in A$, $b\in A$인 a, b에 대하여 $a+b$의 값은 오른쪽 표와 같으므로
$B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$
$\therefore n(B)=5$

a \ b	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

개념유형 103~104쪽

056 답 $\subset$

057 답 $\subset$

058 답 $\not\subset$

059 답 $\subset$

060 답 $A\subset B$

061 답 $B\subset A$

$B=\{1, 2\}$이므로 $B\subset A$

062 답 $A\subset B$

$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로 $A\subset B$

063 답 $B\subset A$

$A=\{2, 4, 6, 8, \dots\}$, $B=\{4, 8, 12, 16, \dots\}$이므로 $B\subset A$

064 답 $A\subset B$

$A=\{-1, 1\}$이므로 $A\subset B$

065 답 $B\subset A$

$B=\{0\}$이므로 $B\subset A$

066 답 $A\subset B$

$A=\{3, 4, 5, 6, \dots\}$, $B=\{0, 1, 2, 3, \dots\}$이므로 $A\subset B$

067 답 $A\subset B$

모든 정사각형은 직사각형이므로 $A\subset B$

068 답 $\varnothing$, $\{a\}$

069 답 $\varnothing$, $\{-1\}$, $\{1\}$, $\{-1, 1\}$

070 답 $\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{4, 6\}$, $\{2, 4, 6\}$

071 답 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$

$\{1, 2, 4\}$이므로 부분집합은
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$

072 답 ○

$\varnothing$은 집합 A의 원소이므로 $\varnothing\in A$

073 답 ×

$\{b\}$는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{b\}\notin A$

074 답 ○

a, c는 집합 A의 원소이므로 $\{a, c\}$는 집합 A의 부분집합이다.

$\therefore \{a, c\}\subset A$

075 답 ×

$\{b, c\}$는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{b, c\}\notin A$

076 답 ○

0은 집합 A의 원소이므로 $0\in A$

077 답 ○

1은 집합 A의 원소이므로 $\{1\}$은 집합 A의 부분집합이다.

$\therefore \{1\}\subset A$

078 답 ×

$\{0, 1\}$은 집합 A의 원소가 아니므로 $\{0, 1\}\notin A$

079 답 ×

0, 1은 집합 A의 원소이므로 $\{0, 1\}$은 집합 A의 부분집합이다.

$\therefore \{0, 1\}\subset A$

실전유형

105~106쪽

080 답 ③

① $B=\{1, 3, 5\}$이므로 $A\subset B$

② $B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$이므로 $A\subset B$

③ $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$이므로 $A\not\subset B$

④ $x\geq 1$인 모든 x는 $x\geq 0$이므로 $A\subset B$

⑤ 모든 정삼각형은 이등변삼각형이므로 $A\subset B$

따라서 집합 A가 집합 B의 부분집합이 아닌 것은 ③이다.

081 답 ③

$B=\{5, 6\}$, $C=\{-6, -5, -4, -3, \ldots, 6\}$이므로

$B\subset A\subset C$

082 답 ②

$a\in A$, $b\in A$인 a, b에 대하여 $a+b$의 값은 오른쪽 표와 같으므로

$B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$

a \ b	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

ab의 값은 오른쪽 표와 같으므로

$C=\{0, 1, 2, 4\}$

$\therefore A\subset C\subset B$

a \ b	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

083 답 ②

$A=\{2, 3, 5, 7\}$이므로

② $9\notin A$

084 답 ④

④ $\{0, 1\}$은 집합 A의 원소이므로 $\{0, 1\}\in A$

085 답 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ

ㄷ. a는 집합 A의 원소이므로 $\{a\}\subset A$

ㄹ. b, c는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{b, c\}\not\subset A$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ이다.

086 답 7

$B=\{1, 2, 4, 8\}$이므로 $A\subset B$가 성립하려면

$2a=2$ 또는 $2a=4$ 또는 $2a=8$

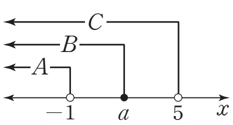
$\therefore a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=4$

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은

$1+2+4=7$

087 답 ③

$A\subset B\subset C$가 성립하도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

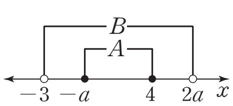


$-1\leq a<5$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2, 3, 4의 6개이다.

088 답 $2<a<3$

$A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$-3<-a$, $4<2a$

$-3<-a$에서 $a<3$, $4<2a$에서 $a>2$이므로

$2<a<3$

089 답 ④

$A\subset B$이면 $-1\in A$에서 $-1\in B$이므로

$-a+3=-1$ 또는 $a+1=-1$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=4$

(i) $a=-2$일 때

$A=\{-3, -1\}$, $B=\{-1, 3, 5\}$이므로 $A\not\subset B$

(ii) $a=4$일 때

$A=\{-1, 3\}$, $B=\{-1, 3, 5\}$이므로 $A\subset B$

(i), (ii)에서 $a=4$

090 답 -1

$A\subset B$이면 $2\in A$에서 $2\in B$이므로

$a^2-a=2$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$일 때

$A=\{1,\ 2\}$, $B=\{1,\ 2,\ 5\}$이므로 $A\subset B$

(ii) $a=2$일 때

$A=\{2,\ 4\}$, $B=\{1,\ 2,\ 5\}$이므로 $A\not\subset B$

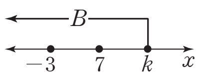
(i), (ii)에서 $a=-1$

091 답 ②

$(x+3)(x-7)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=7$

$\therefore A=\{-3,\ 7\}$

$A\subset B$가 성립하도록 집합 B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$k\geq 7$

따라서 k의 최솟값은 7이다.

개념유형

107쪽

092 답 $A=B$

$B=\{\mathrm{a},\ \mathrm{h},\ \mathrm{m},\ \mathrm{t}\}$이므로 $A=B$

093 답 $A\neq B$

$B=\{1,\ 2,\ 4\}$이므로 $A\neq B$

094 답 $A=B$

$A=\{-5,\ 5\}$이므로 $A=B$

095 답 $a=2,\ b=1$

$A=B$이면 $1\in A$, $2\in B$에서 $1\in B$, $2\in A$이므로

$a=2,\ b=1$

096 답 $a=4,\ b=7$

$A=B$이면 $7\in A$, $4\in B$에서 $7\in B$, $4\in A$이므로

$a=4,\ b=7$

097 답 $a=4,\ b=6$

$A=B$이면 $5\in A$, $8\in B$에서 $5\in B$, $8\in A$이므로

$b-1=5,\ 2a=8$

$\therefore a=4,\ b=6$

098 답 $a=2,\ b=4$

$A=B$이면 $6\in A$, $2\in B$에서 $6\in B$, $2\in A$이므로

$a+b=6,\ a=2$

$\therefore a=2,\ b=4$

099 답 $\varnothing,\ \{a\},\ \{b\}$

100 답 $\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 3\}$

실전유형

108쪽

101 답 ③

ㄱ. $A\subset B$, $A\neq B$이므로 A는 B의 진부분집합이다.

ㄴ. $B=\{1,\ 3,\ 9\}$이므로 $A\subset B$, $A\neq B$

따라서 A는 B의 진부분집합이다.

ㄷ. $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$이므로 $A=B$

따라서 보기에서 A가 B의 진부분집합인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

102 답 ④

② $B=\{0\}$이므로 $A\neq B$

③ $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이므로 $A\neq B$

④ $A=\{3\}$, $B=\{3\}$이므로 $A=B$

⑤ 이웃하는 두 변의 길이가 같은 평행사변형은 마름모이고, 모든 정사각형은 마름모이므로

$A\not\subset B$, $B\subset A$ $\quad\therefore A\neq B$

따라서 $A=B$인 것은 ④이다.

103 답 1

$A=B$이면 $6\in A$, $9\in B$에서 $6\in B$, $9\in A$

$6\in B$에서 $b^2+b=6$, $b^2+b-6=0$

$(b+3)(b-2)=0$ $\quad\therefore b=-3$ 또는 $b=2$

그런데 b는 양수이므로 $b=2$

$9\in A$에서 $a^2=9$ $\quad\therefore a=\pm 3$

그런데 a는 양수이므로 $a=3$

$\therefore a-b=1$

104 답 8

$A=B$이면 $-2\in B$에서 $-2\in A$이므로

$a=-2$ 또는 $2a+1=-2$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=-\frac{3}{2}$

그런데 a는 정수이므로 $a=-2$

$\therefore A=\{-3,\ -2,\ 7\}$

또 $A=B$이면 $-3\in A$에서 $-3\in B$이므로

$b+1=-3$ $\quad\therefore b=-4$

$\therefore ab=8$

105 답 ⑤

$A=B$이면 $2\in B$에서 $2\in A$이므로

$a+2=2$ 또는 $a^2-2=2$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=0$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때

$A=\{0,\ 2\}$, $B=\{2,\ 8\}$이므로 $A\neq B$

(ii) $a=0$일 때

$A=\{-2,\ 2\}$, $B=\{2,\ 6\}$이므로 $A\neq B$

(iii) $a=2$일 때

$A=\{2,\ 4\}$, $B=\{2,\ 4\}$이므로 $A=B$

(i), (ii), (iii)에서 $a=2$

106 답 -4

$A \subset B$이고 $B \subset A$이므로 $A=B$

$A=B$이면 $-5 \in A$에서 $-5 \in B$

따라서 -5는 이차방정식 $x^2+4x+b=0$의 근이므로

$25-20+b=0$ $\quad \therefore b=-5$

따라서 $x^2+4x-5=0$에서

$(x+5)(x-1)=0$ $\quad \therefore x=-5$ 또는 $x=1$

$\therefore B=\{-5, 1\}$

또 $A=B$이면 $1 \in B$에서 $1 \in A$이므로 $a=1$

$\therefore a+b=-4$

다른 풀이

$A=B$이면 $-5 \in A$, $a \in A$에서 $-5 \in B$, $a \in B$

따라서 -5, a는 이차방정식 $x^2+4x+b=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-5+a=-4$, $-5 \times a=b$

$\therefore a=1$, $b=-5$

$\therefore a+b=-4$

개념유형

110~111쪽

107 답 8

$2^3=8$

108 답 16

$\{1, 2, 3, 6\}$이므로 부분집합의 개수는

$2^4=16$

109 답 32

$\{4, 5, 6, 7, 8\}$이므로 부분집합의 개수는

$2^5=32$

110 답 64

$\{\mathrm{a, c, e, h, r, t}\}$이므로 부분집합의 개수는

$2^6=64$

111 답 15

$2^4-1=16-1=15$

112 답 31

$\{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로 진부분집합의 개수는

$2^5-1=32-1=31$

113 답 127

$|x| \le 3$에서 $-3 \le x \le 3$

따라서 $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$이므로 진부분집합의 개수는

$2^7-1=128-1=127$

114 답 255

$\{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96\}$이므로 진부분집합의 개수는

$2^8-1=256-1=255$

115 답 16

$2^{5-1}=2^4=16$

116 답 8

$2^{5-2}=2^3=8$

117 답 3

4, 8, 10을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-3}=2^2=4$

따라서 진부분집합의 개수는

$4-1=3$

118 답 128

$A=\{1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$이므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^{9-2}=2^7=128$

119 답 64

$2^{9-3}=2^6=64$

120 답 32

집합 A의 원소 중 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^{9-4}=2^5=32$

121 답 2, 2, 4

122 답 4

집합 X는 집합 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$의 부분집합 중에서 3, 5, 7을 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{5-3}=2^2=4$

123 답 16

집합 X는 집합 $\{a, b, c, d, e, f\}$의 부분집합 중에서 a, c를 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$

실전유형

111~112쪽

124 답 11

$A=\{23, 29\}$이므로

$a=2^2=4$

$B=\{1, 3, 5, 15\}$이므로

$b=2^4-1=16-1=15$

$\therefore b-a=11$

125 답 ④

집합 A의 원소의 개수가 5이므로 부분집합의 개수는

$2^5=32$

126 답 ②

집합 A의 원소의 개수를 a라 하면

$2^a=128$, $2^a=2^7$ $\quad\therefore a=7$

$\therefore n(A)=a=7$

127 답 ④

$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

따라서 집합 A의 부분집합 중에서 3의 배수인 3, 6을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$

128 답 4

집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 4는 반드시 원소로 갖고 1, 2는 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{5-1-2}=2^2=4$

129 답 ③

$A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

따라서 집합 A의 부분집합 중에서 3, 5는 반드시 원소로 갖고 짝수 2는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{8-2-1}=2^5=32$

130 답 8

$A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

따라서 집합 X는 집합 $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$의 부분집합 중에서 1, 2, 4를 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{6-3}=2^3=8$

131 답 31

$A=\{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42\}$

(가), (나)에서 집합 X는 집합 A의 진부분집합 중에서 6, 36을 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{7-2}-1=2^5-1=32-1=31$

132 답 ⑤

집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합이다.

즉, $2^{n-2}=16$이므로

$2^{n-2}=2^4$, $n-2=4$ $\quad\therefore n=6$

따라서 집합 A의 진부분집합의 개수는

$2^6-1=64-1=63$

실전유형으로 중단원 점검

113~114쪽

1 답 ①

②, ③, ④, ⑤ '가까운', '잘하는', '좋아하는', '가벼운'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 집합인 것은 ①이다.

2 답 ㄱ, ㄹ

집합 A의 원소는 12, 16, 24, 48이므로

ㄴ. $16\in A$

ㄷ. $18\notin A$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

3 답 ④

①, ②, ③, ⑤ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

④ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

따라서 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$을 조건제시법으로 나타낸 것으로 옳지 않은 것은 ④이다.

4 답 8

$a\in A$, $b\in B$인 a, b에 대하여 ab의 값은 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	-1	1	2
1	-1	1	2
2	-2	2	4
4	-4	4	8

$C=\{-4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

따라서 집합 C의 모든 원소의 합은

$-4+(-2)+(-1)+1+2+4+8=8$

5 답 ㄱ, ㄹ

ㄱ. $\{-1, 0\}$ ➡ 유한집합

ㄴ. $\{12, 24, 36, 48, \dots\}$ ➡ 무한집합

ㄷ. $\{2, 5, 8, 11, \dots\}$ ➡ 무한집합

ㄹ. $2x^2-x<0$에서 $x(2x-1)<0$ $\quad\therefore 0<x<\frac{1}{2}$

이를 만족시키는 자연수 x는 존재하지 않으므로 공집합이다.

➡ 유한집합

따라서 보기에서 유한집합인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

6 답 3

$A=\{16, 24, 32, 40, \dots, 96\}$이므로

$n(A)=11$ …… ⅰ

$B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$이므로

$n(B)=8$ …… ⅱ

$\therefore n(A)-n(B)=3$ …… ⅲ

채점 기준

ⅰ $n(A)$ 구하기	40 %
ⅱ $n(B)$ 구하기	40 %
ⅲ $n(A)-n(B)$의 값 구하기	20 %

7 답 ⑤

$|x|\le1$에서 $-1\le x\le1$ $\quad\therefore A=\{-1, 0, 1\}$

$x(x+1)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ $\quad\therefore B=\{-1, 0\}$

$x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=-1$ ($\because x$는 실수) $\quad\therefore C=\{-1\}$

$\therefore C\subset B\subset A$

8 답 ④

③ $\varnothing$은 집합 A의 원소가 아니므로 $\{\varnothing, 1\}\not\subset A$

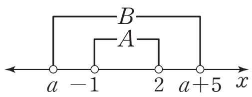
④ 2는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{1, 2, 3\}\not\subset A$

⑤ 1, $\{1, 2\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{1, \{1, 2\}\}\subset A$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

9 답 -6

$A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a\le-1$, $2\le a+5$

$2\le a+5$에서 $a\ge-3$이므로

$-3\le a\le-1$ …… ⅰ

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$-3+(-2)+(-1)=-6$ …… ⅱ

채점 기준

ⅰ a의 값의 범위 구하기	70 %
ⅱ 모든 정수 a의 값의 합 구하기	30 %

10 답 1

$A\subset B$이면 $0\in A$에서 $0\in B$이므로

$a-1=0$ 또는 $a=0$ 또는 $a+1=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=0$ 또는 $a=1$

(ⅰ) $a=-1$일 때

$A=\{0, 1, 3\}$, $B=\{-2, -1, 0, 3\}$이므로 $A\not\subset B$

(ⅱ) $a=0$일 때

$A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{-1, 0, 1, 3\}$이므로 $A\not\subset B$

(ⅲ) $a=1$일 때

$A=\{0, 1, 3\}$, $B=\{0, 1, 2, 3\}$이므로 $A\subset B$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a=1$

다른 풀이

$A\subset B$이면 $1\in A$에서 $1\in B$이므로

$a-1=1$ 또는 $a=1$ 또는 $a+1=1$

$\therefore a=0$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$

(ⅰ) $a=0$일 때

$A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{-1, 0, 1, 3\}$이므로 $A\not\subset B$

(ⅱ) $a=1$일 때

$A=\{0, 1, 3\}$, $B=\{0, 1, 2, 3\}$이므로 $A\subset B$

(ⅲ) $a=2$일 때

$a+1=3$이므로 주어진 조건이 성립하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a=1$

11 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $x^2-3x+2<0$에서 $(x-1)(x-2)<0$

$\therefore 1<x<2$ $\quad\therefore B=\varnothing$

$\therefore A=B$

ㄴ. $40=2^3\times5$이므로 $B=\{2, 5\}$

$\therefore A\ne B$

ㄷ. $x^2-9=0$에서 $(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$ $\quad\therefore A=\{-3, 3\}$

$3-|x|=0$에서 $|x|=3$

$\therefore x=\pm3$ $\quad\therefore B=\{-3, 3\}$

$\therefore A=B$

따라서 보기에서 $A=B$인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

12 답 ③

$A=B$이면 $4\in A$에서 $4\in B$이므로

$a=4$ 또는 $a+2=4$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

(ⅰ) $a=2$일 때

$A=\{-1, 4, b\}$, $B=\{1, 2, 4\}$에서 $-1\in A$이지만 $-1\notin B$이므로

$A\ne B$

(ⅱ) $a=4$일 때

$A=\{1, 4, b\}$, $B=\{1, 4, 6\}$에서 $A=B$이려면

$b=6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=4$, $b=6$

$\therefore a+b=10$

13 답 23

$A=\{5, 10, 15, 20, 25\}$이므로

$a=2^5-1=32-1=31$ …… ⅰ

$B=\{0, 1, 2\}$이므로

$b=2^3=8$ …… ⅱ

$\therefore a-b=23$ …… ⅲ

채점 기준

ⅰ a의 값 구하기	40 %
ⅱ b의 값 구하기	40 %
ⅲ $a-b$의 값 구하기	20 %

14 답 16

$A=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

따라서 집합 A의 부분집합 중에서 음수 -1은 반드시 원소로 갖고 홀수인 자연수 1, 3, 5는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{8-1-3}=2^4=16$

15 답 64

$A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$

따라서 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$의 부분집합 중에서 2, 4, 6, 8을 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{10-4}=2^6=64$

06 집합의 연산

개념유형

116쪽

001 답 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A\cap B=\{2\}$

002 답 $A\cup B=\{a, b, c, d, e\}$, $A\cap B=\{c, d\}$

003 답 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}$, $A\cap B=\{1, 2, 3\}$

004 답 $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$, $A\cap B=\{3, 5, 7\}$

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$이므로
$A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$, $A\cap B=\{3, 5, 7\}$

005 답 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$, $A\cap B=\{1, 2\}$

$A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로
$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$, $A\cap B=\{1, 2\}$

006 답 $A\cup B=\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$, $A\cap B=\{10, 20\}$

$A=\{5, 10, 15, 20, 25\}$, $B=\{10, 20, 30\}$이므로
$A\cup B=\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$, $A\cap B=\{10, 20\}$

007 답 $A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $A\cap B=\{3, 4\}$

$A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$이므로
$A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $A\cap B=\{3, 4\}$

008 답 ○

$A\cap B=\varnothing$이므로 A, B는 서로소이다.

009 답 ×

$A\cap B=\{f\}$이므로 A, B는 서로소가 아니다.

010 답 ○

$A\cap B=\varnothing$이므로 A, B는 서로소이다.

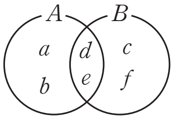
011 답 ×

$A=\{1, 5\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$이므로 $A\cap B=\{1\}$
따라서 A, B는 서로소가 아니다.

012 답 4, $\{2, 4\}$

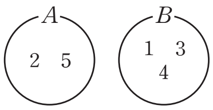
013 답 $\{c, d, e, f\}$

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$B=\{c, d, e, f\}$



014 답 $\{1, 3, 4\}$

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$B=\{1, 3, 4\}$



실전유형

117~118쪽

015 답 $\{b, d\}$

주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $A\cap B$이므로
$A\cap B=\{b, d\}$

016 답 ④

$B\cup C=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로
$A\cap(B\cup C)=\{3, 4, 5\}$

017 답 8

$A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, \dots\}$이므로
$A\cap B=\{3, 5\}$
따라서 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은
$3+5=8$

018 답 5

$A=\{3, 6, 9, 12, 15\}$, $B=\{1, 3, 5, 15\}$이므로
$A\cup B=\{1, 3, 5, 6, 9, 12, 15\}$, $A\cap B=\{3, 15\}$
$\therefore n(A\cup B)-n(A\cap B)=7-2=5$

019 답 ⑤

$A=\{1, 3, 9\}$
③ $\{1, 7\}$
④ $\{2, 3, 5, 7\}$
⑤ $\{4, 8\}$
따라서 집합 A와 서로소인 집합은 ⑤이다.

020 답 ③

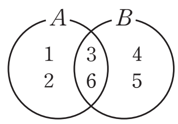
① $A\cap B=\{12\}$
② $A\cap B=\{x\,|\,0\le x<1\}$
③ $A=\{-3, 3\}$, $B=\{0, 9\}$이므로 $A\cap B=\varnothing$
④ $B\subset A$이므로 $A\cap B\neq\varnothing$
⑤ $A\subset B$이므로 $A\cap B\neq\varnothing$
따라서 두 집합 A, B가 서로소인 것은 ③이다.

021 답 16

집합 A의 부분집합 중에서 집합 B와 서로소인 집합은 집합 B의 원소 a, c를 원소로 갖지 않는 부분집합이다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^{6-2}=2^4=16$

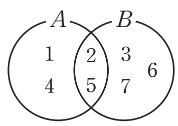
022 답 {3, 4, 5, 6}

$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
따라서 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$B=\{3, 4, 5, 6\}$



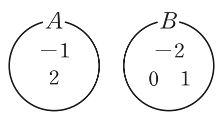
023 답 ④

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$B=\{2, 3, 5, 6, 7\}$
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은
$2+3+5+6+7=23$



024 답 {−1, 2}

$A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
따라서 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$A=\{-1, 2\}$



025 답 ①

$A\cap B=\{3, 7\}$에서 $7\in A$, $3\in B$이므로
$a+b=7$, $a-b=3$
두 식을 연립하여 풀면
$a=5$, $b=2$
$\therefore ab=10$

026 답 8

$A=\{6, 8\}$, $A\cup B=\{6, 8, 10\}$에서 $10\in B$이므로
$a=10$ 또는 $a+2=10$
$\therefore a=8$ 또는 $a=10$
(i) $a=8$일 때
$B=\{8, 10\}$이므로 $A\cup B=\{6, 8, 10\}$
(ii) $a=10$일 때
$B=\{10, 12\}$이므로 $A\cup B=\{6, 8, 10, 12\}$
(i), (ii)에서 $a=8$

027 답 ②

$A\cap B=\{-1, 2\}$에서 $2\in A$이므로
$a^2-a=2$, $a^2-a-2=0$
$(a+1)(a-2)=0$ $\quad\therefore a=-1$ 또는 $a=2$
(i) $a=-1$일 때
$A=\{-1, 1, 2\}$, $B=\{-2, -1, 2\}$이므로
$A\cap B=\{-1, 2\}$
(ii) $a=2$일 때
$A=\{-1, 1, 2\}$, $B=\{1, 2, 5\}$이므로
$A\cap B=\{1, 2\}$
(i), (ii)에서 $a=-1$

개념유형

120쪽

028 답 {1, 3, 5, 7, 9, 10}

$U=\{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$이므로
$A^C=\{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

029 답 ∅

030 답 {2, 4, 6, 8, 10}

$C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로
$C^C=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

031 답 {3, 4, 6, 7, 8, 9}

$D=\{1, 2, 5, 10\}$이므로
$D^C=\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

032 답 $A-B=\{a, b\}$, $B-A=\{e\}$

033 답 $A-B=\{1, 4\}$, $B-A=\{3, 6\}$

034 답 $A-B=\{3, 6, 9, 15, 18\}$, $B-A=\{4, 8, 16, 20\}$

$A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $B=\{4, 8, 12, 16, 20\}$이므로
$A-B=\{3, 6, 9, 15, 18\}$
$B-A=\{4, 8, 16, 20\}$

035 답 $A-B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B-A=\{10, 11, 12\}$

$A=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B=\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$이므로
$A-B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$
$B-A=\{10, 11, 12\}$

036 답 {b}

$A\cup B=\{a, c, d, e, f, g, h\}$이므로
$(A\cup B)^C=\{b\}$

037 답 {d, e, h}

$A^C=\{b, d, e, h\}$이므로
$A^C\cap B=\{d, e, h\}$

038 답 {c, g}

$B^C=\{a, b, f\}$이므로
$A-B^C=\{c, g\}$

039 답 {4, 9, 12, 18, 36}

$U=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$
$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
따라서 $A\cap B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로
$(A\cap B)^C=\{4, 9, 12, 18, 36\}$

040 답 $\{1, 2, 3, 4, 6, 12, 36\}$

$B^C=\{4, 12, 36\}$이므로

$A\cup B^C=\{1, 2, 3, 4, 6, 12, 36\}$

041 답 $\{36\}$

$A^C=\{9, 18, 36\}$이므로

$A^C-B=\{36\}$

실전유형

121~122쪽

042 답 ④

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{3, 6\}$

④ $A-B=\{2, 4, 8\}$

043 답 ①

$A-B=\{1, 2, 3\}$이므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은

$1+2+3=6$

044 답 32

$U=\{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$, $A=\{1, 2, 7, 14\}$이므로

$A^C=\{4, 28\}$

따라서 집합 A^C의 모든 원소의 합은

$4+28=32$

045 답 ④

$A^C=\{3, 4, 5\}$이므로

$A^C\cup B=\{2, 3, 4, 5\}$

따라서 집합 $A^C\cup B$의 원소의 개수는 4이다.

046 답 ④

① $A-B=\{1, 3\}$이므로 $4\notin(A-B)$

② $B-A=\{4, 6, 8\}$

③ $B^C=\{1, 3, 7, 9\}$

⑤ $n(A-B)=2$, $n(B-A)=3$이므로

$n(A-B)\neq n(B-A)$

따라서 옳은 것은 ④이다.

047 답 4

$U=\{1, 2, 3, 4, \dots, 15\}$, $B=\{5, 7, 9, 11, 13\}$이므로

$B^C=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15\}$

$A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$이므로

$A-B^C=\{5, 7, 11, 13\}$

$\therefore n(A-B^C)=4$

048 답 $\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$

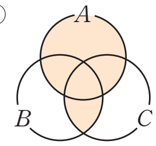
$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{2, 5, 8\}$이므로

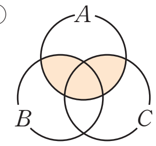
$A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$, $A\cap B=\{5\}$

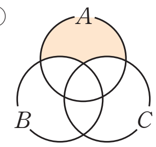
$\therefore (A\cup B)-(A\cap B)=\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$

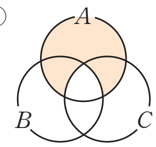
049 답 ③

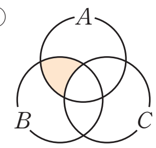
주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면

①


②


③


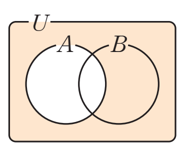
④


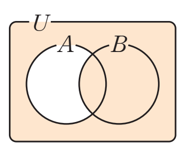
⑤


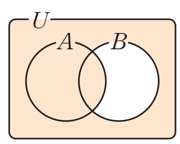
따라서 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ③이다.

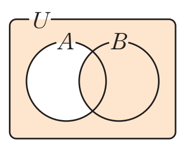
050 답 ㄴ, ㄹ

주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


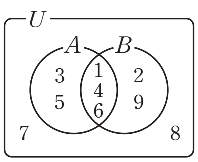
ㄹ.


