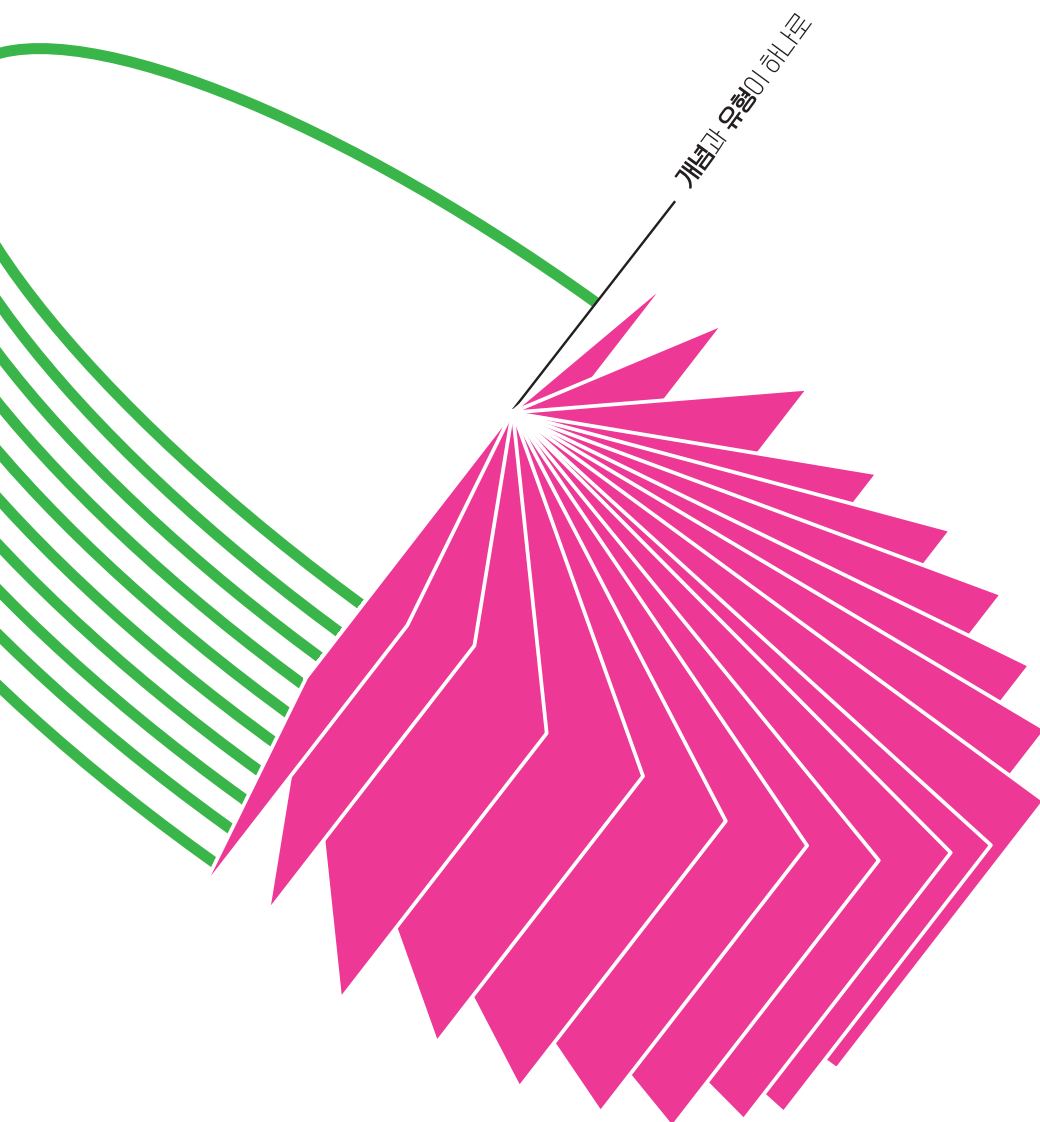


개념+유형

대수

정답과 해설



개념편

정답과 해설

I-1 01 지수

거듭제곱과 거듭제곱근

개념 Check

9쪽

1 답 (1) 4, $-2 \pm 2\sqrt{3}i$ (2) $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{2}i$

2 답 (1) 6 (2) -5 (3) -3 (4) 2

문제

10~12쪽

01-1 답 ⑤

① -4의 제곱근을 x 라 하면 $x^2 = -4$

$\therefore x = \pm 2i$

따라서 -4의 제곱근은 $\pm 2i$ 이다.

② -512의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = -512$

$x^3 + 512 = 0$, $(x+8)(x^2 - 8x + 64) = 0$

$\therefore x = -8$ 또는 $x = 4 \pm 4\sqrt{3}i$

따라서 -512의 세제곱근은 -8 , $4 \pm 4\sqrt{3}i$ 이다.

③ $\sqrt{256} = 16$ 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 16$

$x^4 - 16 = 0$, $(x+2)(x-2)(x^2 + 4) = 0$

$\therefore x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

따라서 $\sqrt{256}$ 의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 2 이다.

④ 0의 세제곱근은 0이다.

⑤ n 이 짝수일 때, 6의 n 제곱근 중 실수인 것은 $\pm \sqrt[n]{6}$ 의 2개이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

01-2 답 $5\sqrt{3}$

$\sqrt{81} = 9$ 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 9$

$x^4 - 9 = 0$, $(x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0$

$\therefore x = \pm\sqrt{3}$ 또는 $x = \pm\sqrt{3}i$

이때 음수인 것은 $-\sqrt{3}$ 이므로

$a = -\sqrt{3}$

-125의 세제곱근을 y 라 하면 $y^3 = -125$

$y^3 + 125 = 0$, $(y+5)(y^2 - 5y + 25) = 0$

$\therefore y = -5$ 또는 $y = \frac{5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$

이때 실수인 것은 -5 이므로

$b = -5$

$\therefore ab = -\sqrt{3} \times (-5) = 5\sqrt{3}$

02-1 답 (1) 5 (2) 4 (3) x (4) 1

(1) $\sqrt[6]{4} \times \sqrt[6]{16} + \sqrt[4]{81} = \sqrt[6]{4 \times 16} + \sqrt[4]{3^4}$

$= \sqrt[6]{2^6} + 3 = 2 + 3 = 5$

(2) $(\sqrt[3]{7})^4 \div \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{7^4} \div \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{729}$

$= \sqrt[3]{\frac{7^4}{7}} - \sqrt[3]{3^6}$

$= \sqrt[3]{7^3} - 3$

$= 7 - 3 = 4$

(3) $\sqrt[5]{x^4} \times \sqrt[3]{x^2} \div \sqrt[15]{x^7} = \sqrt[15]{x^{12} \times x^{10} \div x^7}$

$= \sqrt[15]{\frac{x^{12} \times x^{10}}{x^7}} = \sqrt[15]{x^{15}} = x$

(4) $\sqrt{\frac{4\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}} \div \sqrt[4]{\frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}}{6\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt[6]{x}}{12\sqrt{x}} \div \frac{\sqrt[8]{x}}{12\sqrt{x}}$

$= \frac{\sqrt{x}}{6\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt[6]{x}}{12\sqrt{x}} \times \frac{12\sqrt{x}}{\sqrt[8]{x}} = 1$

02-2 답 $\sqrt[3]{2}$

$\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{\sqrt{16}} + 1} = \frac{\sqrt[6]{2^2} + \sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[6]{2^4} + 1} = \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{2^2} + 1}$

$= \frac{\sqrt[3]{2}(1 + \sqrt[3]{2^2})}{\sqrt[3]{2^2} + 1} = \sqrt[3]{2}$

03-1 답 $\sqrt[6]{2} < \sqrt[8]{3} < \sqrt[12]{6}$

$\sqrt[12]{6}$, $\sqrt[8]{3}$, $\sqrt[6]{2}$ 에서 12, 8, 6의 최소공배수가 24이므로

$\sqrt[12]{6} = \sqrt[24]{6^2} = \sqrt[24]{36}$, $\sqrt[8]{3} = \sqrt[24]{3^3} = \sqrt[24]{27}$,

$\sqrt[6]{2} = \sqrt[24]{2^4} = \sqrt[24]{16}$

이때 $16 < 27 < 36$ 이므로

$\sqrt[24]{16} < \sqrt[24]{27} < \sqrt[24]{36}$

$\therefore \sqrt[6]{2} < \sqrt[8]{3} < \sqrt[12]{6}$

03-2 답 12

$\sqrt[3]{6} = \sqrt[6]{6}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3\sqrt{12}} = \sqrt[12]{12}$ 에서 6, 3, 12의 최소공배수가 12이므로

$\sqrt[6]{6} = \sqrt[12]{6^2} = \sqrt[12]{36}$, $\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}$

이때 $12 < 16 < 36$ 이므로 $\sqrt[12]{12} < \sqrt[12]{16} < \sqrt[12]{36}$

$\therefore \sqrt[4]{3\sqrt{12}} < \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{\sqrt{6}}$

따라서 $a = \sqrt[4]{3\sqrt{12}} = \sqrt[12]{12}$ 이므로

$a^{12} = (\sqrt[12]{12})^{12} = 12$

03-3 **답** $B < C < A$

$$A = \sqrt{2^3 \sqrt{3}} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = \sqrt[6]{24}$$

$$B = \sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2^2 \times 3} = \sqrt[6]{12}$$

$$C = \sqrt[3]{3\sqrt{2}} = \sqrt[3]{3^2 \times 2} = \sqrt[6]{18}$$

이때 $12 < 18 < 24$ 이므로 $\sqrt[6]{12} < \sqrt[6]{18} < \sqrt[6]{24}$

$\therefore B < C < A$

2 지수의 확장

개념 Check

14쪽

1 **답** (1) 82 (2) 2 (3) a^2 (4) $\sqrt[4]{a}$ (5) 9 (6) 8

문제

15~20쪽

04-1 **답** (1) 4 (2) $\frac{5}{32}$ (3) 3 (4) $\frac{1}{27}$

$$\begin{aligned} (1) 4^{\frac{1}{4}} \times 8^{-\frac{1}{2}} \div 16^{-\frac{3}{4}} &= (2^2)^{\frac{1}{4}} \times (2^3)^{-\frac{1}{2}} \div (2^4)^{-\frac{3}{4}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{3}{2}} \div 2^{-3} \\ &= 2^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - (-3)} = 2^2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right\}^{0.75} \times \left\{ \left(\frac{16}{25} \right)^{\frac{5}{4}} \right\}^{-\frac{2}{5}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^{4 \times 0.75} \times \left(\frac{4}{5} \right)^{2 \times \frac{5}{4} \times (-\frac{2}{5})} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^3 \times \left(\frac{4}{5} \right)^{-1} = \frac{1}{8} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sqrt[4]{3\sqrt{81}} \times \sqrt{3\sqrt{81}} &= \{ (3^4)^{\frac{1}{3}} \}^{\frac{1}{4}} \times \{ (3^4)^{\frac{1}{3}} \}^{\frac{1}{2}} \\ &= 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) (2^{\sqrt{6}} \times 3^{2\sqrt{6}-\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} \div 18^{3/2} \\ &= (2^{\sqrt{6}})^{\sqrt{3}} \times (3^{2\sqrt{6}-\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} \div (2 \times 3^2)^{3/2} \\ &= 2^{3\sqrt{2}} \times 3^{6\sqrt{2}-3} \div (2^{3/2} \times 3^{6/2}) = 3^{-3} = \frac{1}{27} \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} (3) \sqrt[4]{3\sqrt{81}} \times \sqrt{3\sqrt{81}} &= \sqrt[12]{81} \times \sqrt[6]{81} = \sqrt[12]{81} \times \sqrt[12]{81^2} \\ &= \sqrt[12]{81^3} = \sqrt[12]{3^{12}} = 3 \end{aligned}$$

04-2 **답** (1) $\frac{13}{12}$ (2) $\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} (1) \sqrt{a^3 \sqrt{a^2 \sqrt{a^5}}} &= \{ a \times (a^2 \times a^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{3}} \}^{\frac{1}{2}} = \{ a \times (a^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}} \}^{\frac{1}{2}} \\ &= (a \times a^{\frac{7}{6}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{13}{6}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{13}{12}} \end{aligned}$$

즉, $a^k = a^{\frac{13}{12}}$ 이므로 $k = \frac{13}{12}$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt{\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}}} &= \left(\frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4}}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{a^{\frac{1}{12}}}{a^{\frac{1}{8}}} \times \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{8}}} \\ &= a^{\frac{1}{12} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

즉, $a^k = a^{\frac{1}{6}}$ 이므로 $k = \frac{1}{6}$

다른 풀이

$$\begin{aligned} (1) \sqrt{a^3 \sqrt{a^2 \sqrt{a^3}}} &= \sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^3}} \\ &= \sqrt{a} \times \sqrt[6]{a^2} \times \sqrt[12]{a^3} \\ &= a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{4}} \\ &= a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{13}{12}} \end{aligned}$$

$\therefore k = \frac{13}{12}$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt{\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}}} &= \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[4]{a}} \times \frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^4}}}{\sqrt[4]{a}} = \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}} \times \frac{\sqrt[12]{a^4}}{\sqrt[8]{a}} \\ &= \frac{\sqrt[12]{a^5}}{\sqrt[8]{a^2}} = \frac{a^{\frac{5}{12}}}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{5}{12} - \frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

$\therefore k = \frac{1}{6}$

05-1 **답** (1) 80 (2) -3

$$\begin{aligned} (1) (3^{\frac{1}{4}} - 1)(3^{\frac{1}{4}} + 1)(3^{\frac{1}{2}} + 1)(3 + 1)(3^2 + 1) \\ &= \{ (3^{\frac{1}{4}})^2 - 1 \} (3^{\frac{1}{2}} + 1)(3 + 1)(3^2 + 1) \\ &= (3^{\frac{1}{2}} - 1)(3^{\frac{1}{2}} + 1)(3 + 1)(3^2 + 1) \\ &= \{ (3^{\frac{1}{2}})^2 - 1 \} (3 + 1)(3^2 + 1) \\ &= (3 - 1)(3 + 1)(3^2 + 1) \\ &= (3^2 - 1)(3^2 + 1) \\ &= 3^4 - 1 = 80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (2^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{1}{3}})(4^{\frac{1}{3}} + 10^{\frac{1}{3}} + 25^{\frac{1}{3}}) \\ &= (2^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{1}{3}}) \{ (2^{\frac{1}{3}})^2 + 2^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} + (5^{\frac{1}{3}})^2 \} \\ &= (2^{\frac{1}{3}})^3 - (5^{\frac{1}{3}})^3 \\ &= 2 - 5 = -3 \end{aligned}$$

05-2 **답** (1) $2a^2 + 6$ (2) $\frac{8}{1-a^2}$

$$\begin{aligned} (1) a^{\frac{2}{3}} &= X, a^{-\frac{1}{3}} = Y \text{로 놓으면} \\ (a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})^3 &+ (a^{\frac{2}{3}} - a^{-\frac{1}{3}})^3 \\ &= (X + Y)^3 + (X - Y)^3 \\ &= (X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3) \\ &\quad + (X^3 - 3X^2Y + 3XY^2 - Y^3) \\ &= 2X^3 + 6XY^2 \\ &= 2(a^{\frac{2}{3}})^3 + 6a^{\frac{2}{3}} \times (a^{-\frac{1}{3}})^2 \\ &= 2a^2 + 6a^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}} = 2a^2 + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \frac{1}{1-a^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{1+a^{\frac{1}{4}}} + \frac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+a} \\
 &= \frac{1+a^{\frac{1}{4}}+1-a^{\frac{1}{4}}}{(1-a^{\frac{1}{4}})(1+a^{\frac{1}{4}})} + \frac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+a} \\
 &= \frac{2}{1-a^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+a} \\
 &= \frac{2(1+a^{\frac{1}{2}})+2(1-a^{\frac{1}{2}})}{(1-a^{\frac{1}{2}})(1+a^{\frac{1}{2}})} + \frac{4}{1+a} \\
 &= \frac{4}{1-a} + \frac{4}{1+a} \\
 &= \frac{4(1+a)+4(1-a)}{(1-a)(1+a)} = \frac{8}{1-a^2}
 \end{aligned}$$

06-1 [답] (1) 6 (2) 34 (3) 14

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & x+x^{-1}=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2+2=2^2+2=6 \\
 (2) \quad & x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2=6^2-2=34 \\
 (3) \quad & x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^3+3(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}) \\
 &=2^3+3 \times 2=14
 \end{aligned}$$

06-2 [답] 110

$$\begin{aligned}
 8^x+8^{-x} &=2^{3x}+2^{-3x} \\
 &=(2^x+2^{-x})^3-3(2^x+2^{-x}) \\
 &=5^3-3 \times 5=110
 \end{aligned}$$

06-3 [답] $5\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
 x+x^{-1} &=(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})^3-3(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}) \\
 &=4^3-3 \times 4=52 \\
 \therefore (x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2 &=x-2+x^{-1}=52-2=50 \\
 \text{이때 } x > 1 \text{에서 } x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}} > 0 \text{이므로} \\
 x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}} &=5\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

07-1 [답] (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{7}{9}$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \text{주어진 식의 분모, 분자에 } a^x \text{을 곱하면} \\
 & \frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}} = \frac{(a^x-a^{-x})a^x}{(a^x+a^{-x})a^x} = \frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3} \\
 (2) \quad & \text{주어진 식의 분모, 분자에 } a^x \text{을 곱하면} \\
 & \frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^{3x}+a^{-3x}} = \frac{(a^{3x}-a^{-3x})a^x}{(a^{3x}+a^{-3x})a^x} = \frac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{4x}+a^{-2x}} \\
 &= \frac{(a^{2x})^2-(a^{2x})^{-1}}{(a^{2x})^2+(a^{2x})^{-1}} = \frac{2^2-2^{-1}}{2^2+2^{-1}} \\
 &= \frac{4-\frac{1}{2}}{4+\frac{1}{2}} = \frac{7}{9}
 \end{aligned}$$

07-2 [답] $\frac{62}{15}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x+2^{-x}} \text{의 분모, 분자에 } 2^x \text{을 곱하면} \\
 & \frac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x+2^{-x}} = \frac{(2^{3x}-2^{-3x})2^x}{(2^x+2^{-x})2^x} = \frac{2^{4x}-2^{-2x}}{2^{2x}+1} \\
 &= \frac{4^{2x}-4^{-x}}{4^x+1} = \frac{5^2-5^{-1}}{5+1} = \frac{62}{15}
 \end{aligned}$$

07-3 [답] $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{a^m+a^{-m}}{a^m-a^{-m}}=3 \text{의 좌변의 분모, 분자에 } a^m \text{을 곱하면} \\
 & \frac{(a^m+a^{-m})a^m}{(a^m-a^{-m})a^m}=3, \frac{a^{2m}+1}{a^{2m}-1}=3 \\
 & a^{2m}+1=3a^{2m}-3, 2a^{2m}=4 \quad \therefore a^{2m}=2 \\
 & \text{이때 } a > 0 \text{이므로} \\
 & a^m=(a^{2m})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

[다른 풀이]

$$\begin{aligned}
 & \frac{a^m+a^{-m}}{a^m-a^{-m}}=3 \text{에서 } a^m+a^{-m}=3(a^m-a^{-m}) \\
 & 2a^m=4a^{-m} \quad \therefore a^m=2a^{-m} \\
 & \text{양변에 } a^m \text{을 곱하면 } a^{2m}=2 \\
 & \text{이때 } a > 0 \text{이므로} \\
 & a^m=(a^{2m})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

08-1 [답] (1) -1 (2) 0

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 73^x=9 \text{에서 } 73=9^{\frac{1}{x}} \\
 & \therefore 3^{\frac{2}{x}}=73 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
 & 219^y=27 \text{에서 } 219=27^{\frac{1}{y}} \\
 & \therefore 3^{\frac{3}{y}}=219 \quad \dots\dots \textcircled{2} \\
 & \textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } 3^{\frac{2}{x} \div \frac{3}{y}}=73 \div 219=\frac{1}{3} \\
 & 3^{\frac{2}{x}-\frac{3}{y}}=3^{-1} \quad \therefore \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-1 \\
 (2) \quad & 2^x=5^y=\left(\frac{1}{10}\right)^z=k(k>0) \text{로 놓으면} \\
 & k \neq 1 (\because xyz \neq 0) \\
 & 2^x=k \text{에서 } 2=k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
 & 5^y=k \text{에서 } 5=k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{2} \\
 & \left(\frac{1}{10}\right)^z=k \text{에서 } \frac{1}{10}=k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{3} \\
 & \textcircled{1} \times \textcircled{2} \times \textcircled{3} \text{을 하면} \\
 & k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \times k^{\frac{1}{z}}=2 \times 5 \times \frac{1}{10}=1 \\
 & \therefore k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=1 \\
 & \text{그런데 } k \neq 1 \text{이므로 } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0
 \end{aligned}$$

08-2 ㉡ 25

$a^x = b^y = 5^z = k$ ($k > 0$)로 놓으면

$k \neq 1$ ($\because xyz \neq 0$)

$a^x = k$ 에서 $a = k^{\frac{1}{x}}$ ㉠

$b^y = k$ 에서 $b = k^{\frac{1}{y}}$ ㉡

$5^z = k$ 에서 $5 = k^{\frac{1}{z}}$

㉠ $\div$ ㉡을 하면 $\frac{a}{b} = k^{\frac{1}{x}} \div k^{\frac{1}{y}} = k^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$

이때 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ 이므로

$\frac{a}{b} = k^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = k^{\frac{2}{z}} = (k^{\frac{1}{z}})^2 = 5^2 = 25$

09-1 ㉡ $5\sqrt{5}$ 배

24시간 후의 미생물의 수는 $m_{24} = m_0 \times 5^{\frac{24}{12}} = m_0 \times 5^2$

6시간 후의 미생물의 수는 $m_6 = m_0 \times 5^{\frac{6}{12}} = m_0 \times 5^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \frac{m_{24}}{m_6} = \frac{m_0 \times 5^2}{m_0 \times 5^{\frac{1}{2}}} = 5^{2 - \frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{5}$

따라서 관찰한 지 24시간 후의 미생물의 수는 6시간 후의 미생물의 수의 $5\sqrt{5}$ 배이다.

09-2 ㉡ 512 hPa

해수면에서의 기압이 1000 hPa이므로

$1000 = k \times \alpha^0 \quad \therefore k = 1000$

즉, 해수면으로부터의 높이가 x m인 지점의 기압 P hPa은 $P = 1000\alpha^x$

해수면으로부터의 높이가 1500 m인 지점에서의 기압이 800 hPa이므로

$800 = 1000\alpha^{1500} \quad \therefore \alpha^{1500} = \frac{4}{5}$

따라서 해수면으로부터의 높이가 4500 m인 지점에서의 기압은

$1000\alpha^{4500} = 1000 \times (\alpha^{1500})^3 = 1000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 512(\text{hPa})$

연습문제

21~23쪽

- | | | | | |
|-------|------|------|-----------------|---------|
| 1 ③ | 2 ⑤ | 3 1 | 4 ③ | 5 4 |
| 6 ④ | 7 ④ | 8 ③ | 9 $\frac{3}{2}$ | 10 ⑤ |
| 11 ③ | 12 ④ | 13 ② | 14 $2\sqrt{5}$ | 15 ⑤ |
| 16 2 | 17 ① | 18 ④ | 19 ④ | 20 ㄱ, ㄷ |
| 21 15 | 22 ② | | | |

1 ① $\sqrt{625} = 25$ 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 25$

$x^4 - 25 = 0, (x^2 - 5)(x^2 + 5) = 0$

$\therefore x = \pm\sqrt{5}$ 또는 $x = \pm\sqrt{5}i$

따라서 $\sqrt{625}$ 의 네제곱근은 $\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{5}i$ 이다.

② -27 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = -27$

$x^3 + 27 = 0, (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0$

$\therefore x = -3$ 또는 $x = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 -27 의 세제곱근 중 실수인 것은 -3 이다.

③ 36 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 36$

$x^4 - 36 = 0, (x^2 - 6)(x^2 + 6) = 0$

$\therefore x = \pm\sqrt{6}$ 또는 $x = \pm\sqrt{6}i$

따라서 36 의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{6}$ 이다.

④ 4 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 4$

$x^4 - 4 = 0, (x^2 - 2)(x^2 + 2) = 0$

$\therefore x = \pm\sqrt{2}$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}i$

따라서 4 의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{2}$ 의 2개이다.

⑤ 제곱근 $25 = \sqrt{25} = 5$ 이다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

2 a 는 k 의 세제곱근이므로

$a^3 = k$ ㉠

$\sqrt[3]{4}$ 는 a 의 네제곱근이므로

$(\sqrt[3]{4})^4 = a \quad \therefore a = \sqrt[3]{4^4}$

이를 ㉠에 대입하면

$k = (\sqrt[3]{4^4})^3 = 4^4 = 256$

3 $\sqrt[4]{16} + \sqrt[3]{24} \div \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{27} = \sqrt[4]{2^4} + \sqrt[3]{24} \div \sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3^3}$
 $= 2 + \sqrt[3]{24} \div \sqrt[3]{3} - 3$
 $= 2 + \sqrt[3]{\frac{24}{3}} - 3 = \sqrt[3]{8} - 1$
 $= \sqrt[3]{2^3} - 1 = 2 - 1 = 1$

4 $\sqrt[3]{a^4b^2} \times \sqrt[3]{a^2b^5} \div \sqrt[6]{ab^2} = \sqrt[6]{a^8b^4} \times \sqrt[6]{a^2b^5} \div \sqrt[6]{ab^2}$
 $= \sqrt[6]{\frac{a^8b^4 \times a^2b^5}{ab^2}}$
 $= \sqrt[6]{a^9b^7}$

즉, $\sqrt[n]{a^p b^q} = \sqrt[6]{a^9 b^7}$ 이므로 $n = 6, p = 9, q = 7$

$\therefore n + p + q = 6 + 9 + 7 = 22$

5 $(\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1) + (\sqrt[4]{9} - \sqrt[4]{4})(\sqrt[4]{9} + \sqrt[4]{4})$
 $= (\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2} + 1) + (\sqrt[4]{9})^2 - (\sqrt[4]{4})^2$
 $= (\sqrt[3]{2})^3 + 1 + (\sqrt[3]{2})^2 - (\sqrt[3]{2})^2 - (\sqrt[4]{2})^2$
 $= 2 + 1 + 3 - 2 = 4$

6 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\sqrt[3]{3}+b=\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[3]{3}\times b=a$ 이므로
 $b=\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$
 $a=\sqrt[3]{3}\times 2\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3^2}$
 $\therefore ab=2\sqrt[3]{3^2}\times 2\sqrt[3]{3}=4\times\sqrt[3]{3^3}=4\times 3=12$

7 ① $\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}$
 ② $\sqrt[3]{7}=\sqrt[6]{7^2}=\sqrt[6]{49}$
 ③ $\sqrt{2^3\sqrt{2}}=\sqrt[3]{2^3\times 2}=\sqrt[6]{16}$
 ④ $\sqrt[3]{2\sqrt{6}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^2\times 6}}=\sqrt[6]{24}$
 ⑤ $\sqrt[3]{3\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\sqrt{3^2\times 5}}=\sqrt[6]{45}$

따라서 두 번째로 작은 수는 ④이다.

8 $\frac{10}{3^2+9^2}\times\frac{27}{2^{-5}+8^{-2}}=\frac{10}{3^2+(3^2)^2}\times\frac{3^3}{2^{-5}+(2^3)^{-2}}$
 $=\frac{10}{3^2+3^4}\times\frac{3^3}{2^{-5}+2^{-6}}$
 $=\frac{10}{3^2(1+3^2)}\times\frac{3^3}{2^{-6}(2+1)}$
 $=\frac{1}{2^{-6}}=2^6=64$

9 $\sqrt[5]{a^3\times\sqrt{a^k}}=(a^3\times a^{\frac{k}{2}})^{\frac{1}{5}}=a^{\frac{1}{5}(3+\frac{k}{2})}$
 즉, $a^{\frac{1}{5}(3+\frac{k}{2})}=a^{\frac{3}{4}}$ 이므로
 $\frac{1}{5}(3+\frac{k}{2})=\frac{3}{4}$, $3+\frac{k}{2}=\frac{15}{4}$
 $\therefore k=\frac{3}{2}$

10 $(a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{18}+1}\times(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}\div(a^2)^{3-\sqrt{2}}$
 $=a^{6+\sqrt{2}}\times a^{6-3\sqrt{2}}\div a^{6-2\sqrt{2}}$
 $=a^{6+\sqrt{2}+6-3\sqrt{2}-(6-2\sqrt{2})}=a^6$
 $\therefore k=6$

11 $\sqrt{2}=a$ 에서 $2^{\frac{1}{2}}=a$ $\therefore 2=a^2$
 $\sqrt[4]{3}=b$ 에서 $3^{\frac{1}{4}}=b$ $\therefore 3=b^4$
 $\therefore \sqrt[8]{6}=6^{\frac{1}{8}}=(2\times 3)^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{1}{8}}\times 3^{\frac{1}{8}}$
 $=(a^2)^{\frac{1}{8}}(b^4)^{\frac{1}{8}}=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}$

12 $2^{3+\sqrt{3}}=X$, $2^{3-\sqrt{3}}=Y$ 로 놓으면
 $(2^{3+\sqrt{3}}+2^{3-\sqrt{3}})^2-(2^{3+\sqrt{3}}-2^{3-\sqrt{3}})^2$
 $=(X+Y)^2-(X-Y)^2=4XY$
 $=2^2\times 2^{3+\sqrt{3}}\times 2^{3-\sqrt{3}}$
 $=2^{2+3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}}$
 $=2^8=256$

13 $x=3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}$ 의 양변을 세제곱하면
 $x^3=3+3(3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}})+3^{-1}$
 $x^3=\frac{10}{3}+3x$ $\therefore 3x^3-9x=10$
 $\therefore 3x^3-9x-6=10-6=4$

14 $x\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^3+(\frac{1}{\sqrt{x}})^3$
 $=(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^3-3(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})$
 $=(\sqrt{5})^3-3\sqrt{5}$
 $=5\sqrt{5}-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

15 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{2}{3}$ 의 좌변의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면
 $\frac{(a^x-a^{-x})a^x}{(a^x+a^{-x})a^x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}=\frac{2}{3}$
 $3(a^{2x}-1)=2(a^{2x}+1)$ $\therefore a^{2x}=5$
 $\therefore a^{4x}=(a^{2x})^2=5^2=25$

16 $4^{\frac{1}{a}}=216$ 에서 $4^{\frac{1}{a}}=6^3$
 $\therefore 6^{3a}=4$ ㉠
 $9^{\frac{1}{b}}=6$ 에서 $6^b=9$ ㉡
 ㉠ $\times$ ㉡을 하면
 $6^{3a}\times 6^b=4\times 9=36$ $\therefore 6^{3a+b}=6^2$
 $\therefore 3a+b=2$

17 $3^x=4$ 에서 $3^x=2^2$
 $\therefore 2^{\frac{2}{x}}=3$ ㉠
 $48^y=8$ 에서 $48^y=2^3$
 $\therefore 2^{\frac{3}{y}}=48$ ㉡
 ㉠ $\div$ ㉡을 하면
 $2^{\frac{2}{x}\div\frac{3}{y}}=3\div 48=\frac{1}{16}$
 $2^{\frac{2}{x}\cdot\frac{y}{3}}=2^{-4}$ $\therefore \frac{2}{x}\cdot\frac{y}{3}=-4$

18 $3^x=k^{\frac{z}{x}}$ 에서 $3=k^{\frac{z}{x}}$ ㉠
 $5^y=k^{\frac{z}{y}}$ 에서 $5=k^{\frac{z}{y}}$ ㉡
 ㉠ $\times$ ㉡을 하면
 $k^{\frac{z}{x}}\times k^{\frac{z}{y}}=3\times 5=15$
 $\therefore k^{\frac{z}{x}+\frac{z}{y}}=15$
 이때 $yz+zx=xy$ 이므로
 $k^{\frac{z}{x}+\frac{z}{y}}=k^{\frac{yz+zx}{xy}}=k^{\frac{xy}{xy}}=k$
 $\therefore k=15$

- 19 수면으로부터 깊이가 $d(\text{m})$ 인 지점에서 무게가 160 kg인 폭약이 폭발했을 때의 가스버블의 최대반경이 $R_1(\text{m})$, 무게가 $p(\text{kg})$ 인 폭약이 폭발했을 때의 가스버블의 최대 반경이 $R_2(\text{m})$ 이므로

$$R_1 = k \left(\frac{160}{d+10} \right)^{\frac{1}{3}}, R_2 = k \left(\frac{p}{d+10} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \frac{R_1}{R_2} = \frac{k \left(\frac{160}{d+10} \right)^{\frac{1}{3}}}{k \left(\frac{p}{d+10} \right)^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{160}{p} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{즉, } \left(\frac{160}{p} \right)^{\frac{1}{3}} = 2 \text{ 이므로 } \frac{160}{p} = 2^3 = 8$$

$$\therefore p = 20$$

- 20 $\neg, \sqrt[5]{-3}$ 은 실수이므로 $(5, -3) \in S$
 $\neg, b \neq 0$ 일 때, $\sqrt[4]{b}$ 와 $\sqrt[4]{-b}$ 가 모두 실수하려면 a 는 홀수
 이어야 하므로 $a=3$ 또는 $a=5$
 $\neg, \sqrt[4]{b}$ 에서 a 가 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 생
 각하면

(i) a 가 짝수일 때, 즉 $a=4$ 일 때

$b \geq 0$ 이어야 $\sqrt[4]{b}$ 가 실수이므로 S 의 원소는

$(4, 0), (4, 1), (4, 3)$ 의 3개

(ii) a 가 홀수일 때, 즉 $a=3$ 또는 $a=5$ 일 때

모든 b 에 대하여 $\sqrt[4]{b}$ 가 실수이므로 S 의 원소는

$(3, -3), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 3),$

$(5, -3), (5, -1), (5, 0), (5, 1), (5, 3)$

의 10개

(i), (ii)에서 $n(S) = 3 + 10 = 13$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

- 21 $a^3=3$ 에서 $a=3^{\frac{1}{3}}$

$$b^5=7 \text{에서 } b=7^{\frac{1}{5}}$$

$$c^6=9 \text{에서 } c=9^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore (abc)^n = \left(3^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{3}} \right)^n = \left(3^{\frac{2}{3}} \times 7^{\frac{1}{5}} \right)^n = 3^{\frac{2n}{3}} \times 7^{\frac{n}{5}}$$

따라서 $(abc)^n$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 값은
 3과 5의 공배수이어야 하므로 자연수 n 의 최솟값은 15이다.