따라서 보기에서 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

051 답 ④

052 답 $\{1, 2, 4, 6, 9\}$

$U=\{1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



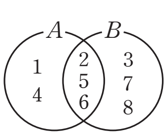
$\therefore B=\{1, 2, 4, 6, 9\}$

053 답 ④

$(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$이므로 주어진 조건을 만족시키려면

$A-B=\{1, 4\}$, $B-A=\{3, 7, 8\}$

따라서 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B=\{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$2+3+5+6+7+8=31$

054 답 **2**

$B-A=\{1\}$에서 $8\in A$이므로

$a^2+2a=8$, $a^2+2a-8=0$

$(a+4)(a-2)=0$ $\quad\therefore a=-4$ 또는 $a=2$

(ⅰ) $a=-4$일 때

$A=\{3, 4, 8\}$, $B=\{-2, 1, 8\}$이므로

$B-A=\{-2, 1\}$

(ⅱ) $a=2$일 때

$A=\{3, 4, 8\}$, $B=\{1, 4, 8\}$이므로

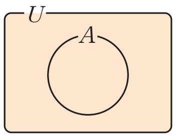
$B-A=\{1\}$

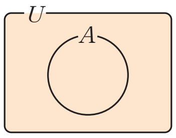
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=2$

개념유형

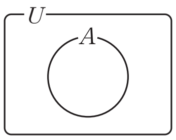
123~125쪽

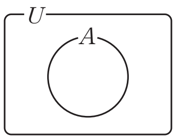
055 답 $A\cup A^C$ $\boxed{=}$ U



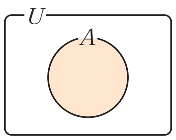


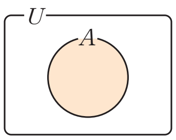
056 답 $A\cap A^C$ $\boxed{=}$ $\varnothing$



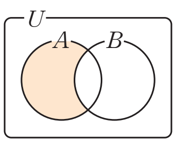


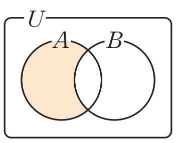
057 답 $(A^C)^C$ $\boxed{=}$ A





058 답 $A-B$ $\boxed{=}$ $A\cap B^C$





059 답 A

060 답 A

061 답 A

062 답 $\varnothing$

063 답 U

064 답 A

065 답 U

066 답 $\varnothing$

067 답 $\varnothing$

068 답 U

069 답 B

070 답 A^C

071 답 B

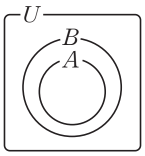
072 답 B

$A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

073 답 A

$B^C-A^C=B^C\cap(A^C)^C=B^C\cap A$

074 답 A



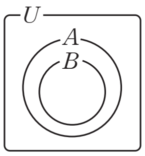
075 답 B

076 답 $\varnothing$

077 답 $\varnothing$

$B^C\subset A^C$이므로 $B^C-A^C=\varnothing$

078 답 ○



079 답 ○

080 답 ○

081 답 ×

082 답 ×

$A\cap B^C=A-B\neq\varnothing$

083 답 ○

$A^C\subset B^C$이므로 $A^C-B^C=\varnothing$

084 답 ×

$A\cap B=B$이므로

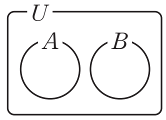
$A-(A\cap B)=A-B\neq\varnothing$

085 답 ○

$A\cup B=A$이므로

$(A\cup B)-A=A-A=\varnothing$

086 답 ×



087 답 ○

088 답 ×

$A^C\cap B=B$

089 답 ○

실전유형 126쪽

090 답 ④

④ $B-A=B\cap A^C$

⑤ $A\cap(A\cup A^C)=A\cap U=A$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

091 답 ③

$A\cap B=A$에서 $A\subset B$

③ $B-A\neq\varnothing$

⑤ $(A-B)^C=\varnothing^C=U$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

참고 ③ $A\subset B$이면 $A-B=\varnothing$

092 답 ③

① $A\cap B=\varnothing$

② $A\cup B\neq U$

④ $B-A=B$

⑤ $A^C\not\subset B$

따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

참고 ⑤ $A\cap B=\varnothing$이면 $A\subset B^C$, $B\subset A^C$

093 답 32

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$X-A=X$에서 $X\cap A=\varnothing$

따라서 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중에서 집합 A의 원소 1, 3을 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{7-2}=2^5=32$

094 답 4

$A\cap X=X$에서 $X\subset A$

$(A-B)\cup X=X$에서 $(A-B)\subset X$

$\therefore (A-B)\subset X\subset A$

이때 $A-B=\{1, 7, 9\}$이므로

$\{1, 7, 9\}\subset X\subset\{1, 3, 5, 7, 9\}$

따라서 집합 X는 집합 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$의 부분집합 중에서 1, 7, 9를 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{5-3}=2^2=4$

095 답 ②

$A=\{6, 12, 18, 24, \dots, 48\}$, $B=\{4, 8, 12, 16, \dots, 48\}$

$A\cup X=A$에서 $X\subset A$이고, $B\cap X=\varnothing$이므로 집합 X는 집합 $A-B$의 부분집합이다.

집합 $A-B$는 6의 배수 중에서 4의 배수가 아닌 수의 집합이므로

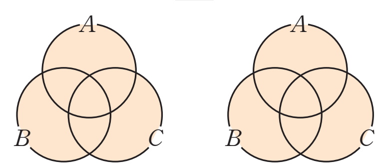
$A-B=\{6, 18, 30, 42\}$

따라서 집합 X의 개수는

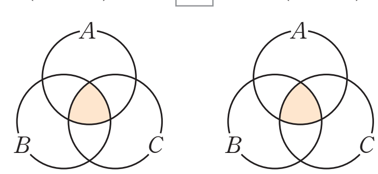
$2^4=16$

개념유형 127~129쪽

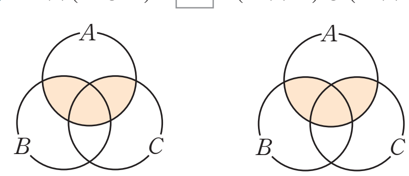
096 답 $(A\cup B)\cup C$ $\boxed{=}$ $A\cup(B\cup C)$



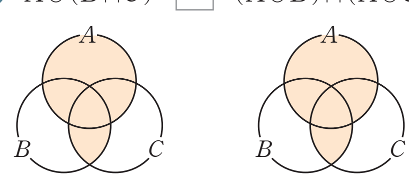
097 답 $(A\cap B)\cap C$ $\boxed{=}$ $A\cap(B\cap C)$



098 답 $A\cap(B\cup C)$ $\boxed{=}$ $(A\cap B)\cup(A\cap C)$



099 답 $A\cup(B\cap C)$ $\boxed{=}$ $(A\cup B)\cap(A\cup C)$



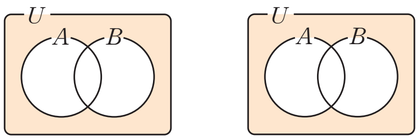
100 답 B, A

101 답 $\cap$, $\cup$, C

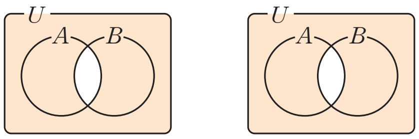
102 답 $\cap$, $\cup$

103 답 $\cap$, $\cup$

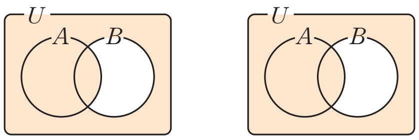
104 답 $(A\cup B)^c$ $\boxed{=}$ $A^c\cap B^c$



105 답 $(A\cap B)^c$ $\boxed{=}$ $A^c\cup B^c$



106 답 $(A^c\cap B)^c$ $\boxed{=}$ $A\cup B^c$



107 답 $\cap$

108 답 B^c

109 답 A^c

$(A\cup B^c)^c=A^c\cap(B^c)^c=A^c\cap B$

110 답 $\cap$

$(A^c\cup B)^c=(A^c)^c\cap B^c=A\cap B^c$

111 답 $\cup$

$(A\cap B^c)^c=A^c\cup(B^c)^c=A^c\cup B$

112 답 B

$(A^c\cup B^c)^c=(A^c)^c\cap(B^c)^c=A\cap B$

113 답 A

$(A^c\cap B^c)^c=(A^c)^c\cup(B^c)^c=A\cup B$

114 답 ㄷ

115 답 ㄹ, ㄱ, ㄴ

116 답 ㄹ, ㄷ, ㄱ

117 답 A^c, A^c, $\varnothing$, A^c, A^c, A

118 답 A, A, A, A, A

119 답 $\cap$, $\cap$, $\cap$, $\cap$, $\cap$, $\varnothing$

120 답 A^c, A, A, $\cup$, $\varnothing$, A

실전유형

130~131쪽

121 답 ④

122 답 ③

$$\begin{aligned}(A^c\cap B)\cup(A\cup B)^c&=(A^c\cap B)\cup(A^c\cap B^c)\\&=A^c\cap(B\cup B^c)\\&=A^c\cap U\\&=A^c\end{aligned}$$

123 답 ④

$$\begin{aligned}(A-B)-(A-C)&=(A\cap B^c)\cap(A\cap C^c)^c\\&=(A\cap B^c)\cap(A^c\cup C)\\&=\{(A\cap B^c)\cap A^c\}\cup\{(A\cap B^c)\cap C\}\\&=(A\cap B^c\cap A^c)\cup(A\cap B^c\cap C)\\&=\{(A\cap A^c)\cap B^c\}\cup(A\cap B^c\cap C)\\&=(\varnothing\cap B^c)\cup(A\cap B^c\cap C)\\&=\varnothing\cup(A\cap B^c\cap C)\\&=A\cap B^c\cap C\\&=(A\cap C)\cap B^c\\&=(A\cap C)-B\end{aligned}$$

124 답 ㄴ, ㄹ

ㄱ. $(A^c-B)^c=(A^c\cap B^c)^c=A\cup B$

ㄴ. $\begin{aligned}(A\cap B)\cup(A^c\cup B)^c&=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)\\&=A\cap(B\cup B^c)\\&=A\cap U=A\end{aligned}$

ㄷ. $\begin{aligned}(A\cap B)^c\cap B&=(A^c\cup B^c)\cap B\\&=(A^c\cap B)\cup(B^c\cap B)\\&=(A^c\cap B)\cup\varnothing\\&=A^c\cap B=B-A\end{aligned}$

ㄹ. $\begin{aligned}(A\cup B)-(A\cap B^c)&=(A\cup B)\cap(A\cap B^c)^c\\&=(A\cup B)\cap(A^c\cup B)\\&=(A\cap A^c)\cup B\\&=\varnothing\cup B=B\end{aligned}$

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

125 답 ④

$(A\cup B)\cap A^c=(A\cap A^c)\cup(B\cap A^c)$
$\quad=\varnothing\cup(B\cap A^c)$
$\quad=B\cap A^c$
$\quad=B-A$

즉, $B-A=\varnothing$이므로 $B\subset A$

② $A^c\subset B^c$

③ $A\cap B=B$

⑤ $A\cup B^c=U$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

126 답 ⑤

$\{(A\cup B)\cap(B-A)^c\}\cap B=\{(A\cup B)\cap(B\cap A^c)^c\}\cap B$
$\quad=\{(A\cup B)\cap(A\cup B^c)\}\cap B$
$\quad=\{A\cup(B\cap B^c)\}\cap B$
$\quad=(A\cup\varnothing)\cap B$
$\quad=A\cap B$

즉, $A\cap B=A$이므로 $A\subset B$

② $A\cup B=B$

③ $A-B=\varnothing$

④ $B\cap A^c=B-A\neq\varnothing$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

127 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

$A\cap\{(A\cap B)\cup(A\cup B^c)^c\}=A\cap\{(A\cap B)\cup(A^c\cap B)\}$
$\quad=A\cap\{(A\cup A^c)\cap B\}$
$\quad=A\cap(U\cap B)$
$\quad=A\cap B$

$\therefore A\cap B=\varnothing$

ㄴ. $A^c\not\subset B$

ㄹ. $A-B=A$, $B-A=B$이므로
$(A-B)\cup(B-A)=A\cup B$

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

128 답 ①

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
$\quad=\{1, 2, 4, 5, 6\}\cap\{2, 3, 5, 7\}$
$\quad=\{2, 5\}$

129 답 2

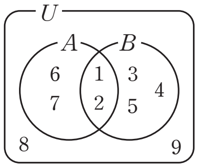
$\{B\cup(A\cup B)^c\}^c=\{B\cup(A^c\cap B^c)\}^c$
$\quad=B^c\cap(A^c\cap B^c)^c$
$\quad=B^c\cap(A\cup B)$
$\quad=(B^c\cap A)\cup(B^c\cap B)$
$\quad=(B^c\cap A)\cup\varnothing$
$\quad=B^c\cap A$
$\quad=A-B$
$\quad=\{2, 4\}$

따라서 구하는 원소의 개수는 2이다.

130 답 ⑤

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$A^c\cap B=B-A=\{3, 4, 5\}$
$A^c\cap B^c=(A\cup B)^c=\{8, 9\}$

따라서 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$A=\{1, 2, 6, 7\}$

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은
$1+2+6+7=16$

131 답 ④

$U=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$A^c\cup B^c=(A\cap B)^c=\{1, 3, 4, 12\}$이므로
$A\cap B=\{(A\cap B)^c\}^c=\{2, 6\}$
$(A^c\cup B)\cap B=(A^c\cap B)\cup(B\cap B)$
$\quad=(A^c\cap B)\cup B$
$\quad=(B-A)\cup B=B$

$\therefore B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$

$\therefore B-A=B-(A\cap B)=\{1, 3, 4\}$

개념유형

133쪽

132 답 11

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$\quad=5+9-3=11$

133 답 6

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$\quad=14+12-20=6$

134 답 15

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
$n(B)=n(A\cup B)-n(A)+n(A\cap B)$
$\quad=17-10+8=15$

135 답 13

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
$n(A)=n(A\cup B)-n(B)+n(A\cap B)$
$\quad=15-6+4=13$

136 답 14

$A\cap B=\varnothing$이므로
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)=9+5=14$

137 답 6

$A\cap B=\varnothing$이면 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$이므로
$n(B)=n(A\cup B)-n(A)=13-7=6$

138 답 8
$n(A^C)=n(U)-n(A)=15-7=8$

139 답 5
$n(B^C)=n(U)-n(B)=15-10=5$

140 답 11
$n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)=15-4=11$

141 답 3
$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=7-4=3$

142 답 6
$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=10-4=6$

143 답 11
$n(A^C)=n(U)-n(A)=25-14=11$

144 답 14
$n(B^C)=n(U)-n(B)=25-11=14$

145 답 9
$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)=20-11=9$

146 답 6
$n(B\cap A^C)=n(B-A)$
$=n(A\cup B)-n(A)$
$=20-14=6$

147 답 5
$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A\cup B)$
$=25-20=5$

실전유형
134쪽

148 답 34
$n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)$
$=n(U)-n(A\cap B)$
$=40-6=34$

149 답 8
$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$이므로
$6=13-n(A\cap B)$ $\quad\therefore n(A\cap B)=7$
$\therefore n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=15-7=8$

다른 풀이
$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$이므로
$6=n(A\cup B)-15$ $\quad\therefore n(A\cup B)=21$
$\therefore n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$
$=21-13=8$

150 답 ①
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=12+10-4=18$
$\therefore n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A\cup B)$
$=20-18=2$

151 답 31
$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로
$5=30-n(A\cup B)$ $\quad\therefore n(A\cup B)=25$
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
$25=n(A)+n(B)-6$
$\therefore n(A)+n(B)=31$

152 답 ③
책 A를 읽은 학생의 집합을 A, 책 B를 읽은 학생의 집합을 B라 하면
$n(A)=16$, $n(B)=9$, $n(A\cap B)=5$
책 A 또는 책 B를 읽은 학생의 집합은 $A\cup B$이므로
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=16+9-5=20$
따라서 구하는 학생 수는 20이다.

153 답 14
학생 전체의 집합을 U, 등산을 좋아하는 학생의 집합을 A, 수영을 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=30$, $n(A)=20$, $n(B)=17$, $n((A\cup B)^C)=7$
$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로
$7=30-n(A\cup B)$ $\quad\therefore n(A\cup B)=23$
등산과 수영을 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A\cap B$이므로
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=20+17-23=14$
따라서 구하는 학생 수는 14이다.

154 답 29
학생 전체의 집합을 U, 동아리 A에 가입한 학생의 집합을 A, 동아리 B에 가입한 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=56$, $n(A)=35$, $n(B)=27$
(가)에서 $A\cup B=U$이므로
$n(A\cup B)=n(U)=56$
동아리 A에만 가입한 학생의 집합은 $A-B$이므로
$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$
$=56-27=29$
따라서 구하는 학생 수는 29이다.

실전유형으로 중단원 점검

135~136쪽

1 답 $\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10\}$

$B=\{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 14,\ 28\}$이므로

$A\cap B=\{2,\ 4,\ 7\}$

$C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$이므로

$(A\cap B)\cup C=\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10\}$

2 답 ④

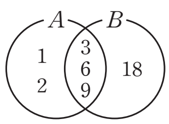
③ $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ ④ $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ ⑤ $\{1,\ 5\}$

따라서 집합 $\{2,\ 4,\ 6\}$과 서로소가 아닌 집합은 ④이다.

3 답 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9\}$

$A\cap B=\{3,\ 6,\ 9\}$, $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$

따라서 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9\}$

4 답 2

$A\cap B=\{-6,\ 0\}$에서 $-6\in B$이므로

$a^2-5a=-6$, $a^2-5a+6=0$

$(a-2)(a-3)=0$ $\therefore a=2$ 또는 $a=3$

(i) $a=2$일 때

$A=\{-6,\ -1,\ 0\}$, $B=\{-6,\ 0,\ 1\}$이므로

$A\cap B=\{-6,\ 0\}$

(ii) $a=3$일 때

$A=\{-5,\ 0,\ 1\}$, $B=\{-6,\ 0,\ 1\}$이므로

$A\cap B=\{0,\ 1\}$

(i), (ii)에서 $a=2$

5 답 ⑤

$B=\{4,\ 8\}$, $C=\{1,\ 4,\ 7,\ 10\}$

① $A\cap B=\{8\}$

② $B^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11\}$

③ $B-C=\{8\}$

④ $C-A=\{1,\ 4,\ 7\}$

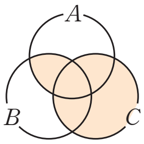
⑤ $B\cup C=\{1,\ 4,\ 7,\ 8,\ 10\}$이므로

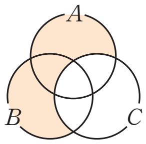
$(B\cup C)^C=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 11\}$

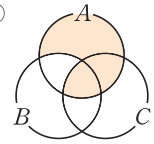
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

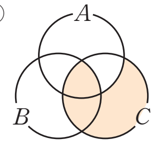
6 답 ⑤

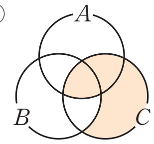
주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면

①


②


③


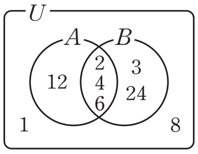
④


⑤


따라서 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ⑤이다.

7 답 4

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다. ······ i



$\therefore A=\{2,\ 4,\ 6,\ 12\}$ ······ ii

따라서 집합 A의 원소의 개수는 4이다. ······ iii

채점 기준

i 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내기	60 %
ii 집합 A 구하기	20 %
iii 집합 A의 원소의 개수 구하기	20 %

8 답 ⑤

$B^C\subset A^C$에서 $A\subset B$

② $A\cap B=A$

③ $A\cup B^C\neq U$

④ $B-A^C=B\cap(A^C)^C=B\cap A=A$

⑤ $(A\cup B)-B=B-B=\varnothing$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

참고 ③ $A\subset B$이면 $A^C\cup B=U$

9 답 8

$(A\cap B)\cup X=X$에서 $(A\cap B)\subset X$

$(A\cup B)\cap X=X$에서 $X\subset(A\cup B)$

$\therefore (A\cap B)\subset X\subset(A\cup B)$ ······ i

이때 $A\cap B=\{1,\ 3,\ 4\}$, $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이므로

$\{1,\ 3,\ 4\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

따라서 집합 X는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합 중에서 1, 3, 4를 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{6-3}=2^3=8$ ······ ii

채점 기준

i 세 집합 X, $A\cap B$, $A\cup B$ 사이의 포함 관계 나타내기	50 %
ii 집합 X의 개수 구하기	50 %

10 답 ②

$$\begin{aligned}A-\{(A^C-B)\cup(A-B)\}&=A-\{(A^C\cap B^C)\cup(A\cap B^C)\}\\&=A-\{(A^C\cup A)\cap B^C\}\\&=A-(U\cap B^C)\\&=A-B^C\\&=A\cap B\end{aligned}$$

11 답 ⑤

$$A^c\cap\{(A\cup B)\cap(A^c\cup B)\}=A^c\cap\{(A\cap A^c)\cup B\}$$
$$=A^c\cap(\varnothing\cup B)$$
$$=A^c\cap B$$
$$=B-A$$

즉, $B-A=\varnothing$이므로 $B\subset A$

② $A\cap B=B$

③ $A\cup B=A$

④ $A-B\neq\varnothing$

⑤ $A^c\subset B^c$이므로 $A^c-B^c=\varnothing$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

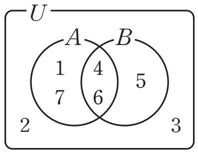
12 답 $\{4,\ 5,\ 6\}$

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

$A^c\cap B^c=(A\cup B)^c=\{2,\ 3\}$

$A^c\cup B^c=(A\cap B)^c=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

따라서 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B=\{4,\ 5,\ 6\}$

13 답 ③

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$
$$=22+25-35=12$$
$$\therefore\ n(A^c\cup B^c)=n((A\cap B)^c)$$
$$=n(U)-n(A\cap B)$$
$$=40-12=28$$

14 답 3

학생 전체의 집합을 U, 무선 이어폰을 가지고 있는 학생의 집합을 A, 유선 이어폰을 가지고 있는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=20,\ n(A)=15,\ n(B)=10,\ n(A\cap B)=8$ …… ⅰ

$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=15+10-8=17$ …… ⅱ

무선 이어폰과 유선 이어폰 중 어느 것도 가지고 있지 않은 학생의 집합은 $(A\cup B)^c$이므로

$n((A\cup B)^c)=n(U)-n(A\cup B)$

$=20-17=3$

따라서 구하는 학생 수는 3이다. …… ⅲ

채점 기준

ⅰ 주어진 상황을 세 집합 U, A, B로 나타내기	30 %
ⅱ $n(A\cup B)$ 구하기	30 %
ⅲ 무선 이어폰과 유선 이어폰 중 어느 것도 가지고 있지 않은 학생 수 구하기	40 %

07 명제

개념유형 138~140쪽

001 답 ○

002 답 ×

'큰'은 참, 거짓을 분명하게 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

003 답 ○

004 답 ×

'가까운'은 참, 거짓을 분명하게 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

005 답 ×

x의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 분명하게 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

006 답 ○

007 답 참

008 답 거짓

009 답 거짓

010 답 참

$1+2<4$에서 $3<4$이므로 참이다.

011 답 거짓

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이므로 거짓이다.

012 답 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

013 답 $\{3,\ 4,\ 6,\ 7\}$

전체집합 U의 원소 중에서 10의 약수는 1, 2, 5이므로 주어진 조건의 진리집합은

$\{3,\ 4,\ 6,\ 7\}$

014 답 $\{1,\ 5\}$

$x^2-6x+5=0$에서 $(x-1)(x-5)=0$ $\quad\therefore\ x=1$ 또는 $x=5$

따라서 주어진 조건의 진리집합은 $\{1,\ 5\}$

015 답 $\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

$2x-1\geq 5$에서 $x\geq 3$

따라서 주어진 조건의 진리집합은 $\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

016 답 $\{2\}$

$|x-2|<1$에서 $-1<x-2<1$ $\quad\therefore\ 1<x<3$

따라서 주어진 조건의 진리집합은 $\{2\}$

017 답 $\{0, 1\}$

$x(x-1)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$
따라서 조건 p의 진리집합은 $\{0, 1\}$

018 답 $\{-1, 1\}$

$x^2-1=0$에서 $x^2=1$ $\quad \therefore x=\pm 1$
따라서 조건 q의 진리집합은 $\{-1, 1\}$

019 답 $\{-1, 0, 1\}$

$\{0, 1\} \cup \{-1, 1\}=\{-1, 0, 1\}$

020 답 $\{1\}$

$\{0, 1\} \cap \{-1, 1\}=\{1\}$

021 답 $\{1, 2, 3\}$

022 답 $\{2, 3, 4\}$

$|x-3|<2$에서 $-2<x-3<2$ $\quad \therefore 1<x<5$
따라서 조건 q의 진리집합은 $\{2, 3, 4\}$

023 답 $\{1, 2, 3, 4\}$

$\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\}=\{1, 2, 3, 4\}$

024 답 $\{2, 3\}$

$\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\}=\{2, 3\}$

025 답 $x \neq 2$

026 답 $x>3$

027 답 $0 \notin \varnothing$

028 답 $1 \le x \le 2$

029 답 $\sqrt{7}$은 무리수가 아니다.

030 답 5는 3의 배수이거나 4의 배수이다.

031 답 $x \ge 0$

032 답 $x<-5$

033 답 $x<0$

조건 $\sim p$의 부정은 p이므로 $x<0$

034 답 $x \ge -5$

조건 $\sim q$의 부정은 q이므로 $x \ge -5$

035 답 $x<-5$ 또는 $x \ge 0$

조건 'p 그리고 q'의 부정은 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'이므로
$x<-5$ 또는 $x \ge 0$

036 답 $x<-5$

조건 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은 'p 그리고 $\sim q$'이므로
$x<0$이고 $x<-5$ $\quad \therefore x<-5$

037 답 $\{2, 4, 6\}$

'$\sim p$: x는 홀수가 아니다.'이고, 홀수는 1, 3, 5이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은
$\{2, 4, 6\}$

038 답 $\{4, 5\}$

'$\sim p$: x는 6의 약수가 아니다.'이고, 6의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은
$\{4, 5\}$

039 답 $\{1, 2, 3, 5, 6\}$

$\sim p$: $2x-1 \neq 7$에서 $x \neq 4$
따라서 조건 $\sim p$의 진리집합은
$\{1, 2, 3, 5, 6\}$

040 답 $\{1, 2\}$

$\sim p$: $x<3$이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은
$\{1, 2\}$

실전유형 140~141쪽

041 답 ①

① x의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 분명하게 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
②, ⑤ 참인 명제이다.
③, ④ 거짓인 명제이다.
따라서 명제가 아닌 것은 ①이다.

042 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. x의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 분명하게 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
ㄴ. 거짓인 명제이다.
ㄷ. 참인 명제이다.
ㄹ. '맛있다'는 참, 거짓을 분명하게 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
따라서 보기에서 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

043 답 ④

① $1+5=6$에서 $6=6$이므로 참인 명제이다.

② $3x=x+2x$에서 $3x=3x$이므로 참인 명제이다.

③ $x+1=x-2$에서 $1=-2$이므로 거짓인 명제이다.

④ $x+4<3x+2$에서 $-2x<-2$　　$\therefore x>1$

따라서 x의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 분명하게 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

⑤ $2(x-1)>2x+1$에서 $2x-2>2x+1$　　$\therefore -2>1$

따라서 거짓인 명제이다.

따라서 명제가 아닌 것은 ④이다.

044 답 ②

조건 'x는 1보다 크다.', 즉 $x>1$의 부정은

$x\le1$

045 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. 부정: $3<\sqrt{10}$

➡ $3=\sqrt{9}<\sqrt{10}$이므로 참이다.

ㄴ. 부정: $x-3\neq x+3$

➡ $x-3\neq x+3$에서 $-3\neq3$이므로 참이다.

ㄷ. 부정: $\sqrt{1}$은 유리수가 아니다.

➡ $\sqrt{1}=1$은 유리수이므로 거짓이다.

ㄹ. 부정: 마름모는 평행사변형이 아니다.

➡ 마름모는 평행사변형이므로 거짓이다.

따라서 보기에서 부정이 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

다른 풀이

명제가 거짓이면 그 부정은 참이다.

ㄱ. $3=\sqrt{9}\ge\sqrt{10}$이므로 거짓이다.

ㄴ. $x-3=x+3$에서 $-3=3$이므로 거짓이다.

ㄷ. $\sqrt{1}=1$은 유리수이므로 참이다

ㄹ. 마름모는 평행사변형이므로 참이다.