- 22 $a^{3x} - a^{-3x} = 14$ 에서

$$(a^x - a^{-x})^3 + 3(a^x - a^{-x}) = 14$$

이때 $a^x - a^{-x} = t$ (t 는 실수)로 놓으면 $t^3 + 3t = 14$

$$(t-2)(t^2+2t+7)=0 \quad \therefore t=2 \quad (\because t \text{는 실수})$$

즉, $a^x - a^{-x} = 2$ 이므로

$$\frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{(a^x - a^{-x})^2 + 2}{a^x - a^{-x}} = \frac{2^2 + 2}{2} = 3$$

I-1 02 로그

로그의 뜻

개념 Check

24쪽

1 답 (1) $4 = \log_3 81$ (2) $0 = \log_5 1$

(3) $\frac{1}{3} = \log_8 2$ (4) $-2 = \log_2 0.25$

2 답 (1) $-3 < x < -2$ 또는 $x > -2$ (2) $x > 2$

문제

25~26쪽

01-1 답 (1) 4 (2) 3 (3) $\frac{1}{9}$ (4) 9

(1) $\log_{\sqrt{7}} 49 = x$ 에서

$$(\sqrt{7})^x = 49$$

$$\text{즉, } 7^{\frac{x}{2}} = 7^2 \text{ 이므로 } \frac{x}{2} = 2$$

$$\therefore x = 4$$

(2) $\log_9 x = 0.5$ 에서

$$x = 9^{0.5} = (3^2)^{0.5} = 3$$

(3) $\log_x 27 = -\frac{3}{2}$ 에서

$$x^{-\frac{3}{2}} = 27 = 3^3$$

$$\therefore x = (3^3)^{-\frac{2}{3}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

(4) $\log_6 \{ \log_2 (\log_3 x) \} = 0$ 에서

$$\log_2 (\log_3 x) = 6^0 = 1$$

$$\log_2 (\log_3 x) = 1 \text{에서}$$

$$\log_3 x = 2 \quad \therefore x = 3^2 = 9$$

01-2 답 16

$$\log_{\sqrt{2}} a = 5 \text{에서}$$

$$a = (\sqrt{2})^5 = (2^{\frac{1}{2}})^5 = 2^{\frac{5}{2}}$$

$$\log_b \frac{1}{8} = -2 \text{에서}$$

$$b^{-2} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$$

$$\therefore b = (2^{-3})^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore ab = 2^{\frac{5}{2}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^4 = 16$$

02-1 답 (1) $3 < x < 4$ (2) $2 < x < 3$

(1) (i) (밑) >0 , (밑) $\neq 1$ 이어야 하므로

$$x-3 > 0, x-3 \neq 1$$

$$\therefore x > 3, x \neq 4 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

(ii) (진수) > 0 이어야 하므로

$$4 - x > 0$$

$$\therefore x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

따라서 $\textcircled{7}$, $\textcircled{L}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $3 < x < 4$

(2) (i) (밑) > 0, (밑) $\neq 1$ 이어야 하므로

$$x - 2 > 0, x - 2 \neq 1$$

$$\therefore x > 2, x \neq 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) (진수) > 0 이어야 하므로

$$-x^2 + 2x + 3 > 0, x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$(x+1)(x-3) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

따라서 $\textcircled{7}$, $\textcircled{L}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $2 < x < 3$

02-2 답 -1, 0, 1

(i) (밑) > 0, (밑) $\neq 1$ 이어야 하므로

$$3 - x > 0, 3 - x \neq 1$$

$$\therefore x < 3, x \neq 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) (진수) > 0 이어야 하므로

$$-x^2 + 3x + 10 > 0, x^2 - 3x - 10 < 0$$

$$(x+2)(x-5) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 5 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{L}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$-2 < x < 2 \text{ 또는 } 2 < x < 3$$

따라서 정수 x 의 값은 $-1, 0, 1$ 이다.

02-3 답 12

(i) (밑) > 0, (밑) $\neq 1$ 이어야 하므로

$$p - 1 > 0, p - 1 \neq 1$$

$$\therefore p > 1, p \neq 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) (진수) > 0 이어야 하므로 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2 - 2px + 6p > 0$$

이차방정식 $x^2 - 2px + 6p = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D < 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$\frac{D}{4} = (-p)^2 - 6p < 0$$

$$p^2 - 6p < 0$$

$$p(p-6) < 0$$

$$\therefore 0 < p < 6 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{L}$ 을 동시에 만족시키는 p 의 값의 범위는

$$1 < p < 2 \text{ 또는 } 2 < p < 6$$

따라서 자연수 p 의 값은 3, 4, 5 이므로 그 합은

$$3 + 4 + 5 = 12$$

2 로그의 성질

개념 Check

28쪽

1 답 (1) 1 (2) 2 (3) 2 (4) $-\frac{3}{2}$

2 답 (1) 2 (2) 1 (3) $\frac{3}{2}$ (4) 12

문제

29~34쪽

03-1 답 (1) 0 (2) 1

$$(1) \log_6 2\sqrt{2} + \log_6 \frac{3}{2} - \log_6 \sqrt{18}$$

$$= \log_6 \frac{2\sqrt{2} \times \frac{3}{2}}{3\sqrt{2}}$$

$$= \log_6 1 = 0$$

$$(2) 2\log_2 \sqrt{6} + \frac{1}{2}\log_2 5 - \log_2 3\sqrt{5}$$

$$= \log_2 (\sqrt{6})^2 + \log_2 5^{\frac{1}{2}} - \log_2 3\sqrt{5}$$

$$= \log_2 6 + \log_2 \sqrt{5} - \log_2 3\sqrt{5}$$

$$= \log_2 \frac{6 \times \sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \log_2 2 = 1$$

03-2 답 -2

$$\log_5 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log_5 \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \log_5 \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$+ \log_5 \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \dots + \log_5 \left(1 - \frac{1}{25}\right)$$

$$= \log_5 \frac{1}{2} + \log_5 \frac{2}{3} + \log_5 \frac{3}{4} + \log_5 \frac{4}{5} + \dots + \log_5 \frac{24}{25}$$

$$= \log_5 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{24}{25}\right)$$

$$= \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2}$$

$$= -2\log_5 5 = -2$$

04-1 답 (1) 3 (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{25}{6}$

$$(1) \log_3 6 \times \log_3 8 \times \log_2 3 \times \log_6 9$$

$$= \log_3 6 \times \frac{\log_3 8}{\log_3 9} \times \frac{1}{\log_3 2} \times \frac{\log_3 9}{\log_3 6}$$

$$= \frac{3\log_3 2}{\log_3 2} = 3$$

$$(2) \log_6 \sqrt{27} + \frac{1}{\log_{\sqrt{8}} 6} = \log_6 \sqrt{27} + \log_6 \sqrt{8}$$

$$= \log_6 (\sqrt{27} \times \sqrt{8})$$

$$= \log_6 (\sqrt{3^3 \times 2^3})$$

$$= \log_6 6^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & (\log_2 3 + \log_8 9)(\log_3 2 + \log_9 8) \\
 &= (\log_2 3 + \log_{2^3} 3^2)(\log_3 2 + \log_{3^2} 2^3) \\
 &= \left(\log_2 3 + \frac{2}{3} \log_2 3\right) \left(\log_3 2 + \frac{3}{2} \log_3 2\right) \\
 &= \frac{5}{3} \log_2 3 \times \frac{5}{2} \log_3 2 \\
 &= \frac{25}{6} \times \log_2 3 \times \frac{1}{\log_2 3} = \frac{25}{6}
 \end{aligned}$$

04-2 ㉡ 105

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_5 2} + \frac{1}{\log_7 2} &= \log_2 k \text{에서} \\
 \log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 7 &= \log_2 k \\
 \log_2 (3 \times 5 \times 7) &= \log_2 k \\
 \log_2 105 &= \log_2 k \\
 \therefore k &= 105
 \end{aligned}$$

04-3 ㉡ 4

$$\begin{aligned}
 \log_2 5 \times \log_{16} x &= \log_4 5 \text{에서} \\
 \log_2 5 \times \log_{2^4} x &= \log_{2^2} 5 \\
 \log_2 5 \times \frac{1}{4} \log_2 x &= \frac{1}{2} \log_2 5 \\
 \frac{1}{4} \log_2 x &= \frac{1}{2}, \log_2 x = 2 \\
 \therefore x &= 2^2 = 4
 \end{aligned}$$

05-1 ㉡ (1) $\frac{1}{5}$ (2) 133

$$\begin{aligned}
 (1) & 2 \log_3 10 - 2 \log_3 2 - 3 \log_3 5 \\
 &= \log_3 10^2 - \log_3 2^2 - \log_3 5^3 \\
 &= \log_3 \frac{10^2}{2^2 \times 5^3} = \log_3 \frac{1}{5} \\
 \therefore & 3^{2 \log_3 10 - 2 \log_3 2 - 3 \log_3 5} = 3^{\log_3 \frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \\
 (2) & 27^{\log_2 2} + 8^{\log_2 5} = 2^{\log_2 27} + 5^{\log_2 8} \\
 &= 2^{3 \log_2 3} + 5^{3 \log_2 2} \\
 &= 2^3 + 5^3 = 133
 \end{aligned}$$

05-2 ㉡ 9

$$\begin{aligned}
 5^{\log_5 4 \times \log_2 3} &= (5^{\log_5 4})^{\log_2 3} = 4^{\log_2 3} \\
 &= 3^{\log_2 4} = 3^{2 \log_2 2} = 3^2 = 9
 \end{aligned}$$

05-3 ㉡ $C < A < B$

$$\begin{aligned}
 A &= 5^{\log_2 9 - \log_2 6} = 5^{\log_2 \frac{9}{6}} = 5^{\log_2 \frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \\
 B &= \log_{\sqrt{3}} 3 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3 = 2 \log_3 3 = 2 \\
 C &= \log_4 (\log_2 16) = \log_4 (\log_2 2^4) \\
 &= \log_4 (4 \log_2 2) = \log_4 4 = 1 \\
 \therefore & C < A < B
 \end{aligned}$$

06-1 ㉡ (1) $a-b-1$ (2) $\frac{2a+b}{1-a}$

$$\begin{aligned}
 (1) & \log_3 \frac{2}{15} = \log_3 2 - \log_3 15 \\
 &= \log_3 2 - \log_3 (3 \times 5) \\
 &= \log_3 2 - (\log_3 3 + \log_3 5) \\
 &= \log_3 2 - 1 - \log_3 5 \\
 &= a - b - 1 \\
 (2) & \log_5 12 = \frac{\log_{10} 12}{\log_{10} 5} = \frac{\log_{10} (2^2 \times 3)}{\log_{10} \frac{10}{2}} \\
 &= \frac{\log_{10} 2^2 + \log_{10} 3}{\log_{10} 10 - \log_{10} 2} \\
 &= \frac{2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3}{1 - \log_{10} 2} \\
 &= \frac{2a+b}{1-a}
 \end{aligned}$$

06-2 ㉡ (1) $1+a+b$ (2) $\frac{2a+b}{1+b}$

$$\begin{aligned}
 (1) & 2^a = 5 \text{에서 } a = \log_2 5 \\
 & 2^b = 7 \text{에서 } b = \log_2 7 \\
 \therefore & \log_2 70 = \log_2 (2 \times 5 \times 7) \\
 &= \log_2 2 + \log_2 5 + \log_2 7 \\
 &= 1 + a + b \\
 (2) & 3^a = 2 \text{에서 } a = \log_3 2 \\
 & 3^b = 5 \text{에서 } b = \log_3 5 \\
 \therefore & \log_{15} 20 = \frac{\log_3 20}{\log_3 15} = \frac{\log_3 (2^2 \times 5)}{\log_3 (3 \times 5)} \\
 &= \frac{\log_3 2^2 + \log_3 5}{\log_3 3 + \log_3 5} \\
 &= \frac{2 \log_3 2 + \log_3 5}{1 + \log_3 5} \\
 &= \frac{2a+b}{1+b}
 \end{aligned}$$

07-1 ㉡ (1) 3 (2) $\frac{17}{4}$

$$\begin{aligned}
 (1) & 8^x = 10 \text{에서 } x = \log_8 10 \\
 & 125^y = 10 \text{에서 } y = \log_{125} 10 \\
 \therefore & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{\log_8 10} + \frac{1}{\log_{125} 10} \\
 &= \log_{10} 8 + \log_{10} 125 \\
 &= \log_{10} (8 \times 125) \\
 &= \log_{10} 10^3 = 3 \\
 (2) & \log_2 a \times \log_b 16 = 1 \text{에서} \\
 & \log_2 a \times \frac{\log_2 16}{\log_2 b} = 1, 4 \log_2 a = \log_2 b \\
 & \log_2 a^4 = \log_2 b \quad \therefore b = a^4 \\
 \therefore & \log_a b + \log_b a = \log_a a^4 + \log_{a^4} a = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$(1) 8^x = 10, 125^y = 10 \text{에서 } 8 = 10^{\frac{1}{x}}, 125 = 10^{\frac{1}{y}}$$

$$10^{\frac{1}{x}} \times 10^{\frac{1}{y}} = 8 \times 125 \text{이므로}$$

$$10^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 10^3 \quad \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

07-2 ㉡ 3

$$\log_3 x - 2 \log_3 y + 3 \log_{27} z = -1 \text{에서}$$

$$\log_3 x - 2 \log_3 y + 3 \log_3 z = -1$$

$$\log_3 x - \log_3 y + \log_3 z = -1$$

$$\log_3 \frac{xz}{y} = -1 \quad \therefore \frac{xz}{y} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore 27^{\frac{xz}{y}} = 27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3$$

08-1 ㉡ 2

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + \beta = 5, a\beta = 3$$

$$\therefore \log_3 \left(a + \frac{a}{\beta} \right) + \log_3 \left(\beta + \frac{\beta}{a} \right)$$

$$= \log_3 \left(a + \frac{a}{\beta} \right) \left(\beta + \frac{\beta}{a} \right) = \log_3 (a\beta + a + \beta + 1)$$

$$= \log_3 (3 + 5 + 1) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

08-2 ㉡ 2

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + \beta = -2 \log_6 3, a\beta = \log_6 2 - \log_6 3$$

$$\therefore (a-1)(\beta-1) = a\beta - (a+\beta) + 1$$

$$= \log_6 2 - \log_6 3 + 2 \log_6 3 + 1$$

$$= \log_6 2 + \log_6 3 + 1$$

$$= \log_6 6 + 1 = 2$$

08-3 ㉡ 28

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_{10} a + \log_{10} \beta = -8, \log_{10} a \times \log_{10} \beta = 6$$

$$\therefore \log_a a\beta^3 + \log_\beta a^3\beta$$

$$= (\log_a a + 3 \log_a \beta) + (3 \log_\beta a + \log_\beta \beta)$$

$$= 3(\log_a \beta + \log_\beta a) + 2$$

$$= 3 \left(\frac{\log_{10} \beta}{\log_{10} a} + \frac{\log_{10} a}{\log_{10} \beta} \right) + 2$$

$$= 3 \times \frac{(\log_{10} \beta)^2 + (\log_{10} a)^2}{\log_{10} a \times \log_{10} \beta} + 2$$

$$= 3 \times \frac{(\log_{10} a + \log_{10} \beta)^2 - 2 \times \log_{10} a \times \log_{10} \beta}{\log_{10} a \times \log_{10} \beta} + 2$$

$$= 3 \times \frac{(-8)^2 - 2 \times 6}{6} + 2$$

$$= 28$$

연습문제

35~36쪽

- 1 ② 2 ④ 3 3 4 $\neg, \sqsubset$ 5 6
6 5 7 ③ 8 $B < C < A$ 9 ④
10 ① 11 42 12 ⑤ 13 ② 14 54
15 ③

1 $\log_{\sqrt{2}} a = 4$ 에서 $a = (\sqrt{2})^4 = (2^{\frac{1}{2}})^4 = 2^2 = 4$

$\log_{\frac{1}{9}} 3 = b$ 에서 $\left(\frac{1}{9}\right)^b = 3, 3^{-2b} = 3$

$-2b = 1$ 이므로 $b = -\frac{1}{2}$

$\therefore ab = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

2 $\log_2 \{ \log_4 (\log_3 x) \} = -1$ 에서

$\log_4 (\log_3 x) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$\log_4 (\log_3 x) = \frac{1}{2}$ 에서 $\log_3 x = 4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2$

$\therefore x = 3^2 = 9$

3 (i) (밑) > 0 , (밑) $\neq 1$ 이어야 하므로

$a - 1 > 0, a - 1 \neq 1 \quad \therefore a > 1, a \neq 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

(ii) (진수) > 0 이어야 하므로 모든 실수 x 에 대하여

$ax^2 + ax + 1 > 0$

$\textcircled{1}$ 에서 $a > 0$ 이고 이차방정식 $ax^2 + ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$D = a^2 - 4a < 0, a(a - 4) < 0$

$\therefore 0 < a < 4$

$\dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$1 < a < 2$ 또는 $2 < a < 4$

따라서 정수 a 의 값은 3이다.

4 $\neg. \log_3 (3 \times 3^2 \times 3^3 \times 3^4 \times 3^5)$

$= \log_3 3^{1+2+3+4+5} = \log_3 3^{15} = 15$

$\sqcup. \log_2 1 + \log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 4 + \log_2 5$

$= \log_2 (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5) = \log_2 120$

$\sqsubset. \frac{1}{2} \log_2 4 + \frac{2}{3} \log_2 8 + \frac{3}{4} \log_2 16 + \frac{4}{5} \log_2 32$

$= \frac{1}{2} \log_2 2^2 + \frac{2}{3} \log_2 2^3 + \frac{3}{4} \log_2 2^4 + \frac{4}{5} \log_2 2^5$

$= \frac{1}{2} \times 2 + \frac{2}{3} \times 3 + \frac{3}{4} \times 4 + \frac{4}{5} \times 5$

$= 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$\sqsupset. \log_2 2^2 \times \log_3 3^2 \times \log_4 4^2 \times \log_5 5^2$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \sqsubset$ 이다.

$$\begin{aligned}
 5 \quad & \log_a(\log_2 3) + \log_a(\log_3 4) + \log_a(\log_4 5) \\
 & \quad + \cdots + \log_a(\log_{63} 64) \\
 & = \log_a(\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \cdots \times \log_{63} 64) \\
 & = \log_a\left(\log_2 3 \times \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \times \cdots \times \frac{\log_2 64}{\log_2 63}\right) \\
 & = \log_a(\log_2 64) = \log_a(\log_2 2^6) = \log_a 6 \\
 & \text{즉, } \log_a 6 = 1 \text{ 이므로 } a = 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6 \quad & (\log_5 12 + \log_{25} 9) \log_6 a = (\log_5 12 + \log_5 3^2) \log_6 a \\
 & = (\log_5 12 + \log_5 3) \frac{\log_5 a}{\log_5 6} \\
 & = \log_5 36 \times \frac{\log_5 a}{\log_5 6} \\
 & = \log_5 6^2 \times \frac{\log_5 a}{\log_5 6} \\
 & = 2 \log_5 6 \times \frac{\log_5 a}{\log_5 6} \\
 & = 2 \log_5 a \\
 & \text{즉, } 2 \log_5 a = 2 \text{ 이므로 } \log_5 a = 1 \\
 & \therefore a = 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7 \quad & \text{두 점 } (2, \log_4 a), (3, \log_2 b) \text{를 각각 A, B라 하고 원점을 O라 하면 세 점 O, A, B가 한 직선 위에 있으므로} \\
 & \text{(직선 OA의 기울기) = (직선 OB의 기울기)} \\
 & \text{직선 OA의 기울기는 } \frac{\log_4 a}{2}, \text{ 직선 OB의 기울기는 } \\
 & \frac{\log_2 b}{3} \text{ 이므로} \\
 & \frac{\log_4 a}{2} = \frac{\log_2 b}{3}, \frac{\log_2 a}{4} = \frac{\log_2 b}{3} \\
 & \frac{\log_2 b}{\log_2 a} = \frac{3}{4} \quad \therefore \log_a b = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8 \quad & A = \log_{64} 3 \times \log_9 125 \times \log_5 8 \\
 & = \log_{2^6} 3 \times \log_{3^2} 5^3 \times \log_5 2^3 \\
 & = \frac{1}{6} \log_2 3 \times \frac{3}{2} \log_3 5 \times 3 \log_5 2 \\
 & = \frac{1}{6} \log_2 3 \times \frac{3 \log_2 5}{2 \log_2 3} \times \frac{3}{\log_2 5} \\
 & = \frac{3}{4} \\
 & B = 5^{\log_5 7 - \log_5 14} \\
 & = 5^{\log_5 \frac{7}{14}} = 5^{\log_5 \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \\
 & C = \log_{32}(\log_{\sqrt{2}} 16) = \log_{32}(\log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^4) \\
 & = \log_{32} 8 = \log_{2^5} 2^3 = \frac{3}{5} \\
 & \therefore B < C < A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9 \quad & \log_2 3 = a \text{에서 } \log_3 2 = \frac{1}{a} \\
 & \therefore \log_7 4\sqrt{3} = \frac{\log_3 4\sqrt{3}}{\log_3 7} = \frac{\log_3 (2^2 \times 3^{\frac{1}{2}})}{\log_3 7} \\
 & = \frac{2 \log_3 2 + \frac{1}{2}}{\log_3 7} = \frac{\frac{2}{a} + \frac{1}{2}}{b} \\
 & = \frac{a+4}{2ab}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10 \quad & 15^x = 27 \text{에서 } x = \log_{15} 27 \\
 & 5^y = 81 \text{에서 } y = \log_5 81 \\
 & \therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = \frac{3}{\log_{15} 27} - \frac{4}{\log_5 81} \\
 & = \frac{3}{3 \log_{15} 3} - \frac{4}{4 \log_5 3} \\
 & = \frac{1}{\log_{15} 3} - \frac{1}{\log_5 3} \\
 & = \log_3 15 - \log_3 5 \\
 & = \log_3 \frac{15}{5} = \log_3 3 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11 \quad & \log_{16} a = \frac{1}{\log_b 4} \text{에서} \\
 & \frac{1}{2} \log_4 a = \log_4 b \text{이므로} \\
 & \sqrt{a} = b \quad \therefore a = b^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\
 & \text{한편 } \log_6 ab = 3 \text{에서 } ab = 6^3 \text{이므로} \\
 & \textcircled{1} \text{을 대입하면 } b^3 = 6^3 \\
 & \therefore b = 6 \\
 & \text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a = 36 \\
 & \therefore a + b = 36 + 6 = 42
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12 \quad & \text{이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여} \\
 & \alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 5 \\
 & \therefore (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\
 & \quad = 5^2 - 4 \times 5 = 5 \\
 & \text{이때 } \alpha > \beta \text{이므로 } \alpha - \beta = \sqrt{5} \\
 & \therefore \log_{(\alpha-\beta)} \alpha + \log_{(\alpha-\beta)} \beta = \log_{(\alpha-\beta)} \alpha\beta = \log_{\sqrt{5}} 5 \\
 & \quad = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5 = 2 \log_5 5 = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13 \quad & 3^a = x \text{에서 } a = \log_3 x \\
 & 3^b = y \text{에서 } b = \log_3 y \\
 & 3^c = z \text{에서 } c = \log_3 z \\
 & \text{이때 } a + b + c = 0 \text{이므로} \\
 & \log_3 x + \log_3 y + \log_3 z = 0 \\
 & \log_3 xyz = 0 \\
 & \therefore xyz = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\therefore \log_x yz + \log_y zx + \log_z xy \\
 &= \log_x \frac{1}{x} + \log_y \frac{1}{y} + \log_z \frac{1}{z} \quad (\because xyz=1) \\
 &= \log_x x^{-1} + \log_y y^{-1} + \log_z z^{-1} \\
 &= -1 + (-1) + (-1) = -3
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 &\log_x yz + \log_y zx + \log_z xy \\
 &= \log_{3^a} (3^b \times 3^c) + \log_{3^b} (3^c \times 3^a) + \log_{3^c} (3^a \times 3^b) \\
 &= \log_{3^a} 3^{b+c} + \log_{3^b} 3^{c+a} + \log_{3^c} 3^{a+b} \\
 &= \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \\
 &= \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c} \quad (\because a+b+c=0) \\
 &= -1 + (-1) + (-1) = -3
 \end{aligned}$$

14 (가)에서 $\sqrt[4]{a} = \sqrt{b} = \sqrt[3]{c} = k \ (k > 0)$ 로 놓으면

$$a = k^4, \ b = k^2, \ c = k^3$$

(나)에서

$$\begin{aligned}
 \log_9 a + \log_{27} b + \log_3 c &= \log_3 k^4 + \log_3 k^2 + \log_3 k^3 \\
 &= 2\log_3 k + \frac{2}{3}\log_3 k + 3\log_3 k \\
 &= \frac{17}{3}\log_3 k
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{17}{3}\log_3 k = 34 \text{이므로}$$

$$\log_3 k = 6$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \log_3 abc &= \log_3 (k^4 \times k^2 \times k^3) \\
 &= \log_3 k^9 = 9\log_3 k \\
 &= 9 \times 6 = 54
 \end{aligned}$$

15 $\log_a b = \log_b a$ 에서 $\log_a b = \frac{1}{\log_a b}$

$$(\log_a b)^2 = 1 \quad \therefore \log_a b = \pm 1$$

그런데 $a \neq b$ 이므로

$$\log_a b = -1 \quad \therefore b = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore (a+4)(b+1) &= (a+4)\left(\frac{1}{a}+1\right) \\
 &= a + \frac{4}{a} + 5
 \end{aligned}$$

이때 $a > 0, \frac{4}{a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \times \frac{4}{a}} = 4 \quad (\text{단, 등호는 } a=2 \text{ 일 때 성립})$$

$$\begin{aligned}
 \therefore (a+4)(b+1) &= a + \frac{4}{a} + 5 \\
 &\geq 4 + 5 = 9
 \end{aligned}$$

따라서 $(a+4)(b+1)$ 의 최솟값은 9이다.

I-1 03 상용로그

상용로그

개념 Check

38쪽

1 답 (1) 4 (2) -2 (3) $\frac{2}{3}$ (4) $-\frac{1}{2}$

2 답 (1) 0.4683 (2) 0.7839 (3) 8.15 (4) 4.95

3 답 (1) 정수 부분: 0, 소수 부분: 0.6201
 (2) 정수 부분: 3, 소수 부분: 0.5617
 (3) 정수 부분: -1, 소수 부분: 0.8764
 (4) 정수 부분: -2, 소수 부분: 0.3997

문제

39~43쪽

01-1 답 (1) 2.5866 (2) -0.4134 (3) 0.2933

상용로그표에서 $\log 3.86 = 0.5866$

$$\begin{aligned}
 (1) \log 386 &= \log (10^2 \times 3.86) \\
 &= \log 10^2 + \log 3.86 \\
 &= 2\log 10 + \log 3.86 \\
 &= 2 + 0.5866 = 2.5866 \\
 (2) \log 0.386 &= \log (10^{-1} \times 3.86) \\
 &= \log 10^{-1} + \log 3.86 \\
 &= -\log 10 + \log 3.86 \\
 &= -1 + 0.5866 = -0.4134
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \log \sqrt{3.86} &= \log 3.86^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 3.86 \\
 &= \frac{1}{2} \times 0.5866 = 0.2933
 \end{aligned}$$

01-2 답 (1) 0.6990 (2) 1.0791 (3) -0.2219

$$\begin{aligned}
 (1) \log 5 &= \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \\
 &= 1 - 0.3010 = 0.6990
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \log 12 &= \log (2^2 \times 3) \\
 &= \log 2^2 + \log 3 \\
 &= 2\log 2 + \log 3 \\
 &= 2 \times 0.3010 + 0.4771 \\
 &= 1.0791
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \log 0.6 &= \log \frac{2 \times 3}{10} \\
 &= \log 2 + \log 3 - \log 10 \\
 &= 0.3010 + 0.4771 - 1 \\
 &= -0.2219
 \end{aligned}$$

02-1 ㉡ (1) 53600 (2) 0.000536

$$\begin{aligned}
 (1) \log N &= 4 + 0.7292 \\
 &= \log 10^4 + \log 5.36 \\
 &= \log (10^4 \times 5.36) \\
 &= \log 53600 \\
 \therefore N &= 53600 \\
 (2) \log N &= -3 + (-0.2708) \\
 &= (-3-1) + (1-0.2708) \\
 &= -4 + 0.7292 \\
 &= \log 10^{-4} + \log 5.36 \\
 &= \log (10^{-4} \times 5.36) \\
 &= \log 0.000536 \\
 \therefore N &= 0.000536
 \end{aligned}$$

02-2 ㉡ (1) 4270 (2) 0.427

$$\begin{aligned}
 (1) \log N &= 2 + 1.6304 \\
 &= \log 10^2 + \log 42.7 \\
 &= \log (10^2 \times 42.7) \\
 &= \log 4270 \\
 \therefore N &= 4270 \\
 (2) \log 42.7 &= 1.6304 \text{에서 } \log (10 \times 4.27) = 1.6304 \\
 1 + \log 4.27 &= 1.6304 \quad \therefore \log 4.27 = 0.6304 \\
 \log N &= -1 + (1 - 0.3696) \\
 &= -1 + 0.6304 \\
 &= \log 10^{-1} + \log 4.27 \\
 &= \log (10^{-1} \times 4.27) \\
 &= \log 0.427 \\
 \therefore N &= 0.427
 \end{aligned}$$

03-1 ㉡ (1) $100\sqrt{10}$ (2) $100^4\sqrt{10}$

$$\begin{aligned}
 (1) \log N - \log \frac{1}{N} &= \log N - (-\log N) \\
 &= 2\log N \Rightarrow \text{정수} \\
 100 < N < 1000 \text{에서 } 2 < \log N < 3 \\
 \therefore 4 < 2\log N < 6 \\
 \text{이때 } 2\log N &\text{은 정수이므로} \\
 2\log N &= 5 \quad \therefore \log N = \frac{5}{2} \\
 \therefore N &= 10^{\frac{5}{2}} = 100\sqrt{10} \\
 (2) \log N + \log \sqrt[3]{N} &= \log N + \frac{1}{3}\log N \\
 &= \frac{4}{3}\log N \Rightarrow \text{정수} \\
 \log N \text{의 정수 부분이 } 2 &\text{이므로} \\
 2 \leq \log N < 3 \quad \therefore \frac{8}{3} \leq \frac{4}{3}\log N < 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{이때 } \frac{4}{3}\log N &\text{이 정수이므로} \\
 \frac{4}{3}\log N &= 3 \quad \therefore \log N = \frac{9}{4} \\
 \therefore N &= 10^{\frac{9}{4}} = 100^4\sqrt{10}
 \end{aligned}$$

03-2 ㉡ 1000

두 상용로그의 소수 부분의 합이 1이면 두 상용로그의 합이 정수이므로

$$\begin{aligned}
 \log x^4 + \log \frac{1}{x} &= 4\log x + (-\log x) \\
 &= 3\log x \Rightarrow \text{정수} \\
 10 < x < 100 \text{에서 } 1 < \log x < 2 \\
 \therefore 3 < 3\log x < 6 \\
 \text{이때 } 3\log x &\text{는 정수이므로} \\
 3\log x &= 4 \text{ 또는 } 3\log x = 5 \\
 \log x &= \frac{4}{3} \text{ 또는 } \log x = \frac{5}{3} \\
 \therefore x &= 10^{\frac{4}{3}} \text{ 또는 } x = 10^{\frac{5}{3}} \\
 \text{따라서 모든 실수 } x \text{의 값의 곱은} \\
 10^{\frac{4}{3}} \times 10^{\frac{5}{3}} &= 10^3 = 1000
 \end{aligned}$$

04-1 ㉡ 100배

2등급인 별의 밝기를 I_1 이라 하면

$$2 = -\frac{5}{2}\log I_1 + C \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

7등급인 별의 밝기를 I_2 라 하면

$$7 = -\frac{5}{2}\log I_2 + C \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$-5 = -\frac{5}{2}(\log I_1 - \log I_2)$$

$$\log \frac{I_1}{I_2} = 2$$

로그의 정의에 의하여

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^2 = 100$$

따라서 2등급인 별의 밝기는 7등급인 별의 밝기의 100배이다.

04-2 ㉡ 6

규모 4 이상인 지진이 1년에 평균 64번 발생하므로

$$\begin{aligned}
 \log 64 &= a - 0.9 \times 4 \\
 \therefore a &= \log 64 + 3.6 = 6\log 2 + 3.6 \\
 &= 6 \times 0.3 + 3.6 = 5.4 \quad \dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

또 규모 x 이상인 지진은 1년에 평균 한 번 발생하므로

$$\begin{aligned}
 \log 1 &= a - 0.9x, \quad 0 = 5.4 - 0.9x \quad (\because \textcircled{1}) \\
 0.9x &= 5.4 \quad \therefore x = 6
 \end{aligned}$$

05-1 ㉡ 3.51%

방사선 입자가 특수 보호막 한 장을 통과할 때마다 그 양이 20%씩 감소하므로 처음 방사선 입자의 양을 a 라 하면 15장째 특수 보호막을 통과한 방사선 입자의 양은

$$a\left(1 - \frac{20}{100}\right)^{15} = a \times 0.8^{15}$$

0.8^{15} 에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log 0.8^{15} &= 15 \log 0.8 = 15 \log \frac{8}{10} \\ &= 15(3 \log 2 - 1) = 15(3 \times 0.301 - 1) \\ &= -1.455 = (-1 - 1) + (1 - 0.455) \\ &= -2 + 0.545 = -2 + \log 3.51 \\ &= \log 10^{-2} + \log 3.51 \\ &= \log(10^{-2} \times 3.51) \\ &= \log 0.0351\end{aligned}$$

$$\therefore 0.8^{15} = 0.0351$$

따라서 15장째 특수 보호막을 통과한 방사선 입자의 양은 처음 방사선 입자의 양의 3.51%이다.

05-2 ㉡ 15%

올해의 매출을 a , 매년 증가하는 일정한 비율을 $r\%$ 라 하면 10년 후의 매출은 $4a$ 이므로

$$a\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} = 4a \quad \therefore \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} = 4$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} &= \log 4 \\ 10 \log\left(1 + \frac{r}{100}\right) &= 2 \log 2 \\ \log\left(1 + \frac{r}{100}\right) &= \frac{\log 2}{5} \\ \log\left(1 + \frac{r}{100}\right) &= 0.06\end{aligned}$$

이때 $\log 1.15 = 0.06$ 이므로

$$1 + \frac{r}{100} = 1.15 \quad \therefore r = 15$$

따라서 매년 15%씩 매출을 증가시켜야 한다.

$$\begin{aligned}1 \quad ① \log 67.8 &= \log(10 \times 6.78) = \log 10 + \log 6.78 \\ &= 1 + 0.8312 = 1.8312\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}② \log 6780 &= \log(10^3 \times 6.78) = 3 \log 10 + \log 6.78 \\ &= 3 + 0.8312 = 3.8312\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}③ \log 678000 &= \log(10^5 \times 6.78) = 5 \log 10 + \log 6.78 \\ &= 5 + 0.8312 = 5.8312\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}④ \log 0.678 &= \log(10^{-1} \times 6.78) = -\log 10 + \log 6.78 \\ &= -1 + 0.8312 = -0.1688\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}⑤ \log 0.0678 &= \log(10^{-2} \times 6.78) = -2 \log 10 + \log 6.78 \\ &= -2 + 0.8312 = -1.1688\end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

$$\begin{aligned}2 \quad \log \sqrt{3} + \log 4 - \log \sqrt{32} \\ &= \log 3^{\frac{1}{2}} + \log 2^2 - \log 2^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log 3 + 2 \log 2 - \frac{5}{2} \log 2 \\ &= \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 2 \\ &= \frac{1}{2} \times 0.48 - \frac{1}{2} \times 0.3 = 0.09\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3 \quad \log 56.7 &= 1.7536 \text{에서} \\ \log(10 \times 5.67) &= 1.7536 \\ 1 + \log 5.67 &= 1.7536 \\ \therefore \log 5.67 &= 0.7536 \\ \log N &= -4 + (-0.2464) \\ &= (-4 - 1) + (1 - 0.2464) \\ &= -5 + 0.7536 \\ &= \log 10^{-5} + \log 5.67 \\ &= \log(10^{-5} \times 5.67) \\ &= \log 0.0000567 \\ \therefore N &= 0.0000567\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4 \quad \text{상용로그표에서 } \log 2.84 &= 0.4533 \text{이므로} \\ \log 0.284 &= \log(10^{-1} \times 2.84) \\ &= \log 10^{-1} + \log 2.84 \\ &= -1 + 0.4533 = -0.5467 \\ \therefore M &= -0.5467\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{상용로그표에서 } \log 9.15 &= 0.9614 \text{이므로} \\ \log N &= 2.9614 \\ &= 2 + 0.9614 \\ &= \log 10^2 + \log 9.15 \\ &= \log(10^2 \times 9.15) \\ &= \log 915\end{aligned}$$

$$\therefore N = 915$$

$$\therefore M + N = -0.5467 + 915 = 914.4533$$

연습문제

45~46쪽

- | | | | |
|--------|--------|--------|--------------|
| 1 ④ | 2 0.09 | 3 ① | 4 914.4533 |
| 5 1890 | 6 ① | 7 ② | 8 ② 9 ② |
| 10 ③ | 11 5 | 12 516 | 13 10% |

- 5 $\log 1=0, \log 10=1, \log 100=2, \log 1000=3$
 $1 \leq N \leq 9$ 일 때, $0 \leq \log N < 1$ 이므로 $f(N)=0$
 $10 \leq N \leq 99$ 일 때, $1 \leq \log N < 2$ 이므로 $f(N)=1$
 $100 \leq N \leq 999$ 일 때, $2 \leq \log N < 3$ 이므로 $f(N)=2$
 $\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(999)$
 $=0 \times 9+1 \times 90+2 \times 900=1890$

- 6 $\log A$ 의 정수 부분을 n , 소수 부분을 α ($0 \leq \alpha < 1$)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$n+\alpha=-\frac{5}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$n\alpha=\frac{k}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } n+\alpha=-2+\frac{1}{3} \quad \therefore n=-2, \alpha=\frac{1}{3}$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } (-2) \times \frac{1}{3}=\frac{k}{3}$$

$$\therefore k=-2$$

- 7 $\log x^2+\log \sqrt[3]{x}=2 \log x+\frac{1}{3} \log x$
 $=\frac{7}{3} \log x \Rightarrow$ 정수

$\log x$ 의 정수 부분이 1이므로

$$1 \leq \log x < 2 \quad \therefore \frac{7}{3} \leq \frac{7}{3} \log x < \frac{14}{3}$$

이때 $\frac{7}{3} \log x$ 가 정수이므로

$$\frac{7}{3} \log x=3 \text{ 또는 } \frac{7}{3} \log x=4$$

$$\log x=\frac{9}{7} \text{ 또는 } \log x=\frac{12}{7}$$

$$\therefore x=10^{\frac{9}{7}} \text{ 또는 } x=10^{\frac{12}{7}}$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은

$$10^{\frac{9}{7}} \times 10^{\frac{12}{7}}=10^3$$

- 8 $I=500$ 일 때 $S=0.6$ 이므로
 $0.6=k \log 500$

$$\therefore k=\frac{0.6}{\log 500}=\frac{0.6}{\log \frac{1000}{2}}$$

$$=\frac{0.6}{3-\log 2}=\frac{0.6}{3-0.3}$$

$$=\frac{0.6}{2.7}=\frac{2}{9}$$

따라서 $I=8$ 일 때 감각의 세기는

$$k \log 8=\frac{2}{9} \times 3 \log 2=\frac{2}{9} \times 3 \times 0.3=0.2$$

즉, 자극의 세기가 8일 때의 감각의 세기는 0.2이다.

- 9 두 열차 A, B 가 지점 P 를 통과할 때의 속력을 각각 v_A, v_B 라 하면

$$v_A=0.9v_B \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$L_A=80+28 \log \frac{v_A}{100}-14 \log \frac{75}{25} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$L_B=80+28 \log \frac{v_B}{100}-14 \log \frac{75}{25} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}-\textcircled{3}$ 을 하면

$$\begin{aligned} L_B-L_A &=28 \log \frac{v_B}{100}-28 \log \frac{v_A}{100} \\ &=28 \log \frac{v_B}{v_A}=28 \log \frac{v_B}{0.9v_B} (\because \textcircled{1}) \\ &=28 \log \frac{10}{9}=28(1-2 \log 3) \\ &=28-56 \log 3 \end{aligned}$$

- 10 밝기가 100인 빛이 유리판 20장을 통과했을 때의 빛의 밝기를 a 라 하면

$$a=100\left(1-\frac{3}{100}\right)^{20} \quad \therefore a=100 \times 0.97^{20}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log a &=\log \left(10^2 \times 0.97^{20}\right) \\ &=\log 10^2+\log 0.97^{20} \\ &=2+20 \log 0.97 \end{aligned}$$

이때 $\log 9.7=0.987$ 이므로

$$\begin{aligned} \log 0.97 &=\log \left(10^{-1} \times 9.7\right) \\ &=\log 10^{-1}+\log 9.7 \\ &=-1+0.987=-0.013 \end{aligned}$$

$$\log a=2+20 \log 0.97 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \log a &=2+20 \times (-0.013) \\ &=2+(-0.26) \\ &=1.74=1+0.74 \\ &=\log 10+\log 5.5 \\ &=\log (10 \times 5.5)=\log 55 \end{aligned}$$

$$\therefore a=55$$

따라서 구하는 빛의 밝기는 55이다.

- 11 $\frac{1}{2} \log N=m \log 2+n \log 3$ 에서

$$\log N^{\frac{1}{2}}=\log 2^m+\log 3^n=\log \left(2^m \times 3^n\right)$$

$$\text{즉, } N^{\frac{1}{2}}=2^m \times 3^n \text{이므로}$$

$$N=2^{2m} \times 3^{2n}=4^m \times 9^n$$

이때 $1 \leq N \leq 36$ 이므로 N 의 값은 다음과 같다.

$n \backslash m$	0	1	2
0	1	4	16
1	9	36	

따라서 자연수 N 의 개수는 5이다.

12 (가)에서

$$\begin{aligned}\log y &= 2.699 = 2 + 0.699 \\ &= \log 10^2 + \log 5 \\ &= \log (10^2 \times 5) = \log 500\end{aligned}$$

$$\therefore y = 500 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(가), (나)에 의하여

$$0 - 2.699 \leq \log x - \log y \leq 5 - 2.699$$

$$-2.699 \leq \log x - \log y \leq 2.301$$

이때 (타)에서 $\log x - \log y$ 는 자연수이므로

$$\log x - \log y = 1 \text{ 또는 } \log x - \log y = 2$$

(i) $\log x - \log y = 1$ 일 때

$$\log \frac{x}{y} = 1, \frac{x}{y} = 10 \quad \therefore x = 10y$$

⑦을 대입하면 $x = 10 \times 500$

$$\therefore x = 10^3 \times 5 = 2^3 \times 5^4$$

(ii) $\log x - \log y = 2$ 일 때

$$\log \frac{x}{y} = 2, \frac{x}{y} = 100 \quad \therefore x = 100y$$

⑦을 대입하면 $x = 100 \times 500$

$$\therefore x = 10^4 \times 5 = 2^4 \times 5^5$$

(i), (ii)에서 모든 x 의 값의 곱은

$$(2^3 \times 5^4) \times (2^4 \times 5^5) = 2^7 \times 5^9$$

$$\therefore a = 7, b = 9$$

$$\therefore a + b + y = 7 + 9 + 500 = 516$$

- 13 전파 기지국에서 통화하는 데 필요한 에너지의 양을 a , 기지국에서 100m 멀어질 때마다 통화하는 데 필요한 에너지의 양의 증가율을 $r\%$ 라 하면 기지국에서 1750m 떨어진 지점에서 통화하는 데 필요한 에너지의 양은 $5a$ 이므로

$$a \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{17.5} = 5a \quad \therefore \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{17.5} = 5$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{17.5} = \log 5$$

$$17.5 \log \left(1 + \frac{r}{100}\right) = \log 5$$

$$17.5 \log \left(1 + \frac{r}{100}\right) = \log \frac{10}{2}$$

$$\log \left(1 + \frac{r}{100}\right) = \frac{1 - \log 2}{17.5} = \frac{1 - 0.3}{17.5} = 0.04$$

이때 $\log 1.1 = 0.04$ 이므로

$$1 + \frac{r}{100} = 1.1 \quad \therefore r = 10$$

따라서 기지국에서 100m 멀어질 때마다 통화하는 데 필요한 에너지의 양은 10%씩 증가한다.

I-2 01 지수함수

지수함수

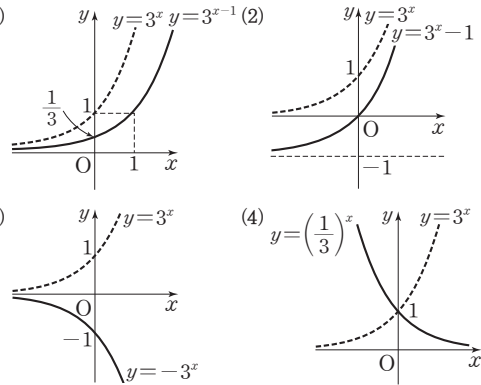
개념 Check

49쪽

1 답 ㄱ, ㄷ

2 답 (1) 4 (2) 64 (3) $\frac{1}{4}$ (4) 2

3 답 (1)



문제

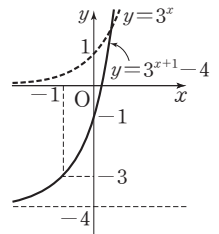
50~56쪽

01-1 답 풀이 참조

- (1) 함수 $y = 3^{x+1} - 4$ 의 그래프는 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore$ 치역: $\{y | y > -4\}$,

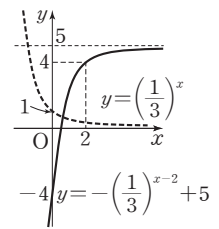
점근선의 방정식: $y = -4$



- (2) 함수 $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 5$ 의 그래프는 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore$ 치역: $\{y | y < 5\}$,

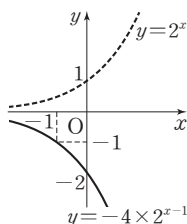
점근선의 방정식: $y = 5$



01-2 ㉡ 풀이 참조

$$y = -4 \times 2^{x-1} = -2^{x+1}$$

따라서 함수 $y = -4 \times 2^{x-1}$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



02-1 ㉡ $a = -27, b = -2$

함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y - 2 = 3^{x+3} \quad \therefore y = 3^{x+3} + 2$$

이 함수의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = 3^{-x+3} + 2$$

$$\therefore y = -3^{-x+3} - 2 = -3^3 \times 3^{-x} - 2 = -27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$$

$$\therefore a = -27, b = -2$$

02-2 ㉡ 3

함수 $y = 5^{x+2} - 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = 5^{(x-2)+2} - 2 \quad \therefore y = 5^x - 2$$

이 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = 5^{-x} - 2$$

이 함수의 그래프가 $(-1, k)$ 를 지나므로

$$k = 5^1 - 2 = 3$$

02-3 ㉡ 5

함수 $y = -2^{x+1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -2^{x-a+1} + b$$

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $y = 3$ 이므로 $b = 3$

이때 $y = -2^{x-a+1} + 3$ 의 그래프가 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$2 = -2^{1-a+1} + 3, \quad 2^{2-a} = 1$$

$$2 - a = 0 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore a + b = 2 + 3 = 5$$

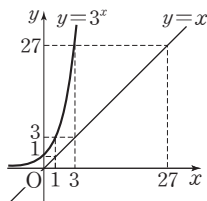
03-1 ㉡ 9

함수 $y = 3^x$ 의 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나므로 $a = 1$

함수 $y = 3^x$ 의 그래프는 점

(a, b) , 즉 점 $(1, b)$ 를 지나므로

$$b = 3^1 = 3$$



함수 $y = 3^x$ 의 그래프는 점 (b, c) , 즉 점 $(3, c)$ 를 지나므로 $c = 3^3 = 27$

$$\therefore \frac{ac}{b} = \frac{1 \times 27}{3} = 9$$

03-2 ㉡ 2

함수 $y = 2^{2x}$ 의 그래프와 직선 $y = 4$ 가 만나는 점의 x 좌표는

$$2^{2x} = 4 = 2^2 \text{에서}$$

$$2x = 2 \quad \therefore x = 1$$

$$\therefore A(1, 4)$$

함수 $y = 2^x$ 의 그래프와 직선 $y = 4$ 가 만나는 점의 x 좌표는

$$2^x = 4 = 2^2 \text{에서 } x = 2 \quad \therefore B(2, 4)$$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (2-1) \times 4 = 2$$

04-1 ㉡ (1) $3^{0.4} < \sqrt[3]{9} < \sqrt{27}$ (2) $5\sqrt[5]{\frac{1}{16}} < \sqrt[3]{\frac{1}{4}} < \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$(1) 3^{0.4} = 3^{\frac{2}{5}}, \quad \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{2}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{2} \text{이고, 밑이 1보다 크므로}$$

$$3^{\frac{2}{5}} < 3^{\frac{2}{3}} < 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore 3^{0.4} < \sqrt[3]{9} < \sqrt{27}$$

$$(2) \sqrt{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$5\sqrt[5]{\frac{1}{16}} = 5\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{5}}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{4}{5} \text{이고, 밑이 1보다 작으므로}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{5}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore 5\sqrt[5]{\frac{1}{16}} < \sqrt[3]{\frac{1}{4}} < \sqrt{\frac{1}{2}}$$

04-2 ㉡ 4

$$0.5^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}}$$

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{3}} = (2^{-4})^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{2}{3} < \frac{5}{6} < \frac{5}{4} < \frac{4}{3} \text{이고, 밑이 1보다 크므로}$$

$$2^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{5}{6}} < 2^{\frac{5}{4}} < 2^{\frac{4}{3}}$$

따라서 가장 큰 수는 $2^{\frac{4}{3}}$ 이고, 가장 작은 수는 $2^{\frac{2}{3}}$ 이므로 두 수의 곱은

$$2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$$

05-1 [답] (1) 최댓값: 3, 최솟값: $\frac{1}{27}$

(2) 최댓값: 7, 최솟값: $\frac{7}{2}$

(3) 최댓값: 2, 최솟값: $-\frac{7}{4}$

(4) 최댓값: $\frac{81}{25}$, 최솟값: 1

(1) 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ 의 밑이 1보다 작으므로

$-2 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ 은

$x = -2$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$,

$x = 2$ 에서 최솟값 $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ 을 갖는다.

(2) 함수 $y = 2^{x-1} + 3$ 의 밑이 1보다 크므로

$0 \leq x \leq 3$ 일 때 함수 $y = 2^{x-1} + 3$ 은

$x = 3$ 에서 최댓값 $2^2 + 3 = 7$,

$x = 0$ 에서 최솟값 $2^{-1} + 3 = \frac{7}{2}$ 을 갖는다.

(3) $y = 4^{-x} - 2 = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2$

함수 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2$ 의 밑이 1보다 작으므로

$-1 \leq x \leq 1$ 일 때 함수 $y = 4^{-x} - 2$ 는

$x = -1$ 에서 최댓값 $4^1 - 2 = 2$,

$x = 1$ 에서 최솟값 $4^{-1} - 2 = -\frac{7}{4}$ 을 갖는다.

(4) $y = 3^{2x} 5^{-x} = 9^x \times \left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{9}{5}\right)^x$

함수 $y = \left(\frac{9}{5}\right)^x$ 의 밑이 1보다 크므로

$0 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $y = 3^{2x} 5^{-x}$ 은

$x = 2$ 에서 최댓값 $\left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{81}{25}$,

$x = 0$ 에서 최솟값 $\left(\frac{9}{5}\right)^0 = 1$ 을 갖는다.

05-2 [답] $\frac{3}{2}$

함수 $y = 2^{x+1} + k$ 의 밑이 1보다 크므로

$-2 \leq x \leq 1$ 일 때 함수 $y = 2^{x+1} + k$ 는

$x = 1$ 에서 최댓값 $4 + k$,

$x = -2$ 에서 최솟값 $\frac{1}{2} + k$ 를 갖는다.

즉, $4 + k = 5$ 이므로 $k = 1$

따라서 함수 $y = 2^{x+1} + 1$ 의 최솟값은

$\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

06-1 [답] (1) 최댓값: 25, 최솟값: $\frac{1}{25}$

(2) 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{16}$

(1) $y = 5^{x^2-2x-1}$ 에서 $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 이라 하면

$f(x) = (x-1)^2 - 2$

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(2) = -1$

이므로

$-2 \leq f(x) \leq 2$

이때 함수 $y = 5^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 크므로 함수

$y = 5^{f(x)}$ 은

$f(x) = 2$ 에서 최댓값 $5^2 = 25$,

$f(x) = -2$ 에서 최솟값 $5^{-2} = \frac{1}{25}$ 을 갖는다.

(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2-4x}$ 에서 $f(x) = -x^2 - 4x$ 라 하면

$f(x) = -(x+2)^2 + 4$

$-3 \leq x \leq 0$ 에서 $f(-3) = 3$, $f(-2) = 4$, $f(0) = 0$ 이

므로

$0 \leq f(x) \leq 4$

이때 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 작으므로 함수

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은

$f(x) = 0$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$,

$f(x) = 4$ 에서 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ 을 갖는다.

06-2 [답] $\frac{1}{3}$

$y = a^{x^2+4x+6}$ 에서 $f(x) = x^2 + 4x + 6$ 이라 하면

$f(x) = (x+2)^2 + 2 \quad \therefore f(x) \geq 2$

이때 함수 $y = a^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 작으므로

함수 $y = a^{f(x)}$ 은 $f(x) = 2$ 에서 최댓값 a^2 을 갖는다.

따라서 $a^2 = \frac{1}{9}$ 이므로 $a = \frac{1}{3}$ ($\because 0 < a < 1$)

07-1 [답] 최댓값: 3, 최솟값: -33

$y = 2^{x+2} - 4^x - 1 = -(2^x)^2 + 4 \times 2^x - 1$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $-1 \leq x \leq 3$ 에서

$2^{-1} \leq t \leq 2^3 \quad \therefore \frac{1}{2} \leq t \leq 8$

이때 주어진 함수는

$y = -t^2 + 4t - 1 = -(t-2)^2 + 3$

따라서 $\frac{1}{2} \leq t \leq 8$ 일 때 함수 $y = -(t-2)^2 + 3$ 은

$t = 2$ 에서 최댓값 3,

$t = 8$ 에서 최솟값 -33을 갖는다.

07-2 ㉡ -1

$3^x + 3^{-x} = t$ 로 놓으면 $3^x > 0$, $3^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \times 3^{-x}} = 2$$

(단, 등호는 $3^x = 3^{-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립)

$$\therefore t \geq 2$$

$9^x + 9^{-x}$ 을 t 에 대한 식으로 나타내면

$$\begin{aligned} 9^x + 9^{-x} &= (3^x)^2 + (3^{-x})^2 \\ &= (3^x + 3^{-x})^2 - 2 \\ &= t^2 - 2 \end{aligned}$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 2 - 2t + 1 = (t-1)^2 - 2$$

따라서 $t \geq 2$ 일 때 함수 $y = (t-1)^2 - 2$ 는

$t=2$ 에서 최솟값 -1 을 갖는다.

연습문제

57~58쪽

- | | | | |
|------------------------------|----------------------|-------|------|
| 1 $\frac{5}{8}$ | 2 $a < 0$ 또는 $a > 1$ | 3 ④ | 4 ⑤ |
| 5 $\neg, \supset, \supseteq$ | 6 ⑤ | 7 7 | 8 ① |
| 9 $\frac{13}{6}$ | 10 ① | 11 13 | 12 2 |
| 14 ④ | 15 2 | | |

1 $f(6)=8$ 이므로 $a^6=8$

$$\begin{aligned} f(-6) &= a^{-6} = (a^6)^{-1} \\ &= 8^{-1} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-2) &= a^{-2} = (a^6)^{-\frac{1}{3}} \\ &= 8^{-\frac{1}{3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore f(-6) + f(-2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

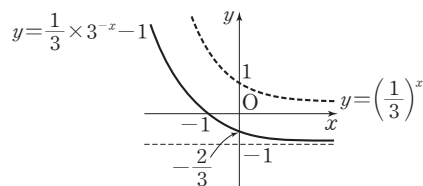
2 $y = (a^2 - a + 1)^x$ 에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하려면 밑이 1보다 커야 하므로

$$a^2 - a + 1 > 1$$

$$a^2 - a > 0, a(a-1) > 0$$

$$\therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 1$$

$$\begin{aligned} 3 \quad y &= \frac{1}{3} \times 3^{-x} - 1 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 1 \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$



① 치역은 $\{y | y > -1\}$ 이다.

② ㉠에 $x = -1$ 을 대입하면

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

따라서 그래프는 점 $(-1, 0)$ 을 지난다.

③ ㉠에서 밑이 1보다 작으므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

④ 그래프는 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지난다.

⑤ 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 1$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

4 함수 $y = 3^x + a$ 의 그래프의 점근선이 직선 $y = 5$ 이므로 $a = 5$

함수 $y = 3^x + 5$ 의 그래프가 점 $(2, b)$ 를 지나므로

$$b = 3^2 + 5 = 9 + 5 = 14$$

$$\therefore a + b = 5 + 14 = 19$$

5 $\neg, y = 8 \times 2^x = 2^{x+3}$

즉, 함수 $y = 8 \times 2^x$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것과 같다.

$$\neg, y = 2^{2x} = 4^x$$

즉, $y = 2^{2x}$ 은 $y = 2^x$ 과 밑이 다르므로 함수 $y = 2^{2x}$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

$$\neg, y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 2^{-(x-1)}$$

즉, 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것과 같다.

$$\therefore y=2(2^x-1)=2^{x+1}-2$$

즉, 함수 $y=2(2^x-1)$ 의 그래프는 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 보기의 함수에서 그 그래프가 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

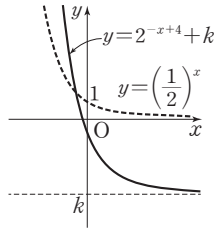
- 6 $y=2^{-x+4}+k=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}+k$, 즉 함수 $y=2^{-x+4}+k$ 의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

이때 이 함수의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$2^4+k \leq 0$$

$$\therefore k \leq -16$$

따라서 k 의 최댓값은 -16 이다.



- 7 함수 $y=2^x$ 의 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$a=1$$

함수 $y=2^x$ 의 그래프는 점 (a, b) , 즉 점 $(1, b)$ 를 지나므로

$$b=2^1=2$$

함수 $y=2^x$ 의 그래프는 점 (b, c) , 즉 점 $(2, c)$ 를 지나므로

$$c=2^2=4$$

$$\therefore a+b+c=1+2+4=7$$

- 8 $0 < a < 1$ 에서 $0 < a^2 < a$ 이므로

$$a^2 < a < 1$$

이때 a^x 의 밑이 1보다 작으므로

$$a^1 < a^a < a^{a^2}$$

$$\therefore a < a^a < a^{a^2}$$

- 9 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $y=a^x$ ($0 < a < 1$)은

$$x=-1 \text{에서 최댓값 } \frac{1}{a},$$

$x=2$ 에서 최솟값 a^2 을 갖는다.

$$\text{즉, } a^2 = \frac{4}{9} \text{이므로 } a = \frac{2}{3} \quad (\because 0 < a < 1)$$

$$\therefore M = \frac{1}{a} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a+M = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$$

- 10 $y=3^{x^2+4x+a}$ 에서 $f(x)=x^2+4x+a$ 라 하면

$$f(x)=(x+2)^2+a-4$$

$$-1 \leq x \leq 1 \text{에서 } f(-1)=a-3, f(1)=a+5 \text{이므로}$$

$$a-3 \leq f(x) \leq a+5$$

이때 함수 $y=3^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 크므로 함수 $y=3^{f(x)}$ 은 $f(x)=a+5$ 에서 최댓값 3^{a+5} 을 갖는다.

$$\text{즉, } 3^{a+5}=9=3^2 \text{이므로 } a+5=2$$

$$\therefore a=-3$$

- 11 $y=4^{-x}-3 \times 2^{1-x}+a$

$$=(2^{-x})^2-6 \times 2^{-x}+a$$

$$=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x+a$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t \quad (t>0) \text{로 놓으면 } -2 \leq x \leq 0 \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 \leq t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad \therefore 1 \leq t \leq 4$$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-6t+a=(t-3)^2+a-9$$

따라서 $1 \leq t \leq 4$ 일 때 함수 $y=(t-3)^2+a-9$ 는

$t=3$ 에서 최솟값 $a-9$ 를 갖는다.

$$\text{즉, } a-9=4 \text{이므로 } a=13$$

- 12 $5^x+5^{-x}=t$ 로 놓으면 $5^x>0$, $5^{-x}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t=5^x+5^{-x} \geq 2\sqrt{5^x \times 5^{-x}}=2$$

(단, 등호는 $5^x=5^{-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립)

$$\therefore t \geq 2$$

25^x+25^{-x} 을 t 에 대한 식으로 나타내면

$$25^x+25^{-x}=(5^x)^2+(5^{-x})^2=(5^x+5^{-x})^2-2=t^2-2$$

이때 주어진 함수는

$$y=2t-(t^2-2)=-(t-1)^2+3$$

따라서 $t \geq 2$ 일 때 함수 $y=-(t-1)^2+3$ 은

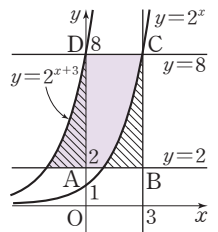
$t=2$ 에서 최댓값 2를 갖는다.