따라서 보기에서 부정이 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

046 답 ③

조건 'p 또는 $\sim q$'의 부정은 '$\sim p$ 그리고 q'이다.

p: $x^2-3x>0$에서

$x(x-3)>0$　　$\therefore x<0$ 또는 $x>3$

$\therefore \sim p$: $0\le x\le3$

q: $(x-1)(x-5)<0$에서 $1<x<5$

따라서 조건 '$\sim p$ 그리고 q'는

$1<x\le3$

047 답 ②

조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C이므로

$P^C=\{5, 7\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$5+7=12$

048 답 $\{1, 3, 4, 6\}$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은

$P^C\cup Q$

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $P=\{2, 3, 5, 7\}$이므로

$P^C=\{1, 4, 6\}$

q: $x^2-7x+12=0$에서

$(x-3)(x-4)=0$　　$\therefore x=3$ 또는 $x=4$

$\therefore Q=\{3, 4\}$

$\therefore P^C\cup Q=\{1, 3, 4, 6\}$

049 답 ③

$P=\{x\,|\,x\ge-1\}$

$Q=\{x\,|\,x\ge3\}$에서 $Q^C=\{x\,|\,x<3\}$

따라서 조건 '$-1\le x<3$'의 진리집합은

$P\cap Q^C$

개념유형

142~143쪽

050 답 가정: $x=2$이다., 결론: $2x+3=7$이다.

051 답 가정: $-2<x<2$이다., 결론: $-2\le x\le2$이다.

052 답 가정: a, b가 모두 짝수이다., 결론: $a+b$는 짝수이다.

053 답 가정: 삼각형 ABC에서 $\angle B=\angle C$이다.

결론: 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이다.

054 답 참

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 3, 9\}$, $Q=\{1, 3, 9, 27\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

055 답 거짓

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P\not\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

다른 풀이

[반례] $x=-1$이면 x는 정수이지만 자연수는 아니다.

056 답 거짓

p: $x^2=4$에서 $x=\pm2$

q: $x-2=0$에서 $x=2$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{-2, 2\}$, $Q=\{2\}$

따라서 $P\not\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

다른 풀이

[반례] $x=-2$이면 $x^2=4$이지만 $x-2\neq0$이다.

057 답 참

q: $x^2-1>0$에서

$(x+1)(x-1)>0$ $\quad\therefore x<-1$ 또는 $x>1$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x>2\}$, $Q=\{x|x<-1$ 또는 $x>1\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

058 답 참

p: $x=2$, q: $x^2+x-6=0$이라 하자.

q: $x^2+x-6=0$에서

$(x+3)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2\}$, $Q=\{-3, 2\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

059 답 거짓

p: $x+2>1$, q: $x>0$이라 하자.

p: $x+2>1$에서 $x>-1$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x>-1\}$, $Q=\{x|x>0\}$

따라서 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

다른 풀이

[반례] $x=-\frac{1}{2}$이면 $x+2>1$이지만 $x<0$이다.

060 답 거짓

p: $x<4$, q: $x^2<16$이라 하자.

q: $x^2<16$에서 $-4<x<4$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x<4\}$, $Q=\{x|-4<x<4\}$

따라서 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

다른 풀이

[반례] $x=-5$이면 $x<4$이지만 $x^2>16$이다.

061 답 참

062 답 거짓

[반례] $x=2$이면 x는 소수이지만 홀수는 아니다.

063 답 참

064 답 거짓

[반례] $x=2$, $y=-1$이면 $x+y>0$이지만 $x>0$, $y<0$이다.

065 답 ×

$p \longrightarrow q$가 참이므로 $P\subset Q$

$\therefore P\cup Q=Q$

066 답 ○

$P\subset Q$이므로 $P\cap Q=P$

067 답 ○

$P\subset Q$이므로 $P\cap Q^C=P-Q=\varnothing$

068 답 ×

069 답 ○

$P\subset Q$이므로 $P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C=Q^C$

070 답 ×

$P\subset Q$이므로 $P^C\cup Q^C=(P\cap Q)^C=P^C$

실전유형 144~145쪽

071 답 $x=3$

[반례] $x=3$이면 $2x-1=5$이므로 $2x-1\geq 5$를 만족시키지만 $x>3$은 만족시키지 않는다.

072 답 ④

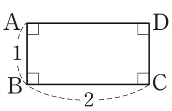
① $x=\sqrt{2}$이면 $x^2=2$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

② [반례] $x=3$이면 $|x-1|=2$이므로 $|x-1|\leq 2$를 만족시키지만 $-1<x<2$는 만족시키지 않는다.

③ [반례] $x=4$이면 x는 4의 배수이지만 12의 배수는 아니다.

④ 자연수 x, y에 대하여 xy가 홀수이면 x, y는 모두 홀수이므로 $x+y$는 짝수이다.
즉, 주어진 명제는 참이다.

⑤ [반례] 오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD는 평행사변형이면서 $\angle A=90°$이지만 $\overline{AB}\neq\overline{BC}$이다.



따라서 참인 명제는 ④이다.

073 답 ⑤

① p: $|x|\geq 3$이면 $x^2\geq 9$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

② p: $x<0$이면 $x^2>0$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

③ p: $x^3=1$에서 $x=1$ ($\because$ x는 실수)
따라서 $x^2=1$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

④ p: $x^2+y^2=0$이면 $x=0$, $y=0$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

⑤ [반례] $x=-1$, $y=-1$이면 $xy=|xy|$이지만 $x<0$, $y<0$이다.

따라서 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓인 것은 ⑤이다.

074 답 ④

q: $(x-1)(x-3)\neq 0$에서 $x\neq 1$, $x\neq 3$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|1\leq x\leq 3\}$, $Q=\{x|x$는 $x\neq 1$, $x\neq 3$인 실수$\}$

이때 $Q^C=\{1, 3\}$이므로 $Q^C\subset P$

따라서 항상 참인 명제는 ④이다.

075 답 ⑤

명제 $q \longrightarrow p$가 참이므로 $Q \subset P$

①, ② $P^C \subset Q^C$

③ $P \cap Q = Q$

④ $P \cup Q = P$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

076 답 ⑤

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로

$P \subset Q^C \qquad \therefore\ P \cap Q = \varnothing$

③ $P \cup Q \neq U$

④ $P - Q = P$

⑤ $(P \cap Q)^C = \varnothing^C = U$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

077 답 ④

명제 '$\sim q$이면 p이다.'가 거짓임을 보이려면 집합 Q^C의 원소 중에서 집합 P의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

따라서 구하는 집합은 $P^C \cap Q^C$

078 답 ㄴ, ㄹ

ㄱ. $P \not\subset Q^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.

ㄴ. $P^C \subset R^C$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim r$는 참이다.

ㄷ. $Q^C \not\subset R^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$는 거짓이다.

ㄹ. $R \subset Q^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim q$는 참이다.

따라서 보기에서 항상 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

079 답 ①

p: $x=a$, q: $x^2+6x-7=0$이라 하자.

q: $x^2+6x-7=0$에서

$(x+7)(x-1)=0 \qquad \therefore\ x=-7$ 또는 $x=1$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{a\}$, $Q=\{-7, 1\}$

이때 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로 $a \in Q$에서

$a=-7$ 또는 $a=1$

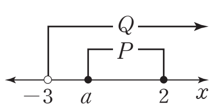
따라서 양수 a의 값은 1이다.

080 답 5

p: $a \le x \le 2$, q: $x > -3$이라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid a \le x \le 2\}$, $Q=\{x \mid x > -3\}$

이때 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-3 < a \le 2$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

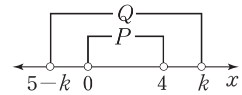
081 답 ②

p: $|x-2|<2$에서 $-2<x-2<2 \qquad \therefore\ 0<x<4$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid 0<x<4\}$, $Q=\{x \mid 5-k<x<k\}$

이때 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$5-k \le 0$, $4 \le k \qquad \therefore\ k \ge 5$

따라서 실수 k의 최솟값은 5이다.

082 답 ④

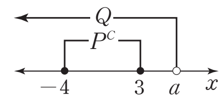
$\sim p$: $x^2+x-12 \le 0$에서

$(x+4)(x-3) \le 0 \qquad \therefore\ -4 \le x \le 3$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P^C=\{x \mid -4 \le x \le 3\}$, $Q=\{x \mid x<a\}$

이때 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a>3$

개념유형

146~147쪽

083 답 거짓

[반례] $x=5$이면 $x+5=10$이므로 $x+5<10$을 만족시키지 않는다.

084 답 참

$x=4$이면 $x-2=2$이므로 $x-2 \ge 2$를 만족시킨다.

따라서 주어진 명제는 참이다.

085 답 거짓

[반례] $x=1$이면 $|x-1|=0$이므로 $|x-1|>0$을 만족시키지 않는다.

086 답 참

087 답 참

$x=1$이면 $1^2=1$이므로 $x^2=x$를 만족시킨다.

따라서 주어진 명제는 참이다.

참고 $x^2=x$에서 $x^2-x=0$, $x(x-1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

088 답 **부정: 모든 자연수 x에 대하여 $x \ge 1$이다. (참)**

089 답 **부정: 어떤 3의 배수는 홀수이다. (참)**

9는 3의 배수이면서 홀수이므로 주어진 명제의 부정은 참이다.

090 답 **부정: 모든 자연수 x에 대하여 $\sqrt{x}$는 무리수가 아니다. (거짓)**

[반례] $x=2$이면 $\sqrt{x}=\sqrt{2}$이므로 무리수이다.

091 답 **부정: 모든 실수 x에 대하여 $x^2 \le 0$이다. (거짓)**

[반례] $x=-1$이면 $x^2=1$이므로 $x^2 \le 0$을 만족시키지 않는다.

092 답 **부정: 어떤 유리수 x, y에 대하여 $xy \neq 1$이다. (참)**

$x=1$, $y=2$이면 $xy \neq 1$이므로 주어진 명제의 부정은 참이다.

실전유형 147쪽

093 답 ⑤

① p: $x+2\le10$이라 하고 조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$
따라서 $P=U$이므로 주어진 명제는 참이다.
② p: $x^2<2$라 하고 조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{1\}$
따라서 $P\ne\varnothing$이므로 주어진 명제는 참이다.
③ ‘p: x는 짝수’라 하고 조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{2,\ 4,\ 8\}$
따라서 $P\ne\varnothing$이므로 주어진 명제는 참이다.
④ ‘p: x는 8의 양의 약수’라 하고 조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$
따라서 $P=U$이므로 주어진 명제는 참이다.
⑤ ‘p: $\sqrt{x}$는 무리수’라 하고 조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{2,\ 8\}$
따라서 $P\ne U$이므로 주어진 명제는 거짓이다.
따라서 거짓인 명제는 ⑤이다.

094 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. 2는 짝수이면서 소수이므로 주어진 명제는 참이다.
ㄷ. $3x-2<1$, 즉 $x<1$을 만족시키는 자연수 x는 존재하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다.
ㄹ. [반례] $x=1+\sqrt{2}$는 무리수이지만 $x^2=3+2\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.
따라서 보기에서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

095 답 4

주어진 명제의 부정은
‘모든 실수 x에 대하여 $x^2-4x+k\ge0$이다.’
이 명제가 참이 되려면 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=(-2)^2-k\le0 \qquad \therefore k\ge4$
따라서 실수 k의 최솟값은 4이다.

개념유형 149~150쪽

096 답 역: $p \longrightarrow q$, 대우: $\sim p \longrightarrow \sim q$

097 답 역: $\sim q \longrightarrow p$, 대우: $q \longrightarrow \sim p$

098 답 역: $q \longrightarrow \sim p$, 대우: $\sim q \longrightarrow p$

099 답 역: $\sim p \longrightarrow \sim q$, 대우: $p \longrightarrow q$

100 답 역: $x=6$이면 $x^2=36$이다. (참)
대우: $x\ne6$이면 $x^2\ne36$이다. (거짓)

대우: [반례] $x=-6$이면 $x\ne6$이지만 $x^2=36$이다.

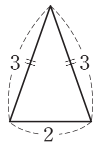
101 답 역: $x^2\le1$이면 $-1\le x\le1$이다. (참)
대우: $x^2>1$이면 $x<-1$ 또는 $x>1$이다. (참)

102 답 역: 5의 약수이면 10의 약수이다. (참)
대우: 5의 약수가 아니면 10의 약수가 아니다. (거짓)

대우: [반례] 2는 5의 약수가 아니지만 10의 약수이다.

103 답 역: 이등변삼각형이면 정삼각형이다. (거짓)
대우: 이등변삼각형이 아니면 정삼각형이 아니다. (참)

역: [반례] 오른쪽 그림과 같은 삼각형은 이등변삼각형이지만 정삼각형은 아니다.



104 답 역: $x^2+y^2=0$이면 $xy=0$이다. (참)
대우: $x^2+y^2\ne0$이면 $xy\ne0$이다. (거짓)

대우: [반례] $x=0$, $y=1$이면 $x^2+y^2\ne0$이지만 $xy=0$이다.

105 답 역: $x\ge0$이고 $y\ge0$이면 $x+y\ge0$이다. (참)
대우: $x<0$ 또는 $y<0$이면 $x+y<0$이다. (거짓)

대우: [반례] $x=-1$, $y=2$이면 $x<0$ 또는 $y<0$이지만 $x+y>0$이다.

106 답 역: $x^2>y^2$이면 $x>y$이다. (거짓)
대우: $x^2\le y^2$이면 $x\le y$이다. (거짓)

역: [반례] $x=-3$, $y=-2$이면 $x^2>y^2$이지만 $x<y$이다.
대우: [반례] $x=-2$, $y=-3$이면 $x^2\le y^2$이지만 $x>y$이다.

107 답 역: xy가 유리수이면 x, y는 모두 유리수이다. (거짓)
대우: xy가 유리수가 아니면 x 또는 y는 유리수가 아니다. (참)

역: [반례] $x=-\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$이면 xy는 유리수이지만 x, y는 모두 유리수가 아니다.

108 답 q

109 답 p

110 답 q

111 답 $\sim r$, $\sim r$, $\sim r$, $\sim r$

112 답 q

명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이므로 그 대우 $\sim p \longrightarrow q$도 참이다.
따라서 두 명제 $r \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow q$가 모두 참이므로 명제 $r \longrightarrow q$가 참이다.

113 답 r

두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim r \longrightarrow p$가 각각 참이므로 각각의 대우 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow r$도 참이다.
따라서 명제 $q \longrightarrow r$가 참이다.

다른 풀이

두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim r \longrightarrow p$가 모두 참이므로 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$가 참이다.
따라서 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$의 대우 $q \longrightarrow r$도 참이다.

114 답 ×

115 답 ○

명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

116 답 ○

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow p$도 참이다.

117 답 ○

두 명제 $\sim p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim r$가 참이다.

118 답 ○

명제 $\sim p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow p$도 참이다.

119 답 ×

실전유형

150~151쪽

120 답 ④

명제 $q \longrightarrow \sim p$의 역이 참이므로 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이다.
이때 명제 $\sim p \longrightarrow q$의 대우 $\sim q \longrightarrow p$도 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ④이다.

121 답 ②

① 역: $x>1$이면 $x>2$이다. (거짓)
[반례] $x=\frac{3}{2}$이면 $x>1$이지만 $x<2$이다.
② 역: $x=|x|$이면 $x \geq 0$이다. (참)
③ 역: $xz=yz$이면 $x=y$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=2$, $z=0$이면 $xz=yz$이지만 $x \neq y$이다.
④ 역: $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$이면 $x>y$이다. (거짓)
[반례] $x=-1$, $y=1$이면 $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$이지만 $x<y$이다.
⑤ 역: xy가 짝수이면 x, y는 짝수이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=2$이면 xy는 짝수이지만 x는 홀수, y는 짝수이다.
따라서 역이 참인 명제는 ②이다.

122 답 ⑤

① 대우: $\underbrace{3x-5>4}_{x>3}$이면 $x>1$이다. (참)
② 대우: $\underbrace{x^2-5x+6 \neq 0}_{(x-2)(x-3)\neq 0}$이면 $x \neq 2$이고 $x \neq 3$이다. (참)
③ 대우: $x=y$이면 $x^2=y^2$이다. (참)
④ 대우: $x=0$이고 $y=0$이면 $x^2+xy+y^2=0$이다. (참)
⑤ 대우: $x \leq y$이면 $x-y \neq |x-y|$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=1$이면 $x \leq y$이지만 $x-y=|x-y|$이다.
따라서 대우가 거짓인 명제는 ⑤이다.

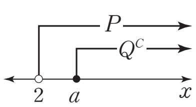
참고 주어진 명제가 거짓이면 그 대우도 거짓임을 이용해도 된다.

123 답 ㄴ

ㄱ. 역: $x>2$이고 $y>2$이면 $x+y>4$이다. (참)
대우: $x \leq 2$ 또는 $y \leq 2$이면 $x+y \leq 4$이다. (거짓)
[반례] $x=2$, $y=3$이면 $x \leq 2$ 또는 $y \leq 2$이지만 $x+y>4$이다.
ㄴ. 역: $x \neq 0$이고 $y \neq 0$이면 $xy \neq 0$이다. (참)
대우: $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다. (참)
ㄷ. 역: $\underbrace{|x|+|y|=0}_{x=0,\ y=0}$이면 $xy=0$이다. (참)
대우: $|x|+|y| \neq 0$이면 $xy \neq 0$이다. (거짓)
[반례] $x=0$, $y=1$이면 $|x|+|y| \neq 0$이지만 $xy=0$이다.
따라서 보기에서 역과 대우가 모두 참인 명제인 것은 ㄴ이다.

124 답 $a>2$

p: $3x-1>x+3$에서
$2x>4 \qquad \therefore x>2$
$\sim q$: $x \geq a$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|x>2\}$, $Q^C=\{x|x \geq a\}$
이때 명제 $p \longrightarrow \sim q$의 역 $\sim q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q^C \subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서
$a>2$



125 답 ②

주어진 명제가 참이므로 그 대우
'$x=3$이면 $x^2-ax+9=0$이다.'
도 참이다.
따라서 $9-3a+9=0$이므로
$a=6$

126 답 9

주어진 명제가 참이므로 그 대우
'$x \geq -1$이고 $y \geq k$이면 $x+y \geq 8$이다.'
도 참이다.
$x \geq -1$이고 $y \geq k$에서 $x+y \geq -1+k$이므로
$-1+k \geq 8 \qquad \therefore k \geq 9$
따라서 실수 k의 최솟값은 9이다.

127 답 4

명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되어야 한다.

$\sim p$: $|x|<a$에서 $-a<x<a$

$\sim q$: $x^2-x-20\le 0$에서

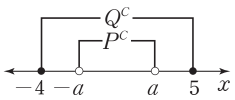
$(x+4)(x-5)\le 0 \quad \therefore -4\le x\le 5$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P^C=\{x\,|\,-a<x<a\}$, $Q^C=\{x\,|\,-4\le x\le 5\}$

이때 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면

$P^C\subset Q^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-4\le -a$, $a\le 5 \quad \therefore a\le 4$

따라서 명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되도록 하는 자연수 a는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

128 답 ①

명제 $q \longrightarrow r$가 참이므로 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim q$도 참이다.

이때 두 명제 $p \longrightarrow \sim r$, $\sim r \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이다.

따라서 항상 참인 것은 ①이다.

129 답 ㄴ, ㄷ

두 명제 $q \longrightarrow p$, $r \longrightarrow \sim p$가 각각 참이므로 각각의 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$, $p \longrightarrow \sim r$도 참이다.

이때 두 명제 $r \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이고 그 대우 $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

따라서 보기에서 항상 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

개념유형

153쪽

130 답 1, ⊂, 충분

131 답 충분조건

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P\subset Q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

132 답 충분조건

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 2, 3, 6\}$, $Q=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

133 답 필요조건

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{4, 8, 12, 16, \dots\}$, $Q=\{8, 16, 24, 32, \dots\}$

따라서 $Q\subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

134 답 필요조건

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,x\ge 5\}$, $Q=\{x\,|\,5<x<10\}$

따라서 $Q\subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

135 답 필요충분조건

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{-7, 7\}$, $Q=\{-7, 7\}$

따라서 $P=Q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

136 답 필요충분조건

p: $x^2-x-12<0$에서

$(x+3)(x-4)<0 \quad \therefore -3<x<4$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,-3<x<4\}$, $Q=\{x\,|\,-3<x<4\}$

따라서 $P=Q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

137 답 (1) 거짓 (2) 참 (3) 필요조건

(1) $p \longrightarrow q$: $xy=0$이면 $x=0$, $y=0$이다. (거짓)

[반례] $x=0$, $y=1$이면 $xy=0$이지만 $x=0$, $y\ne 0$이다.

(2) $q \longrightarrow p$: $x=0$, $y=0$이면 $xy=0$이다. (참)

(3) $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

138 답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 충분조건

(1) $p \longrightarrow q$: $\underbrace{(x-y)^2=0}_{x=y}$이면 $x^2=y^2$이다. (참)

(2) $q \longrightarrow p$: $x^2=y^2$이면 $(x-y)^2=0$이다. (거짓)

[반례] $x=-1$, $y=1$이면 $x^2=y^2$이지만 $(x-y)^2\ne 0$이다.

(3) $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

139 답 (1) 거짓 (2) 참 (3) 필요조건

(1) $p \longrightarrow q$: $x<0$ 또는 $y<0$이면 $xy<0$이다. (거짓)

[반례] $x=-1$, $y=-2$이면 $x<0$ 또는 $y<0$이지만 $xy>0$이다.

(2) $q \longrightarrow p$: $\underbrace{xy<0}_{x>0,\ y<0 \text{ 또는 } x<0,\ y>0}$이면 $x<0$ 또는 $y<0$이다. (참)

(3) $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

140 답 (1) 참 (2) 참 (3) 필요충분조건

(1) $p \longrightarrow q$: $\underbrace{|x|+|y|=0}_{x=0,\ y=0}$이면 $x^2+y^2=0$이다. (참)

(2) $q \longrightarrow p$: $\underbrace{x^2+y^2=0}_{x=0,\ y=0}$이면 $|x|+|y|=0$이다. (참)

(3) $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

실전유형

154~155쪽

141 답 ③

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 2, 4, 8, 16\}$, $Q=\{1, 2, 4, 8\}$

①, ②, ③ $Q\subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이고, q는 p이기 위한 충분조건이다.

④ $Q^C \not\subset P$이므로 p는 $\sim q$이기 위한 필요조건이 아니다.

⑤ $P^C \subset Q^C$이므로 $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

142 답 ③

• $a+b=0$이면 $a=0$, $b=0$이다. (거짓)

[반례] $a=-2$, $b=2$이면 $a+b=0$이지만 $a\neq 0$, $b\neq 0$이다.

$a=0$, $b=0$이면 $a+b=0$이다. (참)

따라서 $a+b=0$은 $a=0$, $b=0$이기 위한 $\boxed{\text{(가) 필요}}$조건이다.

• $\underbrace{a^2+b^2=0}_{a=0,\ b=0}$이면 $ab=0$이다. (참)

$ab=0$이면 $a^2+b^2=0$이다. (거짓)

[반례] $a=1$, $b=0$이면 $ab=0$이지만 $a^2+b^2\neq 0$이다.

따라서 $a^2+b^2=0$은 $ab=0$이기 위한 $\boxed{\text{(나) 충분}}$조건이다.

143 답 ⑤

① $p \longrightarrow q$: 참

$q \longrightarrow p$: 거짓

[반례] $x=-4$이면 $x^2>9$이지만 $x<3$이다.

따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

② $p \longrightarrow q$: 참

$q \longrightarrow p$: 거짓

[반례] $x=-1$이면 $x^2-x-2=0$이지만 $x\neq 2$이다.

따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

③ $p \longrightarrow q$: 참

$x^2-1=0$이면 $x=\pm 1$이므로 $|x|=1$이다.

$q \longrightarrow p$: 참

$|x|=1$이면 $x^2=1$이므로 $x^2-1=0$이다.

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

④ $p \longrightarrow q$: 참

$q \longrightarrow p$: 거짓

[반례] $x=6$이면 x는 3의 배수이지만 12의 배수는 아니다.

따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

⑤ $p \longrightarrow q$: 거짓

[반례] $x=-1$, $y=-2$이면 $|x+y|=|x|+|y|$이지만 $x<0$, $y<0$이다.

$q \longrightarrow p$: 참

따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 ⑤이다.

144 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $p \longrightarrow q$: 참

$q \longrightarrow p$: 거짓

[반례] $x=-\frac{5}{2}$이면 $x>-3$이지만 $x<-2$이다.

따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow p$가 모두 참이므로 $p \Longleftrightarrow q$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. p: $x-2=1$에서 $x=3$

q: $x^2-6x+9=0$에서 $(x-3)^2=0$ $\therefore x=3$

즉, $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow p$가 모두 참이므로 $p \Longleftrightarrow q$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄹ. p: $x^3=x$에서 $x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

q: $x^2=x$에서 $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

$p \longrightarrow q$: 거짓

[반례] $x=-1$이면 $x^3=x$이지만 $x^2\neq x$이다.

$q \longrightarrow p$: 참

따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 보기에서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

145 답 ④

p는 r이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow r$ $\therefore \sim r \Longrightarrow \sim p$

$\sim r$는 q이기 위한 필요조건이므로

$q \Longrightarrow \sim r$ $\therefore r \Longrightarrow \sim q$

이때 $p \Longrightarrow r$, $r \Longrightarrow \sim q$이므로

$p \Longrightarrow \sim q$ $\therefore q \Longrightarrow \sim p$

따라서 항상 참이라고 할 수 없는 명제는 ④이다.

146 답 ㄱ, ㄴ

p는 q이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow q$ $\therefore \sim q \Longrightarrow \sim p$

$\sim q$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이므로

$\sim r \Longrightarrow \sim q$ $\therefore q \Longrightarrow r$

이때 $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow r$이므로 $p \Longrightarrow r$

ㄷ. r는 p이기 위한 필요조건이다.

ㄹ. $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

147 답 ③

q는 p이기 위한 충분조건이므로 $Q\subset P$

① $P^C \subset Q^C$

② $P\cap Q=Q$

④ $P\cap Q^C=P-Q\neq P$

⑤ $P^C\cup Q\neq U$

따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

148 답 ②

$\sim p$는 $\sim q$이기 위한 필요조건이므로

$Q^C \subset P^C \qquad \therefore P \subset Q$

q는 r이기 위한 충분조건이므로 $Q \subset R$

$\therefore P \subset Q \subset R$

③ $R^C \subset P^C$

④ $Q \cap R = Q$

⑤ $P \cup Q = Q$이므로 $(P \cup Q) \subset R$

따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

149 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $P \not\subset Q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이 아니다.

ㄴ. $P \subset R$에서 $R^C \subset P^C$이므로 $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $Q \cap R = \varnothing$에서 $R \subset Q^C$이므로 $\sim q$는 r이기 위한 필요조건이다.

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

150 답 2

p: $x+a=0$에서 $x=-a$

q: $x^2+2x-3=0$에서

$(x+3)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=1$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{-a\}$, $Q=\{-3, 1\}$

이때 p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $p \Longrightarrow q$, 즉 $P \subset Q$이어야 하므로 $-a \in Q$에서

$-a=-3$ 또는 $-a=1 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-1+3=2$

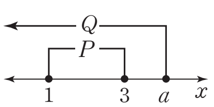
151 답 3

p: $x^2-4x+3 \le 0$에서 $(x-1)(x-3) \le 0 \qquad \therefore 1 \le x \le 3$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid 1 \le x \le 3\}$, $Q=\{x \mid x \le a\}$

이때 p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $p \Longrightarrow q$, 즉 $P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a \ge 3$

따라서 실수 a의 최솟값은 3이다.

152 답 ④

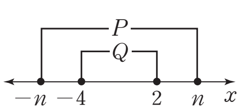
p: $|x| \le n$에서 $-n \le x \le n$

q: $x^2+2x-8 \le 0$에서 $(x+4)(x-2) \le 0 \qquad \therefore -4 \le x \le 2$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid -n \le x \le n\}$, $Q=\{x \mid -4 \le x \le 2\}$

이때 p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $q \Longrightarrow p$, 즉 $Q \subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-n \le -4$, $2 \le n \qquad \therefore n \ge 4$

따라서 자연수 n의 최솟값은 4이다.

개념유형

156쪽

153 답 **홀수, 홀수, 1, 홀수**

154 답 **풀이 참조**

주어진 명제의 대우 '자연수 n에 대하여 n이 짝수이면 n^2도 짝수이다.'가 참임을 보이면 된다.

n이 짝수이면 $n=2k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$n^2=(2k)^2=4k^2=2 \times 2k^2$

즉, n^2은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

155 답 **유리수, 3, 3, 9, 3, 3, 3, 서로소**

156 답 **풀이 참조**

$\sqrt{2}$가 유리수라 가정하면 $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)으로 나타낼 수 있다.

양변을 제곱하면

$2=\frac{n^2}{m^2} \qquad \therefore n^2=2m^2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 n^2이 짝수이므로 n도 짝수이다.

$n=2k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로 ㉠에 대입하면

$4k^2=2m^2 \qquad \therefore m^2=2k^2$

이때 m^2이 짝수이므로 m도 짝수이다.

즉, m, n이 모두 짝수이므로 m, n이 서로소라는 가정에 모순이다.

따라서 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

실전유형

157쪽

157 답 (가) **홀수** (나) **짝수** (다) $\boldsymbol{k-1}$

158 답 (가) $\boldsymbol{3k-2}$ (나) $\boldsymbol{3k^2-4k+1}$

159 답 ④

160 답 (가) **유리수** (나) **무리수** (다) **0**

개념유형

158~159쪽

161 답 ×

$2x+1>0$에서 $x>-\frac{1}{2}$

따라서 $x \le -\frac{1}{2}$일 때는 주어진 부등식이 성립하지 않으므로 절대부등식이 아니다.

162 답 ○

163 답 ○

164 답 ×

$|x+5|>1$에서

$x+5<-1$ 또는 $x+5>1$

$\therefore$ $x<-6$ 또는 $x>-4$

따라서 $-6\le x\le -4$일 때는 주어진 부등식이 성립하지 않으므로 절대부등식이 아니다.

165 답 ○

166 답 ×

$x^2+1>2x$에서 $x^2-2x+1>0$

$\therefore$ $(x-1)^2>0$

따라서 $x=1$일 때는 주어진 부등식이 성립하지 않으므로 절대부등식이 아니다.

167 답 $2ab$, $a-b$, $\ge$, b

168 답 ab, $\ge$, $\ge$

169 답 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\ge$, $=$, $=$

170 답 ab, $a-b$, $\ge$, $=$

171 답 $2abxy$, $ay-bx$, $\ge$, bx

172 답 $>$, 2, 2, 1, 2

등호는 $x=\frac{1}{x}$일 때 성립하므로

$x^2=1$ $\quad\therefore$ $x=\pm1$

그런데 $x>0$이므로 $x=1$

173 답 8

$2x>0$, $\frac{8}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+\frac{8}{x}\ge 2\sqrt{2x\times\frac{8}{x}}=8$ $\left(\text{단, 등호는 } 2x=\frac{8}{x}\text{, 즉 } x=2\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $2x+\frac{8}{x}$의 최솟값은 8이다.

174 답 2

$\frac{x}{y}>0$, $\frac{y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2\sqrt{\frac{x}{y}\times\frac{y}{x}}=2$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{y}=\frac{y}{x}\text{, 즉 } x=y\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$의 최솟값은 2이다.

실전유형

175 답 ⑤

ㄱ. $x>\frac{1}{3}$일 때는 주어진 부등식이 성립하지 않으므로 절대부등식이 아니다.

ㄴ. $2-|x-4|\le 2$에서 $|x-4|\ge 0$
따라서 주어진 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 절대부등식이다.

ㄷ. $x^2+x+1>0$에서 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$
따라서 주어진 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 절대부등식이다.

ㄹ. $x^2+25\ge 10x$에서 $x^2-10x+25\ge 0$ $\quad\therefore$ $(x-5)^2\ge 0$
따라서 주어진 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 절대부등식이다.

따라서 보기에서 절대부등식인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

176 답 (가) $\frac{3}{4}b^2$ (나) ab (다) $\frac{1}{2}b$ (라) 0

177 답 ③

(i) $|a|\ge|b|$일 때

$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=(a-b)^2-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)$

$=a^2-2ab+b^2-(a^2-2|ab|+b^2)$

$=2(\boxed{\text{(가) } |ab|-ab})\ge 0$ ($\because$ $|ab|\ge ab$)

$\therefore$ $|a-b|^2\ge(|a|-|b|)^2$

그런데 $|a-b|\ge 0$, $|a|-|b|\ge 0$이므로

$|a-b|\ge|a|-|b|$

(ii) $|a|<|b|$일 때

$|a-b|>0$, $|a|-|b|<0$이므로

$|a-b|>|a|-|b|$

(i), (ii)에서 $|a-b|\ge|a|-|b|$

이때 등호는 $|a|\ge|b|$이고 $|ab|=ab$, 즉 $\boxed{\text{(나) } ab\ge 0}$일 때 성립한다.

178 답 풀이 참조

$$\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}(a+b)-2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$$

$$=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}\ge 0$$

$\therefore$ $\sqrt{ab}\ge\frac{2ab}{a+b}$

이때 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.

179 답 풀이 참조

$$(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-b-(a-2\sqrt{ab}+b)$$

$$=2\sqrt{ab}-2b$$

$$=2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0\ (\because\ \sqrt{a}>\sqrt{b}>0)$$

$\therefore$ $(\sqrt{a-b})^2>(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

그런데 $\sqrt{a-b}>0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$이므로

$\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$

180 답 ①

$x>0$, $\frac{9}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{9}{x}\ge 2\sqrt{x\times\frac{9}{x}}=6$ $\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{9}{x}\text{, 즉 } x=3\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 6이다.

181 답 ③

$3a>0$, $4b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3a+4b\ge 2\sqrt{3a\times 4b}=4\sqrt{3ab}$ (단, 등호는 $3a=4b$일 때 성립)

이때 $ab=12$이므로

$3a+4b\ge 4\sqrt{3\times 12}=24$

따라서 구하는 최솟값은 24이다.

182 답 ⑤

$x>0$, $4y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+4y\ge 2\sqrt{x\times 4y}=4\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=4y$일 때 성립)

이때 $x+4y=20$이므로

$20\ge 4\sqrt{xy}$ $\quad\therefore \sqrt{xy}\le 5$

양변을 제곱하면

$xy\le 25$

따라서 구하는 최댓값은 25이다.

183 답 ②

$(x+8y)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)=10+\frac{x}{y}+\frac{16y}{x}$

이때 $\frac{x}{y}>0$, $\frac{16y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$10+\frac{x}{y}+\frac{16y}{x}\ge 10+2\sqrt{\frac{x}{y}\times\frac{16y}{x}}$$
$$=10+8=18$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{y}=\frac{16y}{x}\text{, 즉 } x=4y\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 18이다.

참고 $\frac{x}{y}=\frac{16y}{x}$에서 $x^2=16y^2$ $\quad\therefore x=\pm 4y$

그런데 $x>0$, $y>0$이므로 $x=4y$

184 답 15

$9a+\frac{1}{a-1}=9(a-1)+\frac{1}{a-1}+9$

이때 $9(a-1)>0$, $\frac{1}{a-1}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9(a-1)+\frac{1}{a-1}+9\ge 2\sqrt{9(a-1)\times\frac{1}{a-1}}+9$$
$$=6+9=15$$

$\left(\text{단, 등호는 } 9(a-1)=\frac{1}{a-1}\text{, 즉 } a=\frac{4}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 15이다.

참고 $9(a-1)=\frac{1}{a-1}$에서 $(a-1)^2=\frac{1}{9}$

$a-1=\pm\frac{1}{3}$ $\quad\therefore a=\frac{2}{3}$ 또는 $a=\frac{4}{3}$

그런데 $a>1$이므로 $a=\frac{4}{3}$

실전유형으로 중단원 점검

162~163쪽

1 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. 거짓인 명제이다.

ㄴ. x의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 분명하게 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

ㄷ. 참인 명제이다.

ㄹ. '크다'는 참, 거짓을 분명하게 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

따라서 보기에서 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2 답 {4, 10}

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 조건 'p 그리고 $\sim q$'의 진리집합은

$P\cap Q^C$

$U=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, $Q=\{1, 2, 20\}$이므로

$Q^C=\{4, 5, 10\}$

$P=\{2, 4, 10, 20\}$이므로

$P\cap Q^C=\{4, 10\}$

참고 $P\cap Q^C=P-Q$임을 이용하여 구할 수도 있다.

3 답 ㄱ, ㄹ

ㄱ. $3x-2>7$이면 $x>3$이므로 $x>2$이다.
즉, 주어진 명제는 참이다.

ㄴ. [반례] $x=1$, $y=-1$이면 $|x|=|y|$이지만 $x\ne y$이다.

ㄷ. [반례] $x=-3$, $y=-2$, $z=-1$이면 $x<y<z$이지만 $xz>yz$이다.

ㄹ. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로 $\angle B=\angle C$이다.
즉, 주어진 명제는 참이다.

따라서 보기에서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

4 답 ④

명제 $\sim q\longrightarrow\sim p$가 참이므로

$Q^C\subset P^C$ $\quad\therefore P\subset Q$

② $P\cap Q=P$

③ $P\cup Q=Q$

⑤ $P^C\cup Q=U$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

5 답 8

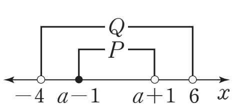
q: $|x-1|<5$에서

$-5<x-1<5$ $\quad\therefore -4<x<6$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|a-1\le x<a+1\}$, $Q=\{x|-4<x<6\}$

이때 명제 $p\longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-4<a-1$, $a+1\le 6$

$\therefore -3<a\le 5$

따라서 정수 a는 $-2, -1, 0, \dots, 5$의 8개이다.

6 답 ③

① [반례] $x=1$이면 $|1|=1$이므로 $|x|>x$를 만족시키지 않는다.

② $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 $x^2-x+1=0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.

③ 1은 16의 양의 약수이면서 홀수이므로 주어진 명제는 참이다.

④ [반례] 5는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.

⑤ [반례] $x=9$이면 x는 홀수이지만 $\sqrt{x}=\sqrt{9}=3$은 무리수가 아니다.

따라서 참인 명제는 ③이다.

7 답 ④

① 역: $x=-\sqrt{3}$이면 $x^2=3$이다. (참)

② 역: $x^2-3x+2=0$이면 $0<x<3$이다. (참)
$(x-1)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=2$

③ 역: x가 4의 배수이면 x는 짝수이다. (참)

④ 역: $x^2+y^2>0$이면 $x\neq0$, $y\neq0$이다. (거짓)
[반례] $x=0$, $y=1$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $x=0$이다.

⑤ 역: x, y가 정수이면 $x+y$는 정수이다. (참)

따라서 역이 거짓인 명제는 ④이다.

8 답 4

주어진 명제가 참이므로 그 대우
'$x<k$이고 $y<2$이면 $x+y<6$이다.'
도 참이다. …… ⅰ

$x<k$이고 $y<2$에서 $x+y<k+2$이므로
$k+2\le6$ $\quad\therefore k\le4$ …… ⅱ

따라서 실수 k의 최댓값은 4이다. …… ⅲ

채점 기준	
ⅰ 주어진 명제의 대우를 구하고, 참, 거짓 판별하기	40 %
ⅱ k의 값의 범위 구하기	40 %
ⅲ k의 최댓값 구하기	20 %

9 답 ④

두 명제 $q \longrightarrow \sim p$, $r \longrightarrow p$가 각각 참이므로 각각의 대우
$p \longrightarrow \sim q$, $\sim p \longrightarrow \sim r$도 참이다.
이때 두 명제 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제
$q \longrightarrow \sim r$가 참이고 그 대우 $r \longrightarrow \sim q$도 참이다.
따라서 항상 참이라고 할 수 없는 명제는 ④이다.

10 답 ⑤

① $p \longrightarrow q$: 참
$x^2=0$이면 $x=0$이므로 $|x|=0$이다.
$q \longrightarrow p$: 참
$|x|=0$이면 $x=0$이므로 $x^2=0$이다.
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

② $p \longrightarrow q$: 거짓
[반례] $x=-1$, $y=-1$이면 $xy>0$이지만 $x<0$, $y<0$이다.
$q \longrightarrow p$: 참
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

③ $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow p$가 모두 참이므로 $p \Longleftrightarrow q$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

④ $p \longrightarrow q$: 거짓
[반례] $x=-\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$이면 $x+y$는 유리수이지만 x, y는 유리수가 아니다.
$q \longrightarrow p$: 참
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

⑤ $p \longrightarrow q$: 참
$q \longrightarrow p$: 거짓
[반례] $x=1$, $y=1$, $z=2$이면
$(x-y)(y-z)(z-x)=0$이지만 $x\neq z$, $y\neq z$이다.
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은 ⑤이다.

11 답 ④

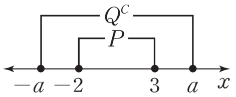
p는 $\sim q$이기 위한 필요조건이므로
$\sim q \Longrightarrow p$ $\quad\therefore \sim p \Longrightarrow q$
q는 r이기 위한 충분조건이므로
$q \Longrightarrow r$ $\quad\therefore \sim r \Longrightarrow \sim q$
이때 $\sim p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow r$이므로
$\sim p \Longrightarrow r$ $\quad\therefore \sim r \Longrightarrow p$
따라서 항상 참인 명제는 ④이다.

12 답 ㄱ, ㄷ

$\sim p$는 q이기 위한 필요조건이므로
$Q\subset P^C$ $\quad\therefore P\cap Q=\varnothing$
ㄱ. $Q\subset P^C$이므로 $P\subset Q^C$
ㄹ. $Q^C-P^C=Q^C\cap P=P-Q=P$
따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

13 답 3

p: $x^2-x-6\le0$에서
$(x+2)(x-3)\le0$ $\quad\therefore -2\le x\le3$
$\sim q$: $|x|\le a$에서 $-a\le x\le a$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|-2\le x\le3\}$, $Q^C=\{x|-a\le x\le a\}$
이때 p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이 되려면
$p \Longrightarrow \sim q$, 즉 $P\subset Q^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-a\le-2$, $3\le a$
$\therefore a\ge3$
따라서 양수 a의 최솟값은 3이다.

14 답 풀이 참조

주어진 명제의 대우 '자연수 a, b, c에 대하여 a, b, c가 모두 홀수이면 $a^2+b^2\neq c^2$이다.'가 참임을 보이면 된다. …… ⅰ

a, b, c가 모두 홀수이면

$a=2l-1$, $b=2m-1$, $c=2n-1$ (l, m, n은 자연수)

로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{aligned} a^2+b^2&=(2l-1)^2+(2m-1)^2 \\ &=2(2l^2-2l+2m^2-2m+1) \end{aligned}$$

$c^2=(2n-1)^2=2(2n^2-2n)+1$

이때 $2l^2-2l+2m^2-2m+1=2l(l-1)+2m(m-1)+1$은 자연수이므로 a^2+b^2은 짝수이다.

또 $2n^2-2n=2n(n-1)$은 0 또는 자연수이므로 c^2은 홀수이다.

$\therefore a^2+b^2\neq c^2$ …… ⅱ

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. …… ⅲ

채점 기준

ⅰ 주어진 명제의 대우 구하기	30 %
ⅱ 주어진 명제의 대우가 참임을 증명하기	60 %
ⅲ 주어진 명제가 참임을 알기	10 %

15 답 풀이 참조

$a^2+4b^2-2ab=(a-b)^2+3b^2$ …… ⅰ

그런데 $(a-b)^2\geq 0$, $3b^2\geq 0$이므로

$a^2+4b^2-2ab\geq 0$ $\therefore a^2+4b^2\geq 2ab$ …… ⅱ

이때 등호는 $a-b=0$, $3b^2=0$, 즉 $a=0$, $b=0$일 때 성립한다. …… ⅲ

채점 기준

ⅰ (좌변)−(우변)을 완전제곱식으로 변형하기	30 %
ⅱ $a^2+4b^2\geq 2ab$가 성립함을 증명하기	40 %
ⅲ 등호가 성립하는 경우 구하기	30 %

16 답 ⑤

$2x>0$, $3y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+3y\geq 2\sqrt{2x\times 3y}=2\sqrt{6xy}$ (단, 등호는 $2x=3y$일 때 성립)

이때 $2x+3y=24$이므로

$24\geq 2\sqrt{6xy}$ $\therefore \sqrt{6xy}\leq 12$

양변을 제곱하면

$6xy\leq 144$ $\therefore xy\leq 24$

따라서 구하는 최댓값은 24이다.

08 함수

개념유형

167~169쪽

001 답 ×

집합 X의 원소 4에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

002 답 ○

003 답 ×

집합 X의 원소 3에 대응하는 집합 Y의 원소가 b, c의 2개이므로 함수가 아니다.

004 답 ○

005 답 ○, 3, 2, 1

006 답 ×

$x=-1$일 때, $y=-4$

$x=0$일 때, $y=-1$

$x=1$일 때, $y=2$

따라서 집합 X의 원소 -1, 0에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

007 답 ○

$x=-1$일 때, $y=1$

$x=0$일 때, $y=0$

$x=1$일 때, $y=3$

따라서 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

008 답 ○

$x=-1$일 때, $y=2$

$x=0$일 때, $y=1$

$x=1$일 때, $y=2$

따라서 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

009 답 ×

$x=-1$일 때, $y=1$

$x=0$일 때, $y=0$

$x=1$일 때, $y=-1$

따라서 집합 X의 원소 1에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

010 답 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{a, b, c\}$, 치역: $\{a, c\}$

011 답 정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역: $\{3, 4, 5, 6\}$,
치역: $\{3, 4, 5, 6\}$

012 답 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{2, 3, 4\}$, 치역: $\{2\}$

013 답 정의역: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 공역: $\{a, b, c, d\}$,
치역: $\{a, b, c\}$

014 답 $\{-5, -3, -1, 1\}$

$x=-1$일 때, $y=-5$
$x=0$일 때, $y=-3$
$x=1$일 때, $y=-1$
$x=2$일 때, $y=1$
따라서 함수의 치역은 $\{-5, -3, -1, 1\}$

015 답 $\{-7, -3, 1, 5\}$

$x=-1$일 때, $y=5$
$x=0$일 때, $y=1$
$x=1$일 때, $y=-3$
$x=2$일 때, $y=-7$
따라서 함수의 치역은 $\{-7, -3, 1, 5\}$

016 답 $\{-2, 0, 4, 10\}$

$x=-1$일 때, $y=-2$
$x=0$일 때, $y=0$
$x=1$일 때, $y=4$
$x=2$일 때, $y=10$
따라서 함수의 치역은 $\{-2, 0, 4, 10\}$

017 답 $\{0, 1, 2\}$

$x=-1$일 때, $y=2$
$x=0$일 때, $y=1$
$x=1$일 때, $y=0$
$x=2$일 때, $y=1$
따라서 함수의 치역은 $\{0, 1, 2\}$

018 답 5

$f(2)=2+3=5$

019 답 3

$f(0)=0+3=3$

020 답 -6

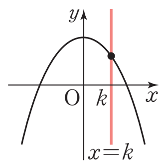
$f(-3)=2\times(-3)=-6$

021 답 -1

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

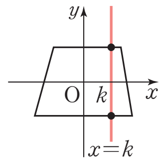
022 답 ○

실수 k에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=k$와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.



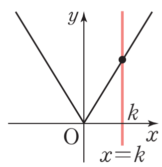
023 답 ×

실수 k에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=k$와 두 점에서 만나거나 만나지 않는 경우가 있으므로 함수의 그래프가 아니다.



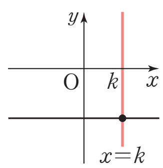
024 답 ○

실수 k에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=k$와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.



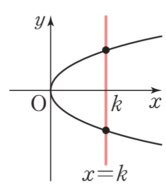
025 답 ○

실수 k에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=k$와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.



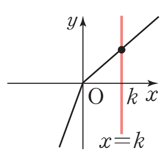
026 답 ×

실수 k에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=k$와 두 점에서 만나거나 만나지 않는 경우가 있으므로 함수의 그래프가 아니다.



027 답 ○

실수 k에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=k$와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.



실전유형

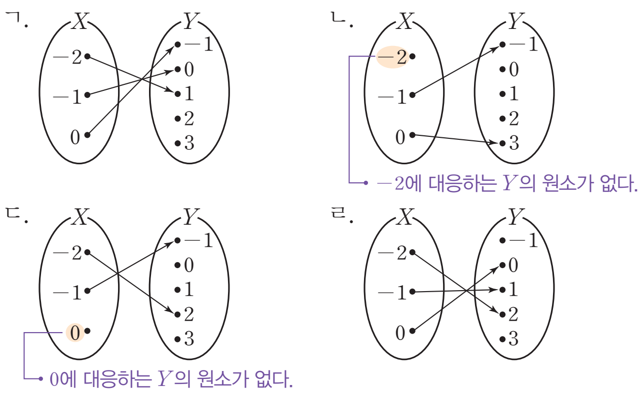
169~170쪽

028 답 ④

④ 집합 X의 원소 c에 대응하는 집합 Y의 원소가 3, 4의 2개이므로 함수가 아니다.

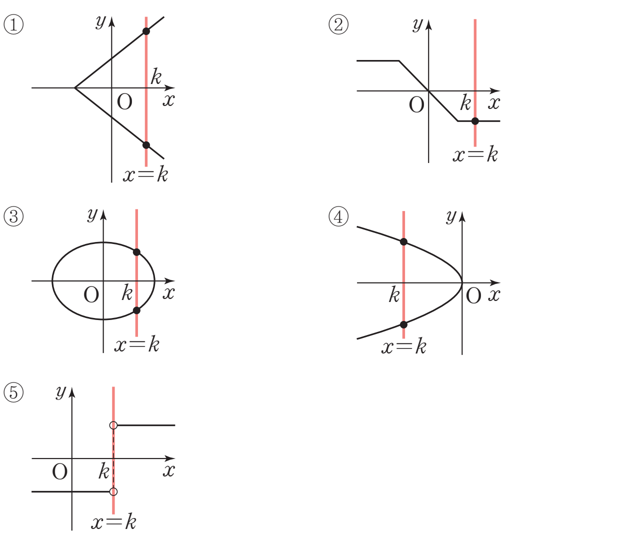
029 답 ㄱ, ㄹ

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 보기에서 함수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

030 답 ②



함수의 그래프는 정의역의 각 원소 k에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=k$와 오직 한 점에서 만나므로 ②이다.

031 답 ②

$f(-1)=-(-1)=1$

$f(3)=2\times3-3=3$

$\therefore\ f(-1)+f(3)=4$

032 답 10

$f(6)=6+2=8$

$f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2-5=3-5=-2$

$\therefore\ f(6)-f(\sqrt{3})=10$

033 답 ③

3을 3으로 나눈 나머지는 0이므로 $f(3)=0$

4를 3으로 나눈 나머지는 1이므로 $f(4)=1$

5를 3으로 나눈 나머지는 2이므로 $f(5)=2$

$\therefore\ f(3)+f(4)+f(5)=3$

034 답 6

$X=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$이므로

$f(-2)=3,\ f(-1)=2,\ f(0)=1,\ f(1)=0,\ f(2)=1,\ f(3)=2$

따라서 함수 f의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$이므로 치역의 모든 원소의 합은

$0+1+2+3=6$

035 답 ①

$f(x)=-2x+5$라 하면 $f(x)$는 일차항의 계수가 음수인 일차함수이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

따라서 $f(1)=b,\ f(5)=a$이므로

$a=-10+5=-5,\ b=-2+5=3$

$\therefore\ ab=-15$

036 답 ④

(i) $a>0$일 때

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 서로 같으므로

$f(-1)=-2,\ f(2)=7$

$\therefore\ -a+b=-2,\ 2a+b=7$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=1$

(ii) $a<0$일 때

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 서로 같으므로

$f(-1)=7,\ f(2)=-2$

$\therefore\ -a+b=7,\ 2a+b=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=4$

그런데 $a<b$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=3,\ b=1$

$\therefore\ a+b=4$

개념유형 171~172쪽

037 답 서로 같은 함수가 아니다.

$f(1)=0,\ g(1)=-3$이므로 $f(1)\neq g(1)$

$f(2)=-1,\ g(2)=-1$이므로 $f(2)=g(2)$

따라서 두 함수 $f,\ g$는 서로 같은 함수가 아니다.

038 답 서로 같은 함수이다.

$f(1)=1,\ g(1)=1$이므로 $f(1)=g(1)$

$f(2)=4,\ g(2)=4$이므로 $f(2)=g(2)$

따라서 두 함수 $f,\ g$는 서로 같은 함수이다.

039 답 서로 같은 함수이다.

$f(1)=2,\ g(1)=2$이므로 $f(1)=g(1)$

$f(2)=1,\ g(2)=1$이므로 $f(2)=g(2)$

따라서 두 함수 $f,\ g$는 서로 같은 함수이다.

040 답 **서로 같은 함수가 아니다.**

$f(1)=1$, $g(1)=1$이므로 $f(1)=g(1)$

$f(2)=2$, $g(2)=\frac{1}{2}$이므로 $f(2)\neq g(2)$

따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수가 아니다.

041 답 **서로 같은 함수가 아니다.**

$f(1)=1$, $g(1)=1$이므로 $f(1)=g(1)$

$f(2)=2$, $g(2)=8$이므로 $f(2)\neq g(2)$

$f(3)=3$, $g(3)=27$이므로 $f(3)\neq g(3)$

따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수가 아니다.

042 답 **서로 같은 함수이다.**

$f(-1)=-1$, $g(-1)=-1$이므로 $f(-1)=g(-1)$

$f(0)=0$, $g(0)=0$이므로 $f(0)=g(0)$

$f(1)=1$, $g(1)=1$이므로 $f(1)=g(1)$

따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수이다.

043 답 **서로 같은 함수이다.**

$f(-2)=2$, $g(-2)=2$이므로 $f(-2)=g(-2)$

$f(0)=0$, $g(0)=0$이므로 $f(0)=g(0)$

$f(2)=2$, $g(2)=2$이므로 $f(2)=g(2)$

따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수이다.

044 답 **서로 같은 함수가 아니다.**

$f(-1)=1$, $g(-1)=\frac{1}{2}$이므로 $f(-1)\neq g(-1)$

$f(0)=0$, $g(0)=0$이므로 $f(0)=g(0)$

$f(1)=1$, $g(1)=\frac{1}{2}$이므로 $f(1)\neq g(1)$

따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수가 아니다.

045 답 **1, a, 2, 7, -6**

046 답 **$a=3$, $b=-1$**

$f(0)=g(0)$이므로 $a=3$

$f(1)=g(1)$이므로

$-1+a=b+3$, $-1+3=b+3$

$\therefore b=-1$

047 답 **$a=2$, $b=3$**

$f(-1)=g(-1)$이므로

$-a+3=-2+b$ $\quad\therefore a+b=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(1)=g(1)$이므로

$a+3=2+b$ $\quad\therefore a-b=-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=3$

048 답 **$a=-2$, $b=4$**

$f(-2)=g(-2)$이므로

$4a-2b=-16$ $\quad\therefore 2a-b=-8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(1)=g(1)$이므로 $a+b=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=4$

실전유형 172쪽

049 답 ⑤

ㄱ. $f(0)=0$, $g(0)=0$이므로 $f(0)=g(0)$

$f(2)=2$, $g(2)=-2$이므로 $f(2)\neq g(2)$

$\therefore f\neq g$

ㄴ. $f(0)=1$, $g(0)=1$이므로 $f(0)=g(0)$

$f(2)=5$, $g(2)=5$이므로 $f(2)=g(2)$

$\therefore f=g$

ㄷ. $f(0)=3$, $g(0)=3$이므로 $f(0)=g(0)$

$f(2)=3$, $g(2)=3$이므로 $f(2)=g(2)$

$\therefore f=g$

따라서 보기에서 $f=g$인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

050 답 4

$f(-2)=g(-2)$이므로 $-2a+b=7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(3)=g(3)$이므로 $3a+b=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=5$

$\therefore a+b=4$

051 답 ⑤

$f(a)=g(a)$이므로

$a^2+a-3=4a+1$, $a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$ $\quad\therefore a=-1$ 또는 $a=4$

그런데 $a\neq -1$이므로 $a=4$

개념유형 174~175쪽

052 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㅂ

053 답 ㄴ, ㄷ, ㅁ

054 답 ㄷ

055 답 ㄹ

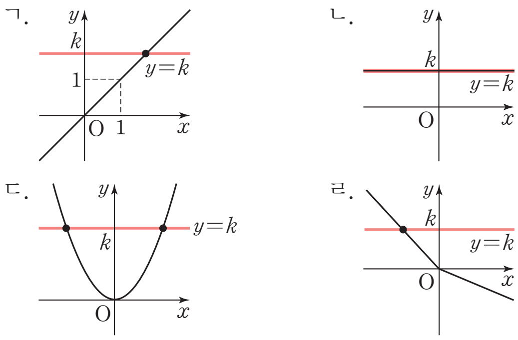
056 답 ㄴ, ㄷ

057 답 ㄴ, ㄷ

058 답 ㄷ

059 답 ㄱ

060 답 ㄱ, ㄹ



일대일함수의 그래프는 치역의 각 원소 k에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나므로 ㄱ, ㄹ이다.

061 답 ㄱ, ㄹ

일대일대응의 그래프는 일대일함수이면서 치역과 공역이 같은 함수, 즉 치역이 실수 전체의 집합인 함수의 그래프이므로 ㄱ, ㄹ이다.