- 13 함수 $y=8 \times 2^x=2^{x+3}$ 의 그래프는 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

즉, 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 두 함수 $y=2^x$, $y=8 \times 2^x$ 의 그래프와 두 직선 $y=2$, $y=8$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\overline{AD} \times \overline{CD}=(8-2) \times 3=18$$



- 14 두 점 P, Q는 직선 $y=2x+k$ 위에 있으므로
 $P(p, 2p+k), Q(q, 2q+k) (p < q)$ 라 하자.
 $PQ=\sqrt{5}$ 이므로

$$\sqrt{(q-p)^2 + \{(2q+k) - (2p+k)\}^2} = \sqrt{5}$$

$$(q-p)^2 + 4(q-p)^2 = 5, (q-p)^2 = 1$$

$$\therefore q-p=1 (\because p < q) \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

점 P는 곡선 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} + 1$ 위에 있으므로

$$2p+k = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3} + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

점 Q는 곡선 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} + \frac{8}{3}$ 위에 있으므로

$$2q+k = \left(\frac{2}{3}\right)^{q+1} + \frac{8}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

$\textcircled{8} - \textcircled{9}$ 을 하면

$$2q-2p = \left(\frac{2}{3}\right)^{q+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3} + \frac{5}{3}$$

$$2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3} + \frac{5}{3} (\because \textcircled{7})$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2} \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^{p+2} = 1$$

$$p+2=0 \quad \therefore p=-2$$

이를 $\textcircled{8}$ 에 대입하면

$$-4+k = \frac{2}{3} + 1 \quad \therefore k = \frac{17}{3}$$

- 15 함수 $y=a^{4^x-2^{x+1}+2}$ 에서 $s=4^x-2^{x+1}+2$ 라 하면

$$s=(2^x)^2-2 \times 2^x+2$$

$2^x=t (t>0)$ 로 놓으면

$$s=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$$

$$-1 \leq x \leq 1 \text{에서 } 2^{-1} \leq t \leq 2^1$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq t \leq 2$$

$$\frac{1}{2} \leq t \leq 2 \text{일 때 } s=(t-1)^2+1 \text{은 } t=2 \text{에서 최댓값 } 2,$$

$t=1$ 에서 최솟값 1을 가지므로

$$1 \leq s \leq 2$$

이때 $1 \leq s \leq 2$ 에서 함수 $y=a^s$ 을 $a>1, 0<a<1$ 인 경우로 나누어 생각하면

(i) $a>1$ 인 경우

함수 $y=a^s$ 은 $s=2$ 에서 최댓값 a^2 을 가지므로

$$a^2=4 \quad \therefore a=2 (\because a>1)$$

(ii) $0<a<1$ 인 경우

함수 $y=a^s$ 은 $s=1$ 에서 최댓값 a 을 가지므로

$$a=4$$

그런데 $0<a<1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=2$

I-2 02 지수함수의 활용

지수함수의 활용

개념 Check

59쪽

1 답 (1) $x=-3$ (2) $x=-3$ (3) $x=-4$

2 답 (1) $x \geq 3$ (2) $x > \frac{7}{2}$ (3) $x < -1$

문제

60~68쪽

01-1 답 (1) $x=7$ (2) $x=4$

(3) $x=1$ 또는 $x=2$ (4) $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=1$

(1) $8^{x-1}=16 \times 4^x$ 에서 $2^{3x-3}=2^{4+2x}$ 이므로

$$3x-3=4+2x \quad \therefore x=7$$

(2) $(\sqrt{3})^x=9$ 에서 $3^{\frac{x}{2}}=3^2$ 이므로

$$\frac{x}{2}=2 \quad \therefore x=4$$

(3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ 에서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}$ 이므로

$$x^2-2x=x-2, x^2-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

(4) $4^x-2^{3-x}=0$ 에서 $2^{2x}=2^{3-x}$ 이므로

$$2x^2=3-x, 2x^2+x-3=0$$

$$(2x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-\frac{3}{2} \text{ 또는 } x=1$$

01-2 답 10

$$9^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3} \text{에서 } 3^{2x} = 3^{-x^2+3} \text{이므로}$$

$$2x = -x^2+3, x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 $\alpha=-3, \beta=1$ 또는 $\alpha=1, \beta=-3$ 이므로

$$\alpha^2+\beta^2=(-3)^2+1^2=10$$

02-1 답 (1) $x=1$ 또는 $x=2$ (2) $x=-2$

(3) $x=0$ (4) $x=0$ 또는 $x=2$

(1) $9^x-4 \times 3^{x+1}+27=0$ 에서

$$(3^x)^2-12 \times 3^x+27=0$$

$$3^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-12t+27=0, (t-3)(t-9)=0$$

$$\therefore t=3 \text{ 또는 } t=9$$

$$t=3^x \text{이므로 } 3^x=3 \text{ 또는 } 3^x=9=3^2$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

$$(2) \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 8 = 0 \text{에서}$$

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^x \right\}^2 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 8 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$(t+2)(t-4) = 0 \quad \therefore t = 4 (\because t > 0)$$

$$t = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{이므로 } \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\therefore x = -2$$

$$(3) 5^x + 5^{-x} = 2 \text{에서 } 5^x + \frac{1}{5^x} = 2$$

$$5^x = t (t > 0) \text{로 놓으면 } t + \frac{1}{t} = 2$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0, (t-1)^2 = 0 \quad \therefore t = 1$$

$$t = 5^x \text{이므로 } 5^x = 1 = 5^0 \quad \therefore x = 0$$

$$(4) 2^x + 4 \times 2^{-x} = 5 \text{에서 } 2^x + \frac{4}{2^x} = 5$$

$$2^x = t (t > 0) \text{로 놓으면 } t + \frac{4}{t} = 5, t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$(t-1)(t-4) = 0 \quad \therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 4$$

$$t = 2^x \text{이므로 } 2^x = 1 = 2^0 \text{ 또는 } 2^x = 4 = 2^2$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

02-2 ㉡ 6

$$\begin{cases} 2^{x+1} - 3^{y-1} = -1 \\ 2^{x-2} + 3^{y+1} = 82 \end{cases} \text{에서}$$

$$\begin{cases} 2 \times 2^x - \frac{1}{3} \times 3^y = -1 \\ \frac{1}{4} \times 2^x + 3 \times 3^y = 82 \end{cases}$$

$2^x = X (X > 0), 3^y = Y (Y > 0) \text{로 놓으면}$

$$\begin{cases} 2X - \frac{1}{3}Y = -1 \\ \frac{1}{4}X + 3Y = 82 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $X = 4, Y = 27$

즉, $2^x = 4 = 2^2, 3^y = 27 = 3^3$ 이므로

$$x = 2, y = 3$$

따라서 $\alpha = 2, \beta = 3$ 이므로 $\alpha\beta = 6$

03-1 ㉡ (1) $x = 1$ (2) $x = -1$ 또는 $x = 4$

(3) $x = 5$ (4) $x = 2$ 또는 $x = 3$

$$(1) x^{3x+4} = x^{-x+2} \text{에서}$$

(i) 밑이 1이면 $x = 1$

(ii) 지수가 같으면

$$3x + 4 = -x + 2 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}$$

그런데 $x > 0$ 이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x = 1$

$$(2) (x+2)^{x+1} = (x+2)^{x^2-11} \text{에서}$$

(i) 밑이 1이면

$$x + 2 = 1 \quad \therefore x = -1$$

(ii) 지수가 같으면

$$x + 1 = x^2 - 11, x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x+3)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 4$$

그런데 $x > -2$ 이므로 $x = 4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$

$$(3) 5^{2x+1} = x^{2x+1} \text{에서}$$

(i) 밑이 같으면 $x = 5$

(ii) 지수가 0이면

$$2x + 1 = 0 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}$$

그런데 $x > 0$ 이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x = 5$

$$(4) (x-1)^{x-3} = (2x-3)^{x-3} \text{에서}$$

(i) 밑이 같으면

$$x - 1 = 2x - 3 \quad \therefore x = 2$$

(ii) 지수가 0이면

$$x - 3 = 0 \quad \therefore x = 3$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

03-2 ㉡ $x = 1$ 또는 $x = 6$

$$(x^2)^x = x^x \times x^6 \text{에서 } x^{2x} = x^{x+6}$$

(i) 밑이 1이면 $x = 1$

(ii) 지수가 같으면

$$2x = x + 6 \quad \therefore x = 6$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 6$$

03-3 ㉡ 5

$$x^{2x-6} = (x+2)^{x-3} \text{에서}$$

$$(x^2)^{x-3} = (x+2)^{x-3}$$

(i) 밑이 같으면

$$x^2 = x + 2, x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 2$

(ii) 지수가 0이면

$$x - 3 = 0 \quad \therefore x = 3$$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은 $2 + 3 = 5$

04-1 ㉡ (1) 3 (2) -9

- (1) $4^x - 3 \times 2^{x+2} + 8 = 0$ 에서
 $(2^x)^2 - 12 \times 2^x + 8 = 0$ ㉠
 $2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 12t + 8 = 0$ ㉡
 방정식 ㉠의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식 ㉡의 두
 근은 $2^\alpha, 2^\beta$
 따라서 ㉡에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $2^\alpha \times 2^\beta = 8, 2^{\alpha+\beta} = 2^3 \quad \therefore \alpha + \beta = 3$
- (2) $9^x - 4 \times 3^{x+1} - k = 0$ 에서
 $(3^x)^2 - 12 \times 3^x - k = 0$ ㉢
 $3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 12t - k = 0$ ㉣
 방정식 ㉢의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식 ㉣의 두
 근은 $3^\alpha, 3^\beta$
 따라서 ㉣에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $3^\alpha \times 3^\beta = -k$
 이때 방정식 ㉢의 두 근의 합이 2, 즉 $\alpha + \beta = 2$ 이므로
 $k = -3^{\alpha+\beta} = -3^2 = -9$

04-2 ㉡ $a > 2$

- $4^x - a \times 2^{x+2} + 16 = 0$ 에서 $(2^x)^2 - 4a \times 2^x + 16 = 0$
 $2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 4at + 16 = 0$ ㉠
 $t = 2^x > 0$ 이므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가
 지면 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.
 (i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하
 므로
 $\frac{D}{4} = (2a)^2 - 16 > 0$
 $4a^2 - 16 > 0, a^2 - 4 > 0$
 $(a+2)(a-2) > 0 \quad \therefore a < -2 \text{ 또는 } a > 2$
 (ii) (두 근의 합) > 0 이어야 하므로
 $4a > 0 \quad \therefore a > 0$
 (iii) (두 근의 곱) > 0 이어야 하므로 $16 > 0$
 (i), (ii), (iii)을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는
 $a > 2$

05-1 ㉡ (1) $x \leq 3$ (2) $-3 < x < 1$

- (3) $x \geq \frac{1}{2}$ (4) $-2 < x < 0$
- (1) $4^{2x-1} \leq 8 \times 2^{3x-2}$ 에서
 $(2^2)^{2x-1} \leq 2^3 \times 2^{3x-2}, 2^{4x-2} \leq 2^{3x+1}$
 밑이 1보다 크므로
 $4x - 2 \leq 3x + 1 \quad \therefore x \leq 3$

- (2) $3^{x(2x+1)} < 27^{2-x}$ 에서
 $3^{2x^2+x} < (3^3)^{2-x}, 3^{2x^2+x} < 3^{6-3x}$
 밑이 1보다 크므로
 $2x^2 + x < 6 - 3x, x^2 + 2x - 3 < 0$
 $(x+3)(x-1) < 0$
 $\therefore -3 < x < 1$
- (3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq \left(\frac{1}{81}\right)^x$ 에서
 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^4\right\}^x, \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{4x}$
 밑이 1보다 작으므로
 $2x+1 \leq 4x \quad \therefore x \geq \frac{1}{2}$
- (4) $0.2^{x^2} - \left(\frac{1}{25}\right)^{-x} > 0$ 에서
 $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} - \left\{\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}^{-x} > 0, \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-2x}$
 밑이 1보다 작으므로
 $x^2 < -2x, x^2 + 2x < 0$
 $x(x+2) < 0$
 $\therefore -2 < x < 0$

05-2 ㉡ $-2 < x \leq 1$

- (i) $2^{2x+1} > (\sqrt{8})^x$ 에서 $2^{2x+1} > 2^{\frac{3}{2}x}$
 밑이 1보다 크므로
 $2x+1 > \frac{3}{2}x \quad \therefore x > -2$
- (ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{3x-5}$ 에서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+1} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+5}$
 밑이 1보다 작으므로
 $x^2+1 \leq -3x+5, x^2+3x-4 \leq 0$
 $(x+4)(x-1) \leq 0$
 $\therefore -4 \leq x \leq 1$
- (i), (ii)를 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $-2 < x \leq 1$

06-1 ㉡ (1) $1 < x < 2$ (2) $x < 1$ 또는 $x > 3$

- (3) $-3 \leq x \leq -1$ (4) $x \leq -2$
- (1) $25^x - 6 \times 5^{x+1} + 125 < 0$ 에서
 $(5^x)^2 - 30 \times 5^x + 125 < 0$
 $5^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 30t + 125 < 0, (t-5)(t-25) < 0$
 $\therefore 5 < t < 25$
 $t = 5^x$ 이므로 $5 < 5^x < 25, 5^1 < 5^x < 5^2$
 밑이 1보다 크므로
 $1 < x < 2$

(2) $9^x - 10 \times 3^{x+1} + 81 > 0$ 에서
 $(3^x)^2 - 30 \times 3^x + 81 > 0$
 $3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 30t + 81 > 0, (t-3)(t-27) > 0$
 $\therefore t < 3$ 또는 $t > 27$
 그런데 $t > 0$ 이므로
 $0 < t < 3$ 또는 $t > 27$
 $t = 3^x$ 이므로
 $0 < 3^x < 3$ 또는 $3^x > 27$
 $3^x < 3^1$ 또는 $3^x > 3^3$
 밑이 1보다 크므로 $x < 1$ 또는 $x > 3$

(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 16 \leq 0$ 에서
 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 16 \leq 0$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 10t + 16 \leq 0, (t-2)(t-8) \leq 0$
 $\therefore 2 \leq t \leq 8$
 $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이므로
 $2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 8, \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
 밑이 1보다 작으므로 $-3 \leq x \leq -1$
 (4) $\left(\frac{1}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 27$ 에서
 $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + 27$
 $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 27 \geq 0$
 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 6t - 27 \geq 0, (t+3)(t-9) \geq 0$
 $\therefore t \leq -3$ 또는 $t \geq 9$
 그런데 $t > 0$ 이므로 $t \geq 9$
 $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 이므로
 $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 9, \left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$
 밑이 1보다 작으므로 $x \leq -2$

06-2 ㉡ -2, -1

$\left(\frac{1}{49}\right)^x - 56 \times \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{2x} + 343 \leq 0$ 에서
 $\left\{\left(\frac{1}{7}\right)^x\right\}^2 - 56 \times \left(\frac{1}{7}\right)^x + 343 \leq 0$
 $\left(\frac{1}{7}\right)^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 56t + 343 \leq 0, (t-7)(t-49) \leq 0$
 $\therefore 7 \leq t \leq 49$

$t = \left(\frac{1}{7}\right)^x$ 이므로
 $7 \leq \left(\frac{1}{7}\right)^x \leq 49, \left(\frac{1}{7}\right)^{-1} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^x \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$
 밑이 1보다 작으므로 $-2 \leq x \leq -1$
 따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 값은 $-2, -1$ 이다.

07-1 ㉡ $0 < x < 1$ 또는 $x > 3$

$x^{3x-2} > x^{x+4}$ 에서
 (i) $0 < x < 1$ 일 때,
 $3x-2 < x+4 \quad \therefore x < 3$
 그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$
 (ii) $x = 1$ 일 때,
 $1 > 1$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.
 따라서 해는 없다.
 (iii) $x > 1$ 일 때,
 $3x-2 > x+4 \quad \therefore x > 3$
 (i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는
 $0 < x < 1$ 또는 $x > 3$

07-2 ㉡ 3

$x^x \leq x^{2x+3}$ 에서
 (i) $0 < x < 1$ 일 때,
 $x^2 \geq 2x+3, x^2-2x-3 \geq 0$
 $(x+1)(x-3) \geq 0 \quad \therefore x \leq -1$ 또는 $x \geq 3$
 그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해는 없다.
 (ii) $x = 1$ 일 때,
 $1 \leq 1$ 이므로 부등식은 성립한다.
 따라서 $x = 1$ 은 해이다.
 (iii) $x > 1$ 일 때,
 $x^2 \leq 2x+3, x^2-2x-3 \leq 0$
 $(x+1)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 3$
 그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x \leq 3$
 (i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는
 $1 \leq x \leq 3$
 따라서 $m = 1, n = 3$ 이므로 $mn = 3$

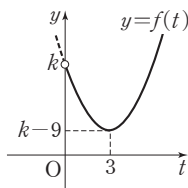
07-3 ㉡ $x > 2$

$(x-1)^{x+2} < (x-1)^{4x-1}$ 에서
 (i) $0 < x-1 < 1$, 즉 $1 < x < 2$ 일 때
 $x+2 > 4x-1 \quad \therefore x < 1$
 그런데 $1 < x < 2$ 이므로 해는 없다.
 (ii) $x-1 = 1$, 즉 $x = 2$ 일 때
 $1 < 1$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.
 따라서 해는 없다.

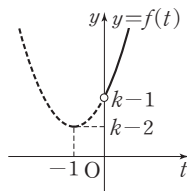
- (iii) $x-1>1$, 즉 $x>2$ 일 때
 $x+2<4x-1 \quad \therefore x>1$
 그런데 $x>2$ 이므로 $x>2$
 (i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $x>2$

08-1 [답] (1) $k \geq 9$ (2) $k \geq 1$

- (1) $9^x - 2 \times 3^{x+1} + k \geq 0$ 에서
 $(3^x)^2 - 6 \times 3^x + k \geq 0$
 $3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $t^2 - 6t + k \geq 0$
 $f(t) = t^2 - 6t + k$ 라 하면
 $f(t) = (t-3)^2 + k-9$
 $t > 0$ 에서 $f(t)$ 의 최솟값은
 $k-9$ 이므로 부등식 $f(t) \geq 0$ 이 성립하려면
 $k-9 \geq 0 \quad \therefore k \geq 9$



- (2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + k - 1 > 0$ 에서
 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + k - 1 > 0$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $t^2 + 2t + k - 1 > 0$
 $f(t) = t^2 + 2t + k - 1$ 이라 하면
 $f(t) = (t+1)^2 + k - 2$
 $t > 0$ 에서 부등식 $f(t) > 0$ 이 성립하려면 $f(0) \geq 0$ 이어야 한다.
 즉, $f(0) = k - 1 \geq 0$
 $\therefore k \geq 1$



08-2 [답] $a \geq \frac{9}{2}$

- $5^{x^2+4x} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^{x+a}$ 에서
 $5^{x^2+4x} \geq (5^{-2})^{x+a}$
 $5^{x^2+4x} \geq 5^{-2x-2a}$
 밑이 1보다 크므로
 $x^2 + 4x \geq -2x - 2a$
 $\therefore x^2 + 6x + 2a \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $\textcircled{1}$ 이 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2 + 6x + 2a = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, $D \leq 0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4} = 9 - 2a \leq 0$
 $2a \geq 9 \quad \therefore a \geq \frac{9}{2}$

09-1 [답] 12m

수면에서 빛의 세기의 12.5%가 되는 곳의 수심을 k m라 하면

$$I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{4}} = \frac{125}{1000} I_0, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{4}} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{에서 } \frac{k}{4} = 3 \quad \therefore k = 12$$

따라서 빛의 세기가 수면에서 빛의 세기의 12.5%가 되는 곳의 수심은 12m이다.

09-2 [답] 5시간

10마리의 박테리아 A가 3시간 후에 640마리가 되므로

$$10 \times a^3 = 640, a^3 = 64$$

$$\therefore a = 4$$

10마리의 박테리아 A가 t 시간 후에 10240마리 이상이 된다고 하면

$$10 \times 4^t \geq 10240, 4^t \geq 1024$$

$$4^t \geq 4^5 \quad \therefore t \geq 5$$

따라서 10마리의 박테리아 A가 10240마리 이상이 되는 것은 번식을 시작한 지 5시간 후부터이다.

연습문제

69~70쪽

- | | | | |
|------------------|-------|---------------|------|
| 1 6 | 2 8 | 3 $x=0$ | 4 ① |
| 5 $x=1$ 또는 $x=2$ | 6 ④ | 7 2 | 8 6 |
| 9 $x \leq -2$ | 10 -3 | 11 $a \leq 1$ | 12 ② |
| 14 ⑤ | | | 13 ④ |

- 1 $27^{x^2+1} - 9^{x+4} = 0$ 에서
 $27^{x^2+1} = 9^{x+4}$
 $(3^3)^{x^2+1} = (3^2)^{x+4}$
 $3^{3x^2+3} = 3^{2x+8}$
 $3x^2+3 = 2x+8$ 이므로
 $3x^2-2x-5=0$
 $(x+1)(3x-5)=0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = \frac{5}{3}$
 따라서 $\alpha = -1$, $\beta = \frac{5}{3}$ 이므로
 $3\beta - \alpha = 3 \times \frac{5}{3} - (-1) = 6$

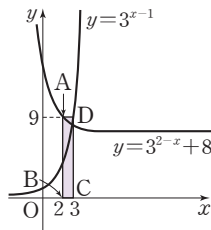
2 $a^{2x} + a^x - 6 = 0$ 에서
 $(a^x)^2 + a^x - 6 = 0$
 $a^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 + t - 6 = 0$
 $(t+3)(t-2) = 0$
 $\therefore t = 2 (\because t > 0)$
 $t = a^x$ 이므로 $a^x = 2$
 이때 $x = \frac{1}{3}$ 이므로 $a^{\frac{1}{3}} = 2$
 $\therefore a = 8$

3 $3^x + 3^{-x} = t (t \geq 2)$ 로 놓으면 $\blacktriangleleft 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \times 3^{-x}} = 2$
 $9^x + 9^{-x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2$ (단, $x=0$ 일 때 성립)
 $= t^2 - 2$
 즉, 주어진 방정식은 $(t^2 - 2) + t - 4 = 0$
 $t^2 + t - 6 = 0$
 $(t+3)(t-2) = 0$
 $\therefore t = 2 (\because t \geq 2)$
 따라서 $3^x + 3^{-x} = 2$ 이므로 $x = 0$

다른 풀이

$3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면 주어진 방정식은
 $t^2 + \frac{1}{t^2} + t + \frac{1}{t} - 4 = 0$
 $t^4 + t^3 - 4t^2 + t + 1 = 0$
 $(t-1)^2(t^2 + 3t + 1) = 0$
 $\therefore t = 1 (\because t > 0)$
 $t = 3^x$ 이므로 $3^x = 1 = 3^0$
 $\therefore x = 0$

4 $A(t, 3^{2-t} + 8)$, $B(t, 0)$, $C(t+1, 0)$, $D(t+1, 3^t)$ 이고
 사각형 ABCD가 직사각형이므로 두 점 A, D의 y좌표가
 같다.
 $3^{2-t} + 8 = 3^t$ 에서
 $3^t = k (k > 0)$ 로 놓으면
 $\frac{9}{k} + 8 = k, k^2 - 8k - 9 = 0$
 $(k+1)(k-9) = 0$
 $\therefore k = 9 (\because k > 0)$
 $k = 3^t$ 이므로
 $3^t = 9 = 3^2 \therefore t = 2$
 $\therefore A(2, 9), B(2, 0),$
 $C(3, 0), D(3, 9)$
 따라서 사각형 ABCD의 넓이는
 $(3-2) \times 9 = 9$



5 $x > 0$ 이므로 $x^x x^x = (x^x)^x$ 에서
 $x^{2x} = x^{x^2}$
 (i) 밑이 1이면 $x = 1$
 (ii) 지수가 같으면
 $2x = x^2, x(x-2) = 0$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$
 그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 2$
 (i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는
 $x = 1$ 또는 $x = 2$

6 $2^{2x+1} - 9 \times 2^x + k = 0$ 에서
 $2 \times (2^x)^2 - 9 \times 2^x + k = 0 \dots\dots \textcircled{7}$
 $2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $2t^2 - 9t + k = 0 \dots\dots \textcircled{8}$
 방정식 ⑦의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식 ⑧의 두 근은
 $2^\alpha, 2^\beta$
 따라서 ⑧에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $2^\alpha \times 2^\beta = \frac{k}{2}$
 이때 방정식 ⑦의 두 근의 합이 1, 즉 $\alpha + \beta = 1$ 이므로
 $k = 2 \times 2^{\alpha+\beta} = 2^{1+1} = 4$

7 $9^x - k \times 3^{x+1} + 9 = 0$ 에서
 $(3^x)^2 - 3k \times 3^x + 9 = 0$
 $3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 3kt + 9 = 0 \dots\dots \textcircled{9}$
 주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지면 이차방정식
 ⑨은 오직 하나의 양의 실근을 갖는다.
 이때 ⑨에서 (두 근의 곱) $= 9 > 0$ 이므로 이차방정식 ⑨은
 양수인 중근을 갖는다.
 이차방정식 ⑨의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로
 $D = 9k^2 - 36 = 0, k^2 - 4 = 0$
 $(k+2)(k-2) = 0 \therefore k = -2$ 또는 $k = 2$
 그런데 이차방정식 ⑨의 근이 양수이어야 하므로
 (두 근의 합) $= 3k > 0$
 즉, $k > 0$ 이므로 $k = 2$

8 $\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2+3x+2} \leq \left(\frac{1}{81}\right)^{x^2+2x-2}$ 에서
 $\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2+3x+2} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{2x^2+4x-4}$
 밑이 1보다 작으므로
 $x^2 + 3x + 2 \geq 2x^2 + 4x - 4, x^2 + x - 6 \leq 0$
 $(x+3)(x-2) \leq 0 \therefore -3 \leq x \leq 2$
 따라서 정수 x 는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ 의 6개이다.

9 $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2x-2} + 8$ 에서

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 8$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 \geq 2t + 8, t^2 - 2t - 8 \geq 0$$

$$(t+2)(t-4) \geq 0 \quad \therefore t \geq 4 (\because t > 0)$$

$$t = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{이므로 } \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 4$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

밑이 1보다 작으므로 $x \leq -2$

10 $x^{-x+2} > x^{2x-10}$ 에서

(i) $0 < x < 1$ 일 때,

$$-x+2 < 2x-10, 3x > 12 \quad \therefore x > 4$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x=1$ 일 때,

$1 > 1$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

따라서 해는 없다.

(iii) $x > 1$ 일 때,

$$-x+2 > 2x-10, 3x < 12 \quad \therefore x < 4$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x < 4$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$1 < x < 4$$

따라서 $m=1, n=4$ 이므로 $m-n=-3$

11 $4^x - a \times 2^{x+2} + 4 \geq 0$ 에서

$$(2^x)^2 - 4a \times 2^x + 4 \geq 0$$

$$2^x = t (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 - 4at + 4 \geq 0$$

$$f(t) = t^2 - 4at + 4 \text{라 하면}$$

$$f(t) = (t-2a)^2 + 4-4a^2$$

$t > 0$ 에서 부등식 $f(t) \geq 0$ 이 성립하려면

(i) $2a \geq 0$, 즉 $a \geq 0$ 일 때

$$4-4a^2 \geq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$a^2 - 1 \leq 0, (a+1)(a-1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 1$$

그런데 $a \geq 0$ 이므로 $0 \leq a \leq 1$

(ii) $2a < 0$, 즉 $a < 0$ 일 때

$$f(0) \geq 0 \text{이어야 한다.}$$

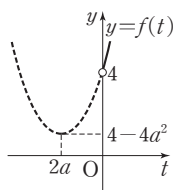
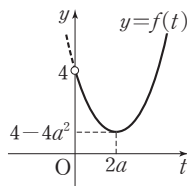
이때 $f(0) = 4 \geq 0$ 이므로 모든

실수 t 에 대하여 성립한다.

$$\therefore a < 0$$

(i), (ii)에서 $t > 0$ 에서 부등식 $f(t) \geq 0$ 이 성립하려면

$$a \leq 1$$



12 $\frac{Q(4)}{Q(2)} = \frac{3}{2}$ 에서 $\frac{Q_0(1-2^{-\frac{4}{a}})}{Q_0(1-2^{-\frac{2}{a}})} = \frac{3}{2}$

$$2(1-2^{-\frac{4}{a}}) = 3(1-2^{-\frac{2}{a}})$$

$$2(1-2^{-\frac{2}{a}})(1+2^{-\frac{2}{a}}) = 3(1-2^{-\frac{2}{a}}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

a 는 양의 상수이므로 $2^{-\frac{2}{a}} \neq 1$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 $1-2^{-\frac{2}{a}}$ 으로 나누면

$$2(1+2^{-\frac{2}{a}}) = 3, 2^{-\frac{2}{a}} = \frac{1}{2}, 2^{-\frac{2}{a}} = 2^{-1}$$

$$-\frac{2}{a} = -1 \quad \therefore a = 2$$

13 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$ 에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3g(x)}$$

밑이 1보다 작으므로

$$f(x)g(x) \leq 3g(x), g(x)\{f(x)-3\} \leq 0$$

$$\therefore g(x) \geq 0, f(x) \leq 3 \text{ 또는 } g(x) \leq 0, f(x) \geq 3$$

(i) $g(x) \geq 0, f(x) \leq 3$ 인 경우

$$g(x) \geq 0 \text{에서 } x \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(x) \leq 3 \text{에서 } 1 \leq x \leq 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $3 \leq x \leq 5$

(ii) $g(x) \leq 0, f(x) \geq 3$ 인 경우

$$g(x) \leq 0 \text{에서 } x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$f(x) \geq 3 \text{에서 } x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 5 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $x \leq 1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$x \leq 1 \text{ 또는 } 3 \leq x \leq 5$$

따라서 자연수 x 는 1, 3, 4, 5이므로 그 합은

$$1+3+4+5=13$$

14 5730년마다 방사성 동위 원소의 양이 반으로 줄어드므로

x 년 후 방사성 동위 원소의 양은 처음 양의 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$ 이다.

$$500 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}} \leq 62.5$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}} \leq \frac{62.5}{500}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}} \leq \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } \frac{x}{5730} \geq 3 \quad \therefore x \geq 17190$$

따라서 처음으로 ^{14}C 의 양이 62.5g 이하가 되는 것은 17190년 후이다.

로그함수

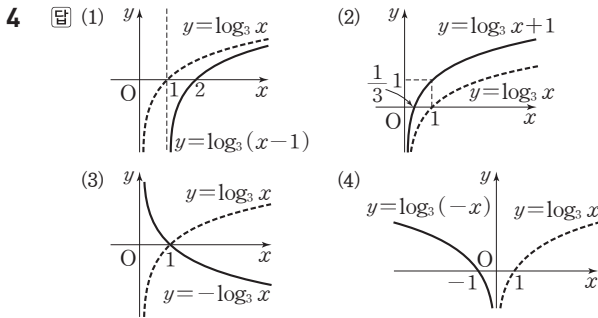
개념 Check

72쪽

1 답 ㄱ, ㄷ

2 답 (1) -1 (2) 0 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 3

3 답 (1) $y=\log_2 x$ (2) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$



문제

73~80쪽

01-1 답 (1) $y=\log_2(x-1)+1$

$$(2) y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} + 2$$

(1) $y=2^{x-1}+1$ 에서 $y-1=2^{x-1}$

로그의 정의에 의하여

$$x-1=\log_2(y-1)$$

$$\therefore x=\log_2(y-1)+1$$

x 와 y 를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$$y=\log_2(x-1)+1$$

(2) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-2)-3$ 에서 $y+3=\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$

로그의 정의에 의하여

$$x-2=\left(\frac{1}{3}\right)^{y+3} \therefore x=\left(\frac{1}{3}\right)^{y+3}+2$$

x 와 y 를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3}+2$$

01-2 답 5

$y=\log_2(x+a)-3$ 에서 $y+3=\log_2(x+a)$

로그의 정의에 의하여

$$x+a=2^{y+3} \therefore x=2^{y+3}-a$$

x 와 y 를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$$y=2^{x+3}-a$$

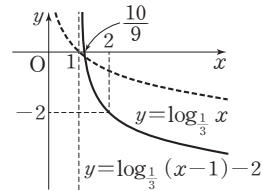
이 식이 $y=2^{x+b}-2$ 와 일치하므로

$$a=2, b=3$$

$$\therefore a+b=5$$

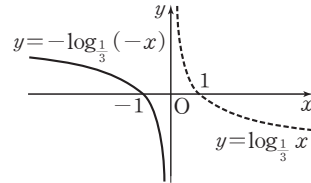
02-1 답 풀이 참조

(1) 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)-2$ 의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x|x>1\}$, 점근선의 방정식: $x=1$

(2) 함수 $y=-\log_{\frac{1}{3}}(-x)$ 의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x|x<0\}$, 점근선의 방정식: $x=0$

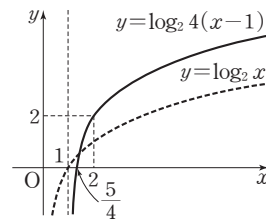
02-2 답 풀이 참조

$$y=\log_2 4(x-1)$$

$$=\log_2 4+\log_2(x-1)$$

$$=\log_2(x-1)+2$$

따라서 함수 $y=\log_2 4(x-1)$ 의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



03-1 답 -4

함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-2=\log_2 x$$

$$\therefore y=\log_2 x+2$$

이 함수의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$\begin{aligned} y &= \log_2(-x) + 2 \\ &= \log_2(-x) + \log_2 4 \\ &= \log_2(-4x) \end{aligned}$$

이 식이 $y = \log_2 ax$ 와 일치하므로

$$a = -4$$

03-2 ㉡ 3

함수 $y = \log_5 x - 2$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \log_5 x - 2 \quad \therefore y = -\log_5 x + 2$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$\begin{aligned} y - 2 &= -\log_5(x + 3) + 2 \\ \therefore y &= -\log_5(x + 3) + 4 \end{aligned}$$

이 함수의 그래프가 점 $(2, k)$ 를 지나므로

$$k = -\log_5(2 + 3) + 4 = -\log_5 5 + 4 = -1 + 4 = 3$$

03-3 ㉡ -2

함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y - b = \log_3(x - a) \quad \therefore y = \log_3(x - a) + b$$

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = -3$ 이므로 $a = -3$

따라서 함수 $y = \log_3(x + 3) + b$ 의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \log_3 3 + b, \quad 2 = 1 + b \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore a + b = -3 + 1 = -2$$

04-1 ㉡ 9

함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$a = 1$$

함수 $y = 3^x$ 의 그래프는 점 (a, c) , 즉 점 $(1, c)$ 를 지나므로

$$c = 3^1 = 3$$

함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프는 점 (b, c) , 즉 점 $(b, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \log_3 b \quad \therefore b = 3^3 = 27$$

함수 $y = 3^x$ 의 그래프는 점 (b, d) , 즉 점 $(27, d)$ 를 지나므로

$$d = 3^{27}$$

$$\therefore \log_b d = \log_{3^3} 3^{27} = \frac{27}{3} = 9$$

04-2 ㉡ 27

$$\overline{AB} = \frac{3}{2} \text{이므로 } \log_3 k - \log_9 k = \frac{3}{2}$$

$$\log_3 k - \frac{1}{2} \log_3 k = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} \log_3 k = \frac{3}{2}$$

$$\log_3 k = 3 \quad \therefore k = 3^3 = 27$$

05-1 ㉡ (1) $\log_3 7 < \log_9 80 < 2$

$$(2) \log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{4}} 20 < -2$$

$$(1) 2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$$

$$\log_9 80 = \log_{3^2} 80 = \frac{1}{2} \log_3 80$$

$$= \log_3 80^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{80}$$

$$7 < \sqrt{80} < 9 \text{이고, 밑이 1보다 크므로}$$

$$\log_3 7 < \log_3 \sqrt{80} < \log_3 9$$

$$\therefore \log_3 7 < \log_9 80 < 2$$

$$(2) \log_{\frac{1}{4}} 20 = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} 20 = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 20$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} 20^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{20}$$

$$-2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{2}} 4$$

$$4 < \sqrt{20} < 5 \text{이고, 밑이 1보다 작으므로}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{20} < \log_{\frac{1}{2}} 4$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{4}} 20 < -2$$

05-2 ㉡ $B < A < C$

$$A = 2 \log_a 5 = \log_a 5^2 = \log_a 25$$

$$B = -3 \log_{\frac{1}{a}} 3 = 3 \log_a 3 = \log_a 3^3 = \log_a 27$$

$$C = \frac{4}{\log_a 2} = 4 \log_a 2 = \log_a 2^4 = \log_a 16$$

$$16 < 25 < 27 \text{이고, } 0 < a < 1 \text{이므로}$$

$$\log_a 27 < \log_a 25 < \log_a 16$$

$$\therefore B < A < C$$

06-1 ㉡ (1) 최댓값: 3, 최솟값: 1

$$(2) \text{ 최댓값: 0, 최솟값: -1}$$

$$(1) \text{ 함수 } y = \log_2(x-1) \text{의 밑이 1보다 크므로}$$

$$3 \leq x \leq 9 \text{일 때 함수 } y = \log_2(x-1) \text{은}$$

$$x=9 \text{에서 최댓값 } \log_2 8 = 3,$$

$$x=3 \text{에서 최솟값 } \log_2 2 = 1 \text{을 갖는다.}$$

$$(2) \text{ 함수 } y = \log_{\frac{1}{3}}(2x-1) + 1 \text{의 밑이 1보다 작으므로}$$

$$2 \leq x \leq 5 \text{일 때 함수 } y = \log_{\frac{1}{3}}(2x-1) + 1 \text{은}$$

$$x=2 \text{에서 최댓값 } \log_{\frac{1}{3}} 3 + 1 = 0,$$

$$x=5 \text{에서 최솟값 } \log_{\frac{1}{3}} 9 + 1 = -1 \text{을 갖는다.}$$

06-2 ㉡ 2

함수 $y = \log_5(2x-3) + 4$ 의 밑이 1보다 크므로
 $2 \leq x \leq 14$ 일 때 함수 $y = \log_5(2x-3) + 4$ 는
 $x=14$ 에서 최댓값 $\log_5 25 + 4 = 6$,
 $x=2$ 에서 최솟값 $\log_5 1 + 4 = 4$ 를 갖는다.
 따라서 $M=6$, $m=4$ 이므로 $M-m=2$

06-3 ㉡ -1

함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-a)$ 의 밑이 1보다 작으므로
 $5 \leq x \leq 11$ 일 때 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-a)$ 는
 $x=5$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}}(5-a)$,
 $x=11$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{3}}(11-a)$ 를 갖는다.
 즉, $\log_{\frac{1}{3}}(11-a) = -2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 11-a$
 $9 = 11-a \quad \therefore a=2$
 따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$ 의 최댓값은
 $\log_{\frac{1}{3}}(5-2) = -1$

07-1 ㉡ (1) 최댓값: 2, 최솟값: 0

(2) 최댓값: -2, 최솟값: $\log_{\frac{1}{3}} 18$

(1) $y = \log_3(-x^2+2x+9)$ 에서
 $f(x) = -x^2+2x+9$ 라 하면
 $f(x) = -(x-1)^2+10$
 $2 \leq x \leq 4$ 에서 $f(2)=9$, $f(4)=1$ 이므로
 $1 \leq f(x) \leq 9$
 이때 함수 $y = \log_3 f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로
 함수 $y = \log_3 f(x)$ 는
 $f(x)=9$ 에서 최댓값 $\log_3 9 = 2$,
 $f(x)=1$ 에서 최솟값 $\log_3 1 = 0$ 을 갖는다.
 (2) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2-4x+13)$ 에서
 $f(x) = x^2-4x+13$ 이라 하면
 $f(x) = (x-2)^2+9$
 $1 \leq x \leq 5$ 에서 $f(1)=10$, $f(2)=9$, $f(5)=18$ 이므로
 $9 \leq f(x) \leq 18$
 이때 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$ 의 밑이 1보다 작으므로
 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$ 는
 $f(x)=9$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$,
 $f(x)=18$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{3}} 18$ 을 갖는다.

07-2 ㉡ 4

진수의 조건에서
 $x-3 > 0$, $5-x > 0$
 $\therefore 3 < x < 5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

$y = \log_2(x-3) + \log_2(5-x)$ 에서
 $y = \log_2(x-3)(5-x) = \log_2(-x^2+8x-15)$
 $f(x) = -x^2+8x-15$ 라 하면
 $f(x) = -(x-4)^2+1$
 $\textcircled{7}$ 에서 $f(3)=0$, $f(4)=1$, $f(5)=0$ 이므로
 $0 < f(x) \leq 1$
 이때 함수 $y = \log_2 f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로
 함수 $y = \log_2 f(x)$ 는
 $f(x)=1$, 즉 $x=4$ 에서 최댓값 $\log_2 1 = 0$ 을 갖는다.
 따라서 $a=4$, $M=0$ 이므로
 $a+M=4$

07-3 ㉡ $\frac{1}{3}$

$y = \log_a(x^2-4x+6)$ 에서 $f(x) = x^2-4x+6$ 이라 하면
 $f(x) = (x-2)^2+2$
 $-3 \leq x \leq 4$ 에서 $f(-3)=27$, $f(2)=2$, $f(4)=6$ 이므로
 $2 \leq f(x) \leq 27$
 이때 함수 $y = \log_a f(x)$ 에서 $0 < a < 1$ 이므로
 함수 $y = \log_a f(x)$ 는
 $f(x)=27$ 에서 최솟값 $\log_a 27$ 을 갖는다.
 즉, $\log_a 27 = -3$ 이므로 $a^{-3}=27$
 $\therefore a = 27^{-\frac{1}{3}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

08-1 ㉡ (1) 최댓값: 4, 최솟값: $-\frac{1}{2}$ (2) 6

(1) $y = 2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^2 = 2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + 2\log_{\frac{1}{2}} x$
 $\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 4$ 에서
 $\log_{\frac{1}{2}} 4 \leq t \leq \log_{\frac{1}{2}} 1 \quad \therefore -2 \leq t \leq 0$
 이때 주어진 함수는 $y = 2t^2 + 2t = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$
 따라서 $-2 \leq t \leq 0$ 일 때 함수 $y = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ 은
 $t = -2$ 에서 최댓값 4,
 $t = -\frac{1}{2}$ 에서 최솟값 $-\frac{1}{2}$ 을 갖는다.
 (2) $y = \log_2 x + \log_x 512$
 $= \log_2 x + 9\log_x 2$
 $= \log_2 x + \frac{9}{\log_2 x}$
 $x > 1$ 에서 $\log_2 x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관
 계에 의하여
 $y = \log_2 x + \frac{9}{\log_2 x} \geq 2\sqrt{\log_2 x \times \frac{9}{\log_2 x}} = 6$
 (단, 등호는 $\log_2 x = 3$ 일 때 성립)
 따라서 구하는 최솟값은 6이다.

08-2 ㉔ $a=3, b=2$

$$y = (\log_3 x)^2 + a \log_{27} x^2 + b$$

$$= (\log_3 x)^2 + \frac{2}{3} a \log_3 x + b$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$y = t^2 + \frac{2}{3} at + b = \left(t + \frac{1}{3}a\right)^2 - \frac{1}{9}a^2 + b$$

이때 $x = \frac{1}{3}$, 즉 $t = -1$ 에서 최솟값 1을 가지므로

$$-\frac{1}{3}a = -1, -\frac{1}{9}a^2 + b = 1$$

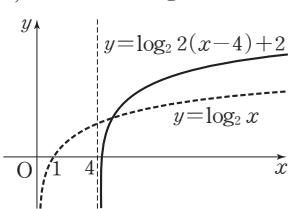
두 식을 연립하여 풀면

$$a=3, b=2$$

연습문제

81~83쪽

- | | | | | |
|------------|----------------|------|-----------------------|-------|
| 1 16 | 2 1 | 3 ④ | 4 3 | 5 -6 |
| 6 ⑤ | 7 ② | 8 ④ | 9 $\frac{1}{3}$ | 10 39 |
| 11 (16, 4) | 12 $C < B < A$ | 13 4 | 14 ④ | |
| 15 6 | 16 12 | 17 ② | 18 $\perp, \sqsubset$ | 19 3 |
| 20 4 | | | | |

- 1 $f(2) = \log_2 2 = 1 \quad \therefore a=1$
 $f(8) = \log_2 8 = 3 \quad \therefore b=3$
 $f(k) = a + b = 4$ 이므로 $\log_2 k = 4 \quad \therefore k = 2^4 = 16$
- 2 함수 $f(x) = \log_3 \frac{x+1}{x-1} (x > 1)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여
 $g(\alpha) = 3, g(\beta) = 5$ 이므로 $f(3) = \alpha, f(5) = \beta$
 $\alpha = f(3) = \log_3 \frac{3+1}{3-1} = \log_3 2$
 $\beta = f(5) = \log_3 \frac{5+1}{5-1} = \log_3 \frac{3}{2} = 1 - \log_3 2$
 $\therefore \alpha + \beta = \log_3 2 + 1 - \log_3 2 = 1$
- 3 $y = \log_2 2(x-4) + 2$
 $= \log_2 2 + \log_2 (x-4) + 2$
 $= \log_2 (x-4) + 3 \quad \dots\dots ㉔$
- 
- ① 정의역은 $\{x | x > 4\}$ 이다.
 ② 그래프는 제2사분면과 제3사분면을 지나지 않는다.

③ 밑이 1보다 크므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

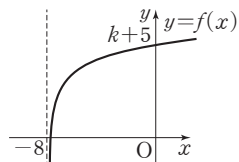
④ ㉔에 $x=6$ 을 대입하면 $y = \log_2 (6-4) + 3 = 4$
 따라서 그래프는 점 (6, 4)를 지난다.

⑤ 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼,
 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y = \log_2 (x-4) + 3$ 이다.
 따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

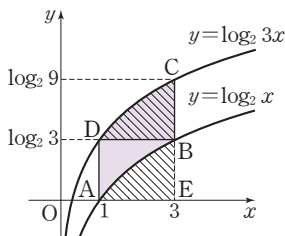
4 점근선의 방정식이 $x=2$ 이므로 $a=2$
 함수 $y = \log_3 (x-2) + b$ 의 그래프가 점 (5, 2)를 지나므로
 $2 = \log_3 (5-2) + b, 2 = 1 + b \quad \therefore b=1$
 $\therefore a+b=2+1=3$

5 함수 $y = \log_2 8x + 3 = \log_2 x + 6$ 의 그래프를 x 축의 방
 향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y = \log_2 (x-2) + 6$
 이 함수의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의
 식은 $y = -\log_2 (x-2) - 6$
 이 함수의 그래프가 점 (3, k)를 지나므로
 $k = -\log_2 1 - 6 = -6$

6 함수 $y = 2 + \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -8만큼,
 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y - k = 2 + \log_2 (x+8) \quad \therefore y = \log_2 (x+8) + k + 2$
 $f(x) = \log_2 (x+8) + k + 2$ 라
 할 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래
 프가 제4사분면을 지나지 않
 으려면 오른쪽 그림과 같아야
 한다.
 즉, $f(0) \geq 0$ 이어야 하므로 $k+5 \geq 0 \quad \therefore k \geq -5$
 따라서 k 의 최솟값은 -5이다.



7 A(1, 0), B(3, $\log_2 3$), C(3, $\log_2 9$), D(1, $\log_2 3$)
 $g(x) = \log_2 3x = \log_2 3 + \log_2 x = \log_2 3 + f(x)$ 이므로
 함수 $g(x) = \log_2 3x$ 의 그래프는 함수 $f(x) = \log_2 x$ 의
 그래프를 y 축의 방향으로 $\log_2 3$ 만큼 평행이동한 것이다.
 즉, 오른쪽 그림에서 빗금
 친 두 부분의 넓이가 서로
 같으므로 구하는 넓이는
 사각형 AEBD의 넓이와
 같다.
 따라서 구하는 넓이는
 $(3-1) \times \log_2 3 = 2 \log_2 3$



8 $C(k, 0)$ 이라 하면 $\overline{CD}=4$ 이므로 $D(k, 4)$
 점 D 가 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프 위의 점이므로
 $4=\log_2 k \quad \therefore k=2^4=16$
 $\therefore C(16, 0)$
 한편 $\overline{BC}=4$ 이므로 $B(12, 0)$
 $\overline{BE}=t$ 라 하면 $E(12, t)$ 이고 점 E 는 함수 $y=\log_2 x$ 의
 그래프 위의 점이므로
 $t=\log_2 12=\log_2 (2^2 \times 3)=2+\log_2 3$
 따라서 직사각형 $FGBE$ 의 한 변의 길이는 $2+\log_2 3$ 이다.

9 $P(2, \log_a 2), Q(2, \log_b 2), R(2, -\log_a 2)$ 이므로
 $\overline{PQ}=\log_a 2-\log_b 2, \overline{QR}=\log_b 2+\log_a 2$
 $\overline{PQ}:\overline{QR}=1:2$ 에서 $\overline{QR}=2\overline{PQ}$ 이므로
 $\log_b 2+\log_a 2=2(\log_a 2-\log_b 2), \log_a 2=3\log_b 2$
 $\frac{1}{\log_2 a}=\frac{3}{\log_2 b}, 3\log_2 a=\log_2 b$
 $\log_2 a^3=\log_2 b \quad \therefore a^3=b$
 $\therefore g(a)=\log_b a=\log_{a^3} a=\frac{1}{3}$

10 점 A 의 y 좌표가 3이므로 $A(a, 3)$ 이라 하면
 $3=\log_3 a, a=3^3=27 \quad \therefore A(27, 3)$
 점 B 의 y 좌표가 3이므로 $B(b, 3)$ 이라 하면
 점 $(3, b)$ 는 함수 $y=\log_3 x$ 의 그래프 위의 점이므로
 $b=\log_3 3=1 \quad \therefore B(1, 3)$
 따라서 삼각형 OAB 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times (27-1) \times 3=39$

11 함수 $y=2^x$ 의 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나므로 $A(0, 1)$
 점 B 의 y 좌표가 1이므로 $B(b, 1)$ 이라 하면
 $\log_2 b=1, b=2 \quad \therefore B(2, 1)$
 한편 함수 $y=\log_2 x$ 는 함수 $y=2^x$ 의 역함수이므로 두 함수의
 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.
 따라서 점 B 와 점 C 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로
 $C(1, 2)$
 점 D 의 y 좌표는 2이므로 $D(d, 2)$ 라 하면
 $\log_2 d=2, d=2^2=4 \quad \therefore D(4, 2)$
 점 D 와 점 E 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로
 $E(2, 4)$
 점 F 의 y 좌표는 4이므로 $F(f, 4)$ 라 하면
 $\log_2 f=4, f=2^4=16 \quad \therefore F(16, 4)$

12 $1 < x < 3$ 의 각 변에 밑이 3인 로그를 취하면
 $\log_3 1 < \log_3 x < \log_3 3$
 $0 < \log_3 x < 1 \quad \therefore 0 < B < 1$

$A=\log_x 3=\frac{1}{\log_3 x} > 1$
 $\therefore A > B$
 $B-C=\log_3 x-(\log_3 x)^2=\log_3 x(1-\log_3 x) > 0$
 $\therefore B > C$
 $\therefore C < B < A$

13 함수 $y=\log_3(x-a)+2$ 의 밑이 1보다 크므로
 $3 \leq x \leq 21$ 일 때 함수 $y=\log_3(x-a)+2$ 는
 $x=21$ 에서 최댓값 $\log_3(21-a)+2$,
 $x=3$ 에서 최솟값 $\log_3(3-a)+2$ 를 갖는다.
 즉, $\log_3(21-a)+2=5$ 이므로
 $21-a=3^3 \quad \therefore a=-6$
 따라서 함수 $y=\log_3(x+6)+2$ 의 최솟값은
 $\log_3 9+2=4$

14 $g(x)=x^2+2x+6=(x+1)^2+5$ 이므로 $g(x) \geq 5$
 이때 함수 $(f \circ g)(x)=\log_5 g(x)$ 의 밑이 1보다 크므로
 함수 $(f \circ g)(x)=\log_5 g(x)$ 는
 $g(x)=5$ 에서 최솟값 $\log_5 5=1$ 을 갖는다.

15 함수 $y=\log_2(x^2-4x+a)$ 에서
 $f(x)=x^2-4x+a$ 라 하면
 $f(x)=(x-2)^2+a-4$
 $3 \leq x \leq 9$ 에서 $a-3 \leq f(x) \leq a+45$
 이때 함수 $y=\log_2 f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로 함수
 $y=\log_2 f(x)$ 는 $f(x)=a+45$ 에서 최댓값 $\log_2(a+45)$,
 $f(x)=a-3$ 에서 최솟값 $\log_2(a-3)$ 을 갖는다.
 즉, $\log_2(a-3)=4$ 이므로
 $a-3=2^4 \quad \therefore a=19$
 따라서 함수 $y=\log_2 f(x)$ 의 최댓값은
 $\log_2(19+45)=\log_2 64=6$

16 $y=\log_3 9x \times \log_3 \frac{81}{x}$
 $= (2+\log_3 x)(4-\log_3 x)$
 $= -(\log_3 x)^2 + 2\log_3 x + 8$
 $\log_3 x=t$ 로 놓으면 $\frac{1}{9} < x < 81$ 에서 $-2 < t < 4$
 이때 주어진 함수는
 $y=-t^2+2t+8=-(t-1)^2+9$
 따라서 $-2 < t < 4$ 일 때 함수 $y=-(t-1)^2+9$ 는
 $t=1$, 즉 $x=3$ 에서 최댓값 9를 갖는다.
 따라서 $a=3, M=9$ 이므로
 $a+M=12$

다른 풀이

$\frac{1}{9} < x < 81$ 에서 $\log_3 9x > 0$, $\log_3 \frac{81}{x} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\log_3 9x + \log_3 \frac{81}{x} \geq 2\sqrt{\log_3 9x \times \log_3 \frac{81}{x}}$$

(단, 등호는 $x=3$ 일 때 성립)

$$(2 + \log_3 x) + (4 - \log_3 x) \geq 2\sqrt{\log_3 9x \times \log_3 \frac{81}{x}}$$

$$6 \geq 2\sqrt{\log_3 9x \times \log_3 \frac{81}{x}}, \quad 3 \geq \sqrt{\log_3 9x \times \log_3 \frac{81}{x}}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } \log_3 9x \times \log_3 \frac{81}{x} \leq 9$$

따라서 $a=3$, $M=9$ 이므로 $a+M=12$

- 17 $(\log_x y)^2 > 0$, $(\log_y x)^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

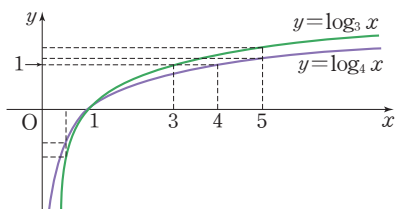
$$(\log_x y)^2 + (\log_y x)^2 \geq 2\sqrt{(\log_x y)^2 \times (\log_y x)^2}$$

$$= 2\sqrt{(\log_x y)^2 \times \left(\frac{1}{\log_x y}\right)^2} = 2$$

(단, 등호는 $\log_x y = \log_y x$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

- 18 두 함수 $y=\log_3 x$ 와 $y=\log_4 x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $y=(\log_4 3)^x$ 에서 밑 $\log_4 3$ 이 $0 < \log_4 3 < 1$ 이므로 $a < b$ 이면

$$(\log_4 3)^a > (\log_4 3)^b$$

ㄴ. 위의 그림에서 $0 < x < 1$ 일 때 함수 $y=\log_4 x$ 의 그래프가 함수 $y=\log_3 x$ 의 그래프보다 위에 있으므로

$$\log_3 x < \log_4 x$$

ㄷ. 주어진 로그의 밑을 변환하면

$$\log_{\frac{1}{3}} 5 = -\log_3 5, \quad \log_{\frac{1}{4}} 5 = -\log_4 5$$

위의 그림에서 $\log_4 5 < \log_3 5$ 이므로

$$-\log_3 5 < -\log_4 5 \quad \therefore \log_{\frac{1}{3}} 5 < \log_{\frac{1}{4}} 5$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

- 19 점 $(3, 1)$ 이 함수 $y=\log_3(x-p)+q$ 의 그래프 위의 점이므로

$$1 = \log_3(3-p) + q, \quad \log_3(3-p) = 1 - q$$

$$3-p = 3^{1-q} \quad \therefore 3^{-q} = 1 - \frac{p}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 A의 좌표는 $(1, 0)$ 이고

점 B의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면 $\log_3(a-p)+q=0$

$$\log_3(a-p) = -q, \quad a-p = 3^{-q}$$

$$\therefore a = p + 3^{-q} = 1 + \frac{2}{3}p \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore B\left(1 + \frac{2}{3}p, 0\right)$$

$$\text{즉, } \overline{BA} = \left(1 + \frac{2}{3}p\right) - 1 = \frac{2}{3}p$$

점 C의 좌표를 $(b, 2)$ 라 하면

$$\log_3 b = 2 \quad \therefore b = 3^2 = 9 \quad \therefore C(9, 2)$$

점 D의 좌표를 $(c, 2)$ 라 하면 $\log_3(c-p)+q=2$

$$\log_3(c-p) = 2 - q, \quad c-p = 3^{2-q}$$

$$\therefore c = 3^{2-q} + p = 9\left(1 - \frac{p}{3}\right) + p = 9 - 2p \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore D(9 - 2p, 2)$$

$$\text{즉, } \overline{CD} = 9 - (9 - 2p) = 2p$$

$$\text{이때 } \overline{CD} - \overline{BA} = \frac{8}{3} \text{에서 } 2p - \frac{2}{3}p = \frac{8}{3}$$

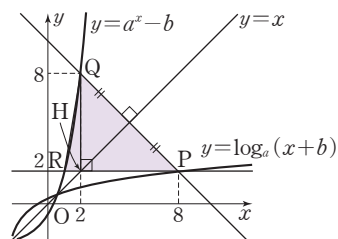
$$\frac{4}{3}p = \frac{8}{3} \quad \therefore p = 2$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 3^{-q} = 1 - \frac{2}{3} = 3^{-1} \quad \therefore q = 1$$

$$\therefore p + q = 2 + 1 = 3$$

- 20 두 함수 $y=a^x-b$, $y=\log_a(x+b)$ 는 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 이때 두 점 P, Q는 기울기가 -1인 직선 위의 점이므로 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

즉, $P(8, 2)$ 이므로 $Q(2, 8)$



$R(k, 2)$ 라 하면 $\overline{PR} = 8 - k$

점 Q에서 선분 PR에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{QH} = 8 - 2 = 6$$

이때 삼각형 PQR의 넓이가 21이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{PR} \times \overline{QH} = 21, \quad \frac{1}{2} \times (8 - k) \times 6 = 21$$

$$8 - k = 7 \quad \therefore k = 1$$

따라서 두 점 $Q(2, 8)$, $R(1, 2)$ 는 함수 $y=a^x-b$ 의 그래프 위의 점이므로

$$a^2 - b = 8, \quad a - b = 2 \quad \therefore a = 3, \quad b = 1 \quad (\because a > 1)$$

$$\therefore a + b = 4$$

로그함수의 활용

개념 Check

84쪽

1 답 (1) $x=5$ (2) $x=2$

2 답 (1) $\frac{3}{2} < x \leq \frac{7}{2}$ (2) $x > 3$

문제

85~92쪽

01-1 답 (1) $x=3$ (2) $x=7$ (3) $x=4$ (4) $x=9$

(1) 진수의 조건에서

$$x-1 > 0, x+5 > 0 \quad \therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+5) = -4 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)(x+5) = -4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x-5) = -4$$

로그의 정의에 의하여

$$x^2+4x-5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}, x^2+4x-21=0$$

$$(x+7)(x-3)=0 \quad \therefore x=-7 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=3$$

(2) 진수의 조건에서

$$x+2 > 0, x-3 > 0, 5x+1 > 0$$

$$\therefore x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_5(x+2) + \log_5(x-3) = \log_5(5x+1) \text{에서}$$

$$\log_5(x+2)(x-3) = \log_5(5x+1)$$

진수끼리 비교하면

$$(x+2)(x-3) = 5x+1, x^2-6x-7=0$$

$$(x+1)(x-7)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=7$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=7$$

(3) 진수의 조건에서

$$2x+1 > 0, x-1 > 0 \quad \therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_2(2x+1) = \log_{\sqrt{2}}(x-1) \text{에서}$$

$$\log_2(2x+1) = \log_{(\sqrt{2})^2}(x-1)^2$$

$$\log_2(2x+1) = \log_2(x-1)^2$$

진수끼리 비교하면

$$2x+1 = (x-1)^2, x^2-4x=0$$

$$x(x-4)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=4$$

(4) 진수의 조건에서

$$x+3 > 0, x+7 > 0 \quad \therefore x > -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_3(x+3) = \log_9(x+7) + 1 \text{에서}$$

$$\log_3(x+3)^2 = \log_9(x+7) + \log_9 9$$

$$\log_9(x+3)^2 = \log_9 9(x+7)$$

진수끼리 비교하면

$$(x+3)^2 = 9(x+7), x^2-3x-54=0$$

$$(x+6)(x-9)=0 \quad \therefore x=-6 \text{ 또는 } x=9$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=9$$

01-2 답 $x=3$

밑과 진수의 조건에서

$$x^2-2x+1 > 0, x^2-2x+1 \neq 1, 2x-1 > 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} < x < 1 \text{ 또는 } 1 < x < 2 \text{ 또는 } x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_{(x^2-2x+1)}(2x-1) = \log_4(2x-1) \text{에서}$$

(i) 밑이 같으면

$$x^2-2x+1=4, x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $x=3$

(ii) 진수가 1이면

$$2x-1=1 \quad \therefore x=1$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에 의하여 해는 없다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=3$

02-1 답 (1) $x=4$ 또는 $x=8$ (2) $x=\frac{1}{100}$ 또는 $x=10000$

$$(3) x=\frac{1}{27} \text{ 또는 } x=9 \quad (4) x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=8$$

(1) 진수의 조건에서

$$x > 0, x^5 > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^5 + 6 = 0 \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 - 5 \log_2 x + 6 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 5t + 6 = 0, (t-2)(t-3) = 0$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=3$$

$$t = \log_2 x \text{이므로 } \log_2 x = 2 \text{ 또는 } \log_2 x = 3$$

$$\therefore x=2^2=4 \text{ 또는 } x=2^3=8$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=4 \text{ 또는 } x=8$$

(2) 진수의 조건에서

$$x > 0, x^2 > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(\log x)^2 = \log x^2 + 8 \text{에서}$$

$$(\log x)^2 = 2 \log x + 8$$

$\log x=t$ 로 놓으면

$$t^2=2t+8, t^2-2t-8=0$$

$$(t+2)(t-4)=0 \quad \therefore t=-2 \text{ 또는 } t=4$$

$t=\log x$ 이므로 $\log x=-2$ 또는 $\log x=4$

$$\therefore x=10^{-2}=\frac{1}{100} \text{ 또는 } x=10^4=10000$$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=\frac{1}{100} \text{ 또는 } x=10000$$

(3) 진수의 조건에서

$$9x>0, \frac{x}{3}>0 \quad \therefore x>0 \quad \dots\dots ㉡$$

$$(\log_3 9x)\left(\log_3 \frac{x}{3}\right)=4 \text{에서}$$

$$(\log_3 9+\log_3 x)(\log_3 x-\log_3 3)=4$$

$$(2+\log_3 x)(\log_3 x-1)=4$$

$\log_3 x=t$ 로 놓으면

$$(2+t)(t-1)=4, t^2+t-6=0$$

$$(t+3)(t-2)=0 \quad \therefore t=-3 \text{ 또는 } t=2$$

$t=\log_3 x$ 이므로 $\log_3 x=-3$ 또는 $\log_3 x=2$

$$\therefore x=3^{-3}=\frac{1}{27} \text{ 또는 } x=3^2=9$$

따라서 ㉡에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=\frac{1}{27} \text{ 또는 } x=9$$