062 답 ㄱ

항등함수의 그래프는 함수 $y=x$의 그래프이므로 ㄱ이다.

063 답 ㄴ

상수함수의 그래프는 x축에 평행한 직선이므로 ㄴ이다.

064 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅅ

ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅅ. $x_1 \neq x_2$일 때 $f(x_1) \neq f(x_2)$이므로 일대일함수이다.

참고 ㅇ. $-2 \neq 1$이지만 $f(-2)=f(1)=3$이므로 일대일함수가 아니다.

065 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅅ

ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅅ. 일대일함수이고 치역과 공역이 실수 전체의 집합으로 같으므로 일대일대응이다.

066 답 ㄱ

항등함수는 함수 $f(x)=x$이므로 ㄱ이다.

067 답 ㅁ

상수함수는 $f(x)=c$ (c는 상수) 꼴이므로 ㅁ이다.

068 답 64

집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소가 각각 a, b, c, d의 4가지이므로 구하는 함수의 개수는

$4^3=64$

069 답 24

집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응하는 집합 Y의 원소를 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 a, b, c, d 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 구하는 함수의 개수는

${}_4P_3=4\times3\times2=24$

070 답 4

집합 X의 모든 원소에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 a, b, c, d의 4가지이므로 구하는 함수의 개수는 4이다.

071 답 27

집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응할 수 있는 집합 X의 원소가 각각 1, 2, 3의 3가지이므로 구하는 함수의 개수는

$3^3=27$

072 답 6

집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응하는 집합 X의 원소를 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 구하는 함수의 개수는

$3!=3\times2\times1=6$

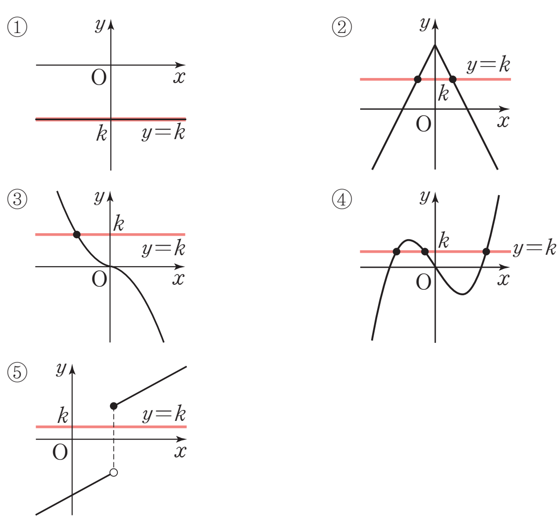
073 답 1

집합 X의 원소 1, 2, 3이 각각 집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응하는 1가지이므로 구하는 함수의 개수는 1이다.

실전유형

175~177쪽

074 답 ③



일대일대응의 그래프는 치역의 각 원소 k에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나고, 치역과 공역이 같은 함수, 즉 치역이 실수 전체의 집합인 함수의 그래프이므로 ③이다.

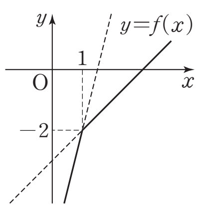
075 답 ①

ㄱ. $0 \neq 1$이지만 $f(0)=f(1)=6$이므로 일대일함수가 아니다.
ㄷ. $-1 \neq 1$이지만 $f(-1)=f(1)=-2$이므로 일대일함수가 아니다.
ㄹ. $-2 \neq 0$이지만 $f(-2)=f(0)=1$이므로 일대일함수가 아니다.
따라서 보기의 함수에서 일대일함수인 것은 ㄴ이다.

076 답 ④

일대일대응은 ㄴ, ㄷ, ㄹ의 3개이므로 $a=3$
항등함수는 ㄴ, ㄷ의 2개이므로 $b=2$
상수함수는 ㄱ의 1개이므로 $c=1$
$\therefore a+b+c=6$
참고 ㄷ. $x \geq 0$에서 $|x|=x$

077 답 ①



$f(1)=-2$이므로 함수 f가 일대일대응이면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.
즉, 직선 $y=4x+a$가 점 $(1, -2)$를 지나야 하므로
$-2=4+a \quad \therefore a=-6$

078 답 14

$a>0$이므로 함수 f가 일대일대응이면
$f(-3)=1, f(1)=9$
$\therefore -3a+b=1, a+b=9$
두 식을 연립하여 풀면
$a=2, b=7$
$\therefore ab=14$

079 답 ④

함수 f가 일대일대응이려면 x의 값이 증가할 때, $f(x)$의 값은 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다.
즉, $x<0$일 때와 $x \geq 0$일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로
$(a+3)(2-a)>0, (a+3)(a-2)<0$
$\therefore -3<a<2$
따라서 정수 a는 $-2, -1, 0, 1$의 4개이다.

080 답 ①

$f(2)-f(3)=3$이고 집합 Y의 원소 중에서 차가 3인 두 수는 8, 5뿐이므로
$f(2)=8, f(3)=5$
이때 $f(1)=7$이고 함수 f가 일대일대응이므로
$f(4)=6$
$\therefore f(3)+f(4)=11$

081 답 2

함수 g가 항등함수이므로 $g(x)=x$
$g(4)=4$이므로 $f(2)+g(4)=3$에서
$f(2)+4=3 \quad \therefore f(2)=-1$
함수 f가 상수함수이므로
$f(x)=f(2)=-1$
$\therefore f(3)+g(3)=-1+3=2$

082 답 7

함수 f가 항등함수이므로
$f(-2)=-2, f(3)=3$
$\therefore 4a+b=-2, 9a+b=3$
두 식을 연립하여 풀면
$a=1, b=-6$
$\therefore a-b=7$

083 답 ④

함수 f가 상수함수이므로 $f(0)=f(2)=f(4)$
$f(0)=f(2)$에서
$2=4+2a+b \quad \therefore 2a+b=-2 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$f(0)=f(4)$에서
$2=16+4a+b \quad \therefore 4a+b=-14 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-6, b=10$
$\therefore a+b=4$

084 답 5

함수 g가 항등함수이므로 $g(x)=x$
$g(1)=1$이므로 $f(2)=g(1)=h(3)$에서
$f(2)=h(3)=1$
함수 h가 상수함수이므로
$h(x)=h(3)=1$
$h(2)=1$이므로 $f(1)+h(2)=4$에서
$f(1)+1=4 \quad \therefore f(1)=3$
$f(2)=1, f(1)=3$이고 함수 f가 일대일대응이므로
$f(3)=2$
$\therefore f(3)+g(2)+h(1)=2+2+1=5$

085 답 ⑤

함수의 개수는 $5^2=25 \quad \therefore p=25$
일대일함수의 개수는 ${}_5P_2=5 \times 4=20 \quad \therefore q=20$
상수함수의 개수는 5 $\quad \therefore r=5$
$\therefore p+q+r=50$

086 답 29

일대일대응의 개수는 $4!=24 \quad \therefore a=24$
항등함수의 개수는 1 $\quad \therefore b=1$
상수함수의 개수는 4 $\quad \therefore c=4$
$\therefore a+b+c=29$

087 답 6

주어진 조건을 만족시키는 함수 f는 일대일함수이므로 구하는 함수 f의 개수는
${}_3P_2=3 \times 2=6$

개념유형

179~180쪽

088 답 c, 4

089 답 a, 1

090 답 3, d

091 답 2, b

092 답 1

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(0)=1$

093 답 -1

$(g\circ g)(-1)=g(g(-1))=g(0)=-1$

094 답 -2

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(3)=-2$

095 답 15

$(g\circ f)(-3)=g(f(-3))=g(4)=15$

096 답 6

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(-1)=6$

097 답 5

$(f\circ f)(-2)=f(f(-2))=f(9)=5$

098 답 6

$(f\circ f)(\sqrt{5})=f(f(\sqrt{5}))=f(5)=6$

099 답 10

$(f\circ f\circ f)(7)=f(f(f(7)))=f(f(8))=f(9)=10$

100 답 $3x$, $9x^2-5$

101 답 $(f\circ g)(x)=3x^2-15$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=3(x^2-5)=3x^2-15$

102 답 3, 3, $2x-4$

103 답 $h(x)=2x-1$

$(f\circ h)(x)=f(h(x))=2h(x)+5$

이때 $(f\circ h)(x)=g(x)$에서

$2h(x)+5=4x+3$

$\therefore h(x)=2x-1$

104 답 $h(x)=-\frac{1}{3}x+1$

$(f\circ h)(x)=f(h(x))=3h(x)-2$

이때 $(f\circ h)(x)=g(x)$에서

$3h(x)-2=-x+1$

$\therefore h(x)=-\frac{1}{3}x+1$

105 답 2, 2, 2, 12, $5x-12$

106 답 $h(x)=-2x+5$

$(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(2x+1)$

이때 $(h\circ f)(x)=g(x)$에서

$h(2x+1)=-4x+3$

$2x+1=t$로 놓으면 $x=\frac{t-1}{2}$이므로

$h(t)=-4\times\frac{t-1}{2}+3=-2t+5$

$\therefore h(x)=-2x+5$

107 답 $h(x)=6x+11$

$(h\circ f)(x)=h(f(x))=h\left(\frac{1}{2}x-1\right)$

이때 $(h\circ f)(x)=g(x)$에서

$h\left(\frac{1}{2}x-1\right)=3x+5$

$\frac{1}{2}x-1=t$로 놓으면 $x=2t+2$이므로

$h(t)=3(2t+2)+5=6t+11$

$\therefore h(x)=6x+11$

108 답 $(g\circ f)(x)=2x-1$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(4x-1)$$
$$=\frac{(4x-1)-1}{2}=2x-1$$

109 답 $(f\circ g)(x)=2x-3$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{x-1}{2}\right)$$
$$=4\times\frac{x-1}{2}-1=2x-3$$

110 답 $(f\circ(g\circ h))(x)=-4x+3$

$$(g\circ h)(x)=g(h(x))=g(-2x+3)$$
$$=\frac{(-2x+3)-1}{2}=-x+1$$

$$\therefore (f\circ(g\circ h))(x)=f((g\circ h)(x))=f(-x+1)$$
$$=4(-x+1)-1=-4x+3$$

111 답 $((f\circ g)\circ h)(x)=-4x+3$

$(f\circ g)(x)=2x-3$이므로

$$((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))=(f\circ g)(-2x+3)$$
$$=2(-2x+3)-3=-4x+3$$

112 답 -1, 6

113 답 17

$$((f\circ g)\circ h)(-2)=(f\circ(g\circ h))(-2)$$
$$=f((g\circ h)(-2))$$
$$=f(7)=17$$

114 답 9

$$(g\circ h\circ f)(0)=(g\circ h)(f(0))$$
$$=(g\circ h)(-4)=9$$

115 답 -1

$$(f\circ g\circ h)(4)=f((g\circ h)(4))$$
$$=f(1)=-1$$

실전유형 181~182쪽

116 답 5

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=3$

$(f\circ f\circ f)(2)=f(f(f(2)))=f(f(3))=f(1)=2$

$\therefore\ (f\circ f)(1)+(f\circ f\circ f)(2)=5$

117 답 ②

$$(g\circ f\circ g)(\sqrt{2})=g(f(g(\sqrt{2})))$$
$$=g(f(-3))$$
$$=g(-3)=-17$$

118 답 9

$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(-2)=10$

$(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(2)=-1$

$\therefore\ (f\circ g)(0)+(g\circ f)(-1)=9$

119 답 ②

$$(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(a^2-1)$$
$$=2(a^2-1)-1=2a^2-3$$

이때 $(f\circ g)(a)=5$에서

$2a^2-3=5$, $a^2=4$ $\quad\therefore\ a=\pm2$

따라서 양수 a의 값은 2이다.

120 답 -5

$$(f\circ(g\circ h))(8)=((f\circ g)\circ h)(8)=(f\circ g)(h(8))$$
$$=(f\circ g)(-1)=2$$
$$((h\circ f)\circ g)(5)=(h\circ(f\circ g))(5)=h((f\circ g)(5))$$
$$=h(32)=-7$$

$\therefore\ (f\circ(g\circ h))(8)+((h\circ f)\circ g)(5)=-5$

121 답 ①

$$((f\circ g)\circ g)(a)=(f\circ(g\circ g))(a)$$
$$=f((g\circ g)(a))$$
$$=f(3a-1)$$
$$=2(3a-1)+1$$
$$=6a-1$$

이때 $((f\circ g)\circ g)(a)=a$에서

$6a-1=a$ $\quad\therefore\ a=\dfrac{1}{5}$

122 답 13

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-2x+1)$$
$$=a(-2x+1)-4=-2ax+a-4$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax-4)$$
$$=-2(ax-4)+1=-2ax+9$$

이때 $f\circ g=g\circ f$에서

$-2ax+a-4=-2ax+9$

$a-4=9$ $\quad\therefore\ a=13$

123 답 ②

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$$
$$=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$$

이때 $(f\circ f)(x)=4x+3$에서

$a^2x+ab+b=4x+3$

$\therefore\ a^2=4$, $ab+b=3$

$a^2=4$에서 $a=\pm2$

그런데 $a>0$이므로 $a=2$

또 $ab+b=3$에서 $2b+b=3$

$3b=3$ $\quad\therefore\ b=1$

$\therefore\ a+b=3$

124 답 -2

$g(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-x+7)$$
$$=a(-x+7)+b=-ax+7a+b$$

이때 $(g\circ f)(x)=-3x+10$에서

$-ax+7a+b=-3x+10$

$\therefore\ -a=-3$, $7a+b=10$

$\therefore\ a=3$, $b=-11$

따라서 $g(x)=3x-11$이므로

$g(3)=-2$

125 답 ①

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(a)=a^2-a$

$(f\circ f)(4)=f(f(4))=f(8+a)=a^2+15a+48$

이때 $(f\circ f)(2)=(f\circ f)(4)$에서

$a^2-a=a^2+15a+48$

$-16a=48$ $\quad\therefore\ a=-3$

따라서 $f(x)=x^2-2x-3$이므로

$f(6)=21$

126 답 4

$3x-1=t$로 놓으면 $x=\frac{t+1}{3}$이므로

$f(t)=\frac{t+1}{3}+2=\frac{t+7}{3}$

$\therefore f(5)=4$

다른 풀이

$3x-1=5$일 때 $x=2$

이를 $f(3x-1)=x+2$의 양변에 대입하면 $f(5)=4$

127 답 ①

$(f\circ h)(x)=f(h(x))=\frac{1}{2}h(x)+1$

이때 $(f\circ h)(x)=g(x)$에서

$\frac{1}{2}h(x)+1=-x^2+5 \qquad \therefore h(x)=-2x^2+8$

$\therefore h(3)=-10$

다른 풀이

$x=3$을 $(f\circ h)(x)=g(x)$의 양변에 대입하면

$(f\circ h)(3)=g(3)$, $f(h(3))=-4$

이때 $h(3)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=-4$

$\frac{1}{2}k+1=-4 \qquad \therefore k=-10$

$\therefore h(3)=-10$

128 답 $h(x)=x^2-4x+3$

$(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(x+2)$

이때 $h\circ f=g$에서

$h(x+2)=x^2-1$

$x+2=t$로 놓으면 $x=t-2$이므로

$h(t)=(t-2)^2-1=t^2-4t+3$

$\therefore h(x)=x^2-4x+3$

129 답 $h(x)=-3x+2$

$$\begin{aligned}(f\circ g\circ h)(x)&=((f\circ g)\circ h)(x)\\&=(f\circ g)(h(x))\\&=3-2h(x)\end{aligned}$$

이때 $(f\circ g\circ h)(x)=6x-1$에서

$3-2h(x)=6x-1 \qquad \therefore h(x)=-3x+2$

개념유형

184~185쪽

130 답 ○

주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

131 답 ×

주어진 함수는 일대일대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다.

132 답 ×

주어진 함수는 일대일대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다.

133 답 ×

주어진 함수는 일대일대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다.

134 답 ○

주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

135 답 c

136 답 d

137 답 5

138 답 4

139 답 4, 4, 2, 2

140 답 1

$f^{-1}(1)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=1$이므로

$3k-2=1 \qquad \therefore k=1$

$\therefore f^{-1}(1)=1$

141 답 $\frac{7}{3}$

$f^{-1}(5)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=5$이므로

$3k-2=5 \qquad \therefore k=\frac{7}{3}$

$\therefore f^{-1}(5)=\frac{7}{3}$

142 답 -2

$f^{-1}(-8)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=-8$이므로

$3k-2=-8 \qquad \therefore k=-2$

$\therefore f^{-1}(-8)=-2$

143 답 4, 5

144 답 0

$f^{-1}(a)=-6$에서 $f(-6)=a$이므로

$a=0$

145 답 $\frac{3}{2}$

$f^{-1}(a)=-3$에서 $f(-3)=a$이므로

$a=\frac{3}{2}$

146 답 $5,\ -5,\ 6$

147 답 -12

$f^{-1}(-3)=-9$에서 $f(-9)=-3$이므로

$9+a=-3 \qquad \therefore a=-12$

148 답 $-\frac{1}{4}$

$f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)=-1$에서 $f(-1)=\frac{3}{4}$이므로

$1+a=\frac{3}{4} \qquad \therefore a=-\frac{1}{4}$

149 답 $\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

150 답 $y=-x+10$

함수 $y=-x+10$은 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=-x+10$을 x에 대하여 풀면

$x=-y+10$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-x+10$

151 답 $y=\frac{1}{3}x-2$

함수 $y=3x+6$은 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=3x+6$을 x에 대하여 풀면

$3x=y-6 \qquad \therefore x=\frac{1}{3}y-2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{3}x-2$

152 답 $y=2x-10$

함수 $y=\frac{1}{2}x+5$는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{1}{2}x+5$를 x에 대하여 풀면

$\frac{1}{2}x=y-5 \qquad \therefore x=2y-10$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=2x-10$

153 답 $y=-3x-3$

함수 $y=-\frac{1}{3}x-1$은 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=-\frac{1}{3}x-1$을 x에 대하여 풀면

$\frac{1}{3}x=-y-1 \qquad \therefore x=-3y-3$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-3x-3$

실전유형

186~187쪽

154 답 ③

$f(3)+f^{-1}(3)=1+7=8$

155 답 3

$f(1)=-5$에서

$2+a=-5 \qquad \therefore a=-7$

$\therefore f(x)=2x-7$

$f^{-1}(-1)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=-1$이므로

$2k-7=-1 \qquad \therefore k=3$

$\therefore f^{-1}(-1)=3$

156 답 ③

$f^{-1}(4)=1$에서 $f(1)=4$이므로

$a+7=4 \qquad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-3x+7$이므로

$f(3)=-2$

157 답 -1

$f^{-1}(5)=-1,\ f^{-1}(-4)=2$에서

$f(-1)=5,\ f(2)=-4$

$\therefore -a+b=5,\ 2a+b=-4$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=2$

$\therefore a+b=-1$

158 답 ②

함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.

함수 $f(x)$의 일차항의 계수가 양수이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

따라서 $f(-1)=a,\ f(1)=6$이므로

$-4+b=a,\ 4+b=6 \qquad \therefore a=-2,\ b=2$

$\therefore ab=-4$

159 답 ④

$f(x)=x^2-4x=(x-2)^2-4$이고 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이므로

$k\geq 2,\ f(k)=k$

$f(k)=k$에서

$k^2-4k=k,\ k^2-5k=0$

$k(k-5)=0 \qquad \therefore k=0$ 또는 $k=5$

그런데 $k\geq 2$이므로 $k=5$

160 답 ①

$y=-3x+9$라 하고 x에 대하여 풀면

$x=-\frac{1}{3}y+3$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=-\frac{1}{3}x+3 \qquad \therefore f^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+3$

따라서 $a=-\frac{1}{3}$, $b=3$이므로

$ab=-1$

161 답 3

$y=\frac{1}{4}x+a$라 하고 x에 대하여 풀면

$x=4y-4a$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=4x-4a \qquad \therefore f^{-1}(x)=4x-4a$

따라서 $4=b$, $-4a=4$이므로

$a=-1$, $b=4$

$\therefore a+b=3$

162 답 −1

$y=ax-1$이라 하고 x에 대하여 풀면

$x=\frac{1}{a}y+\frac{1}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a} \qquad \therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$

이때 $f=f^{-1}$에서

$ax-1=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$

따라서 $a=\frac{1}{a}$, $-1=\frac{1}{a}$이므로

$a=-1$

163 답 ⑤

$(g\circ f^{-1})(-7)=g(f^{-1}(-7))$

$f^{-1}(-7)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=-7$이므로

$3k-4=-7 \qquad \therefore k=-1$

$\therefore f^{-1}(-7)=-1$

$\therefore (g\circ f^{-1})(-7)=g(f^{-1}(-7))$

$=g(-1)$

$=-1+3=2$

164 답 2

$(f^{-1}\circ g)(a)=f^{-1}(g(a))=3$에서 $f(3)=g(a)$이므로

$1=9-4a \qquad \therefore a=2$

165 답 ③

$(f\circ g^{-1})(k)=f(g^{-1}(k))=7$

$g^{-1}(k)=a$ (a는 상수)라 하면 $f(a)=7$이므로

$4a-5=7 \qquad \therefore a=3$

즉, $g^{-1}(k)=3$이므로

$k=g(3)=10$

166 답 4

167 답 5

168 답 2

$(f^{-1})^{-1}(1)=f(1)=2$

169 답 1

$(f\circ f^{-1}\circ g)(2)=g(2)=1$

170 답 4

$(f^{-1}\circ g^{-1}\circ g)(8)=f^{-1}(8)$

$f^{-1}(8)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=8$이므로

$2k=8 \qquad \therefore k=4$

$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1}\circ g)(8)=f^{-1}(8)=4$

171 답 2

$(f\circ g)^{-1}(-3)=(g^{-1}\circ f^{-1})(-3)$

$=g^{-1}(f^{-1}(-3))$

$f^{-1}(-3)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=-3$이므로

$-k+1=-3 \qquad \therefore k=4$

$\therefore (f\circ g)^{-1}(-3)=g^{-1}(4)$

또 $g^{-1}(4)=l$ (l은 상수)이라 하면 $g(l)=4$이므로

$3l-2=4 \qquad \therefore l=2$

$\therefore (f\circ g)^{-1}(-3)=g^{-1}(4)=2$

172 답 −2

$(f^{-1}\circ g)^{-1}(9)=(g^{-1}\circ f)(9)$

$=g^{-1}(f(9))$

$=g^{-1}(-8)$

$g^{-1}(-8)=k$ (k는 상수)라 하면 $g(k)=-8$이므로

$3k-2=-8 \qquad \therefore k=-2$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(9)=g^{-1}(-8)=-2$

173 답 4

$(f\circ g^{-1})^{-1}(-1)=(g\circ f^{-1})(-1)$

$=g(f^{-1}(-1))$

$f^{-1}(-1)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=-1$이므로

$-k+1=-1 \qquad \therefore k=2$

$\therefore (f\circ g^{-1})^{-1}(-1)=g(f^{-1}(-1))=g(2)=4$

174 답 −6

$(g^{-1}\circ f^{-1})^{-1}(3)=(f\circ g)(3)=f(g(3))$

$=f(7)=-6$

175 답 -9

$(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(4)=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(4)$
$=(f^{-1}\circ g)(4)$
$=f^{-1}(g(4))$
$=f^{-1}(10)$

$f^{-1}(10)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=10$이므로

$-k+1=10 \qquad \therefore k=-9$

$\therefore (g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(4)=f^{-1}(10)=-9$

176 답 2

$(f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(-5)=(f\circ g^{-1}\circ f\circ f^{-1})(-5)$
$=(f\circ g^{-1})(-5)$
$=f(g^{-1}(-5))$

$g^{-1}(-5)=k$ (k는 상수)라 하면 $g(k)=-5$이므로

$3k-2=-5 \qquad \therefore k=-1$

$\therefore (f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(-5)=f(g^{-1}(-5))$
$=f(-1)=2$

실전유형 189쪽

177 답 ③

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(1)=6$

$(g\circ f)^{-1}(9)=(f^{-1}\circ g^{-1})(9)$
$=f^{-1}(g^{-1}(9))$
$=f^{-1}(7)=6$

$\therefore (g\circ f)(3)+(g\circ f)^{-1}(9)=12$

178 답 1

$(f^{-1}\circ g)^{-1}(1)=(g^{-1}\circ f)(1)$
$=g^{-1}(f(1))$
$=g^{-1}(2)$

$g^{-1}(2)=k$ (k는 상수)라 하면 $g(k)=2$이므로

$2k-4=2 \qquad \therefore k=3$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(1)=g^{-1}(2)=3$

$(f\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ f^{-1})(2)=(f\circ f^{-1}\circ g\circ f^{-1})(2)$
$=(g\circ f^{-1})(2)$
$=g(f^{-1}(2))$

$f^{-1}(2)=l$ (l은 상수)이라 하면 $f(l)=2$이므로

$9l-7=2 \qquad \therefore l=1$

$\therefore (f\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ f^{-1})(2)=g(f^{-1}(2))$
$=g(1)=-2$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(1)+(f\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ f^{-1})(2)=1$

179 답 4

$(f^{-1}\circ(g\circ f^{-1})^{-1}\circ f^{-1})(a)=(f^{-1}\circ f\circ g^{-1}\circ f^{-1})(a)$
$=(g^{-1}\circ f^{-1})(a)$
$=(f\circ g)^{-1}(a)$

따라서 $(f\circ g)^{-1}(a)=5$이므로

$(f\circ g)(5)=a$

$\therefore a=(f\circ g)(5)=f(g(5))$
$=f(2)=4$

개념유형 190~191쪽

180 답 a, b, b

181 답 a

182 답 b

$(f\circ f)(d)=f(f(d))=f(c)=b$

183 답 c

$f^{-1}(b)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=b$

이때 $f(c)=b$이므로 $k=c$

$\therefore f^{-1}(b)=c$

184 답 e

$(f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$

$f^{-1}(c)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=c$

이때 $f(d)=c$이므로 $k=d$

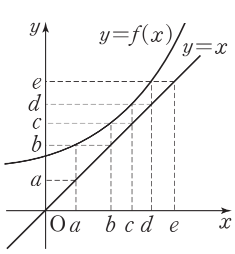
$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(d)$

$f^{-1}(d)=l$ (l은 상수)이라 하면 $f(l)=d$

이때 $f(e)=d$이므로 $l=e$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(d)=e$

185 답 d



186 답 c

$(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(b)=c$

187 답 a

$f^{-1}(b)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=b$

이때 $f(a)=b$이므로 $k=a$

$\therefore f^{-1}(b)=a$

188 답 d

$f^{-1}(e)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=e$

이때 $f(d)=e$이므로 $k=d$

$\therefore f^{-1}(e)=d$

189 답 a

$(f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$

$f^{-1}(c)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=c$

이때 $f(b)=c$이므로 $k=b$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(b)$

$f^{-1}(b)=l$ (l은 상수)이라 하면 $f(l)=b$

이때 $f(a)=b$이므로 $l=a$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(b)=a$

190 답 b

$(f\circ f)^{-1}(d)=(f^{-1}\circ f^{-1})(d)=f^{-1}(f^{-1}(d))$

$f^{-1}(d)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=d$

이때 $f(c)=d$이므로 $k=c$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(d)=f^{-1}(c)$

$f^{-1}(c)=l$ (l은 상수)이라 하면 $f(l)=c$

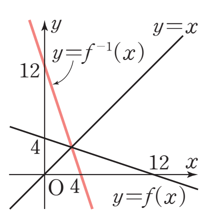
이때 $f(b)=c$이므로 $l=b$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(d)=f^{-1}(c)=b$

191 답 x, 1, 1, 1

192 답 (3, 3)

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



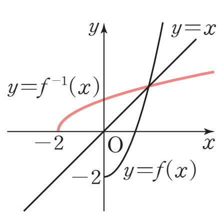
$-\frac{1}{3}x+4=x$에서

$-\frac{4}{3}x=-4 \qquad \therefore x=3$

따라서 구하는 교점의 좌표는 (3, 3)이다.

193 답 (2, 2)

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$x^2-2=x$에서 $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=2$ ($\because x\ge 0$)

따라서 구하는 교점의 좌표는 (2, 2)이다.