(4) 밑과 진수의 조건에서

$$x>0, x \neq 1 \quad \therefore 0<x<1 \text{ 또는 } x>1 \quad \dots\dots ㉢$$

$$\log_2 x=\log_x 8+2 \text{에서}$$

$$\log_2 x=3 \log_x 2+2$$

$$\log_2 x=\frac{3}{\log_2 x}+2$$

$\log_2 x=t$ ($t \neq 0$)로 놓으면

$$t=\frac{3}{t}+2, t^2-2t-3=0$$

$$(t+1)(t-3)=0 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=3$$

$t=\log_2 x$ 이므로 $\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=3$

$$\therefore x=2^{-1}=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=2^3=8$$

따라서 ㉢에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=8$$

02-2 ㉠ 81

밑과 진수의 조건에서

$$x>0, x \neq 1 \quad \therefore 0<x<1 \text{ 또는 } x>1 \quad \dots\dots ㉣$$

$$\log_3 x+\log_x 27=4 \text{에서}$$

$$\log_3 x+3 \log_x 3=4$$

$$\log_3 x+\frac{3}{\log_3 x}=4$$

$\log_3 x=t$ ($t \neq 0$)로 놓으면

$$t+\frac{3}{t}=4, t^2-4t+3=0 \quad \dots\dots ㉤$$

$$(t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

$t=\log_3 x$ 이므로 $\log_3 x=1$ 또는 $\log_3 x=3$

$$\therefore x=3^1=3 \text{ 또는 } x=3^3=27$$

㉣에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=3 \text{ 또는 } x=27$$

따라서 두 근의 곱은

$$3 \times 27=81$$

다른 풀이

주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식 ㉤의 두 근은 $\log_3 \alpha, \log_3 \beta$

㉤에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 \alpha+\log_3 \beta=4, \log_3 \alpha \beta=4$$

$$\therefore \alpha \beta=3^4=81$$

03-1 ㉠ (1) $x=\frac{1}{9}$ 또는 $x=\sqrt{3}$ (2) $x=1$ 또는 $x=2$

(1) 진수의 조건에서 $x>0 \quad \dots\dots ㉥$

$x^{2 \log_3 x}=\frac{9}{x^3}$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{2 \log_3 x}=\log_3 \frac{9}{x^3}$$

$$2 \log_3 x \times \log_3 x=\log_3 9-\log_3 x^3$$

$$2(\log_3 x)^2+3 \log_3 x-2=0$$

$\log_3 x=t$ 로 놓으면

$$2t^2+3t-2=0, (t+2)(2t-1)=0$$

$$\therefore t=-2 \text{ 또는 } t=\frac{1}{2}$$

$t=\log_3 x$ 이므로 $\log_3 x=-2$ 또는 $\log_3 x=\frac{1}{2}$

$$\therefore x=3^{-2}=\frac{1}{9} \text{ 또는 } x=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

따라서 ㉥에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=\frac{1}{9} \text{ 또는 } x=\sqrt{3}$$

(2) 진수의 조건에서 $x>0 \quad \dots\dots ㉦$

$$5^{\log_2 x} \times x^{\log_2 5}-6 \times 5^{\log_2 x}+5=0 \text{에서}$$

$$(5^{\log_2 x})^2-6 \times 5^{\log_2 x}+5=0$$

$5^{\log_2 x}=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$t^2-6t+5=0, (t-1)(t-5)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=5$$

$t=5^{\log_2 x}$ 이므로 $5^{\log_2 x}=1$ 또는 $5^{\log_2 x}=5$

$$\log_2 x=0 \text{ 또는 } \log_2 x=1$$

$$\therefore x=2^0=1 \text{ 또는 } x=2^1=2$$

따라서 ㉦에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=1 \text{ 또는 } x=2$$

03-2 ㉞ $x = \frac{1}{6}$

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉞

주어진 방정식의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 2^{\log 2x} = \log 3^{\log 3x}$$

$$\log 2x \times \log 2 = \log 3x \times \log 3$$

$$(\log 2 + \log x) \log 2 = (\log 3 + \log x) \log 3$$

$$(\log 2 - \log 3) \log x = (\log 3)^2 - (\log 2)^2$$

$$\therefore \log x = \frac{(\log 3 + \log 2)(\log 3 - \log 2)}{\log 2 - \log 3}$$

$$= -(\log 3 + \log 2)$$

$$= -\log 6 = \log \frac{1}{6}$$

따라서 ㉞에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{1}{6}$$

04-1 ㉞ (1) $4 < x < 7$ (2) $5 < x \leq 9$

$$(3) 4 < x \leq 5 \quad (4) x > \frac{29}{2}$$

(1) 진수의 조건에서

$$x > 0, 7 - x > 0, 5x - 8 > 0$$

$$\therefore \frac{8}{5} < x < 7 \quad \dots\dots ㉞$$

$$\log x + \log(7 - x) < \log(5x - 8) \text{에서}$$

$$\log x(7 - x) < \log(5x - 8)$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x(7 - x) < 5x - 8$$

$$x^2 - 2x - 8 > 0, (x + 2)(x - 4) > 0$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 4 \quad \dots\dots ㉞$$

㉞, ㉞을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$4 < x < 7$$

(2) 진수의 조건에서

$$2x - 2 > 0, x - 5 > 0 \quad \therefore x > 5 \quad \dots\dots ㉞$$

$$\log_{\frac{1}{5}}(2x - 2) \leq 2 \log_{\frac{1}{5}}(x - 5) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{5}}(2x - 2) \leq \log_{\frac{1}{5}}(x - 5)^2$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } 2x - 2 \geq (x - 5)^2$$

$$x^2 - 12x + 27 \leq 0, (x - 3)(x - 9) \leq 0$$

$$\therefore 3 \leq x \leq 9 \quad \dots\dots ㉞$$

㉞, ㉞을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$5 < x \leq 9$$

(3) 진수의 조건에서

$$x - 1 > 0, x - 4 > 0 \quad \therefore x > 4 \quad \dots\dots ㉞$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 4) \geq -2 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x - 1)(x - 4) \geq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x - 1)(x - 4) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } (x - 1)(x - 4) \leq 4$$

$$x^2 - 5x \leq 0, x(x - 5) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 5 \quad \dots\dots ㉞$$

㉞, ㉞을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$4 < x \leq 5$$

(4) 진수의 조건에서

$$x - 2 > 0 \quad \therefore x > 2 \quad \dots\dots ㉞$$

$$\log_5(x - 2) + \log_{25} 4 > 2 \text{에서}$$

$$\log_5(x - 2) + \log_5 2 > \log_5 5^2$$

$$\log_5 2(x - 2) > \log_5 25$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } 2(x - 2) > 25$$

$$\therefore x > \frac{29}{2} \quad \dots\dots ㉞$$

㉞, ㉞을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$x > \frac{29}{2}$$

04-2 ㉞ 2

진수의 조건에서

$$x > 0, \log_2 x > 0$$

이때 $\log_2 x > \log_2 1$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$x > 1 \quad \dots\dots ㉞$$

$$\log_3(\log_2 x) \leq 0 \text{에서}$$

$$\log_3(\log_2 x) \leq \log_3 1$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \log_2 x \leq 1$$

$$\log_2 x \leq \log_2 2$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x \leq 2 \quad \dots\dots ㉞$$

㉞, ㉞을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$1 < x \leq 2$$

따라서 자연수 x 의 값은 2이다.

05-1 ㉞ (1) $\frac{1}{4} \leq x \leq 16$ (2) $0 < x \leq \frac{1}{27}$ 또는 $x \geq 9$

$$(3) \frac{1}{32} < x < \frac{1}{2} \quad (4) \frac{1}{27} < x < 3$$

(1) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉞

$$\log_4 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - t \leq 2, t^2 - t - 2 \leq 0$$

$$(t + 1)(t - 2) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq t \leq 2$$

$$t = \log_4 x \text{이므로}$$

$$-1 \leq \log_4 x \leq 2$$

$$\log_4 \frac{1}{4} \leq \log_4 x \leq \log_4 16$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{4} \leq x \leq 16 \quad \dots\dots ㉞$$

㉞, ㉞을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{4} \leq x \leq 16$$

(2) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - t - 6 \geq 0, (t+2)(t-3) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 3$$

$t = \log_{\frac{1}{3}} x$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{3}} x \leq -2 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{3}} x \geq 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} 9 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{3}} x \geq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } x \geq 9 \text{ 또는 } x \leq \frac{1}{27} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 < x \leq \frac{1}{27} \text{ 또는 } x \geq 9$$

(3) 진수의 조건에서

$$4x > 0, 16x > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots ㉢$$

$$\log_2 4x \times \log_2 16x < 3 \text{에서}$$

$$(\log_2 4 + \log_2 x)(\log_2 16 + \log_2 x) < 3$$

$$(2 + \log_2 x)(4 + \log_2 x) < 3$$

$$(\log_2 x)^2 + 6\log_2 x + 5 < 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 6t + 5 < 0, (t+5)(t+1) < 0$$

$$\therefore -5 < t < -1$$

$$t = \log_2 x \text{이므로 } -5 < \log_2 x < -1$$

$$\log_2 \frac{1}{32} < \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2}$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{32} < x < \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{32} < x < \frac{1}{2}$$

(4) 진수의 조건에서

$$81x^2 > 0, \frac{1}{x} > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots ㉤$$

$$\log_3 81x^2 \times \log_3 \frac{1}{x} > -6 \text{에서}$$

$$(\log_3 81 + \log_3 x^2)(-\log_3 x) > -6$$

$$(4 + 2\log_3 x)(-\log_3 x) > -6$$

$$2(\log_3 x)^2 + 4\log_3 x - 6 < 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$2t^2 + 4t - 6 < 0, t^2 + 2t - 3 < 0$$

$$(t+3)(t-1) < 0 \quad \therefore -3 < t < 1$$

$$t = \log_3 x \text{이므로 } -3 < \log_3 x < 1$$

$$\log_3 \frac{1}{27} < \log_3 x < \log_3 3$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{27} < x < 3 \quad \dots\dots ㉥$$

㉤, ㉥을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{27} < x < 3$$

05-2 ㉢ 16

진수의 조건에서

$$x > 0, x^4 > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots ㉦$$

$$(\log_2 x)^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^4 > 12 \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x - 12 > 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 4t - 12 > 0$$

$$(t+2)(t-6) > 0$$

$$\therefore t < -2 \text{ 또는 } t > 6$$

$t = \log_2 x$ 이므로

$$\log_2 x < -2 \text{ 또는 } \log_2 x > 6$$

$$\log_2 x < \log_2 \frac{1}{4} \text{ 또는 } \log_2 x > \log_2 64$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x < \frac{1}{4} \text{ 또는 } x > 64 \quad \dots\dots ㉧$$

㉦, ㉧을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 < x < \frac{1}{4} \text{ 또는 } x > 64$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{1}{4}, \beta = 64 \text{이므로}$$

$$\alpha\beta = 16$$

06-1 ㉢ (1) $\frac{1}{9} \leq x \leq \frac{1}{3}$ (2) $1 < x < 10$

(1) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉨

$x^{\log_{\frac{1}{3}} x} \geq 9x^3$ 의 양변에 밑이 $\frac{1}{3}$ 인 로그를 취하면

$$\log_{\frac{1}{3}} x^{\log_{\frac{1}{3}} x} \leq \log_{\frac{1}{3}} 9x^3 \quad \blacktriangleleft \text{부등호 방향이 바뀐다}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x \times \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} 9 + \log_{\frac{1}{3}} x^3$$

$$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - 3\log_{\frac{1}{3}} x + 2 \leq 0$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 3t + 2 \leq 0$$

$$(t-1)(t-2) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq t \leq 2$$

$$t = \log_{\frac{1}{3}} x \text{이므로}$$

$$1 \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq 2$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } \frac{1}{9} \leq x \leq \frac{1}{3} \quad \dots\dots ㉩$$

㉨, ㉩을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{9} \leq x \leq \frac{1}{3}$$

(2) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉪

$$3^{\log x} \times x^{\log 3} - 4 \times 3^{\log x} + 3 < 0 \text{에서}$$

$$(3^{\log x})^2 - 4 \times 3^{\log x} + 3 < 0$$

$$3^{\log x} = t (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 - 4t + 3 < 0$$

$$(t-1)(t-3) < 0 \quad \therefore 1 < t < 3$$

$$t = 3^{\log x} \text{이므로 } 1 < 3^{\log x} < 3$$

$$3^0 < 3^{\log x} < 3^1$$

지수의 밑이 1보다 크므로 $0 < \log x < 1$
 $\log 1 < \log x < \log 10$
 로그의 밑이 1보다 크므로 $1 < x < 10$ ㉞
 ㉞, ㉞을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $1 < x < 10$

06-2 ㉞ 24

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉞
 $x^{\log_5 x} < 25x$ 의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면
 $\log_5 x^{\log_5 x} < \log_5 25x$
 $\log_5 x \times \log_5 x < \log_5 25 + \log_5 x$
 $(\log_5 x)^2 - \log_5 x - 2 < 0$
 $\log_5 x = t$ 로 놓으면 $t^2 - t - 2 < 0$
 $(t+1)(t-2) < 0 \quad \therefore -1 < t < 2$
 $t = \log_5 x$ 이므로 $-1 < \log_5 x < 2$
 $\log_5 \frac{1}{5} < \log_5 x < \log_5 25$
 밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{5} < x < 25$ ㉞
 ㉞, ㉞을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $\frac{1}{5} < x < 25$
 따라서 자연수 x 는 1, 2, 3, ..., 24의 24개이다.

07-1 ㉞ (1) $2 < a < 32$ (2) $k \geq \sqrt{3}$

(1) 진수의 조건에서
 $0 < a < \sqrt{2}$ 또는 $a > \sqrt{2}$ ㉞
 이차방정식 $(2\log_2 a - 1)x^2 + 2(\log_2 a - 2)x + 1 = 0$
 이 실근을 갖지 않으려면 이 이차방정식의 판별식을
 D 라 할 때 $D < 0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4} = (\log_2 a - 2)^2 - (2\log_2 a - 1) < 0$
 $(\log_2 a)^2 - 6\log_2 a + 5 < 0$
 $\log_2 a = t$ 로 놓으면 $t^2 - 6t + 5 < 0$
 $(t-1)(t-5) < 0 \quad \therefore 1 < t < 5$
 $t = \log_2 a$ 이므로 $1 < \log_2 a < 5$
 $\log_2 2 < \log_2 a < \log_2 32$
 밑이 1보다 크므로 $2 < a < 32$ ㉞
 ㉞, ㉞을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는
 $2 < a < 32$
 (2) 진수의 조건에서 $k > 0$ ㉞
 $(\log_3 x)^2 + 2\log_3 kx \geq 0$ 에서
 $(\log_3 x)^2 + 2(\log_3 x + \log_3 k) \geq 0$
 $(\log_3 x)^2 + 2\log_3 x + 2\log_3 k \geq 0$
 $\log_3 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 + 2t + 2\log_3 k \geq 0$ ㉞

주어진 부등식이 모든 양수 x 에 대하여 성립하려면
 $t = \log_3 x$ 에서 모든 실수 t 에 대하여 부등식 ㉞이 성립
 해야 한다.

이차방정식 $t^2 + 2t + 2\log_3 k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 2\log_3 k \leq 0, \log_3 k \geq \frac{1}{2}, \log_3 k \geq \log_3 \sqrt{3}$$

밑이 1보다 크므로 $k \geq \sqrt{3}$ ㉞

㉞, ㉞을 동시에 만족시키는 k 의 값의 범위는
 $k \geq \sqrt{3}$

08-1 ㉞ 2mL

처음 방향제를 a mL 분사한 지 6시간 후에 대기 중에 남
 아 있는 방향제의 양이 16 mL이므로

$$6 = 6\log_2 \frac{a}{16}, 1 = \log_2 a - \log_2 16$$

$$\log_2 a = 5 \quad \therefore a = 2^5 = 32$$

처음 방향제를 32 mL 분사한 지 24시간 후에 대기 중에
 남아 있는 방향제의 양을 x mL라 하면

$$24 = 6\log_2 \frac{32}{x}, 4 = \log_2 32 - \log_2 x$$

$$\log_2 x = 1 \quad \therefore x = 2$$

따라서 24시간 후에 대기 중에 남아 있는 방향제의 양은
 2 mL이다.

08-2 ㉞ 4년

현재 출고된 신차의 가격을 a 라 하면 n 년 후의 중고차의
 가격은 $a \times 0.8^n$ 이므로

$$a \times 0.8^n \leq 0.4a \quad \therefore 0.8^n \leq 0.4$$

양변에 상용로그를 취하면

$$n \log 0.8 \leq \log 0.4, n(\log 8 - \log 10) \leq \log 4 - \log 10$$

$$n(3\log 2 - 1) \leq 2\log 2 - 1, n(0.9 - 1) \leq 0.6 - 1$$

$$-0.1n \leq -0.4 \quad \therefore n \geq 4$$

따라서 중고차의 가격이 신차 가격의 40% 이하가 되는
 것은 4년 후부터이다.

연습문제

93~94쪽

1 $x=5$	2 25	3 3	4 ③	5 8
6 2	7 ②	8 ④	9 242	10 ①
11 $0 < k \leq \sqrt{5}$	12 ④	13 30년	14 ②	
15 ⑤				

1 진수의 조건에서
 $x-3>0, 9-x>0 \quad \therefore 3<x<9 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 $\log_2(x-3)=\log_4(9-x)$ 에서
 $\log_{2^2}(x-3)^2=\log_4(9-x)$
 $\log_4(x-3)^2=\log_4(9-x)$
 진수끼리 비교하면
 $(x-3)^2=9-x, x^2-5x=0$
 $x(x-5)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=5$
 따라서 $\textcircled{7}$ 에 의하여 주어진 방정식의 해는
 $x=5$

2 진수의 조건에서 $x>0, y>0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 $\log_3 x=X, \log_2 y=Y$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} X+Y=6 \\ XY=8 \end{cases}$$

 이 연립방정식을 풀면 $X=2, Y=4$ 또는 $X=4, Y=2$
 $X=\log_3 x, Y=\log_2 y$ 이므로
 (i) $X=2, Y=4$ 일 때,
 $\log_3 x=2, \log_2 y=4$
 $\therefore x=3^2=9, y=2^4=16$
 (ii) $X=4, Y=2$ 일 때,
 $\log_3 x=4, \log_2 y=2$
 $\therefore x=3^4=81, y=2^2=4$
 (i), (ii)에서 $\textcircled{7}$ 에 의하여 주어진 방정식의 해는
 $x=9, y=16$ 또는 $x=81, y=4$
 그런데 $\alpha<\beta$ 이므로 $\alpha=9, \beta=16$
 $\therefore \alpha+\beta=25$

3 진수의 조건에서
 $x>0, x^4>0 \quad \therefore x>0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 $(\log_3 x)^2+3=\log_3 x^4$ 에서 $(\log_3 x)^2+3=4\log_3 x$
 $\log_3 x=t$ 로 놓으면 $t^2+3=4t, t^2-4t+3=0$
 $(t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=3$
 $t=\log_3 x$ 이므로 $\log_3 x=1$ 또는 $\log_3 x=3$
 $\therefore x=3^1=3$ 또는 $x=3^3=27$
 이때 $\alpha<\beta$ 이므로 $\alpha=3, \beta=27$
 $\therefore \log_a \beta=\log_3 27=3$

4 진수의 조건에서 $a>0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 이차방정식 $x^2-2(\log a+2)x+2\log a+7=0$ 이 중근을
 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때 $D=0$ 이
 어야 하므로
 $\frac{D}{4}=(\log a+2)^2-(2\log a+7)=0$
 $(\log a)^2+2\log a-3=0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$

$\log a=t$ 로 놓으면
 $t^2+2t-3=0, (t+3)(t-1)=0$
 $\therefore t=-3$ 또는 $t=1$
 $t=\log a$ 이므로
 $\log a=-3$ 또는 $\log a=1$
 $\therefore a=10^{-3}=\frac{1}{1000}$ 또는 $a=10^1=10$
 $\textcircled{7}$ 에 의하여 방정식 $\textcircled{8}$ 의 해는
 $a=\frac{1}{1000}$ 또는 $a=10$
 따라서 모든 상수 a 의 값의 곱은
 $\frac{1}{1000} \times 10 = \frac{1}{100}$

5 진수의 조건에서 $x>0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 $\left(\frac{x}{4}\right)^{\log_2 x}=16 \times 2^{\log_2 x}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면
 $\log_2 \left(\frac{x}{4}\right)^{\log_2 x}=\log_2 (16 \times 2^{\log_2 x})$
 $\log_2 x(\log_2 x - \log_2 4)=\log_2 16 + \log_2 x \times \log_2 2$
 $\log_2 x(\log_2 x - 2)=4 + \log_2 x$
 $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 4=0$
 $\log_2 x=t$ 로 놓으면
 $t^2-3t-4=0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$
 $(t+1)(t-4)=0 \quad \therefore t=-1$ 또는 $t=4$
 $t=\log_2 x$ 이므로
 $\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=4$
 $\therefore x=2^{-1}=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2^4=16$
 $\textcircled{7}$ 에 의하여 주어진 방정식의 해는
 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=16$
 따라서 두 근의 곱은 $\frac{1}{2} \times 16=8$

다른 풀이

주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식 $\textcircled{8}$ 의 두
 근은 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$
 $\textcircled{8}$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\log_2 \alpha + \log_2 \beta=3, \log_2 \alpha \beta=3$
 $\therefore \alpha \beta=2^3=8$

6 진수의 조건에서
 $3x+1>0, 2x-1>0$
 $\therefore x>\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 $\log_{\frac{1}{9}}(3x+1)>\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)$ 에서
 $\log_{\frac{1}{9}}(3x+1)>\log_{\left(\frac{1}{3}\right)^2}(2x-1)^2$
 $\log_{\frac{1}{9}}(3x+1)>\log_{\frac{1}{9}}(2x-1)^2$

밑이 1보다 작으므로

$$3x+1 < (2x-1)^2$$

$$4x^2-7x > 0$$

$$x(4x-7) > 0$$

$$\therefore x < 0 \text{ 또는 } x > \frac{7}{4} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①, ㉔을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$x > \frac{7}{4}$$

따라서 자연수 x 의 최솟값은 2이다.

7 진수의 조건에서

$$|x-1| > 0 \quad \therefore x \neq 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2\log_2|x-1| \leq 1 - \log_2\frac{1}{2} \text{에서}$$

$$2\log_2|x-1| \leq 2$$

$$\log_2|x-1| \leq 1$$

$$\log_2|x-1| \leq \log_2 2$$

밑이 1보다 크므로

$$|x-1| \leq 2, -2 \leq x-1 \leq 2$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①, ㉔을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$-1 \leq x < 1 \text{ 또는 } 1 < x \leq 3$$

따라서 정수 x 는 -1, 0, 2, 3의 4개이다.

8 진수의 조건에서

$$\frac{5}{x} > 0, \frac{x}{25} > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_5\frac{5}{x} \times \log_5\frac{x}{25} \geq 0 \text{에서}$$

$$(\log_5 5 - \log_5 x)(\log_5 x - \log_5 25) \geq 0$$

$$(1 - \log_5 x)(\log_5 x - 2) \geq 0$$

$$\log_5 x = t \text{로 놓으면}$$

$$(1-t)(t-2) \geq 0$$

$$(t-1)(t-2) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq t \leq 2$$

$$t = \log_5 x \text{이므로}$$

$$1 \leq \log_5 x \leq 2$$

$$\log_5 5 \leq \log_5 x \leq \log_5 25$$

밑이 1보다 크므로

$$5 \leq x \leq 25 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①, ㉔을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$5 \leq x \leq 25$$

따라서 $\alpha=5, \beta=25$ 이므로

$$\frac{\beta}{\alpha} = 5$$

9 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉔

$x^{\log_5 x} < 243x^4$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{\log_5 x} < \log_3 243x^4$$

$$\log_3 x \times \log_5 x < \log_3 243 + \log_3 x^4$$

$$(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x - 5 < 0$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 4t - 5 < 0, (t+1)(t-5) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 5$$

$$t = \log_3 x \text{이므로 } -1 < \log_3 x < 5$$

$$\log_3 \frac{1}{3} < \log_3 x < \log_3 243$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{3} < x < 243 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①, ㉔을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{3} < x < 243$$

따라서 자연수 x 는 1, 2, 3, ..., 242의 242개이다.

10 진수의 조건에서 $a > 0$ ㉔

주어진 이차방정식의 두 근이 모두 양수일 조건은

(i) 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 이어야

하므로

$$\frac{D}{4} = (\log_2 a)^2 - (2 - \log_2 a) \geq 0$$

$$(\log_2 a)^2 + \log_2 a - 2 \geq 0$$

$$\log_2 a = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + t - 2 \geq 0, (t+2)(t-1) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 1$$

$$t = \log_2 a \text{이므로}$$

$$\log_2 a \leq -2 \text{ 또는 } \log_2 a \geq 1$$

$$\log_2 a \leq \log_2 \frac{1}{4} \text{ 또는 } \log_2 a \geq \log_2 2$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } a \leq \frac{1}{4} \text{ 또는 } a \geq 2$$

(ii) (두 근의 합) > 0 이어야 하므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2\log_2 a > 0, \log_2 a > 0, \log_2 a > \log_2 1$$

밑이 1보다 크므로 $a > 1$

(iii) (두 근의 곱) > 0 이어야 하므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2 - \log_2 a > 0, \log_2 a < 2, \log_2 a < \log_2 4$$

밑이 1보다 크므로 $a < 4$

(i), (ii), (iii)을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$2 \leq a < 4 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①, ㉔을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$2 \leq a < 4$$

따라서 모든 자연수 a 의 값의 합은 $2+3=5$

- 11 진수의 조건에서 $k > 0$ ㉠

$$(\log_5 x)^2 + 2\log_5 5x - \log_5 k \geq 0 \text{에서}$$

$$(\log_5 x)^2 + 2(1 + \log_5 x) - 2\log_5 k \geq 0$$

$$(\log_5 x)^2 + 2\log_5 x + 2 - 2\log_5 k \geq 0$$

$\log_5 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 2t + 2 - 2\log_5 k \geq 0 \quad \dots\dots ㉡$$

주어진 부등식이 모든 양수 x 에 대하여 성립하려면

$t = \log_5 x$ 에서 모든 실수 t 에 대하여 부등식 ㉡이 성립해야 한다.

이차방정식 $t^2 + 2t + 2 - 2\log_5 k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 1^2 - (2 - 2\log_5 k) \leq 0$$

$$\log_5 k \leq \frac{1}{2}, \log_5 k \leq \log_5 \sqrt{5}$$

말이 1보다 크므로 $k \leq \sqrt{5}$ ㉢

㉠, ㉢을 동시에 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$0 < k \leq \sqrt{5}$$

- 12 대역폭이 15, 신호전력이 186, 잡음전력이 a 인 채널용량이 75이므로

$$75 = 15 \log_2 \left(1 + \frac{186}{a} \right)$$

$$5 = \log_2 \left(1 + \frac{186}{a} \right), 2^5 = 1 + \frac{186}{a}$$

$$\frac{186}{a} = 31 \quad \therefore a = 6$$

- 13 현재 세계 석유의 소비량을 a 라 하면 n 년 후의 세계 석유의 소비량은 $a \times 0.96^n$ 이므로

$$a \times 0.96^n \leq \frac{1}{4}a \quad \therefore 0.96^n \leq \frac{1}{4}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$n \log 0.96 \leq \log \frac{1}{4}$$

$$n \log 0.96 \leq -2 \log 2 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $\log 9.6 = 0.98$ 이므로

$$\log 0.96 = \log (9.6 \times 10^{-1})$$

$$= \log 9.6 + \log 10^{-1}$$

$$= 0.98 - 1 = -0.02$$

즉, ㉠에서

$$-0.02n \leq -2 \times 0.3$$

$$0.02n \geq 0.6 \quad \therefore n \geq \frac{0.6}{0.02} = 30$$

따라서 세계 석유의 소비량이 현재 소비량의 $\frac{1}{4}$ 이하가 되는 것은 30년 후부터이다.

- 14 두 점 A, B의 좌표는 각각

$$(k, \log_2 k), (k, -\log_2 (8-k))$$

$$\overline{AB} = 2 \text{이므로 } |\log_2 k + \log_2 (8-k)| = 2$$

$$\text{즉, } \log_2 k(8-k) = -2 \text{ 또는 } \log_2 k(8-k) = 2$$

진수의 조건에서

$$k(8-k) > 0 \quad \therefore 0 < k < 8 \quad \dots\dots ㉠$$

(i) $\log_2 k(8-k) = -2$ 일 때,

$$k(8-k) = 2^{-2}, k^2 - 8k + \frac{1}{4} = 0$$

$$\therefore k = \frac{8-3\sqrt{7}}{2} \text{ 또는 } k = \frac{8+3\sqrt{7}}{2}$$

이때 k 의 값은 모두 ㉠을 만족시킨다.

(ii) $\log_2 k(8-k) = 2$ 일 때,

$$k(8-k) = 2^2, k^2 - 8k + 4 = 0$$

$$\therefore k = 4-2\sqrt{3} \text{ 또는 } k = 4+2\sqrt{3}$$

이때 k 의 값은 모두 ㉠을 만족시킨다.

따라서 구하는 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$\frac{8-3\sqrt{7}}{2} \times \frac{8+3\sqrt{7}}{2} \times (4-2\sqrt{3}) \times (4+2\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

- 15 $x^2 - 9x + 8 \leq 0$ 에서 $(x-1)(x-8) \leq 0$

$$\therefore 1 \leq x \leq 8 \quad \therefore A = \{x | 1 \leq x \leq 8\}$$

$$(\log_2 x)^2 - 2k \log_2 x + k^2 - 1 \leq 0 \text{에서}$$

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2kt + k^2 - 1 \leq 0$$

$$(t-k+1)(t-k-1) \leq 0$$

$$\therefore k-1 \leq t \leq k+1$$

$$t = \log_2 x \text{이므로 } k-1 \leq \log_2 x \leq k+1$$

$$\log_2 2^{k-1} \leq \log_2 x \leq \log_2 2^{k+1}$$

로그의 말이 1보다 크므로

$$2^{k-1} \leq x \leq 2^{k+1} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$2^{k-1} \leq x \leq 2^{k+1}$$

$$\therefore B = \{x | 2^{k-1} \leq x \leq 2^{k+1}\}$$

이때 $A \cap B = \emptyset$ 이려면

$$2^{k-1} > 8 \text{ 또는 } 2^{k+1} < 1$$

$$2^{k-1} > 2^3 \text{ 또는 } 2^{k+1} < 2^0$$

지수의 말이 1보다 크므로

$$k-1 > 3 \text{ 또는 } k+1 < 0$$

$$\therefore k > 4 \text{ 또는 } k < -1$$

즉, $A \cap B \neq \emptyset$ 이려면 $k \leq 4$ 이고 $k \geq -1$ 이어야 하므로

$$-1 \leq k \leq 4$$

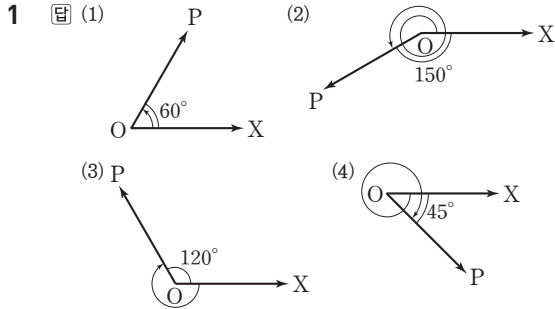
따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 k 는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ 의 6개이다.