194 답 3, 3, 3, 5

195 답 -2

역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 (4, -3)을 지나므로

$f^{-1}(4)=-3 \qquad \therefore f(-3)=4$

따라서 $-3a-2=4$이므로 $a=-2$

196 답 2

역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$을 지나므로

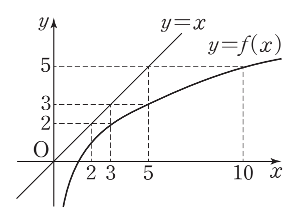
$f^{-1}(-1)=\frac{1}{2} \qquad \therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

따라서 $\frac{1}{2}a-2=-1$이므로 $a=2$

실전유형

192쪽

197 답 8



$(f\circ f)(10)=f(f(10))=f(5)=3$

$f^{-1}(2)=k$ (k는 상수)라 하면

$f(k)=2$이므로 $k=3$

$f^{-1}(3)=l$ (l은 상수)이라 하면

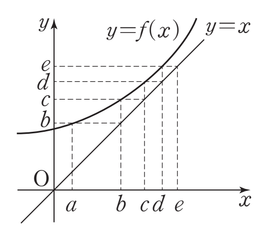
$f(l)=3$이므로 $l=5$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(2)=f^{-1}(f^{-1}(2))$

$=f^{-1}(3)=5$

$\therefore (f\circ f)(10)+(f^{-1}\circ f^{-1})(2)=8$

198 답 ⑤



① $(f\circ f)(a)=f(f(a))$

$=f(b)=c$

② $(f\circ f)(b)=f(f(b))$

$=f(c)=d$

③ $f^{-1}(b)=k$ (k는 상수)라 하면

$f(k)=b$이므로 $k=a$

$\therefore f^{-1}(b)=a$

④ $f^{-1}(d)=l$ (l은 상수)이라 하면

$f(l)=d$이므로 $l=c$

$\therefore f^{-1}(d)=c$

⑤ $(f\circ f)^{-1}(e)=(f^{-1}\circ f^{-1})(e)=f^{-1}(f^{-1}(e))$

$f^{-1}(e)=m$ (m은 상수)이라 하면

$f(m)=e$이므로 $m=d$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(e)=f^{-1}(d)=c$

이때 $f(c)=d$이므로

$(f\circ f)^{-1}(e)\ne f(c)$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

199 답 4

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$-3x+8=x$에서 $-4x=-8 \qquad \therefore x=2$

따라서 교점의 좌표는 (2, 2)이므로

$a=2$, $b=2$

$\therefore a+b=4$

200 답 12

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$4x+a=x$에서 $3x=-a$ $\quad\therefore x=-\frac{a}{3}$

이때 교점의 좌표가 $(3, b)$이므로

$-\frac{a}{3}=3$ $\quad\therefore a=-9$

한편 점 $(3, b)$는 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$b=3$

$\therefore b-a=12$

201 답 2

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 모두 점 $(2, -1)$을 지나므로

$f(2)=-1,\ f^{-1}(2)=-1$

따라서 $f(2)=-1,\ f(-1)=2$이므로

$2a+b=-1,\ -a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=1$

$\therefore a^2+b^2=2$

202 답 ②

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$x^2-4x+6=x$에서 $x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=3$

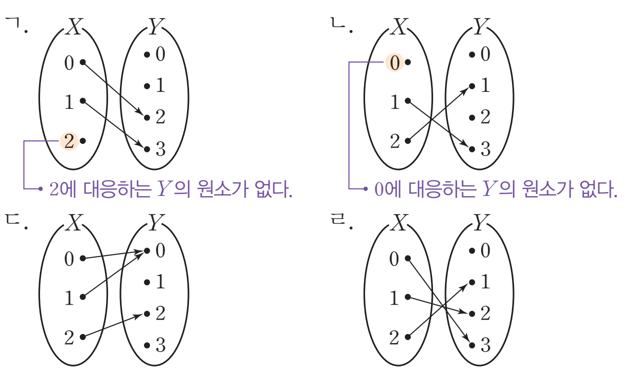
따라서 두 교점의 좌표는 $(2, 2)$, $(3, 3)$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$

실전유형으로 중단원 점검 193~194쪽

1 답 ⑤

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 보기에서 함수인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

2 답 ②

(i) $a>0$일 때

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 서로 같으므로

$f(-2)=-3,\ f(5)=4$

$\therefore -2a+b=-3,\ 5a+b=4$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-1$

그런데 $a>b$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 서로 같으므로

$f(-2)=4,\ f(5)=-3$

$\therefore -2a+b=4,\ 5a+b=-3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=2$

(i), (ii)에서 $a=-1,\ b=2$

$\therefore a+b=1$

3 답 15

$f(1)=g(1)$이므로

$-1+a=-1+b+2$ $\quad\therefore a-b=2$ …… ㉠

$f(3)=g(3)$이므로

$-3+a=-9+3b+2$ $\quad\therefore a-3b=-4$ …… ㉡ …… i

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=5,\ b=3$ …… ii

$\therefore ab=15$ …… iii

채점 기준

i a, b 사이의 관계식 구하기	60 %
ii a, b의 값 구하기	30 %
iii ab의 값 구하기	10 %

4 답 ④

함수 $f(x)$의 일차항의 계수가 양수이므로 일대일대응이면

$f(-2)=-3,\ f(a)=5$

따라서 $-4+b=-3,\ 2a+b=5$이므로

$a=2,\ b=1$

$\therefore a-b=1$

5 답 4

함수 g가 항등함수이므로 $g(x)=x$

$g(4)=4$이므로 $f(2)=g(4)=h(6)$에서

$f(2)=h(6)=4$ …… i

함수 h가 상수함수이므로

$h(x)=h(6)=4$ …… ii

$g(2)=2,\ h(4)=4$이므로 $f(4)-g(2)=h(4)$에서

$f(4)-2=4$ $\quad\therefore f(4)=6$

$f(2)=4,\ f(4)=6$이고 함수 f가 일대일대응이므로

$f(6)=2$ …… iii

$\therefore f(6)+g(6)-h(2)=2+6-4=4$ …… iv

채점 기준

ⅰ 함수 $g(x)$와 $f(2)$, $h(6)$의 값 구하기	30 %
ⅱ 함수 $h(x)$ 구하기	20 %
ⅲ $f(6)$의 값 구하기	30 %
ⅳ $f(6)+g(6)-h(2)$의 값 구하기	20 %

6 답 4

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(6)=3$

$(g\circ f)(-2)=g(f(-2))=g(-1)=1$

$\therefore (f\circ g)(1)+(g\circ f)(-2)=4$

7 답 -1

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+a)$
$=3(2x+a)-2=6x+3a-2$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x-2)$
$=2(3x-2)+a=6x-4+a$

이때 $f\circ g=g\circ f$에서

$6x+3a-2=6x-4+a$

$2a=-2 \qquad \therefore a=-1$

8 답 ③

$(f\circ h)(x)=f(h(x))=-2h(x)+3$

이때 $f\circ h=g$에서

$-2h(x)+3=2x^2+1 \qquad \therefore h(x)=-x^2+1$

9 답 7

$f^{-1}(9)=2$에서 $f(2)=9$

$f(-2)=1$, $f(2)=9$에서

$-2a+b=1$, $2a+b=9$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=5$

따라서 $f(x)=2x+5$이므로

$f(1)=7$

10 답 11

함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.

함수 $f(x)$의 일차항의 계수가 음수이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

따라서 $f(a)=2$, $f(3)=-b$이므로

$-6a+8=2$, $-10=-b \qquad \therefore a=1$, $b=10$

$\therefore a+b=11$

11 답 ⑤

$y=ax+3$이라 하고 x에 대하여 풀면

$x=\dfrac{1}{a}y-\dfrac{3}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{3}{a} \qquad \therefore f^{-1}(x)=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{3}{a}$

따라서 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{3}{a}=b$이므로

$a=2$, $b=-\dfrac{3}{2} \qquad \therefore a-b=\dfrac{7}{2}$

12 답 -5

$(f^{-1}\circ g)(a)=f^{-1}(g(a))=8$에서 $f(8)=g(a)$이므로

$-23=5a+2 \qquad \therefore a=-5$

13 답 10

$(g^{-1}\circ f)^{-1}(3)=(f^{-1}\circ g)(3)$
$=f^{-1}(g(3))$
$=f^{-1}(1)$

$f^{-1}(1)=k$ (k는 상수)라 하면 $f(k)=1$이므로

$4k-3=1 \qquad \therefore k=1$

$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(3)=f^{-1}(1)=1$ …… ⅰ

$(f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(1)=(f\circ g^{-1}\circ f\circ f^{-1})(1)$
$=(f\circ g^{-1})(1)$
$=f(g^{-1}(1))$

$g^{-1}(1)=l$ (l은 상수)이라 하면 $g(l)=1$이므로

$7-2l=1 \qquad \therefore l=3$

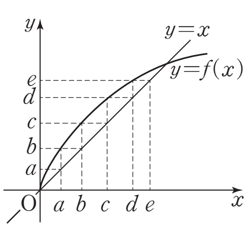
$\therefore (f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(1)=f(g^{-1}(1))$
$=f(3)=9$ …… ⅱ

$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(3)+(f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(1)=10$ …… ⅲ

채점 기준

ⅰ $(g^{-1}\circ f)^{-1}(3)$의 값 구하기	40 %
ⅱ $(f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(1)$의 값 구하기	50 %
ⅲ $(g^{-1}\circ f)^{-1}(3)+(f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(1)$의 값 구하기	10 %

14 답 ④



$(f\circ f)(b)=f(f(b))=f(c)=d$

$(f\circ f)^{-1}(e)=(f^{-1}\circ f^{-1})(e)$
$=f^{-1}(f^{-1}(e))$

$f^{-1}(e)=k$ (k는 상수)라 하면

$f(k)=e$이므로 $k=d$

$f^{-1}(d)=l$ (l은 상수)이라 하면

$f(l)=d$이므로 $l=c$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(e)=f^{-1}(d)=c$

$\therefore (f\circ f)(b)+(f\circ f)^{-1}(e)=c+d$

15 답 $\sqrt{2}$

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$x^2-2x+2=x$에서 $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 P(1, 1), Q(2, 2) 또는 P(2, 2), Q(1, 1)이므로 선분 PQ의 길이는

$\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$

09 유리함수

개념유형 196~198쪽

001 답 분

002 답 다

003 답 다

004 답 분

005 답 $\dfrac{x+2}{(x-5)(x+2)}$, $\dfrac{x-5}{(x-5)(x+2)}$

006 답 $\dfrac{x-2}{(x-1)(x-2)(x+3)}$, $\dfrac{x-1}{(x-1)(x-2)(x+3)}$

007 답 $\dfrac{x(x+2)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$, $\dfrac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

$\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{x}{(x+1)(x-1)}$

$\dfrac{3}{x^2+x-2}=\dfrac{3}{(x+2)(x-1)}$

따라서 두 유리식을 통분하면

$\dfrac{x(x+2)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$, $\dfrac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

008 답 $\dfrac{x}{x+3}$

$\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}=\dfrac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{x}{x+3}$

009 답 $\dfrac{x+2}{2x-1}$

$\dfrac{x^2+2x}{2x^2-x}=\dfrac{x(x+2)}{x(2x-1)}=\dfrac{x+2}{2x-1}$

010 답 $\dfrac{x-1}{x+1}$

$\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3x-4}=\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-4)(x+1)}=\dfrac{x-1}{x+1}$

011 답 $\dfrac{2x-1}{(x+1)(x-2)}$

$$\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{x-2+x+1}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{2x-1}{(x+1)(x-2)}$$

012 답 $-\dfrac{6}{(x+1)(x-1)}$

$$\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{3(x-1)-3(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{3x-3-3x-3}{(x+1)(x-1)}=-\dfrac{6}{(x+1)(x-1)}$$

013 답 $\dfrac{x^2+7x+5}{(2x+1)(x-3)}$

$$\dfrac{x}{2x+1}+\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{x(x-3)+5(2x+1)}{(2x+1)(x-3)}=\dfrac{x^2-3x+10x+5}{(2x+1)(x-3)}=\dfrac{x^2+7x+5}{(2x+1)(x-3)}$$

014 답 $\dfrac{3x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$$\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{2}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{x+3+2(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\dfrac{x+3+2x+2}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\dfrac{3x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

015 답 $x-2$

$\dfrac{x^2-4}{x+4}\times\dfrac{x+4}{x+2}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x+4}\times\dfrac{x+4}{x+2}=x-2$

016 답 $\dfrac{3x-2}{x^2}$

$\dfrac{3x-2}{x^2+x}\times\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{3x-2}{x(x+1)}\times\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{3x-2}{x^2}$

017 답 $\dfrac{x+1}{x}$

$\dfrac{x^2+3x+2}{x^2}\times\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{(x+2)(x+1)}{x^2}\times\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{x+1}{x}$

018 답 $\dfrac{2x+1}{x-2}$

$\dfrac{2x+1}{x^2-2x}\div\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x+1}{x(x-2)}\times x=\dfrac{2x+1}{x-2}$

019 답 $\dfrac{(x-1)(x+3)}{x}$

$$\dfrac{x^2-1}{x^2}\div\dfrac{x+1}{x^2+3x}=\dfrac{x^2-1}{x^2}\times\dfrac{x^2+3x}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}\times\dfrac{x(x+3)}{x+1}=\dfrac{(x-1)(x+3)}{x}$$

020 답 $x(x-4)$

$$\frac{x^2-16}{x^2+1}\div\frac{x+4}{x^3+x}=\frac{x^2-16}{x^2+1}\times\frac{x^3+x}{x+4}$$
$$=\frac{(x+4)(x-4)}{x^2+1}\times\frac{x(x^2+1)}{x+4}$$
$$=x(x-4)$$

021 답 $\dfrac{x^2+8}{x(x-2)(x+4)}$

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}=\frac{x(x+4)-(x-2)(x+4)+x(x-2)}{x(x-2)(x+4)}$$
$$=\frac{x^2+4x-x^2-2x+8+x^2-2x}{x(x-2)(x+4)}$$
$$=\frac{x^2+8}{x(x-2)(x+4)}$$

022 답 $\dfrac{x-y}{x+y}$

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}-\frac{2xy}{x^2-y^2}$$
$$=\frac{x(x-y)}{(x+y)(x-y)}+\frac{y(x+y)}{(x+y)(x-y)}-\frac{2xy}{(x+y)(x-y)}$$
$$=\frac{x^2-xy+xy+y^2-2xy}{(x+y)(x-y)}$$
$$=\frac{x^2-2xy+y^2}{(x+y)(x-y)}$$
$$=\frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}$$
$$=\frac{x-y}{x+y}$$

023 답 1

$$\frac{x-1}{x+2}\times\frac{x^2+4x+4}{x^2+2x-3}\div\frac{x+2}{x+3}=\frac{x-1}{x+2}\times\frac{(x+2)^2}{(x+3)(x-1)}\times\frac{x+3}{x+2}$$
$$=1$$

024 답 $\dfrac{1}{x(2x+1)}$

$$\frac{x-2}{x^2+x}\div\frac{2x^2+x}{x^2-1}\times\frac{x}{x^2-3x+2}$$
$$=\frac{x-2}{x^2+x}\times\frac{x^2-1}{2x^2+x}\times\frac{x}{x^2-3x+2}$$
$$=\frac{x-2}{x(x+1)}\times\frac{(x+1)(x-1)}{x(2x+1)}\times\frac{x}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\frac{1}{x(2x+1)}$$

025 답 $\dfrac{x+2}{x-2y}$

$$\frac{x^2-xy+2x-2y}{x^2-xy-2y^2}\times\frac{2x^2+xy-y^2}{x^2-xy}\times\frac{x}{2x-y}$$
$$=\frac{(x+2)(x-y)}{(x+y)(x-2y)}\times\frac{(x+y)(2x-y)}{x(x-y)}\times\frac{x}{2x-y}$$
$$=\frac{x+2}{x-2y}$$

참고 $x^2-xy+2x-2y=x(x-y)+2(x-y)=(x+2)(x-y)$

026 답 $x+2$, $x+2$, $x+2$, $x+3$, $x+4$, $x+4$

027 답 $\dfrac{6}{x(x+6)}$

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{(x+1)(x+3)}+\frac{3}{(x+3)(x+6)}$$
$$=\frac{1}{(x+1)-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\frac{2}{(x+3)-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$$
$$+\frac{3}{(x+6)-(x+3)}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+6}$$
$$=\frac{x+6-x}{x(x+6)}$$
$$=\frac{6}{x(x+6)}$$

028 답 $\dfrac{6}{(x+1)(x+7)}$

$$\frac{2}{(x+1)(x+3)}+\frac{2}{(x+3)(x+5)}+\frac{2}{(x+5)(x+7)}$$
$$=\frac{2}{(x+3)-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$$
$$+\frac{2}{(x+5)-(x+3)}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}\right)$$
$$+\frac{2}{(x+7)-(x+5)}\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+7}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}\right)+\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+7}\right)$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+7}$$
$$=\frac{x+7-(x+1)}{(x+1)(x+7)}$$
$$=\frac{6}{(x+1)(x+7)}$$

029 답 $\dfrac{3}{x(x-3)}$

$$\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-x}$$
$$=\frac{1}{(x-3)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-1)}+\frac{1}{(x-1)\times x}$$
$$=\frac{1}{(x-2)-(x-3)}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)$$
$$+\frac{1}{(x-1)-(x-2)}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)$$
$$+\frac{1}{x-(x-1)}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)+\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)+\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x}$$
$$=\frac{x-(x-3)}{x(x-3)}$$
$$=\frac{3}{x(x-3)}$$

실전유형

198~199쪽

030 답 ①

$$\frac{x^2+4}{x^3-1}-\frac{2}{x-1}+\frac{x+1}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{x^2+4}{x^3-1}-\frac{2(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}+\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{x^2+4-2x^2-2x-2+x^2-1}{x^3-1}$$
$$=\frac{-2x+1}{x^3-1}$$

031 답 ④

① $\frac{1}{x+2}+\frac{x+5}{x^2+x-2}=\frac{x-1}{(x+2)(x-1)}+\frac{x+5}{(x+2)(x-1)}$
$$=\frac{x-1+x+5}{(x+2)(x-1)}$$
$$=\frac{2(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$
$$=\frac{2}{x-1}$$

② $\frac{x+3}{x^2-3x}-\frac{x-1}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{x(x-3)}-\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$
$$=\frac{(x+3)(x-2)-x(x-1)}{x(x-2)(x-3)}$$
$$=\frac{2(x-3)}{x(x-2)(x-3)}$$
$$=\frac{2}{x(x-2)}$$

③ $\frac{x+4}{x^2-x-6}\times\frac{x-3}{x^2+2x-8}=\frac{x+4}{(x+2)(x-3)}\times\frac{x-3}{(x+4)(x-2)}$
$$=\frac{1}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\frac{1}{x^2-4}$$

④ $\frac{x^2-x}{x^2+2x-15}\div\frac{x^2+x}{x^2+4x-5}$
$$=\frac{x(x-1)}{(x+5)(x-3)}\times\frac{(x+5)(x-1)}{x(x+1)}$$
$$=\frac{(x-1)^2}{(x-3)(x+1)}$$

⑤ $\frac{1}{x}\div\frac{x+1}{x^2}\times\frac{x+1}{x^2-2x}=\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{x+1}\times\frac{x+1}{x(x-2)}=\frac{1}{x-2}$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

032 답 $\frac{x^2+2}{x+2}$

$$\frac{x^2-3x}{x+2}\times\left(1-\frac{1}{x}\right)\div\frac{x^2-4x+3}{x^2+2}$$
$$=\frac{x(x-3)}{x+2}\times\frac{x-1}{x}\times\frac{x^2+2}{(x-1)(x-3)}$$
$$=\frac{x^2+2}{x+2}$$

033 답 ④

주어진 식의 우변을 통분하여 정리하면

$$\frac{a}{x+1}-\frac{b}{x-1}=\frac{a(x-1)-b(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{(a-b)x-a-b}{x^2-1}$$

이때 $\frac{x-5}{x^2-1}=\frac{(a-b)x-a-b}{x^2-1}$가 x에 대한 항등식이므로

$1=a-b$, $-5=-a-b$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

$\therefore ab=6$

다른 풀이

주어진 식의 양변에 $(x+1)(x-1)$을 곱하여 정리하면

$x-5=a(x-1)-b(x+1)$

$\therefore x-5=(a-b)x-a-b$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$1=a-b$, $-5=-a-b$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

$\therefore ab=6$

034 답 3

주어진 식의 양변에 $(x-1)^2$을 곱하여 정리하면

$a(x-1)+ax+b=4x-1$

$\therefore 2ax-a+b=4x-1$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$2a=4$, $-a+b=-1$

$\therefore a=2$, $b=1$

$\therefore a+b=3$

035 답 $\frac{4}{(x-3)(x+9)}$

$$\frac{1}{x(x-3)}+\frac{1}{x(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+9)}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+9}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+9}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{x+9-(x-3)}{(x-3)(x+9)}$$
$$=\frac{4}{(x-3)(x+9)}$$

036 답 ③

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+6}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{x+6-x}{x(x+6)}$$
$$=\frac{3}{x(x+6)}$$

이때 $\frac{3}{x(x+6)}=\frac{a}{x(x+b)}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=3$, $b=6$

$\therefore a+b=9$

037 답 6

$$\frac{1}{x^2-4x+3}+\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+4x+3}$$
$$=\frac{1}{(x-3)(x-1)}+\frac{1}{(x-1)(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+3)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{x+3-(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$
$$=\frac{3}{x^2-9}$$

이때 $\frac{3}{x^2-9}=\frac{a}{x^2-b}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=3,\ b=9$

$\therefore\ b-a=6$

개념유형 200~203쪽

038 답 분

039 답 다

040 답 다

041 답 분

042 답 분

043 답 $\{x\,|\,x\neq0$인 실수$\}$

044 답 $\{x\,|\,x\neq-4$인 실수$\}$

$x+4\neq0$에서 $x\neq-4$이므로 정의역은

$\{x\,|\,x\neq-4$인 실수$\}$

045 답 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{5}{2}\text{인 실수}\right\}$

$2x-5\neq0$에서 $x\neq\frac{5}{2}$이므로 정의역은

$\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{5}{2}\text{인 실수}\right\}$

046 답 $\{x\,|\,x\neq-2,\ x\neq2$인 실수$\}$

$x^2-4\neq0$에서 $(x+2)(x-2)\neq0$　　$\therefore\ x\neq-2,\ x\neq2$

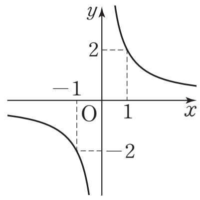
따라서 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-2,\ x\neq2$인 실수$\}$

047 답 $\{x\,|\,x$는 모든 실수$\}$

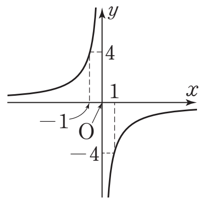
모든 실수 x에 대하여 $x^2+7>0$이므로 정의역은

$\{x\,|\,x$는 모든 실수$\}$

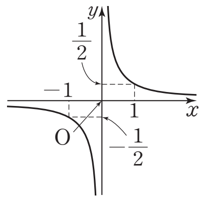
048 답



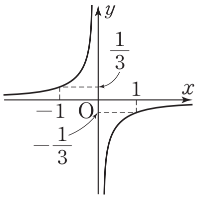
049 답



050 답



051 답



052 답 $-2,\ 3,\ x+2$

053 답 $y=\frac{2}{x-3}+7$

054 답 $y=\frac{3}{x-1}-2$

055 답 $y=-\frac{4}{x+3}-1$

$y=-\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{4}{x-(-3)}-1$

$\therefore\ y=-\frac{4}{x+3}-1$

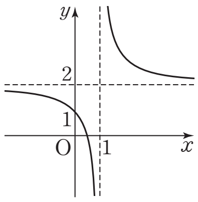
056 답 $y=-\frac{3}{2x+8}+5$

$y=-\frac{3}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{3}{2\{x-(-4)\}}+5$

$\therefore\ y=-\frac{3}{2x+8}+5$

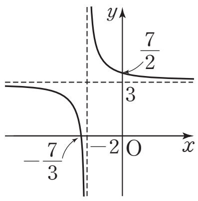
057 답



정의역: $\{x|x\neq1$인 실수$\}$
치역: $\{y|y\neq2$인 실수$\}$
점근선의 방정식: $x=1$, $y=2$

$y=\frac{1}{x-1}+2$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

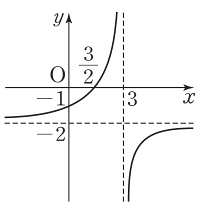
058 답



정의역: $\{x|x\neq-2$인 실수$\}$
치역: $\{y|y\neq3$인 실수$\}$
점근선의 방정식: $x=-2$, $y=3$

$y=\frac{1}{x+2}+3$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

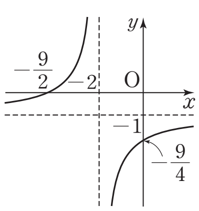
059 답



정의역: $\{x|x\neq3$인 실수$\}$
치역: $\{y|y\neq-2$인 실수$\}$
점근선의 방정식: $x=3$, $y=-2$

$y=-\frac{3}{x-3}-2$의 그래프는 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

060 답



정의역: $\{x|x\neq-2$인 실수$\}$
치역: $\{y|y\neq-1$인 실수$\}$
점근선의 방정식: $x=-2$, $y=-1$

$y=-\frac{5}{2x+4}-1=-\frac{5}{2(x+2)}-1$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\frac{5}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

061 답 $y=\frac{5}{x-2}+2$

$y=\frac{2x+1}{x-2}=\frac{2(x-2)+5}{x-2}=\frac{5}{x-2}+2$

062 답 $y=-\frac{1}{x+2}+3$

$y=\frac{3x+5}{x+2}=\frac{3(x+2)-1}{x+2}=-\frac{1}{x+2}+3$

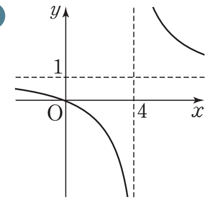
063 답 $y=-\frac{1}{x-3}-1$

$y=\frac{-x+2}{x-3}=\frac{-(x-3)-1}{x-3}=-\frac{1}{x-3}-1$

064 답 $y=\frac{3}{x+1}-4$

$y=\frac{-4x-1}{x+1}=\frac{-4(x+1)+3}{x+1}=\frac{3}{x+1}-4$

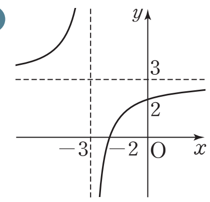
065 답



정의역: $\{x|x\neq4$인 실수$\}$
치역: $\{y|y\neq1$인 실수$\}$
점근선의 방정식: $x=4$, $y=1$

$y=\frac{x}{x-4}=\frac{(x-4)+4}{x-4}=\frac{4}{x-4}+1$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

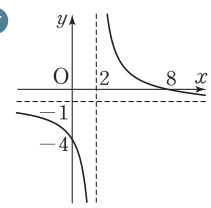
066 답



정의역: $\{x|x\neq-3$인 실수$\}$
치역: $\{y|y\neq3$인 실수$\}$
점근선의 방정식: $x=-3$, $y=3$

$y=\frac{3x+6}{x+3}=\frac{3(x+3)-3}{x+3}=-\frac{3}{x+3}+3$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

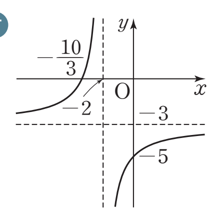
067 답



정의역: $\{x|x\neq2$인 실수$\}$
치역: $\{y|y\neq-1$인 실수$\}$
점근선의 방정식: $x=2$, $y=-1$

$y=\frac{8-x}{x-2}=\frac{-(x-2)+6}{x-2}=\frac{6}{x-2}-1$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\frac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

068 답



정의역: $\{x|x\neq-2$인 실수$\}$
치역: $\{y|y\neq-3$인 실수$\}$
점근선의 방정식: $x=-2$, $y=-3$

$y=\frac{-3x-10}{x+2}=\frac{-3(x+2)-4}{x+2}=-\frac{4}{x+2}-3$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

실전유형 203~205쪽

069 답 ㄱ, ㄹ

ㄱ. $y=\frac{3}{x-1}+1$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=-\frac{3}{x+1}$의 그래프는 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\frac{3x-7}{x-3}=\frac{3(x-3)+2}{x-3}=\frac{2}{x-3}+3$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\frac{-3x}{x+1}=\frac{-3(x+1)+3}{x+1}=\frac{3}{x+1}-3$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 보기에서 그 그래프가 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 평행이동하여 겹치지는 함수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

070 답 -4

$y=-\frac{6}{x}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{6}{x-2}+1+a$

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$0=3+1+a$ $\quad\therefore a=-4$

071 답 ②

$y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{2}{x-a}+b$

이 식이 $y=\frac{3x-1}{x-1}=\frac{3(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+3$과 일치하므로

$a=1,\ b=3$

$\therefore a+b=4$

072 답 3

$y=\frac{-5x}{x+2}=\frac{-5(x+2)+10}{x+2}=\frac{10}{x+2}-5$이므로 이 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-2$인 실수$\}$이고 치역은 $\{y\,|\,y\neq-5$인 실수$\}$이다.