II-1 01 삼각함수

일반각

개념 Check

97쪽



- 2 [답] (1) $360^\circ \times n + 70^\circ$ (2) $360^\circ \times n + 310^\circ$
(3) $360^\circ \times n + 250^\circ$ (4) $360^\circ \times n + 130^\circ$

- 3 [답] (1) 제3사분면 (2) 제4사분면
(3) 제2사분면 (4) 제1사분면

문제

98~99쪽

01-1 [답] 제2사분면, 제4사분면

θ 가 제3사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$\therefore 180^\circ \times n + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 135^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $n=0$ 일 때, $90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제2사분면의 각

(ii) $n=1$ 일 때, $270^\circ < \frac{\theta}{2} < 315^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제4사분면의 각

$n=2, 3, 4, \dots$ 에 대해서도 동경의 위치가 제2사분면과 제4사분면으로 반복되므로 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면, 제4사분면이다.

[다른 풀이]

㉠에서

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 135^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제2사분면의 각

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 270^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 315^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제4사분면의 각

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면, 제4사분면이다.

01-2 [답] 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면

3θ 가 제4사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 270^\circ < 3\theta < 360^\circ \times n + 360^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$\therefore 120^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 120^\circ \times n + 120^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $n=0$ 일 때, $90^\circ < \theta < 120^\circ$

따라서 θ 는 제2사분면의 각

(ii) $n=1$ 일 때, $210^\circ < \theta < 240^\circ$

따라서 θ 는 제3사분면의 각

(iii) $n=2$ 일 때, $330^\circ < \theta < 360^\circ$

따라서 θ 는 제4사분면의 각

$n=3, 4, 5, \dots$ 에 대해서도 동경의 위치가 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면으로 반복되므로 각 θ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면이다.

[다른 풀이]

㉠에서

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 120^\circ$$

따라서 θ 는 제2사분면의 각

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 210^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 240^\circ$$

따라서 θ 는 제3사분면의 각

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 330^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 360^\circ$$

따라서 θ 는 제4사분면의 각

(i), (ii), (iii)에서 각 θ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면이다.

02-1 [답] $45^\circ, 135^\circ$

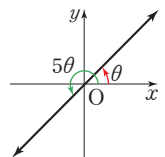
두 각 $\theta, 5\theta$ 를 나타내는 두 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$$5\theta - \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

(단, n 은 정수)

$$4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 90^\circ \times n + 45^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$



$0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$0^\circ < 90^\circ \times n + 45^\circ < 180^\circ$

$-45^\circ < 90^\circ \times n < 135^\circ$

$$\therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

이를 ㉠에 대입하면

$\theta=45^\circ$ 또는 $\theta=135^\circ$

02-2 ㉡ $120^\circ, 150^\circ$

두 각 $\theta, 11\theta$ 를 나타내는 두 동경이 x

축에 대하여 대칭이므로

$\theta + 11\theta = 360^\circ \times n$ (단, n 은 정수)

$$12\theta = 360^\circ \times n$$

$$\therefore \theta = 30^\circ \times n \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

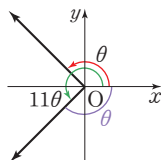
$90^\circ < 30^\circ \times n < 180^\circ$

$$\therefore 3 < n < 6$$

이때 n 은 정수이므로 $n=4$ 또는 $n=5$

이를 ㉢에 대입하면

$\theta=120^\circ$ 또는 $\theta=150^\circ$



02-3 ㉡ $20^\circ, 60^\circ$

두 각 $\theta, 8\theta$ 를 나타내는 두 동경이 y

축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 8\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

(단, n 은 정수)

$$9\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 40^\circ \times n + 20^\circ \quad \dots\dots \text{㉣}$$

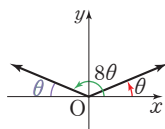
$0^\circ < \theta < 90^\circ$ 이므로 $0^\circ < 40^\circ \times n + 20^\circ < 90^\circ$

$$-20^\circ < 40^\circ \times n < 70^\circ \quad \therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{7}{4}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

이를 ㉣에 대입하면

$\theta=20^\circ$ 또는 $\theta=60^\circ$



2 호도법

개념 Check

101쪽

1 ㉡ (1) $\frac{2}{3}\pi$ (2) $\frac{29}{18}\pi$ (3) $\frac{15}{4}\pi$ (4) $-\frac{35}{9}\pi$

2 ㉡ (1) 126° (2) 240° (3) 390° (4) -140°

3 ㉡ (1) $2n\pi + \frac{\pi}{3}$ (2) $2n\pi + \frac{4}{3}\pi$

(3) $2n\pi + \frac{2}{9}\pi$ (4) $2n\pi + \frac{7}{6}\pi$

4 ㉡ 호의 길이: 2π , 넓이: 6π

문제

102~104쪽

03-1 ㉡ ④

① $-135^\circ = -135 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{3}{4}\pi$

② $150^\circ = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{6}\pi$

③ $-\frac{8}{5}\pi = -\frac{8}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -288^\circ$

④ $\frac{5}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 300^\circ$

⑤ $\frac{3}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 270^\circ$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

03-2 ㉡ ⑤

① 50°

② $770^\circ = 360^\circ \times 2 + 50^\circ$

③ $-310^\circ = 360^\circ \times (-1) + 50^\circ$

④ $\frac{5}{18}\pi = \frac{5}{18}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 50^\circ$

⑤ $-\frac{41}{18}\pi = -\frac{41}{18}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -410^\circ$
 $= 360^\circ \times (-2) + 310^\circ$

따라서 동경이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

03-3 ㉡ ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅅ

ㄱ. $-60^\circ = 360^\circ \times (-1) + 300^\circ \Rightarrow$ 제4사분면의 각

ㄴ. $1000^\circ = 360^\circ \times 2 + 280^\circ \Rightarrow$ 제4사분면의 각

ㄷ. $\frac{7}{3}\pi = 2\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow$ 제1사분면의 각

ㄷ. 2π 를 나타내는 동경은 x 축 위에 있으므로 어느 사분면에도 속하지 않는다.

ㄹ. $\frac{15}{4}\pi = 2\pi + \frac{7}{4}\pi \Rightarrow$ 제4사분면의 각

ㅅ. $-\frac{4}{3}\pi = -2\pi + \frac{2}{3}\pi \Rightarrow$ 제2사분면의 각

ㅅ. $-790^\circ = 360^\circ \times (-3) + 290^\circ \Rightarrow$ 제4사분면의 각

ㅇ. 1(라디안)은 약 57° 이므로

2(라디안)은 약 $114^\circ \Rightarrow$ 제2사분면의 각

따라서 보기에서 제4사분면의 각인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅅ이다.

04-1 ㉔ $\frac{28}{3}\pi$

부채꼴의 넓이가 24π 이므로

$$24\pi = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \theta \quad \therefore \theta = \frac{4}{3}\pi$$

또 부채꼴의 호의 길이 l 은

$$l = 6 \times \frac{4}{3}\pi = 8\pi$$

$$\therefore \theta + l = \frac{4}{3}\pi + 8\pi = \frac{28}{3}\pi$$

04-2 ㉔ 6

부채꼴의 호의 길이가 4이므로

$$4 = r \times 2 \quad \therefore r = 2$$

또 부채꼴의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

$$\therefore r + S = 2 + 4 = 6$$

04-3 ㉔ 64π

원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 옆면인 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로 부채꼴의 호의 길이는

$$2\pi \times 4 = 8\pi$$

옆면인 부채꼴의 넓이는

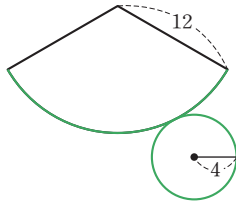
$$\frac{1}{2} \times 12 \times 8\pi = 48\pi$$

또 밑면인 원의 넓이는

$$\pi \times 4^2 = 16\pi$$

따라서 구하는 원뿔의 겉넓이는

$$48\pi + 16\pi = 64\pi$$



05-1 ㉔ 반지름의 길이: 5, 호의 길이: 10

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 20이므로

$$2r + l = 20 \quad \therefore l = 20 - 2r$$

이때 $r > 0$, $20 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 10$

부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times r \times (20 - 2r) = -r^2 + 10r = -(r - 5)^2 + 25$$

즉, $r = 5$ 일 때, 부채꼴의 넓이가 최대이므로 이때의 호의 길이 l 은

$$l = 20 - 2 \times 5 = 10$$

따라서 구하는 반지름의 길이는 5, 호의 길이는 10이다.

05-2 ㉔ 넓이의 최댓값: 81, 중심각의 크기: 2

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 36이므로

$$2r + l = 36 \quad \therefore l = 36 - 2r$$

이때 $r > 0$, $36 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 18$

부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times r \times (36 - 2r) = -r^2 + 18r = -(r - 9)^2 + 81$$

즉, $r = 9$ 일 때, 부채꼴의 넓이의 최댓값은 81이다.

이때의 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$\frac{1}{2} \times 9^2 \times \theta = 81 \quad \therefore \theta = 2$$

따라서 구하는 부채꼴의 넓이의 최댓값은 81, 중심각의 크기는 2이다.

다른 풀이

$r = 9$ 일 때, 부채꼴의 넓이가 최대이고 호의 길이 l 은

$$l = 36 - 2 \times 9 = 18 \text{이므로}$$

이때의 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$18 = 9 \times \theta \quad \therefore \theta = 2$$

3 삼각함수

개념 Check

106쪽

1 ㉔ (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $-\sqrt{3}$

- 2 ㉔ (1) $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$
 (2) $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$
 (3) $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$
 (4) $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$

- 3 ㉔ (1) 제2사분면 (2) 제3사분면

문제

107~108쪽

06-1 ㉔ -15

오른쪽 그림에서

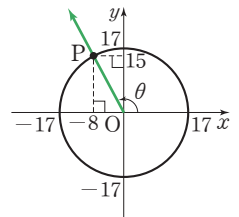
$$OP = \sqrt{(-8)^2 + 15^2} = 17$$

$$\sin \theta = \frac{15}{17}, \tan \theta = -\frac{15}{8}$$

$$\therefore 17 \sin \theta + 16 \tan \theta$$

$$= 17 \times \frac{15}{17} + 16 \times \left(-\frac{15}{8}\right)$$

$$= -15$$



06-2 ㉡ 1

오른쪽 그림과 같이 $-\frac{3}{4}\pi$ 를

나타내는 동경과 단위원의 교

점을 P, 점 P에서 x축에 내린

수선의 발을 H라 하면 삼각형

OHP에서 $\overline{OP}=1$ 이고,

$\angle POH = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\overline{PH} = \overline{OP} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

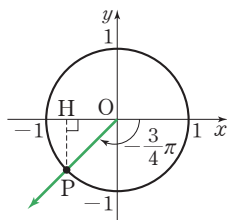
$$\overline{OH} = \overline{OP} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

점 P가 제3사분면의 점이므로

$$P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = 1$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta + \tan \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 = 1$$



07-1 ㉡ 제2사분면

(i) $\cos \theta \sin \theta < 0$ 에서

$\cos \theta > 0, \sin \theta < 0$ 또는 $\cos \theta < 0, \sin \theta > 0$

$\cos \theta > 0, \sin \theta < 0$ 이면

θ 는 제4사분면의 각이다.

$\cos \theta < 0, \sin \theta > 0$ 이면

θ 는 제2사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos \theta \tan \theta > 0$ 에서

$\cos \theta > 0, \tan \theta > 0$ 또는 $\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$

$\cos \theta > 0, \tan \theta > 0$ 이면

θ 는 제1사분면의 각이다.

$\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$ 이면

θ 는 제3사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 주어진 조건을 동시에 만족시키는 θ 는 제2사분면의 각이다.

07-2 ㉡ $-\tan \theta$

θ 는 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$$

따라서 $\sin \theta - \tan \theta < 0$ 이므로

$$|\sin \theta| - \sqrt{(\sin \theta - \tan \theta)^2}$$

$$= |\sin \theta| - |\sin \theta - \tan \theta|$$

$$= -\sin \theta + (\sin \theta - \tan \theta)$$

$$= -\tan \theta$$

4 삼각함수 사이의 관계

개념 Check

109쪽

1 ㉡ $\cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3}$

2 ㉡ $\sin \theta = -\frac{3\sqrt{5}}{7}, \tan \theta = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

문제

110~113쪽

08-1 ㉡ (1) 1 (2) $2 \tan \theta$

$$(1) (1 + \tan^2 \theta)(1 - \sin^2 \theta)$$

$$= (1 + \tan^2 \theta) \cos^2 \theta \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$= \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right) \cos^2 \theta \quad \blacktriangleleft \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$(2) \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 - \sin \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta \cos \theta (1 - \sin \theta) + \sin \theta \cos \theta (1 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}$$

$$= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta} \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$= \frac{2 \sin \theta}{\cos \theta} = 2 \tan \theta \quad \blacktriangleleft \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

08-2 ㉡ -2

$$\frac{\tan \theta}{1 + \cos \theta} - \frac{\tan \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$= \frac{\tan \theta (1 - \cos \theta) - \tan \theta (1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}$$

$$= \frac{-2 \tan \theta \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{-2 \sin \theta}{\cos \theta} \times \cos \theta$$

$$= \frac{-2 \sin \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{-2}{\sin \theta}$$

$$\therefore a = -2$$

08-3 ㉡ 2

$$(1 + \tan \theta)^2 \cos^2 \theta + (1 - \tan \theta)^2 \cos^2 \theta$$

$$= \cos^2 \theta \{(1 + \tan \theta)^2 + (1 - \tan \theta)^2\}$$

$$= \cos^2 \theta (2 + 2 \tan^2 \theta)$$

$$= 2 \cos^2 \theta (1 + \tan^2 \theta)$$

$$= 2 \cos^2 \theta \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right)$$

$$= 2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 2$$

09-1 ㉔ 3

$$\tan \theta = -\frac{1}{2} \text{ 이므로 } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = -2 \sin \theta \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로}$$

$$\sin^2 \theta + (-2 \sin \theta)^2 = 1$$

$$5 \sin^2 \theta = 1, \sin^2 \theta = \frac{1}{5}$$

이때 θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0$$

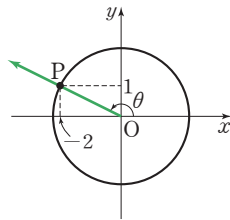
$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\textcircled{㉔} \text{에서 } \cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \sqrt{5}(\sin \theta - \cos \theta) = \sqrt{5} \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\} = 3$$

다른 풀이

동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ 라 할 때, θ 가 제2사분면의 각이고 $\tan \theta = -\frac{1}{2}$ 이므로 점 P(-2, 1)이라 할 수 있다.



$$\text{이때 } \overline{OP} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \sqrt{5}(\sin \theta - \cos \theta) = \sqrt{5} \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\} = 3$$

09-2 ㉔ -15

$$\frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta} = \frac{1}{9} \text{ 에서}$$

$$9(1-\cos \theta) = 1+\cos \theta$$

$$9-9\cos \theta = 1+\cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{4}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$= 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

이때 θ 가 제4사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{3}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

$\textcircled{㉔}, \textcircled{㉕}$ 에서

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore 15 \sin \theta + 8 \tan \theta &= 15 \times \left(-\frac{3}{5} \right) + 8 \times \left(-\frac{3}{4} \right) \\ &= -9 - 6 = -15 \end{aligned}$$

09-3 ㉔ $-\frac{\sqrt{21}}{5}$

주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$$\begin{aligned} &\frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} + \frac{1+\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + (1+\cos \theta)^2}{(1+\cos \theta) \sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + 1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta}{(1+\cos \theta) \sin \theta} \\ &= \frac{2(1+\cos \theta)}{(1+\cos \theta) \sin \theta} \\ &= \frac{2}{\sin \theta} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{2}{\sin \theta} = 5 \text{ 이므로 } \sin \theta = \frac{2}{5}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$= 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

$$\text{이때 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ 이므로 } \cos \theta < 0$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

10-1 ㉔ (1) $\frac{4}{9}$ (2) $\frac{\sqrt{17}}{3}$ (3) $\frac{13}{27}$ (4) $\frac{49}{81}$

$$(1) \sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$\begin{aligned} (2) (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{4}{9} = \frac{17}{9} \quad \dots\dots \textcircled{㉔} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \sin \theta > 0, \cos \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta > 0$$

따라서 $\textcircled{㉔}$ 에서

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{17}}{3}$$

$$\begin{aligned} (3) \sin^3 \theta - \cos^3 \theta &= (\sin \theta - \cos \theta)^3 + 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta) \\ &= \left(\frac{1}{3} \right)^3 + 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{27} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \sin^4 \theta + \cos^4 \theta &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= 1^2 - 2 \times \left(\frac{4}{9} \right)^2 = \frac{49}{81} \end{aligned}$$

10-2 ㉡ 2

$\sin \theta + \cos \theta = -\sqrt{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 2$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 2$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

11-1 ㉡ $-\frac{4}{3}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢에서

$$\frac{k}{3} = -\frac{4}{9} \quad \therefore k = -\frac{4}{3}$$

11-2 ㉡ 2

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) = \frac{k}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 $2 \sin \theta = 2$

$$\therefore \sin \theta = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡의 좌변을 간단히 하면

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) \\ &= 2 \sin^2 \theta - 1 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2 \sin^2 \theta - 1 = \frac{k}{2} \text{ 이므로}$$

㉢을 대입하면

$$2 - 1 = \frac{k}{2} \quad \therefore k = 2$$

11-3 ㉡ $-\frac{1}{4}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\cos \theta + \tan \theta = -\frac{k}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\cos \theta \tan \theta = -\frac{3}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉡에서

$$\cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{3}{5}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= 1 - \sin^2 \theta \\ &= 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \end{aligned}$$

이때 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 이므로 $\cos \theta > 0$

$$\therefore \cos \theta = \frac{4}{5}$$

따라서 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{3}{4}$ 이므로

㉠에서

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = -\frac{k}{5}, \frac{1}{20} = -\frac{k}{5}$$

$$\therefore k = -\frac{1}{4}$$

연습문제

114~116쪽

1 ㄴ, ㄷ, ㄹ

2 ㉠

3 제2사분면

4 ㉡

5 ㉠: $\frac{5}{4}\pi$, ㉡: -150° , ㉢: -3π

6 ㉤

7 $75\pi \text{ m}^2$

8 $\frac{25\sqrt{11}}{3}\pi$

9 2

10 $4\sqrt{3}$

11 ㉤

12 $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$

13 $-\frac{7}{5}$

14 ㉢

15 ㉡

16 ㄴ, ㄷ

17 1

18 ㉠

19 14

20 $-\frac{\sqrt{5}}{8}$

21 $\sqrt{15}$

22 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

1 ㄱ. $255^\circ = 360^\circ \times 0 + 255^\circ$

ㄴ. $435^\circ = 360^\circ \times 1 + 75^\circ$

ㄷ. $1155^\circ = 360^\circ \times 3 + 75^\circ$

ㄹ. $-285^\circ = 360^\circ \times (-1) + 75^\circ$

ㅁ. $-625^\circ = 360^\circ \times (-2) + 95^\circ$

따라서 보기에서 동경 OP가 나타낼 수 있는 각은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

2 ① $660^\circ = 360^\circ \times 1 + 300^\circ$

➡ 제4사분면의 각

② $945^\circ = 360^\circ \times 2 + 225^\circ$

➡ 제3사분면의 각

③ $3450^\circ = 360^\circ \times 9 + 210^\circ$

➡ 제3사분면의 각

④ $-460^\circ = 360^\circ \times (-2) + 260^\circ$

➡ 제3사분면의 각

⑤ $-1970^\circ = 360^\circ \times (-6) + 190^\circ$

➡ 제3사분면의 각

따라서 동경이 존재하는 사분면이 나머지 넷과 다른 하나는 ①이다.

3 θ 가 제3사분면의 각이므로

$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ$ (단, n 은 정수)

$\therefore 120^\circ \times n + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 90^\circ$ ㉠

(i) $n=0$ 일 때, $60^\circ < \frac{\theta}{3} < 90^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면의 각

(ii) $n=1$ 일 때, $180^\circ < \frac{\theta}{3} < 210^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각

(iii) $n=2$ 일 때, $300^\circ < \frac{\theta}{3} < 330^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각

$n=3, 4, 5, \dots$ 에 대해서도 동경의 위치가 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면으로 반복되므로 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제2사분면이다.

다른 풀이

㉠에서

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때,

$360^\circ \times k + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 90^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면의 각

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때,

$360^\circ \times k + 180^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 210^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각

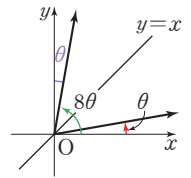
(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때,

$360^\circ \times k + 300^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 330^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각

(i), (ii), (iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제2사분면이다.

4 두 각 $\theta, 8\theta$ 를 나타내는 두 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로
 $\theta + 8\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ$ (단, n 은 정수)
 $9\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ$
 $\therefore \theta = 40^\circ \times n + 10^\circ$ ㉡



$0^\circ < \theta < 90^\circ$ 이므로

$0^\circ < 40^\circ \times n + 10^\circ < 90^\circ$

$-10^\circ < 40^\circ \times n < 80^\circ$

$\therefore -\frac{1}{4} < n < 2$

이때 n 은 정수이므로

$n=0$ 또는 $n=1$

이를 ㉡에 대입하면

$\theta = 10^\circ$ 또는 $\theta = 50^\circ$

따라서 모든 각 θ 의 크기의 합은

$10^\circ + 50^\circ = 60^\circ$

5 (1) $225^\circ = 225 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{4}\pi$

(2) $-\frac{5}{6}\pi = -\frac{5}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -150^\circ$

(3) $-540^\circ = -540 \times \frac{\pi}{180} = -3\pi$

따라서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 값은 각각 $\frac{5}{4}\pi, -150^\circ, -3\pi$ 이다.

6 반지름의 길이가 r 인 원의 넓이는

πr^2 ㉣

반지름의 길이가 $3r$ 이고 호의 길이가 8π 인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 3r \times 8\pi = 12\pi r$ ㉤

㉣과 ㉤이 서로 같으므로

$\pi r^2 = 12\pi r \quad \therefore r = 12$

7 부채꼴 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 16^2 \times \frac{5}{8}\pi = 80\pi(\text{m}^2)$

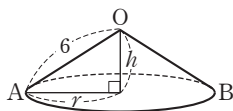
부채꼴 OCD의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{5}{8}\pi = 5\pi(\text{m}^2)$

따라서 도형 ABDC의 넓이는

$80\pi - 5\pi = 75\pi(\text{m}^2)$

- 8 부채꼴 OAB로 만든 원뿔 모양의 용기는 오른쪽 그림과 같다.



옆면인 부채꼴 OAB의 호의 길이는

$$6 \times \frac{5}{3} \pi = 10\pi$$

원뿔의 밑면인 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$2\pi \times r = 10\pi \quad \therefore r = 5$$

원뿔의 높이를 h 라 하면

$$h = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$$

따라서 용기의 부피는

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times \sqrt{11} = \frac{25\sqrt{11}}{3} \pi \quad \leftarrow \text{밑면의 반지름의 길이가 } r, \text{ 높이가 } h \text{인 원뿔의 부피는 } \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

- 9 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면

부채꼴의 둘레의 길이가 24이므로

$$2r + l = 24 \quad \therefore l = 24 - 2r$$

이때 $r > 0$, $24 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 12$

부채꼴의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times r \times (24 - 2r) &= -r^2 + 12r \\ &= -(r - 6)^2 + 36 \end{aligned}$$

따라서 $r = 6$ 일 때, 부채꼴의 넓이의 최댓값은 36이다.

이때의 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 6^2 \times \theta &= 36 \\ \therefore \theta &= 2 \end{aligned}$$

- 10 $P(a, -2\sqrt{6})$ ($a > 0$)에서 $\tan \theta = -2\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{-2\sqrt{6}}{a} = -2\sqrt{2} \quad \therefore a = \sqrt{3}$$

즉, $P(\sqrt{3}, -2\sqrt{6})$ 이므로

$$\begin{aligned} r = \overline{OP} &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-2\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{3} \\ \therefore a + r &= \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

- 11 $x^2 + y^2 = 5$ 에 $y = 2$ 를 대입하면

$$x^2 + 4 = 5$$

$$\therefore x = -1 \quad (\because x < 0)$$

즉, 점 A의 좌표는 $(-1, 2)$

$x^2 + y^2 = 9$ 에 $y = 2$ 를 대입하면

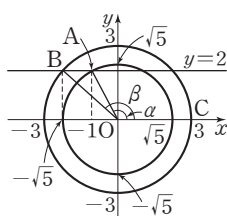
$$x^2 + 4 = 9$$

$$\therefore x = -\sqrt{5} \quad (\because x < 0)$$

즉, 점 B의 좌표는 $(-\sqrt{5}, 2)$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \beta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore \sin \alpha \times \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$



- 12 $\angle QOP = 2\pi - \frac{5}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$ 이므로

직각삼각형 ORQ에서

$$\overline{QR} = \overline{OQ} \tan \frac{\pi}{3} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

삼각형 ORQ의 넓이는

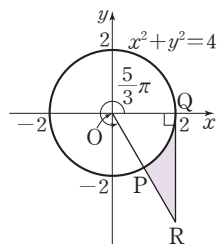
$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

부채꼴 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} \pi$$

따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} &(\text{삼각형 ORQ의 넓이}) - (\text{부채꼴 OPQ의 넓이}) \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$



- 13 점 P의 좌표를 $(-3a, -4a)$ ($a > 0$)로

놓으면

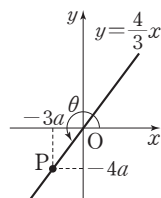
$$\overline{OP} = \sqrt{(-3a)^2 + (-4a)^2} = 5a$$

이므로

$$\sin \theta = \frac{-4a}{5a} = -\frac{4}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{-3a}{5a} = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{7}{5}$$



- 14 $\sin \theta \cos \theta < 0$ 이므로

$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$ 또는 $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$

$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$ 이면 θ 는 제2사분면의 각이다.

$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$ 이면 θ 는 제4사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

- ① $\sin \theta > 0$ 인 θ 는

제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

- ② $\cos \theta < 0$ 인 θ 는

제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

- ③ $\tan \theta < 0$ 인 θ 는

제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

- ④ $\cos \theta \tan \theta < 0$ 에서

$\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$ 또는 $\cos \theta > 0, \tan \theta < 0$

$\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$ 인 θ 는 제3사분면의 각이다.

$\cos \theta > 0, \tan \theta < 0$ 인 θ 는 제4사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

- ⑤ $\sin \theta \tan \theta > 0$ 에서

$\sin \theta > 0, \tan \theta > 0$ 또는 $\sin \theta < 0, \tan \theta < 0$

$\sin \theta > 0, \tan \theta > 0$ 인 θ 는 제1사분면의 각이다.

$\sin \theta < 0, \tan \theta < 0$ 인 θ 는 제4사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

다른 풀이

$$\textcircled{4} \cos \theta \tan \theta = \cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ = \sin \theta < 0$$

따라서 θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

$$\textcircled{5} \sin \theta \tan \theta = \sin \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} > 0$$

이때 $\sin^2 \theta > 0$ 이므로 $\cos \theta > 0$

따라서 θ 는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

15 (i) $\sin \theta \cos \theta > 0$ 이므로

$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 또는 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$

$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 이면 θ 는 제1사분면의 각이다.

$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$ 이면 θ 는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\cos \theta \tan \theta < 0$ 이므로

$\cos \theta > 0, \tan \theta < 0$ 또는 $\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$

$\cos \theta > 0, \tan \theta < 0$ 이면 θ 는 제4사분면의 각이다.

$\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$ 이면 θ 는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제3사분면의 각이다.

즉, $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$ 이므로

$\tan \theta - \sin \theta > 0, \sin \theta + \cos \theta < 0$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{\cos^2 \theta} + \sqrt{(\tan \theta - \sin \theta)^2} - \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} \\ = |\cos \theta| + |\tan \theta - \sin \theta| - |\sin \theta + \cos \theta| \\ = -\cos \theta + (\tan \theta - \sin \theta) + (\sin \theta + \cos \theta) \\ = \tan \theta \end{aligned}$$

$$16 \neg. \tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \sin^2 \theta$$

$$= \frac{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$$

$$\neq \tan^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$\neg. \frac{\tan \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta + 1}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{1 + \sin \theta}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}$$

$$= \frac{1}{1 - \sin \theta}$$

$$\neg. \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} + \frac{\tan \theta - 1}{\tan \theta + 1}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta} + \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 1}$$

$$= \frac{(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} + \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$$

$$= \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = 0$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

17 $\cos \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서 $1 - \cos^2 \theta = \cos \theta$ 이므로

$$\sin^2 \theta = \cos \theta$$

$$\therefore \sin^2 \theta + \sin^6 \theta + \sin^8 \theta$$

$$= \cos \theta + \cos^3 \theta + \cos^4 \theta$$

$$= \cos \theta + \cos^2 \theta (\cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (\because \cos \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

$$18 \frac{\sin \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} = 4 \text{에서}$$

$$\frac{\sin \theta (1 + \sin \theta) - \sin \theta (1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} = 4$$

$$\frac{2 \sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = 4, \frac{2(1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta} = 4$$

$$1 - \cos^2 \theta = 2 \cos^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$\text{이때 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이므로 } \cos \theta < 0$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$19 \tan^2 \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}$$

$$\text{한편 } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 = \sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta \text{에서}$$

$$1 = \sin^4 \theta + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^4 \theta$$

$$\therefore \sin^4 \theta + \cos^4 \theta = \frac{7}{8}$$

$$\therefore \tan^2 \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\frac{7}{8}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 14$$

20 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{3}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{8} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢에서

$$\frac{k}{2} = -\frac{1}{8} \quad \therefore k = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

이때 $\sin \theta > \cos \theta$ 이므로 $\sin \theta - \cos \theta > 0$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore k(\sin \theta - \cos \theta) = \left(-\frac{1}{4}\right) \times \frac{\sqrt{5}}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{8}$$

21 오른쪽 그림과 같이 점

$A(a, b)$ ($a > 0, b > 0$)에 대하여

$$\sin \alpha = \frac{b}{1}$$

이때 $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ 이므로

$$b = \frac{1}{4}$$

점 $A\left(a, \frac{1}{4}\right)$ 은 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$a^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1, a^2 = \frac{15}{16}$$

$$a = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad (\because a > 0)$$

각 $-\beta$ 를 나타내는 동경과 원 C 의 교점이 $B(-b, -a)$ 이므로 각 β 를 나타내는 동경과 원 C 의 교점을 B' 이라 하면 점 B' 은 점 B 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점이다.

$$B'(-b, a), \text{ 즉 } \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right) \text{ 이므로}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore 4 \sin \beta = 4 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \sqrt{15}$$

22 $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ 이므로

삼각형 AOC 에서

$$\overline{OC} = \overline{OA} \cos \theta = \cos \theta$$

$$\overline{AC} = \overline{OA} \sin \theta = \sin \theta$$

삼각형 DOB 에서

$$\overline{BD} = \overline{OB} \tan \theta = \tan \theta$$

$$3 \overline{OC} = \overline{AC} \times \overline{BD} \text{에서}$$

$$3 \cos \theta = \sin \theta \tan \theta$$

$$3 \cos \theta = \sin \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$3 \cos^2 \theta = \sin^2 \theta, 3 \cos^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos \theta > 0$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$$

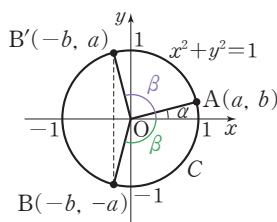
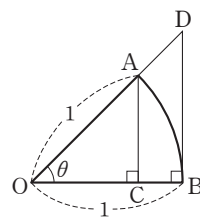
$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin \theta > 0$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



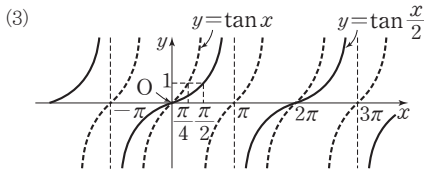
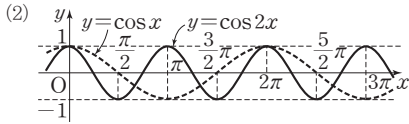
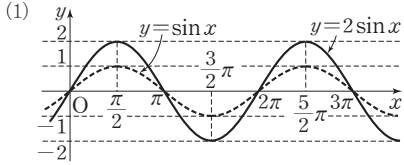
II-1 02 삼각함수의 그래프