따라서 $a=-2,\ b=-5$이므로

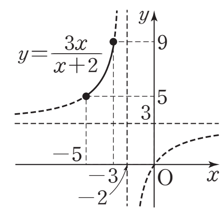
$a-b=3$

073 답 $\{y\,|\,5\le y\le 9\}$

$y=\frac{3x}{x+2}=\frac{3(x+2)-6}{x+2}=-\frac{6}{x+2}+3$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\frac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-5\le x\le -3$에서 $y=\frac{3x}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은

$\{y\,|\,5\le y\le 9\}$



074 답 -15

$y=\frac{mx+4}{x+n}=\frac{m(x+n)-mn+4}{x+n}=\frac{-mn+4}{x+n}+m$이므로 이 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq -n$인 실수$\}$이고 치역은 $\{y\,|\,y\neq m$인 실수$\}$이다.

따라서 $m=-5,\ n=3$이므로

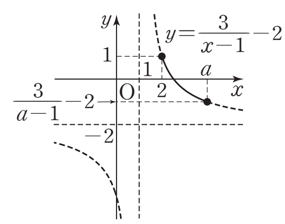
$mn=-15$

075 답 ①

$y=\frac{3}{x-1}-2$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

$2\le x\le a$에서 $y=\frac{3}{x-1}-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은

$\left\{y\,\middle|\,\frac{3}{a-1}-2\le y\le 1\right\}$



따라서 $\frac{3}{a-1}-2=-1,\ 1=b$이므로

$a=4,\ b=1$

$\therefore a+b=5$

076 답 8

$y=\frac{1-2x}{x+4}=\frac{-2(x+4)+9}{x+4}=\frac{9}{x+4}-2$이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-4,\ y=-2$

따라서 $a=-4,\ b=-2$이므로

$ab=8$

077 답 ②

$y=\frac{bx-5}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab-5}{x+a}=\frac{-ab-5}{x+a}+b$이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a,\ y=b$

따라서 $a=1,\ b=2$이므로

$a+b=3$

078 답 1

$y=\frac{4x-5}{x+a}=\frac{4(x+a)-4a-5}{x+a}=-\frac{4a+5}{x+a}+4$이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a,\ y=4$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(-a,\ 4)$에 대하여 대칭이므로

$-a=3,\ 4=b$ $\quad\therefore a=-3,\ b=4$

$\therefore a+b=1$

079 답 ④

$y=\dfrac{b}{x-a}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=0$이므로

$a=4$

따라서 $y=\dfrac{b}{x-4}$의 그래프가 점 $(2, 4)$를 지나므로

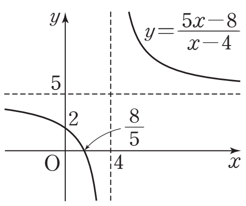
$4=\dfrac{b}{-2}$ $\quad\therefore b=-8$

$\therefore a-b=12$

080 답 ③

$y=\dfrac{5x-8}{x-4}=\dfrac{5(x-4)+12}{x-4}=\dfrac{12}{x-4}+5$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\dfrac{12}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\dfrac{5x-8}{x-4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



081 답 3

$y=\dfrac{k}{x+2}-1$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=-1$이고, 그래프는 점 $\left(0, \dfrac{k}{2}-1\right)$을 지난다.

(i) $k>0$일 때

$x=0$일 때 $y>0$이어야 하므로

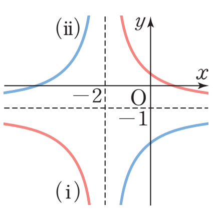
$\dfrac{k}{2}-1>0$ $\quad\therefore k>2$

(ii) $k<0$일 때

그래프가 제1사분면을 지나지 않는다.

(i), (ii)에서 $k>2$

따라서 정수 k의 최솟값은 3이다.

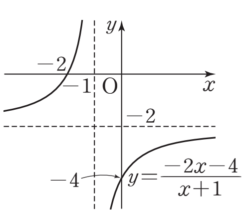


082 답 ⑤

$y=\dfrac{-2x-4}{x+1}=\dfrac{-2(x+1)-2}{x+1}=-\dfrac{2}{x+1}-2$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\dfrac{-2x-4}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

⑤ 제2, 3, 4사분면을 지난다.



083 답 ⑤

ㄱ. 치역은 $\{y\,|\,y\neq 0$인 실수$\}$이다.

ㅁ. $|k|$의 값이 커질수록 그래프는 원점에서 멀어진다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

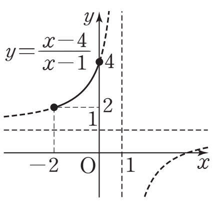
개념유형 207~208쪽

084 답 3, 3, 1, 0, −2

085 답 최댓값: 4, 최솟값: 2

$y=\dfrac{x-4}{x-1}=\dfrac{(x-1)-3}{x-1}=-\dfrac{3}{x-1}+1$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

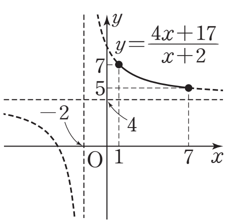
따라서 $-2\leq x\leq 0$에서 $y=\dfrac{x-4}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=0$일 때 최댓값 4, $x=-2$일 때 최솟값 2를 갖는다.



086 답 최댓값: 7, 최솟값: 5

$y=\dfrac{4x+17}{x+2}=\dfrac{4(x+2)+9}{x+2}=\dfrac{9}{x+2}+4$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\dfrac{9}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

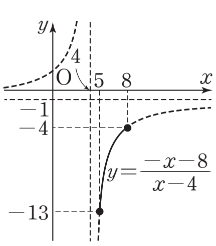
따라서 $1\leq x\leq 7$에서 $y=\dfrac{4x+17}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$일 때 최댓값 7, $x=7$일 때 최솟값 5를 갖는다.



087 답 최댓값: −4, 최솟값: −13

$y=\dfrac{-x-8}{x-4}=\dfrac{-(x-4)-12}{x-4}=-\dfrac{12}{x-4}-1$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\dfrac{12}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $5\leq x\leq 8$에서 $y=\dfrac{-x-8}{x-4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=8$일 때 최댓값 -4, $x=5$일 때 최솟값 -13을 갖는다.



088 답 2, 2, −3, 3, 3, 2

089 답 $a=-2$, $b=4$, $c=-1$

주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=-2$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-1}-2\ (k>0)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

라 하자.

㉠의 그래프가 점 (2, 0)을 지나므로

$0=\dfrac{k}{2-1}-2 \qquad \therefore k=2$

이를 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{2}{x-1}-2=\dfrac{-2(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{-2x+4}{x-1}$

$\therefore a=-2,\ b=4,\ c=-1$

090 답 $a=4,\ b=-10,\ c=-2$

주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=4$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-2}+4\ (k<0) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

라 하자.

㉠의 그래프가 점 (0, 5)를 지나므로

$5=\dfrac{k}{0-2}+4 \qquad \therefore k=-2$

이를 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-2}{x-2}+4=\dfrac{4(x-2)-2}{x-2}=\dfrac{4x-10}{x-2}$

$\therefore a=4,\ b=-10,\ c=-2$

091 답 $x,\ y-1,\ y-1,\ 2,\ 1$

092 답 $y=\dfrac{x+3}{2x-5}$

$y=\dfrac{5x+3}{2x-1}$을 x에 대하여 풀면

$y(2x-1)=5x+3,\ 2xy-5x=y+3$

$x(2y-5)=y+3 \qquad \therefore x=\dfrac{y+3}{2y-5}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\dfrac{x+3}{2x-5}$

093 답 $y=\dfrac{-3x+4}{x-2}$

$y=\dfrac{2x+4}{x+3}$를 x에 대하여 풀면

$y(x+3)=2x+4,\ xy-2x=-3y+4$

$x(y-2)=-3y+4 \qquad \therefore x=\dfrac{-3y+4}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\dfrac{-3x+4}{x-2}$

094 답 $y=\dfrac{-x+7}{2x+1}$

$y=\dfrac{-x+7}{2x+1}$을 x에 대하여 풀면

$y(2x+1)=-x+7,\ 2xy+x=-y+7$

$x(2y+1)=-y+7 \qquad \therefore x=\dfrac{-y+7}{2y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\dfrac{-x+7}{2x+1}$

095 답 $y=\dfrac{2x+3}{x+4}$

$y=\dfrac{-4x+3}{x-2}$을 x에 대하여 풀면

$y(x-2)=-4x+3,\ xy+4x=2y+3$

$x(y+4)=2y+3 \qquad \therefore x=\dfrac{2y+3}{y+4}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

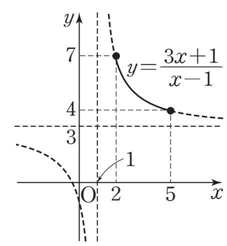
$y=\dfrac{2x+3}{x+4}$

실전유형 208~209쪽

096 답 ③

$y=\dfrac{3x+1}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+4}{x-1}=\dfrac{4}{x-1}+3$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le 5$에서 $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$일 때 최댓값 7, $x=5$일 때 최솟값 4를 갖는다.



따라서 최댓값과 최솟값의 합은

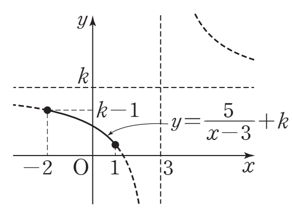
$7+4=11$

097 답 ④

$y=\dfrac{5}{x-3}+k$의 그래프는 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-2\le x\le 1$에서

$y=\dfrac{5}{x-3}+k$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-2$일 때 최댓값 $k-1$을 갖는다.

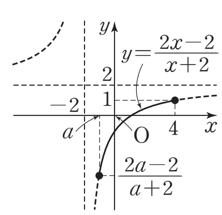


즉, $k-1=2$이므로 $k=3$

098 답 2

$y=\dfrac{2x-2}{x+2}=\dfrac{2(x+2)-6}{x+2}=-\dfrac{6}{x+2}+2$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\dfrac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a\le x\le 4$에서 $y=\dfrac{2x-2}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=4$일 때 최댓값 1, $x=a$일 때 최솟값 $\dfrac{2a-2}{a+2}$를 갖는다.



즉, $\dfrac{2a-2}{a+2}=-4,\ 1=b$이므로

$a=-1,\ b=1$

$\therefore b-a=2$

099 답 ②

주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=2$이므로 함수의 식을

$y=\frac{k}{x+1}+2$ $(k<0)$ …… ㉠

라 하자.

㉠의 그래프가 점 $(0,\ -3)$을 지나므로

$-3=k+2$ $\therefore k=-5$

이를 ㉠에 대입하면

$y=\frac{-5}{x+1}+2$

따라서 $a=-5$, $b=1$, $c=2$이므로

$a+b+c=-2$

100 답 ①

주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=3$이므로 함수의 식을

$y=\frac{k}{x-2}+3$ $(k>0)$ …… ㉠

이라 하자.

㉠의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=\frac{k}{-2}+3$ $\therefore k=2$

이를 ㉠에 대입하면

$y=\frac{2}{x-2}+3=\frac{3(x-2)+2}{x-2}=\frac{3x-4}{x-2}$

따라서 $a=3$, $b=4$, $c=-2$이므로

$abc=-24$

101 답 5

그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=4$이므로 함수의 식을

$y=\frac{k}{x-3}+4$ $(k\neq0)$ …… ㉠

라 하자.

㉠의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{-2}+4$ $\therefore k=8$

이를 ㉠에 대입하면

$y=\frac{8}{x-3}+4=\frac{4(x-3)+8}{x-3}=\frac{4x-4}{x-3}$

따라서 $a=4$, $b=-4$, $c=-3$이므로

$a-b+c=5$

102 답 7

$y=\frac{2x+1}{x-a}$이라 하고 x에 대하여 풀면

$y(x-a)=2x+1$, $x(y-2)=ay+1$

$\therefore x=\frac{ay+1}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{ax+1}{x-2}$ $\therefore f^{-1}(x)=\frac{ax+1}{x-2}$

따라서 $a=4$, $b=1$, $c=2$이므로

$a+b+c=7$

103 답 3

$y=\frac{ax+1}{x-3}$이라 하고 x에 대하여 풀면

$y(x-3)=ax+1$, $x(y-a)=3y+1$

$\therefore x=\frac{3y+1}{y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{3x+1}{x-a}$ $\therefore f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{x-a}$

이때 $f=f^{-1}$에서

$\frac{ax+1}{x-3}=\frac{3x+1}{x-a}$ $\therefore a=3$

104 답 ⑤

$y=\frac{2x+5}{x+3}$라 하고 x에 대하여 풀면

$y(x+3)=2x+5$, $x(y-2)=-3y+5$

$\therefore x=\frac{-3y+5}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{-3x+5}{x-2}$ $\therefore f^{-1}(x)=\frac{-3x+5}{x-2}$

$f^{-1}(x)=\frac{-3x+5}{x-2}=\frac{-3(x-2)-1}{x-2}=-\frac{1}{x-2}-3$이므로

$y=f^{-1}(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=-3$

따라서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(2,\ -3)$에 대하여 대칭이므로

$p=2$, $q=-3$

$\therefore p-q=5$

105 답 6

$y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 모두 점 $(-5,\ 1)$을 지나므로

$f(-5)=1$, $f^{-1}(-5)=1$

따라서 $f(-5)=1$, $f(1)=-5$이므로

$\frac{-5a+b}{-7}=1$, $\frac{a+b}{-1}=-5$

$\therefore 5a-b=7$, $a+b=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

$\therefore ab=6$

실전유형으로 중단원 점검 210~211쪽

1 답 ⑤

$\frac{x^2-5x}{x+3}\times\frac{x^2-x-6}{x^2+x}\div\frac{x^2-3x-10}{x^2+3x}$

$=\frac{x(x-5)}{x+3}\times\frac{(x+2)(x-3)}{x(x+1)}\times\frac{x(x+3)}{(x+2)(x-5)}$

$=\frac{x(x-3)}{x+1}=\frac{x^2-3x}{x+1}$

2 답 -2

주어진 식의 우변을 통분하여 정리하면

$$\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-2}=\frac{a(x-2)+b(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{(a+b)x-2a+b}{x^2-x-2}$$

이때 $\frac{4x+1}{x^2-x-2}=\frac{(a+b)x-2a+b}{x^2-x-2}$가 x에 대한 항등식이므로

$4=a+b,\ 1=-2a+b$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=3$

$\therefore\ a-b=-2$

3 답 12

$$\frac{1}{(x-3)(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+9)}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+9}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+9}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{x+9-(x-3)}{(x-3)(x+9)}$$

$$=\frac{3}{(x-3)(x+9)}$$

이때 $\frac{3}{(x-3)(x+9)}=\frac{a}{(x-3)(x+b)}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=3,\ b=9$

$\therefore\ a+b=12$

4 답 3

$y=\frac{2x+5}{x+1}=\frac{2(x+1)+3}{x+1}=\frac{3}{x+1}+2$ …… ⅰ

따라서 이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{3}{x-a+1}+2+b$ …… ⅱ

이 식이 $y=\frac{k}{x-2}-1$과 일치하므로

$-a+1=-2,\ 2+b=-1,\ 3=k$

$\therefore\ a=3,\ b=-3,\ k=3$ …… ⅲ

$\therefore\ a+b+k=3$ …… ⅳ

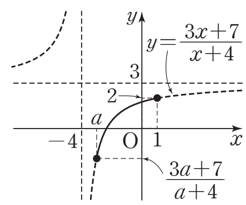
채점 기준

ⅰ $y=\frac{2x+5}{x+1}$를 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$ 꼴로 변형하기	30 %
ⅱ ⅰ의 함수의 그래프를 평행이동한 그래프의 식 구하기	30 %
ⅲ a, b, k의 값 구하기	30 %
ⅳ $a+b+k$의 값 구하기	10 %

5 답 ③

$y=\frac{3x+7}{x+4}=\frac{3(x+4)-5}{x+4}=\frac{-5}{x+4}+3$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\frac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$a\le x\le1$에서 $y=\frac{3x+7}{x+4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은



$\left\{y\ \middle|\ \frac{3a+7}{a+4}\le y\le2\right\}$

따라서 $\frac{3a+7}{a+4}=-2,\ 2=b$이므로

$a=-3,\ b=2$

$\therefore\ ab=-6$

6 답 7

$y=\frac{ax+7}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab+7}{x+b}=\frac{-ab+7}{x+b}+a$이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-b,\ y=a$

따라서 $a=1,\ b=6$이므로

$a+b=7$

7 답 2

$y=\frac{ax-7}{x-3}=\frac{a(x-3)+3a-7}{x-3}=\frac{3a-7}{x-3}+a$이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=3,\ y=a$ …… ⅰ

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(3,\ a)$에 대하여 대칭이므로

$a=5,\ b=3$ …… ⅱ

$\therefore\ a-b=2$ …… ⅲ

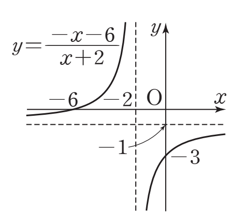
채점 기준

ⅰ 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식 구하기	50 %
ⅱ a, b의 값 구하기	40 %
ⅲ $a-b$의 값 구하기	10 %

8 답 ①

$y=\frac{-x-6}{x+2}=\frac{-(x+2)-4}{x+2}=-\frac{4}{x+2}-1$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

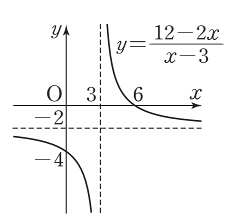
따라서 $y=\frac{-x-6}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.



9 답 ④

$y=\frac{12-2x}{x-3}=\frac{-2(x-3)+6}{x-3}=\frac{6}{x-3}-2$

이므로 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 치역은 $\{y\,|\,y\neq-2$인 실수$\}$이다.

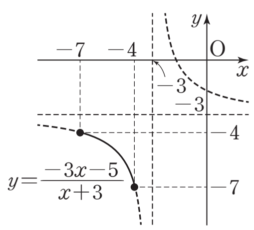
② 그래프는 $y=\frac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

③ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=-2$이다.
⑤ 그래프는 제1, 3, 4사분면을 지난다.
따라서 옳은 것은 ④이다.

10 답 3

$y=\frac{-3x-5}{x+3}=\frac{-3(x+3)+4}{x+3}=\frac{4}{x+3}-3$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

즉, $-7\le x\le -4$에서 $y=\frac{-3x-5}{x+3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. …… ⅰ



따라서 $x=-7$일 때 최댓값 -4,
$x=-4$일 때 최솟값 -7을 가지므로
$M=-4$, $m=-7$ …… ⅱ
$\therefore M-m=3$ …… ⅲ

채점 기준

ⅰ $-7\le x\le -4$에서 함수 $y=\frac{-3x-5}{x+3}$의 그래프 그리기	50 %
ⅱ M, m의 값 구하기	40 %
ⅲ $M-m$의 값 구하기	10 %

11 답 40

주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-5$, $y=-2$이므로 함수의 식을
$y=\frac{k}{x+5}-2\ (k>0)$ …… ㉠
라 하자.
㉠의 그래프가 점 $(-2, 0)$을 지나므로
$0=\frac{k}{3}-2 \quad \therefore k=6$
이를 ㉠에 대입하면
$y=\frac{6}{x+5}-2=\frac{-2(x+5)+6}{x+5}=\frac{-2x-4}{x+5}$
따라서 $a=-2$, $b=-4$, $c=5$이므로
$abc=40$

12 답 ⑤

$y=\frac{ax-3}{x-4}$이라 하고 x에 대하여 풀면
$y(x-4)=ax-3$, $x(y-a)=4y-3$
$\therefore x=\frac{4y-3}{y-a}$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=\frac{4x-3}{x-a} \quad \therefore f^{-1}(x)=\frac{4x-3}{x-a}$
따라서 $a=2$, $b=4$, $c=3$이므로
$a+b+c=9$

10 무리함수

개념유형 213~214쪽

001 답 무

002 답 유

003 답 무

004 답 무

005 답 $x\ge -\frac{2}{3}$

$\sqrt{3x+2}$에서 $3x+2\ge 0$이어야 하므로
$x\ge -\frac{2}{3}$

006 답 $x>\frac{1}{4}$

$\sqrt{4x-1}$에서 $4x-1>0$이어야 하므로
$x>\frac{1}{4}$

007 답 $x\ge 0$

$\sqrt{2x+1}$에서 $2x+1\ge 0$이어야 하므로
$x\ge -\frac{1}{2}$ …… ㉠
$\sqrt{x}$에서 $x\ge 0$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $x\ge 0$

008 답 $1<x\le 3$

$\sqrt{3-x}$에서 $3-x\ge 0$이어야 하므로
$x\le 3$ …… ㉠
$\sqrt{x-1}$에서 $x-1>0$이어야 하므로
$x>1$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $1<x\le 3$

009 답 x

$(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)=(\sqrt{x+1})^2-1^2$
$=(x+1)-1=x$

010 답 3

$(\sqrt{x}+\sqrt{x-3})(\sqrt{x}-\sqrt{x-3})=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{x-3})^2$
$=x-(x-3)=3$

011 답 -1

$(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3})=(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x+3})^2$
$=(x+2)-(x+3)=-1$

012 답 $\sqrt{x+1}+1$

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$
$$=\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(x+1)-1}$$
$$=\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}$$
$$=\sqrt{x+1}+1$$

013 답 $\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1})}$$
$$=\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}}{(x+3)-(x+1)}$$
$$=\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}}{2}$$

014 답 $x-1+\sqrt{x^2-2x}$

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})}$$
$$=\frac{x+2\sqrt{x^2-2x}+x-2}{x-(x-2)}$$
$$=\frac{2x-2+2\sqrt{x^2-2x}}{2}$$
$$=x-1+\sqrt{x^2-2x}$$

015 답 4

$$\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}-\frac{x}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{x(\sqrt{x+4}+2)-x(\sqrt{x+4}-2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}$$
$$=\frac{4x}{(x+4)-4}$$
$$=\frac{4x}{x}=4$$

016 답 $\frac{12\sqrt{x}}{x-9}$

$$\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}=\frac{(\sqrt{x}+3)^2-(\sqrt{x}-3)^2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$
$$=\frac{(x+6\sqrt{x}+9)-(x-6\sqrt{x}+9)}{x-9}$$
$$=\frac{12\sqrt{x}}{x-9}$$

017 답 $-2\sqrt{x-1}$

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})+(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})}$$
$$=\frac{2\sqrt{x-1}}{(x-1)-x}$$
$$=-2\sqrt{x-1}$$

018 답 $-\frac{2\sqrt{y}}{x-y}$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})-(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=-\frac{2\sqrt{y}}{x-y}$$

019 답 $-2\sqrt{x^2+2x}$

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$$
$$=\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})^2-(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}$$
$$=\frac{(x+2-2\sqrt{x^2+2x}+x)-(x+2+2\sqrt{x^2+2x}+x)}{(x+2)-x}$$
$$=\frac{-4\sqrt{x^2+2x}}{2}$$
$$=-2\sqrt{x^2+2x}$$

020 답 $\sqrt{5}-2$

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}$$
$$=\frac{x+1-2\sqrt{x^2-1}+x-1}{(x+1)-(x-1)}$$
$$=\frac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}$$
$$=x-\sqrt{x^2-1}$$

$x=\sqrt{5}$를 대입하면

$\sqrt{5}-\sqrt{5-1}=\sqrt{5}-2$

021 답 $\sqrt{3}+1$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{2}{x-1}$$

$x=\sqrt{3}$을 대입하면

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}=\sqrt{3}+1$$

022 답 $\frac{4+\sqrt{2}}{7}$

$$\frac{1}{4-2\sqrt{x}}+\frac{1}{4+2\sqrt{x}}=\frac{(4+2\sqrt{x})+(4-2\sqrt{x})}{(4-2\sqrt{x})(4+2\sqrt{x})}$$
$$=\frac{8}{16-4x}$$
$$=\frac{2}{4-x}$$

$x=\sqrt{2}$를 대입하면

$$\frac{2}{4-\sqrt{2}}=\frac{2(4+\sqrt{2})}{(4-\sqrt{2})(4+\sqrt{2})}=\frac{2(4+\sqrt{2})}{16-2}=\frac{4+\sqrt{2}}{7}$$

023 답 $\sqrt{6}$

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{(x-\sqrt{x^2-1})+(x+\sqrt{x^2-1})}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}$$
$$=\frac{2x}{x^2-(x^2-1)}$$
$$=2x$$

$x=\frac{\sqrt{6}}{2}$을 대입하면

$2\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$

024 답 $2\sqrt{2}+1$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{2})+\sqrt{2}(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})}$$
$$=\frac{x-\sqrt{2x}+\sqrt{2x}+2}{x-2}$$
$$=\frac{x+2}{x-2}$$

$x=2+\sqrt{2}$를 대입하면

$$\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{(4+\sqrt{2})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$
$$=\frac{4\sqrt{2}+2}{2}=2\sqrt{2}+1$$

실전유형

215쪽

025 답 $-3\le x\le 2$

$-x^2-x+6\ge 0$이어야 하므로

$x^2+x-6\le 0$, $(x+3)(x-2)\le 0$

$\therefore\ -3\le x\le 2$

026 답 ⑤

$\sqrt{x-1}$에서 $x-1\ge 0$이어야 하므로 $x\ge 1$

$\sqrt{8-2x}$에서 $8-2x>0$이어야 하므로 $x<4$

$\therefore\ 1\le x<4$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$1+2+3=6$

027 답 ②

$\sqrt{x}$에서 $x\ge 0$

$\sqrt{x+4}$에서 $x+4>0$이어야 하므로 $x>-4$

$\sqrt{7-3x}$에서 $7-3x\ge 0$이어야 하므로 $x\le\frac{7}{3}$

$\therefore\ 0\le x\le\frac{7}{3}$

따라서 정수 x는 0, 1, 2의 3개이다.

028 답 ⑤

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x}-\sqrt{x+3})}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+3}}{x-(x+3)}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}{3}$$
$$=\frac{-\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}{3}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}{3}$$
$$=\frac{2\sqrt{x+3}}{3}$$

029 답 $\frac{4}{x}$

$$\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}+\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}$$
$$=\frac{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})^2+(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})^2}{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$
$$=\frac{(2+x+2\sqrt{4-x^2}+2-x)+(2+x-2\sqrt{4-x^2}+2-x)}{(2+x)-(2-x)}$$
$$=\frac{8}{2x}=\frac{4}{x}$$

030 답 $2+2\sqrt{2}$

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$$
$$\therefore\ \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$
$$=\frac{(x-2\sqrt{x}+1)+(x+2\sqrt{x}+1)}{x-1}$$
$$=\frac{2x+2}{x-1}=\frac{2(\sqrt{2}+1)+2}{(\sqrt{2}+1)-1}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}=\frac{(2\sqrt{2}+4)\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$
$$=\frac{4+4\sqrt{2}}{2}=2+2\sqrt{2}$$

031 답 $\sqrt{10}$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})}$$
$$=\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{(x-1)-x}=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$$
$$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$$
$$=(\sqrt{1}-0)+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{10}-\sqrt{9})$$
$$=\sqrt{10}$$

개념유형

216~219쪽

032 답 ○

033 답 ×

034 답 ○

035 답 ×

$y=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$이므로 무리함수가 아니다.

036 답 ○

037 답 $\{x\,|\,x\ge -2\}$

$x+2\ge 0$에서 $x\ge -2$이므로 정의역은

$\{x\,|\,x\ge -2\}$

038 답 $\{x\,|\,x\ge5\}$

$x-5\ge0$에서 $x\ge5$이므로 정의역은
$\{x\,|\,x\ge5\}$

039 답 $\left\{x\,\middle|\,x\ge\frac{3}{2}\right\}$

$2x-3\ge0$에서 $x\ge\frac{3}{2}$이므로 정의역은
$\left\{x\,\middle|\,x\ge\frac{3}{2}\right\}$

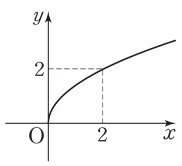
040 답 $\{x\,|\,x\le4\}$

$-x+4\ge0$에서 $x\le4$이므로 정의역은
$\{x\,|\,x\le4\}$

041 답 $\{x\,|\,x\le2\}$

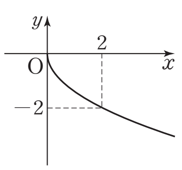
$6-3x\ge0$에서 $x\le2$이므로 정의역은
$\{x\,|\,x\le2\}$

042 답



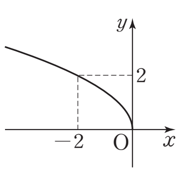
정의역: $\{x\,|\,x\ge0\}$
치역: $\{y\,|\,y\ge0\}$

043 답



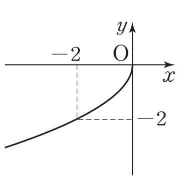
정의역: $\{x\,|\,x\ge0\}$
치역: $\{y\,|\,y\le0\}$

044 답



정의역: $\{x\,|\,x\le0\}$
치역: $\{y\,|\,y\ge0\}$

045 답



정의역: $\{x\,|\,x\le0\}$
치역: $\{y\,|\,y\le0\}$

046 답 $-1,\ 5,\ 2,\ 5$

047 답 $y=-\sqrt{3x-6}+3$

$y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-\sqrt{3(x-2)}+3$
$\therefore\ y=-\sqrt{3x-6}+3$

048 답 $y=\sqrt{-5x+5}-3$

$y=\sqrt{-5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\sqrt{-5(x-1)}-3$
$\therefore\ y=\sqrt{-5x+5}-3$

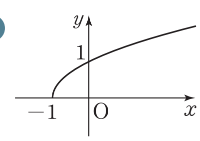
049 답 $y=-\sqrt{-2x-8}+7$

$y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-\sqrt{-2\{x-(-4)\}}+7$
$\therefore\ y=-\sqrt{-2x-8}+7$

050 답 $y=\sqrt{3x+6}-4$

$y=\sqrt{3x}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\sqrt{3\{x-(-2)\}}+1-5$
$\therefore\ y=\sqrt{3x+6}-4$

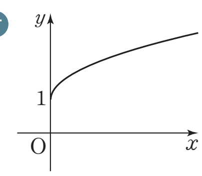
051 답



정의역: $\{x\,|\,x\ge-1\}$
치역: $\{y\,|\,y\ge0\}$

$y=\sqrt{x+1}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

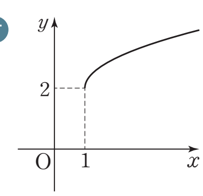
052 답



정의역: $\{x\,|\,x\ge0\}$
치역: $\{y\,|\,y\ge1\}$

$y=\sqrt{x}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

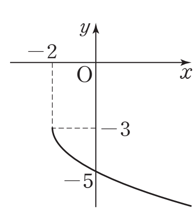
053 답



정의역: $\{x\,|\,x\ge1\}$
치역: $\{y\,|\,y\ge2\}$

$y=\sqrt{x-1}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

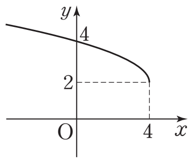
054 답



정의역: $\{x\,|\,x\ge-2\}$
치역: $\{y\,|\,y\le-3\}$

$y=-\sqrt{2(x+2)}-3$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

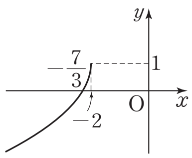
055 답



정의역: $\{x|x\le4\}$
치역: $\{y|y\ge2\}$

$y=\sqrt{-(x-4)}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

056 답



정의역: $\{x|x\le-2\}$
치역: $\{y|y\le1\}$

$y=-\sqrt{-3(x+2)}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

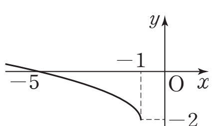
057 답 $y=\sqrt{5(x+1)}-1$

058 답 $y=-\sqrt{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}+4$

059 답 $y=\sqrt{-4(x-2)}-5$

060 답 $y=-\sqrt{-2(x+3)}+3$

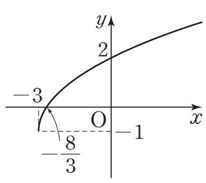
061 답



정의역: $\{x|x\le-1\}$
치역: $\{y|y\ge-2\}$

$y=\sqrt{-x-1}-2=\sqrt{-(x+1)}-2$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

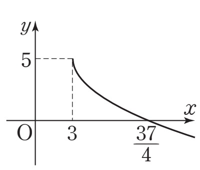
062 답



정의역: $\{x|x\ge-3\}$
치역: $\{y|y\ge-1\}$

$y=\sqrt{3x+9}-1=\sqrt{3(x+3)}-1$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

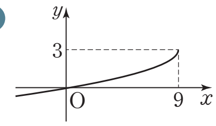
063 답



정의역: $\{x|x\ge3\}$
치역: $\{y|y\le5\}$

$y=-\sqrt{4x-12}+5=-\sqrt{4(x-3)}+5$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

064 답



정의역: $\{x|x\le9\}$
치역: $\{y|y\le3\}$

$y=-\sqrt{9-x}+3=-\sqrt{-(x-9)}+3$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 9만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

실전유형

220~221쪽

065 답 -1

$y=\sqrt{3x-6}-2$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\sqrt{3(x-a)-6}-2+b=\sqrt{3x-3a-6}-2+b$
이 식이 $y=\sqrt{3x+6}+1$과 일치하므로
$-3a-6=6,\ -2+b=1$
$\therefore\ a=-4,\ b=3$
$\therefore\ a+b=-1$

066 답 ③

$y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\sqrt{2(x-1)}+3$
이 함수의 그래프가 점 $(9,\ a)$를 지나므로
$a=4+3=7$

067 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $y=-\sqrt{x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.
ㄷ. $y=\sqrt{x-3}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 보기에서 그 그래프가 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

068 답 8

$y=-\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-\sqrt{a(x-b)}-2$
이 함수의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$y=\sqrt{a(x-b)}+2=\sqrt{ax-ab}+2$
이 식이 $y=\sqrt{5x-5}+c$와 일치하므로
$a=5,\ ab=5,\ 2=c$
$\therefore\ a=5,\ b=1,\ c=2$
$\therefore\ a+b+c=8$

069 답 -3

$1-2x\ge0$에서 $x\le\frac{1}{2}$이므로 정의역은

$\left\{x \middle| x\le\frac{1}{2}\right\}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

치역은 $\{y|y\ge-6\}$이므로 $b=-6$

$\therefore ab=-3$

070 답 5

$3x+a\ge0$에서 $x\ge-\frac{a}{3}$이므로 정의역은

$\left\{x \middle| x\ge-\frac{a}{3}\right\}$

즉, $-\frac{a}{3}=-1$이므로 $a=3$

치역은 $\{y|y\le b\}$이므로 $b=2$

$\therefore a+b=5$

071 답 ①

$y=-\sqrt{x-a}+a+2$의 그래프가 점 $(a,\ -a)$를 지나므로

$-a=a+2,\ -2a=2$ $\quad\therefore a=-1$

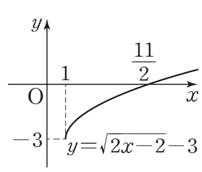
따라서 함수 $y=-\sqrt{x+1}+1$의 치역은

$\{y|y\le1\}$

072 답 ③

$y=\sqrt{2x-2}-3=\sqrt{2(x-1)}-3$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{2x-2}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2, 3사분면을 지나지 않는다.



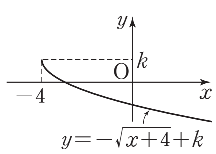
073 답 2

$y=-\sqrt{x+4}+k$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

$y=-\sqrt{x+4}+k$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 $y\le0$이어야 하므로

$-2+k\le0$ $\quad\therefore k\le2$

따라서 자연수 k의 최댓값은 2이다.



074 답 제1사분면

$y=\frac{bx+c}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab+c}{x+a}=\frac{-ab+c}{x+a}+b$이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a,\ y=b$

따라서 $-a<0,\ b<0$이므로

$a>0,\ b<0$

또 $x=0$일 때, $y>0$이므로

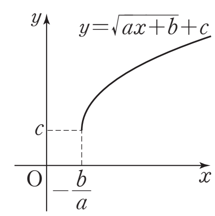
$\frac{c}{a}>0$ $\quad\therefore c>0$

$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a>0,\ -\frac{b}{a}>0,\ c>0$이므로

$y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

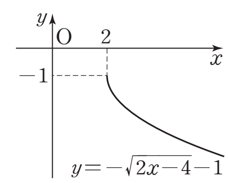
따라서 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 제1사분면을 지난다.



075 답 ④

$y=-\sqrt{2x-4}-1=-\sqrt{2(x-2)}-1$이므로 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

④ 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.



076 답 ①

ㄴ. $a<0$이면 치역은 $\{y|y\ge0\}$이다.

ㄹ. $a<0$이면 그래프는 제2사분면을 지난다.

ㅁ. $|a|$의 값이 커질수록 그래프는 x축에서 멀어진다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

개념유형

223~224쪽

077 답 $-2,\ -3,\ 2,\ -1,\ -1,\ -2$

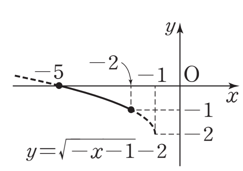
078 답 최댓값: 0, 최솟값: -1

$y=\sqrt{-x-1}-2=\sqrt{-(x+1)}-2$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-5\le x\le-2$에서

$y=\sqrt{-x-1}-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-5$일 때 최댓값 0,

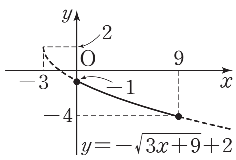
$x=-2$일 때 최솟값 -1을 갖는다.



079 답 **최댓값: -1, 최솟값: -4**

$y=-\sqrt{3x+9}+2=-\sqrt{3(x+3)}+2$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

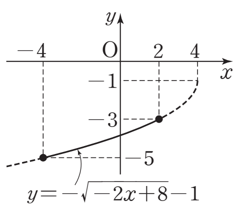
따라서 $0\le x\le 9$에서 $y=-\sqrt{3x+9}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=0$일 때 최댓값 -1, $x=9$일 때 최솟값 -4를 갖는다.



080 답 **최댓값: -3, 최솟값: -5**

$y=-\sqrt{-2x+8}-1=-\sqrt{-2(x-4)}-1$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-4\le x\le 2$에서 $y=-\sqrt{-2x+8}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$일 때 최댓값 -3, $x=-4$일 때 최솟값 -5를 갖는다.



081 답 **-1, 1, a, 1, 1, 1, 1, 1**

082 답 **$a=-2$, $b=4$, $c=-1$**

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\,(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x-2)}-1$ …… ㉠

이라 하자.

㉠의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{a(0-2)}-1$, $\sqrt{-2a}=2$

양변을 제곱하면

$-2a=4$ $\quad\therefore a=-2$

이를 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{-2(x-2)}-1=\sqrt{-2x+4}-1$

$\therefore b=4$, $c=-1$

083 답 **$a=3$, $b=6$, $c=2$**

주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\,(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x+2)}+2$ …… ㉠

라 하자.

㉠의 그래프가 점 $(1, -1)$을 지나므로

$-1=-\sqrt{a(1+2)}+2$, $\sqrt{3a}=3$

양변을 제곱하면

$3a=9$ $\quad\therefore a=3$

이를 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{3(x+2)}+2=-\sqrt{3x+6}+2$

$\therefore b=6$, $c=2$

084 답 **$a=-1$, $b=1$, $c=2$**

주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\,(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x-1)}+2$ …… ㉠

라 하자.

㉠의 그래프가 점 $(-3, 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{a(-3-1)}+2$, $\sqrt{-4a}=2$

양변을 제곱하면

$-4a=4$ $\quad\therefore a=-1$

이를 ㉠에 대입하면

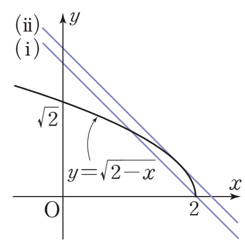
$y=-\sqrt{-(x-1)}+2=-\sqrt{-x+1}+2$

$\therefore b=1$, $c=2$

085 답 **1, $2k-1$, $2k-1$, $\frac{5}{4}$, 1, $\frac{5}{4}$, 1, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{4}$**

086 답 (1) **$2\le k<\frac{9}{4}$** (2) **$k<2$ 또는 $k=\frac{9}{4}$** (3) **$k>\frac{9}{4}$**

$y=\sqrt{2-x}=\sqrt{-(x-2)}$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(2, 0)$을 지날 때

$0=-2+k$ $\quad\therefore k=2$

(ii) 직선 $y=-x+k$와 $y=\sqrt{2-x}$의 그래프가 접할 때

$-x+k=\sqrt{2-x}$의 양변을 제곱하면

$x^2-2kx+k^2=2-x$

$\therefore x^2-(2k-1)x+k^2-2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2k-1)\}^2-4(k^2-2)=0$

$-4k+9=0$ $\quad\therefore k=\frac{9}{4}$

(1) 함수의 그래프와 직선이 서로 다른 두 점에서 만날 때

$2\le k<\frac{9}{4}$

(2) 함수의 그래프와 직선이 한 점에서 만날 때

$k<2$ 또는 $k=\frac{9}{4}$

(3) 함수의 그래프와 직선이 만나지 않을 때

$k>\frac{9}{4}$

087 답 **2, 2, 2, $x-2$, 2**

088 답 **$y=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}\ (x\ge 1)$**

함수 $y=\sqrt{2x-3}+1$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge 1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge 1\}$이다.

$y=\sqrt{2x-3}+1$에서 $y-1=\sqrt{2x-3}$

양변을 제곱한 후 x에 대하여 풀면

$(y-1)^2=2x-3 \qquad \therefore\ x=\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{3}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}\ (x\ge1)$

089 답 $y=\frac{1}{3}(x+1)^2-2\ (x\ge-1)$

함수 $y=\sqrt{3x+6}-1$의 치역이 $\{y|y\ge-1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\ge-1\}$이다.

$y=\sqrt{3x+6}-1$에서 $y+1=\sqrt{3x+6}$

양변을 제곱한 후 x에 대하여 풀면

$(y+1)^2=3x+6 \qquad \therefore\ x=\frac{1}{3}(y+1)^2-2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{3}(x+1)^2-2\ (x\ge-1)$

090 답 $y=(x-5)^2+3\ (x\le5)$

함수 $y=-\sqrt{x-3}+5$의 치역이 $\{y|y\le5\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\le5\}$이다.

$y=-\sqrt{x-3}+5$에서 $y-5=-\sqrt{x-3}$

양변을 제곱한 후 x에 대하여 풀면

$(y-5)^2=x-3 \qquad \therefore\ x=(y-5)^2+3$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=(x-5)^2+3\ (x\le5)$

091 답 $y=-(x+3)^2+2\ (x\le-3)$

함수 $y=-\sqrt{-x+2}-3$의 치역이 $\{y|y\le-3\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\le-3\}$이다.

$y=-\sqrt{-x+2}-3$에서 $y+3=-\sqrt{-x+2}$

양변을 제곱한 후 x에 대하여 풀면

$(y+3)^2=-x+2 \qquad \therefore\ x=-(y+3)^2+2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-(x+3)^2+2\ (x\le-3)$

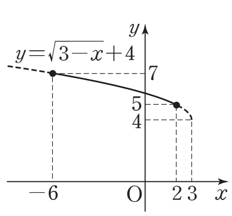
실전유형

225~226쪽

092 답 2

$y=\sqrt{3-x}+4=\sqrt{-(x-3)}+4$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-6\le x\le2$에서 $y=\sqrt{3-x}+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-6$일 때 최댓값 7, $x=2$일 때 최솟값 5를 갖는다.



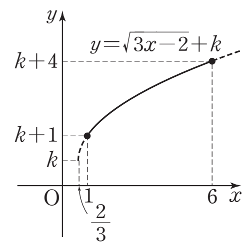
즉, $M=7$, $m=5$이므로

$M-m=2$

093 답 ⑤

$y=\sqrt{3x-2}+k=\sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}+k$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{2}{3}$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $1\le x\le6$에서 $y=\sqrt{3x-2}+k$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=6$일 때 최댓값 $k+4$, $x=1$일 때 최솟값 $k+1$을 갖는다.



즉, $k+4=5$이므로 $k=1$

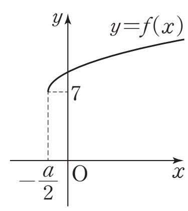
따라서 구하는 최솟값은

$k+1=1+1=2$

094 답 11

$f(x)=\sqrt{2x+a}+7=\sqrt{2\left(x+\frac{a}{2}\right)}+7$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{a}{2}$만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-\frac{a}{2}$일 때 최솟값 7을 갖는다.



즉, $-\frac{a}{2}=-2$, $7=m$이므로

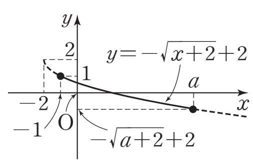
$a=4$, $m=7$

$\therefore\ a+m=11$

095 답 8

$y=-\sqrt{x+2}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le a$에서 $y=-\sqrt{x+2}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-1$일 때 최댓값 1, $x=a$일 때 최솟값 $-\sqrt{a+2}+2$를 갖는다.



$\therefore\ b=1$, $-\sqrt{a+2}+2=-1$

$-\sqrt{a+2}+2=-1$에서 $\sqrt{a+2}=3$

양변을 제곱하면

$a+2=9 \qquad \therefore\ a=7$

$\therefore\ a+b=8$

096 답 12

주어진 그래프는 $y=\sqrt{ax}\,(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x-1)}-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이라 하자.

㉠의 그래프가 점 $(-7,\ 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{-8a}-3$, $\sqrt{-8a}=4$

양변을 제곱하면

$-8a=16 \qquad \therefore\ a=-2$

이를 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{-2(x-1)}-3=\sqrt{-2x+2}-3$

$\therefore\ b=2,\ c=-3$

$\therefore\ abc=12$

097 답 ②

주어진 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=\sqrt{x+2}-1$

$\therefore\ f(7)=3-1=2$

098 답 -3

주어진 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\,(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x-3)}+3$ …… ㉠

이라 하자.

㉠의 그래프가 원점을 지나므로

$0=-\sqrt{-3a}+3,\ \sqrt{-3a}=3$

양변을 제곱하면

$-3a=9\qquad\therefore\ a=-3$

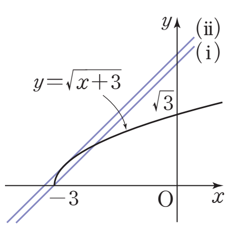
이를 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{-3(x-3)}+3=-\sqrt{-3x+9}+3$

이 그래프가 점 $(-9,\ k)$를 지나므로

$k=-6+3=-3$

099 답 ③



$y=\sqrt{x+3}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이고, $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.

(ⅰ) 직선 $y=x+k$가 점 $(-3,\ 0)$을 지날 때

$0=-3+k\qquad\therefore\ k=3$

(ⅱ) 직선 $y=x+k$와 $y=\sqrt{x+3}$의 그래프가 접할 때

$x+k=\sqrt{x+3}$의 양변을 제곱하면

$x^2+2kx+k^2=x+3$

$\therefore\ x^2+(2k-1)x+k^2-3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

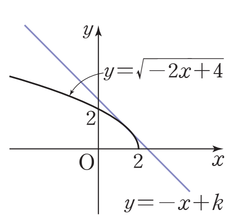
$D=(2k-1)^2-4(k^2-3)=0$

$-4k+13=0\qquad\therefore\ k=\dfrac{13}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$3\le k<\dfrac{13}{4}$

100 답 3



$y=\sqrt{-2x+4}=\sqrt{-2(x-2)}$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고,

$y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k인 직선이다.

$-x+k=\sqrt{-2x+4}$의 양변을 제곱하면

$x^2-2kx+k^2=-2x+4$

$\therefore\ x^2-2(k-1)x+k^2-4=0$

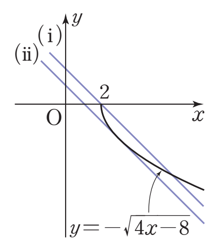
이 이차방정식의 실근이 존재하지 않아야 하므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2-4)<0$

$-2k+5<0\qquad\therefore\ k>\dfrac{5}{2}$

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 3이다.

101 답 ②



$y=-\sqrt{4x-8}=-\sqrt{4(x-2)}$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고,

$y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k인 직선이다.

(ⅰ) 직선 $y=-x+k$가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때

$0=-2+k\qquad\therefore\ k=2$

(ⅱ) 직선 $y=-x+k$와 $y=-\sqrt{4x-8}$의 그래프가 접할 때

$-x+k=-\sqrt{4x-8}$의 양변을 제곱하면

$x^2-2kx+k^2=4x-8$

$\therefore\ x^2-2(k+2)x+k^2+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-(k+2)\}^2-(k^2+8)=0$

$4k-4=0\qquad\therefore\ k=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수의 그래프와 직선이 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$k=1$ 또는 $k>2$

따라서 실수 k의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.

102 답 2

함수 $y=\sqrt{x+2}-3$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge-3\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge-3\}$이다.

$y=\sqrt{x+2}-3$에서 $y+3=\sqrt{x+2}$

양변을 제곱한 후 x에 대하여 풀면

$y^2+6y+9=x+2$

$\therefore\ x=y^2+6y+7$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=x^2+6x+7\ (x\ge-3)$

따라서 $a=6,\ b=7,\ c=-3$이므로

$a-b-c=2$

103 답 ④

$f^{-1}(5)=k\,(k$는 상수)라 하면 $f(k)=5$이므로

$\sqrt{2k-4}+3=5,\ \sqrt{2k-4}=2$

양변을 제곱하면

$2k-4=4\qquad\therefore\ k=4$

$\therefore\ f^{-1}(5)=4$

104 답 21

$f(3)=4$에서 $\sqrt{3a+b}=4$

양변을 제곱하면 $3a+b=16$ …… ㉠

$g(5)=6$에서 $f(6)=5$이므로 $\sqrt{6a+b}=5$

양변을 제곱하면 $6a+b=25$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=7$

$\therefore ab=21$

실전유형으로 중단원 점검 227~228쪽

1 답 ①

$\sqrt{2-x}$에서 $2-x\geq 0$이어야 하므로 $x\leq 2$

$\sqrt{2x+9}$에서 $2x+9>0$이어야 하므로 $x>-\dfrac{9}{2}$

$\therefore -\dfrac{9}{2}<x\leq 2$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$-4+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2=-7$

2 답 ④

$$\frac{x}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}$$
$$=\frac{x(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1})-x(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1})}{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1})}$$
$$=\frac{2x\sqrt{x+1}}{(2x+1)-(x+1)}$$
$$=\frac{2x\sqrt{x+1}}{x}$$
$$=2\sqrt{x+1}$$

3 답 $-6-4\sqrt{3}$

$$x=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(1-\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}$$
$$=\frac{4-2\sqrt{3}}{1-3}=\sqrt{3}-2 \quad \cdots\cdots \text{ⅰ}$$
$$\therefore \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$$
$$=\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2+(\sqrt{x+1}+1)^2}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)}$$
$$=\frac{(x+1-2\sqrt{x+1}+1)+(x+1+2\sqrt{x+1}+1)}{(x+1)-1}$$
$$=\frac{2x+4}{x} \quad \cdots\cdots \text{ⅱ}$$
$$=\frac{2(\sqrt{3}-2)+4}{\sqrt{3}-2}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}$$
$$=\frac{6+4\sqrt{3}}{3-4}=-6-4\sqrt{3} \quad \cdots\cdots \text{ⅲ}$$

채점 기준

ⅰ $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$의 분모를 유리화하기	30 %
ⅱ $\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}+\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$을 계산하기	40 %
ⅲ 식의 값 구하기	30 %

4 답 2

$y=\sqrt{-2x}+3$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-2(x+1)}+3+a=\sqrt{-2x-2}+3+a$ …… ⅰ

이 식이 $y=\sqrt{-2x+b}-1$과 일치하므로

$-2=b$, $3+a=-1$

$\therefore a=-4$, $b=-2$ …… ⅱ

$\therefore b-a=2$ …… ⅲ

채점 기준

ⅰ 평행이동한 그래프의 식 구하기	50 %
ⅱ a, b의 값 구하기	40 %
ⅲ $b-a$의 값 구하기	10 %

5 답 ①

$6x+a\geq 0$에서 $x\geq -\dfrac{a}{6}$이므로 정의역은

$\left\{x \,\middle|\, x\geq -\dfrac{a}{6}\right\}$

즉, $-\dfrac{a}{6}=-\dfrac{1}{3}$이므로 $a=2$

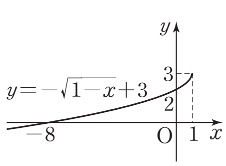
치역은 $\{y\,|\,y\geq -5\}$이므로 $b=-5$

$\therefore a+b=-3$

6 답 ③

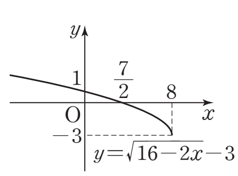
$y=-\sqrt{1-x}+3=-\sqrt{-(x-1)}+3$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=-\sqrt{1-x}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



7 답 ④

$y=\sqrt{16-2x}-3=\sqrt{-2(x-8)}-3$이므로 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 정의역은 $\{x\,|\,x\leq 8\}$이다.

② 치역은 $\{y\,|\,y\geq -3\}$이다.

③ $y=0$을 $y=\sqrt{16-2x}-3$에 대입하면

$0=\sqrt{16-2x}-3$, $\sqrt{16-2x}=3$

양변을 제곱하면

$16-2x=9 \quad \therefore x=\dfrac{7}{2}$

따라서 그래프는 x축과 점 $\left(\dfrac{7}{2}, 0\right)$에서 만난다.

④ 그래프를 x축의 방향으로 -8만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동하면 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 겹쳐진다.

⑤ 그래프는 제1, 2, 4사분면을 지난다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

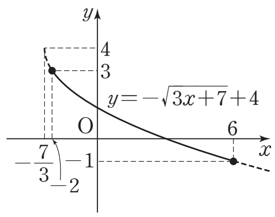
8 답 2

$y=-\sqrt{3x+7}+4=-\sqrt{3\left(x+\frac{7}{3}\right)}+4$이므로 이 함수의 그래프는

$y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{7}{3}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-2\le x\le 6$에서

$y=-\sqrt{3x+7}+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-2$일 때 최댓값 3, $x=6$일 때 최솟값 -1을 갖는다.



즉, $M=3$, $m=-1$이므로

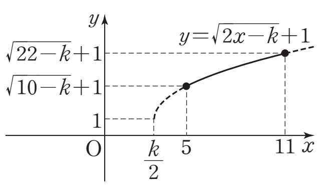
$M+m=2$

9 답 ②

$y=\sqrt{2x-k}+1=\sqrt{2\left(x-\frac{k}{2}\right)}+1$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{k}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $5\le x\le 11$에서

$y=\sqrt{2x-k}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=11$일 때 최댓값 $\sqrt{22-k}+1$, $x=5$일 때 최솟값 $\sqrt{10-k}+1$을 갖는다.



즉, $\sqrt{10-k}+1=3$이므로

$\sqrt{10-k}=2$

양변을 제곱하면

$10-k=4\qquad\therefore k=6$

따라서 구하는 최댓값은

$\sqrt{22-k}+1=\sqrt{22-6}+1=5$

10 답 ⑤

주어진 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\,(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x-1)}+2\qquad\cdots\cdots$ ㉠

라 하자.

㉠의 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{a}+2$, $\sqrt{a}=2$

양변을 제곱하면 $a=4$

이를 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{4(x-1)}+2=-\sqrt{4x-4}+2$

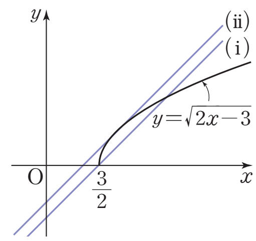
$\therefore b=-4,\ c=2$

$\therefore a-b+c=10$

11 답 ①

$y=\sqrt{2x-3}=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}$이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이고,

$y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지날 때

$0=\frac{3}{2}+k\qquad\therefore k=-\frac{3}{2}$

(ii) 직선 $y=x+k$와 $y=\sqrt{2x-3}$의 그래프가 접할 때

$x+k=\sqrt{2x-3}$의 양변을 제곱하면

$x^2+2kx+k^2=2x-3$

$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2+3)=0$

$-2k-2=0\qquad\therefore k=-1$

(i), (ii)에서 함수의 그래프와 직선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$-\frac{3}{2}\le k<-1$

따라서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=-1$이므로

$ab=\frac{3}{2}$

12 답 $\frac{7}{2}$

함수 $y=-\sqrt{4x-1}+2$의 치역이 $\{y\,|\,y\le 2\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\le 2\}$이다. $\cdots\cdots$ i

$y=-\sqrt{4x-1}+2$에서 $y-2=-\sqrt{4x-1}$

양변을 제곱한 후 x에 대하여 풀면

$y^2-4y+4=4x-1\qquad\therefore x=\frac{1}{4}y^2-y+\frac{5}{4}$ $\cdots\cdots$ ii

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=\frac{1}{4}x^2-x+\frac{5}{4}\ (x\le 2)$ $\cdots\cdots$ iii

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{5}{4}$, $c=2$이므로

$a+b+c=\frac{7}{2}$ $\cdots\cdots$ iv

채점 기준

i 역함수의 정의역 구하기	30 %
ii 주어진 함수를 x에 대하여 풀기	30 %
iii 역함수 구하기	20 %
iv $a+b+c$의 값 구하기	20 %

memo

memo