삼각함수의 그래프

개념 Check

120쪽

1 [답] (1) 2π (2) π (3) 2π / 그래프: 풀이 참조

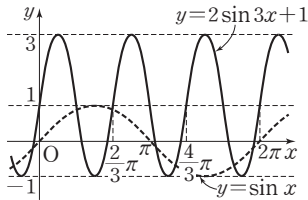


문제

121~124쪽

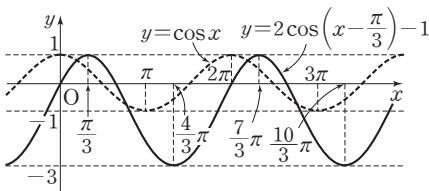
01-1 [답] 풀이 참조

- (1) $y=2\sin 3x+1$ 의 그래프는 $y=\sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{3}$ 배, y 축의 방향으로 2배 한 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



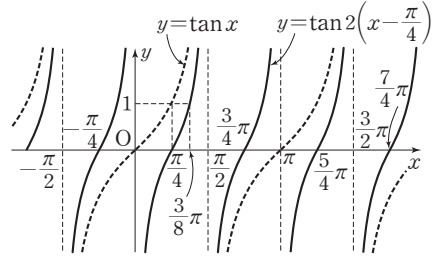
$\therefore$ 최댓값: 3, 최솟값: -1 , 주기: $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

- (2) $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1$ 의 그래프는 $y=\cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 후 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 최댓값: 1, 최솟값: -3 , 주기: $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$

- (3) $y=\tan 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 의 그래프는 $y=\tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 후 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 최댓값: 없다., 최솟값: 없다., 주기: $\frac{\pi}{2}$

02-1 [답] 13

$f(x)=a\tan bx$ 의 주기가 $\frac{\pi}{6}$ 이고 $b>0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{6} \quad \therefore b=6$$

$f(x)=a\tan 6x$ 에서 $f\left(\frac{\pi}{24}\right)=7$ 이므로 $a\tan \frac{\pi}{4}=7$

$$\therefore a=7 \quad \therefore a+b=7+6=13$$

02-2 [답] -1

$f(x)=a\sin \frac{x}{b}+c$ 의 최댓값이 5이고 $a>0$ 이므로

$$a+c=5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 주기가 4π 이고 $b<0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{-\frac{1}{b}} = 4\pi, \quad -2b\pi = 4\pi \quad \therefore b=-2$$

$f(x)=a\sin\left(-\frac{x}{2}\right)+c$ 에서 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7}{2}$ 이므로

$$a\sin \frac{\pi}{6}+c=\frac{7}{2}, \quad \frac{a}{2}+c=\frac{7}{2}$$

$$\therefore a+2c=7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=3, c=2$

$$\therefore a+b-c=3+(-2)-2=-1$$

03-1 [답] $\frac{3}{2}$

주어진 함수 $y=a\sin\left(bx-\frac{2}{3}\pi\right)+c$ 의 그래프에서 최댓값은 1, 최솟값은 -2 이고 $a>0$ 이므로

$$a+c=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$-a+c=-2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2}, c=-\frac{1}{2}$

주어진 그래프에서 주기는 $\frac{13}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = 4\pi$ 이고 $b > 0$ 이므로
 $\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2}$
 $\therefore a + b + c = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

03-2 ㉡ π

주어진 함수 $y = a \cos(bx + c) + d$ 의 그래프에서 최댓값은 2, 최솟값은 -4 이고 $a > 0$ 이므로

$$a + d = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$-a + d = -4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a = 3, d = -1$

주어진 그래프에서 주기는 $\frac{11}{6}\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\pi$ 이고 $b > 0$

$$\text{이므로 } \frac{2\pi}{b} = 2\pi \quad \therefore b = 1$$

따라서 주어진 함수의 식은 $y = 3 \cos(x + c) - 1$ 이고, 이

함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$ 를 지나므로

$$2 = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3} + c\right) - 1 \quad \therefore \cos\left(\frac{\pi}{3} + c\right) = 1$$

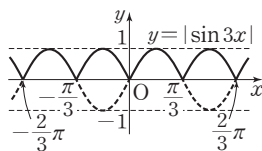
이때 $-\frac{\pi}{2} \leq c \leq 0$ 에서 $-\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{3} + c \leq \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\frac{\pi}{3} + c = 0 \quad \therefore c = -\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore abcd = 3 \times 1 \times \left(-\frac{\pi}{3}\right) \times (-1) = \pi$$

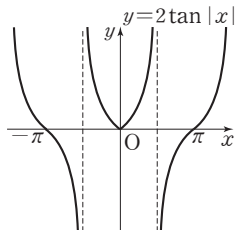
04-1 ㉡ 풀이 참조

(1) 함수 $y = |\sin 3x|$ 의 그래프는 함수 $y = \sin 3x$ 의 그래프를 그린 후 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 최댓값: 1, 최솟값: 0, 주기: $\frac{\pi}{3}$

(2) 함수 $y = 2 \tan |x|$ 의 그래프는 함수 $y = 2 \tan x$ 의 그래프를 $x \geq 0$ 인 부분만 그린 후 $x < 0$ 인 부분은 $x \geq 0$ 인 부분을 y 축에 대하여 대칭이동하여 그린 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 최댓값: 없다., 최솟값: 없다., 주기: 없다.

04-2 ㉡ 6

함수 $y = 3|\cos \pi x| + 1$ 의 그래프는 함수 $y = 3 \cos \pi x$ 의 그래프를 그린 후 $y \geq 0$ 인

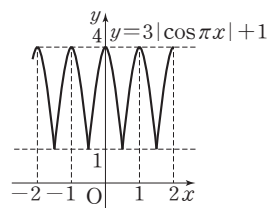
부분은 그대로 두고, $y < 0$

인 부분을 x 축에 대하여 대

칭이동한 후 y 축의 방향으

로 1만큼 평행이동한 것이

므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 최댓값은 4, 최솟값은 1, 주기는 1이므로

$$M = 4, m = 1, a = 1$$

$$\therefore M + m + a = 6$$

2 삼각함수의 성질

문제

127~130쪽

05-1 ㉡ (1) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$(1) \sin \frac{25}{6}\pi = \sin\left(2\pi \times 2 + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{17}{6}\pi &= \cos\left(2\pi + \frac{5}{6}\pi\right) = \cos \frac{5}{6}\pi \\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\tan \frac{5}{4}\pi = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \frac{25}{6}\pi + \cos \frac{17}{6}\pi + \tan \frac{5}{4}\pi \\ = \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sin(-750^\circ) &= -\sin 750^\circ = -\sin(360^\circ \times 2 + 30^\circ) \\ &= -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 1395^\circ &= \cos(360^\circ \times 4 - 45^\circ) \\ &= \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \tan 495^\circ &= \tan(360^\circ + 135^\circ) = \tan 135^\circ \\ &= \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin(-750^\circ) + \cos 1395^\circ + \cos 240^\circ - \tan 495^\circ \\ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) - (-1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

05-2 ㉡ 1

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\times 3+\theta\right)=\sin\theta \\ \therefore \frac{\cos(2\pi+\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cos^2(\pi-\theta)} &+ \frac{\sin(\pi+\theta)\tan^2(\pi-\theta)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)} \\ &= \frac{\cos\theta}{\cos\theta\times(-\cos\theta)^2} + \frac{-\sin\theta\times(-\tan\theta)^2}{\sin\theta} \\ &= \frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = 1\end{aligned}$$

05-3 ㉡ 0.4021

$$\begin{aligned}\sin 110^\circ &= \sin(90^\circ+20^\circ)=\cos 20^\circ=0.9397 \\ \cos 260^\circ &= \cos(180^\circ+80^\circ)=-\cos 80^\circ \\ &= -\cos(90^\circ-10^\circ)=-\sin 10^\circ=-0.1736 \\ \tan 340^\circ &= \tan(360^\circ-20^\circ)=-\tan 20^\circ=-0.3640 \\ \therefore \sin 110^\circ + \cos 260^\circ + \tan 340^\circ &= 0.9397 + (-0.1736) + (-0.3640) = 0.4021\end{aligned}$$

06-1 ㉡ $\frac{45}{2}$

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ-x) &= \cos x \text{ 이므로} \\ \sin 89^\circ &= \sin(90^\circ-1^\circ)=\cos 1^\circ \\ \sin 87^\circ &= \sin(90^\circ-3^\circ)=\cos 3^\circ \\ \sin 85^\circ &= \sin(90^\circ-5^\circ)=\cos 5^\circ \\ &\vdots \\ \sin 47^\circ &= \sin(90^\circ-43^\circ)=\cos 43^\circ \\ \therefore \sin^2 1^\circ + \sin^2 3^\circ + \sin^2 5^\circ + \cdots + \sin^2 87^\circ + \sin^2 89^\circ &= \sin^2 1^\circ + \sin^2 3^\circ + \sin^2 5^\circ + \cdots + \cos^2 3^\circ + \cos^2 1^\circ \\ &= (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) \\ &\quad + \cdots + (\sin^2 43^\circ + \cos^2 43^\circ) + \sin^2 45^\circ \\ &= 1+1+\cdots+1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= 1\times 22 + \frac{1}{2} = \frac{45}{2}\end{aligned}$$

06-2 ㉡ 1

$$\begin{aligned}\tan(90^\circ-x) &= \frac{1}{\tan x} \text{ 이므로} \\ \tan 89^\circ &= \tan(90^\circ-1^\circ)=\frac{1}{\tan 1^\circ} \\ \tan 88^\circ &= \tan(90^\circ-2^\circ)=\frac{1}{\tan 2^\circ} \\ \tan 87^\circ &= \tan(90^\circ-3^\circ)=\frac{1}{\tan 3^\circ} \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 46^\circ &= \tan(90^\circ-44^\circ)=\frac{1}{\tan 44^\circ} \\ \therefore \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \cdots \times \tan 88^\circ \times \tan 89^\circ &= \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \cdots \times \frac{1}{\tan 2^\circ} \times \frac{1}{\tan 1^\circ} \\ &= \left(\tan 1^\circ \times \frac{1}{\tan 1^\circ}\right) \times \left(\tan 2^\circ \times \frac{1}{\tan 2^\circ}\right) \\ &\quad \times \cdots \times \left(\tan 44^\circ \times \frac{1}{\tan 44^\circ}\right) \times \tan 45^\circ \\ &= 1 \times 1 \times \cdots \times 1 \times 1 = 1\end{aligned}$$

06-3 ㉡ 1

$$\begin{aligned}\cos 50^\circ &= \cos(90^\circ-40^\circ)=\sin 40^\circ, \\ \sin 50^\circ &= \sin(90^\circ-40^\circ)=\cos 40^\circ \text{ 이므로} \\ \left(1-\frac{1}{\sin 40^\circ}\right)\left(1+\frac{1}{\cos 50^\circ}\right)\left(1-\frac{1}{\cos 40^\circ}\right)\left(1+\frac{1}{\sin 50^\circ}\right) &= \left(1-\frac{1}{\sin 40^\circ}\right)\left(1+\frac{1}{\sin 40^\circ}\right) \\ &\quad \times \left(1-\frac{1}{\cos 40^\circ}\right)\left(1+\frac{1}{\cos 40^\circ}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{\sin^2 40^\circ}\right)\left(1-\frac{1}{\cos^2 40^\circ}\right) \\ &= \frac{\sin^2 40^\circ-1}{\sin^2 40^\circ} \times \frac{\cos^2 40^\circ-1}{\cos^2 40^\circ} \\ &= -\frac{\cos^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ} \times \left(-\frac{\sin^2 40^\circ}{\cos^2 40^\circ}\right) = 1\end{aligned}$$

07-1 ㉡ (1) 최댓값: -1, 최솟값: -3

(2) 최댓값: 6, 최솟값: -2

$$\begin{aligned}(1) y &= 3\cos(x-\pi) - 2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - 2 \\ &= 3\cos\{-(\pi-x)\} - 2\sin\left\{-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\} - 2 \\ &= 3\cos(\pi-x) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - 2 \\ &= -3\cos x + 2\cos x - 2 \\ &= -\cos x - 2 \\ \text{이때 } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ 이므로 } -1 \leq -\cos x \leq 1 \\ \therefore -3 \leq -\cos x - 2 \leq -1 \\ \text{따라서 최댓값은 } -1, \text{ 최솟값은 } -3 \text{ 이다.}\end{aligned}$$

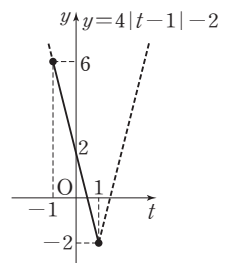
(2) $\cos 2x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = 4|t-1| - 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

따라서 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 ㉠의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t = -1$ 일 때, 최댓값은 6

$t = 1$ 일 때, 최솟값은 -2



다른 풀이

(2) $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ 이므로 $-2 \leq \cos 2x - 1 \leq 0$
 $0 \leq |\cos 2x - 1| \leq 2$
 $0 \leq 4|\cos 2x - 1| \leq 8$
 $\therefore -2 \leq 4|\cos 2x - 1| - 2 \leq 6$
 따라서 최댓값은 6, 최솟값은 -2이다.

08-1 ㉞ (1) 최댓값: $\frac{2}{3}$, 최솟값: -2

(2) 최댓값: 5, 최솟값: $\frac{11}{4}$

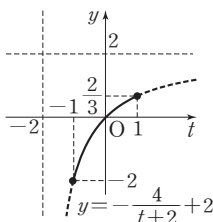
(1) $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = \frac{2t}{t+2} = -\frac{4}{t+2} + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 ㉞의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 므로

$t=1$ 일 때, 최댓값은 $\frac{2}{3}$

$t=-1$ 일 때, 최솟값은 -2



(2) $y = -\cos^2 x - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 4$

$$= -(1 - \sin^2 x) - \cos\left\{-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\} + 4$$

$$= \sin^2 x - 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4$$

$$= \sin^2 x - \sin x + 3$$

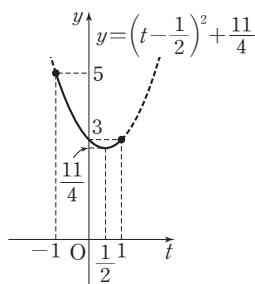
$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = t^2 - t + 3 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 ㉞의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=-1$ 일 때, 최댓값은 5

$t=\frac{1}{2}$ 일 때, 최솟값은 $\frac{11}{4}$



다른 풀이

(1) 주어진 함수를 변형하면

$$y = \frac{2\cos x}{\cos x + 2} = -\frac{4}{\cos x + 2} + 2$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{\cos x + 2} \leq 1$

$$-4 \leq -\frac{4}{\cos x + 2} \leq -\frac{4}{3}$$

$$\therefore -2 \leq -\frac{4}{\cos x + 2} + 2 \leq \frac{2}{3}$$

따라서 최댓값은 $\frac{2}{3}$, 최솟값은 -2이다.

연습문제

131~133쪽

1 3π	2 ④	3 -2π	4 ⑤	5 2π
6 ⑤	7 ③	8 ②	9 ④	10 1
11 $-\frac{4}{5}$	12 $\frac{5}{2}$	13 0	14 49	15 -2
16 6	17 2	18 ②	19 8	20 ③
21 $\frac{7}{2}$				

1 $y = 5\cos(2x - \pi) + 6 = 5\cos 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 6$ 이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y = 5\cos 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a = \frac{\pi}{2}$, $b = 6$ 이므로 $ab = 3\pi$

2 $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

① $y = -\cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

② $y = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 의 주기는 2π

③ $y = 3\sin(2x + \pi)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$

④ $y = \tan\left(\frac{x}{4} + \pi\right)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$

⑤ $y = 4\tan 2x - 1$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$

따라서 함수 $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$ 와 주기가 같은 함수는 ④이다.

3 주기는 $a = \frac{2\pi}{3}$

최댓값은 $b = 2 - 1 = 1$

최솟값은 $c = -2 - 1 = -3$

$$\therefore abc = \frac{2\pi}{3} \times 1 \times (-3) = -2\pi$$

4 ① 주기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

② 그래프는 점 $(\pi, 1)$ 을 지난다.

③ 최댓값과 최솟값은 없다.

④ 점근선의 방정식은 $3x - \pi = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

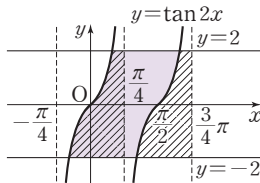
$$3x = n\pi + \frac{3}{2}\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore x = \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

⑤ $y=2\tan(3x-\pi)+1=2\tan 3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$ 이므로
주어진 함수의 그래프는 함수 $y=2\tan 3x$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행
이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

- 5 오른쪽 그림에서 빗금 친 두
부분의 넓이가 서로 같으
므로 구하는 넓이는 가로의 길
이가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 세로의 길이가
4인 직사각형의 넓이와 같다.



$$\therefore \frac{\pi}{2} \times 4 = 2\pi$$

- 6 $f(x)=a\cos\left(bx+\frac{\pi}{2}\right)+c$ 의 최댓값이 2, 최솟값이 -4
이고 $a < 0$ 이므로 $-a+c=2$, $a+c=-4$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $c=-1$
한편 주기가 $\frac{2}{3}\pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore b=3$$

따라서 $f(x)=-3\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)-1$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-3\cos\pi-1=-3\times(-1)-1=2$$

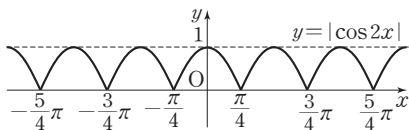
- 7 주어진 함수 $y=a\tan b\pi x$ 의 그래프에서 주기는
 $8-2=6$ 이고 $b > 0$ 이므로 $\frac{\pi}{b\pi}=6 \quad \therefore b=\frac{1}{6}$

이 함수의 그래프가 점 $(2, 3)$ 을 지나므로

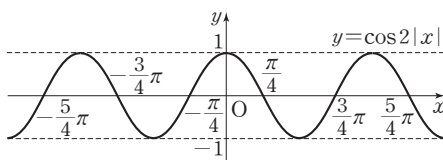
$$3=a\tan\left(\frac{\pi}{6}\times 2\right), 3=a\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}a \quad \therefore a=\sqrt{3}$$

$$\therefore a^2 \times b = (\sqrt{3})^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

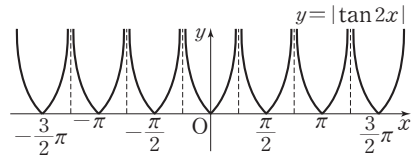
- 8 ㄱ. $y=|\cos 2x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주기
는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.



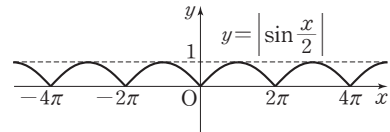
ㄴ. $y=\cos 2|x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주기
는 π 이다.



ㄷ. $y=|\tan 2x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주기
는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.



ㄹ. $y=\left|\sin \frac{x}{2}\right|$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주기
는 2π 이다.

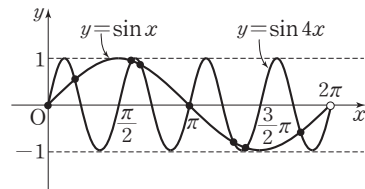


따라서 보기에서 주기가 같은 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

$$\begin{aligned} 9 \quad y &= \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left\{-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x \end{aligned}$$

함수 $y=\sin 4x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 두 함수 $y=\sin x$, $y=\sin 4x$ 의 그래프는
다음 그림과 같다.



따라서 두 곡선이 만나는 점의 개수는 8이다.

$$\begin{aligned} 10 \quad \cos \frac{32}{3}\pi &= \cos\left(2\pi \times 5 + \frac{2}{3}\pi\right) = \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ \sin \frac{41}{6}\pi &= \sin\left(2\pi \times 3 + \frac{5}{6}\pi\right) = \sin \frac{5}{6}\pi \\ &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \tan\left(-\frac{45}{4}\pi\right) &= -\tan \frac{45}{4}\pi = -\tan\left(2\pi \times 5 + \frac{5}{4}\pi\right) \\ &= -\tan \frac{5}{4}\pi = -\tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\tan \frac{\pi}{4} = -1 \\ \therefore \cos \frac{32}{3}\pi + \sin \frac{41}{6}\pi - \tan\left(-\frac{45}{4}\pi\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (-1) = 1 \end{aligned}$$

- 11 직각삼각형 ABC에서 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $2\alpha + 2\beta = \pi$

$$\begin{aligned}\therefore \sin(2\alpha + 3\beta) &= \sin(2\alpha + 2\beta + \beta) \\ &= \sin(\pi + \beta) \\ &= -\sin\beta = -\frac{4}{5}\end{aligned}$$

12 $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

$$= \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\sin x = \frac{3}{5}$ 이고 x 가 제1사분면의 각이므로

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{\frac{4}{5}}{1 + \frac{3}{5}} + \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{5}{2}$$

다른 풀이

$\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned}\frac{\cos x(1 - \sin x) + \cos x(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\ &= \frac{2\cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{2\cos x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{2}{\cos x} = \frac{2}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

- 13 $\theta = 15^\circ$ 이므로

$$\tan 5\theta = \tan 75^\circ = \tan(90^\circ - 15^\circ) = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\tan 4\theta = \tan 60^\circ = \tan(90^\circ - 30^\circ) = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\tan 2\theta}$$

$$\tan 3\theta = \tan 45^\circ = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore \log_3 \tan \theta + \log_3 \tan 2\theta + \log_3 \tan 3\theta \\ &\quad + \log_3 \tan 4\theta + \log_3 \tan 5\theta \\ &= \log_3 (\tan \theta \times \tan 2\theta \times \tan 3\theta \times \tan 4\theta \times \tan 5\theta) \\ &= \log_3 \left(\tan \theta \times \tan 2\theta \times 1 \times \frac{1}{\tan 2\theta} \times \frac{1}{\tan \theta} \right) \\ &= \log_3 1 = 0\end{aligned}$$

- 14 $\sin 89^\circ = \sin(90^\circ - 1^\circ) = \cos 1^\circ$

$$\sin 88^\circ = \sin(90^\circ - 2^\circ) = \cos 2^\circ$$

$$\sin 87^\circ = \sin(90^\circ - 3^\circ) = \cos 3^\circ$$

$\vdots$

$$\sin 41^\circ = \sin(90^\circ - 49^\circ) = \cos 49^\circ$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{\sin^2 41^\circ} + \frac{1}{\sin^2 42^\circ} + \frac{1}{\sin^2 43^\circ} + \dots + \frac{1}{\sin^2 89^\circ} \\ &\quad - (\tan^2 1^\circ + \tan^2 2^\circ + \tan^2 3^\circ + \dots + \tan^2 49^\circ) \\ &= \frac{1}{\cos^2 49^\circ} + \frac{1}{\cos^2 48^\circ} + \frac{1}{\cos^2 47^\circ} + \dots + \frac{1}{\cos^2 1^\circ} \\ &\quad - \left(\frac{\sin^2 1^\circ}{\cos^2 1^\circ} + \frac{\sin^2 2^\circ}{\cos^2 2^\circ} + \frac{\sin^2 3^\circ}{\cos^2 3^\circ} + \dots + \frac{\sin^2 49^\circ}{\cos^2 49^\circ} \right) \\ &= \frac{1 - \sin^2 49^\circ}{\cos^2 49^\circ} + \frac{1 - \sin^2 48^\circ}{\cos^2 48^\circ} + \frac{1 - \sin^2 47^\circ}{\cos^2 47^\circ} \\ &\quad + \dots + \frac{1 - \sin^2 1^\circ}{\cos^2 1^\circ} \\ &= \frac{\cos^2 49^\circ}{\cos^2 49^\circ} + \frac{\cos^2 48^\circ}{\cos^2 48^\circ} + \frac{\cos^2 47^\circ}{\cos^2 47^\circ} + \dots + \frac{\cos^2 1^\circ}{\cos^2 1^\circ} = 49\end{aligned}$$

- 15 $y = a \cos(x + \pi) - 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + b$

$$= -a \cos x - 2 \cos x + b$$

$$= -(a + 2) \cos x + b$$

$a > 0$ 이고 최댓값이 1, 최솟값이 -5이므로

$$(\text{최댓값}) = a + 2 + b = 1$$

$$\therefore a + b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(\text{최솟값}) = -(a + 2) + b = -5$$

$$\therefore a - b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = -2 \quad \therefore ab = -2$$

- 16 $\sin 2x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = |t + 2| + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

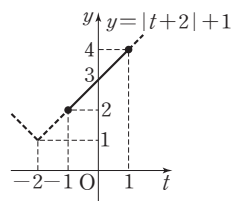
따라서 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 $\textcircled{1}$ 의 그

래프는 오른쪽 그림과 같다.

$$t = 1 \text{ 일 때, } M = 4$$

$$t = -1 \text{ 일 때, } m = 2$$

$$\therefore M + m = 6$$



다른 풀이

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1 \text{ 이므로}$$

$$1 \leq \sin 2x + 2 \leq 3, 1 \leq |\sin 2x + 2| \leq 3$$

$$\therefore 2 \leq |\sin 2x + 2| + 1 \leq 4$$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 2이다.

$$\therefore M + m = 4 + 2 = 6$$

- 17 $\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = \frac{4t + 4}{t + 3} = -\frac{8}{t + 3} + 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

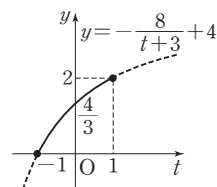
따라서 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 $\textcircled{1}$ 의 그

래프는 오른쪽 그림과 같다.

$$t = 1 \text{ 일 때, } M = 2$$

$$t = -1 \text{ 일 때, } m = 0$$

$$\therefore M - m = 2$$



다른 풀이

주어진 함수를 변형하면 $y = \frac{-8}{\sin x + 3} + 4$

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{\sin x + 3} \leq \frac{1}{2}$

$-4 \leq \frac{-8}{\sin x + 3} \leq -2 \quad \therefore 0 \leq \frac{-8}{\sin x + 3} + 4 \leq 2$

따라서 최댓값은 2, 최솟값은 0이다.

$\therefore M - m = 2 - 0 = 2$

$$\begin{aligned} 18 \quad y &= 3\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos^2 x + 6\sin(x + \pi) + 5 \\ &= 3\cos^2 x - 4\cos^2 x - 6\sin x + 5 \\ &= -\cos^2 x - 6\sin x + 5 \\ &= -(1 - \sin^2 x) - 6\sin x + 5 \\ &= \sin^2 x - 6\sin x + 4 \end{aligned}$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$0 \leq t \leq 1$ 이고

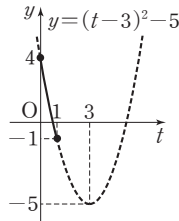
$$y = t^2 - 6t + 4 = (t - 3)^2 - 5 \quad \dots\dots ㉠$$

따라서 $0 \leq t \leq 1$ 에서 ㉠의 그래프는
오른쪽 그림과 같으므로 $t = 1$ 일 때
최솟값은 -1 이다. $\therefore b = -1$

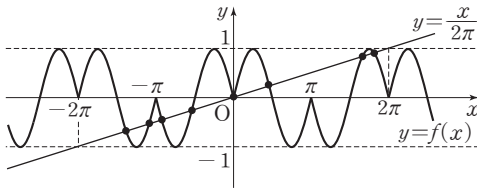
한편 $t = \sin x$ 이므로 $\sin x = 1$ 에서

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \left(\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{2} \quad \therefore ab = \frac{\pi}{2} \times (-1) = -\frac{\pi}{2}$$



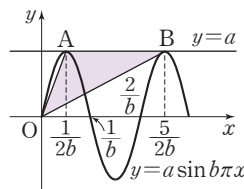
- 19 (나)에서 $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, $f(x) = \sin 2x$
(다)에서 $\pi < x \leq 2\pi$ 일 때, $f(x) = -\sin 2x$
(라)에서 함수 $f(x)$ 의 주기는 2π 이므로 함수 $y = f(x)$ 의
그래프와 직선 $y = \frac{x}{2\pi}$ 는 다음 그림과 같다.



이때 직선 $y = \frac{x}{2\pi}$ 가 두 점 $(2\pi, 1), (-2\pi, -1)$ 을 지

나므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{2\pi}$ 가 만나는
점의 개수는 8이다.

- 20 함수 $y = a \sin b\pi x$ 의 주기는
 $\frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{b}$ ($\because b > 0$)이고 최
댓값은 a 이므로 두 점 A, B
는 $A\left(\frac{1}{2b}, a\right), B\left(\frac{5}{2b}, a\right)$



$$\text{즉, } \overline{AB} = \frac{5}{2b} - \frac{1}{2b} = \frac{2}{b} \text{ 이므로}$$

삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{b} \times a = 5, \quad \frac{a}{b} = 5 \quad \therefore a = 5b \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{직선 OA의 기울기는 } \frac{a}{\frac{1}{2b}} = 2ab$$

$$\text{직선 OB의 기울기는 } \frac{a}{\frac{5}{2b}} = \frac{2ab}{5}$$

$$2ab \times \frac{2ab}{5} = \frac{5}{4}, \quad a^2 b^2 = \frac{25}{16}$$

$$\therefore ab = \frac{5}{4} \quad (\because a > 0, b > 0) \quad \dots\dots ㉢$$

㉡을 ㉢에 대입하면

$$5b^2 = \frac{5}{4}, \quad b^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore b = \frac{1}{2} \quad (\because b > 0)$$

$$\text{이를 ㉡에 대입하면 } a = \frac{5}{2}$$

$$\therefore a + b = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

$$21 \quad \angle P_1OA = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{16} \text{ 이므로 } \angle P_2OA = \frac{2}{16}\pi,$$

$$\angle P_3OA = \frac{3}{16}\pi, \dots, \angle P_7OA = \frac{7}{16}\pi$$

직각삼각형 P_1OQ_1 에서

$$\overline{P_1Q_1} = \overline{OP_1} \sin \frac{\pi}{16} = \sin \frac{\pi}{16}$$

같은 방법으로 하면

$$\overline{P_2Q_2} = \sin \frac{2}{16}\pi$$

$$\overline{P_3Q_3} = \sin \frac{3}{16}\pi$$

$$\overline{P_4Q_4} = \sin \frac{4}{16}\pi = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\overline{P_5Q_5} = \sin \frac{5}{16}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{16}\pi\right) = \cos \frac{3}{16}\pi$$

$$\overline{P_6Q_6} = \sin \frac{6}{16}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{16}\pi\right) = \cos \frac{2}{16}\pi$$

$$\overline{P_7Q_7} = \sin \frac{7}{16}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16}\right) = \cos \frac{\pi}{16}$$

$$\therefore \overline{P_1Q_1}^2 + \overline{P_2Q_2}^2 + \overline{P_3Q_3}^2 + \dots + \overline{P_7Q_7}^2$$

$$= \sin^2 \frac{\pi}{16} + \sin^2 \frac{2}{16}\pi + \sin^2 \frac{3}{16}\pi + \sin^2 \frac{\pi}{4}$$

$$+ \cos^2 \frac{3}{16}\pi + \cos^2 \frac{2}{16}\pi + \cos^2 \frac{\pi}{16}$$

$$= \left(\sin^2 \frac{\pi}{16} + \cos^2 \frac{\pi}{16}\right) + \left(\sin^2 \frac{2}{16}\pi + \cos^2 \frac{2}{16}\pi\right)$$

$$+ \left(\sin^2 \frac{3}{16}\pi + \cos^2 \frac{3}{16}\pi\right) + \sin^2 \frac{\pi}{4}$$

$$= 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

II-1 03 삼각함수의 그래프의 활용

삼각함수가 포함된 방정식과 부등식

문제

136~140쪽

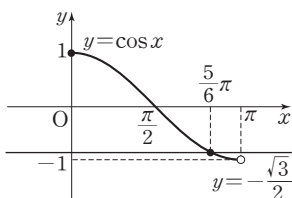
01-1 ㉡ (1) $x = \frac{5}{6}\pi$ (2) $x = \frac{2}{3}\pi$

(3) $x = \frac{\pi}{12}$ 또는 $x = \frac{5}{12}\pi$ (4) $x = \frac{5}{12}\pi$

(1) $2\cos x = -\sqrt{3}$ 에서 $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선

$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{5}{6}\pi$



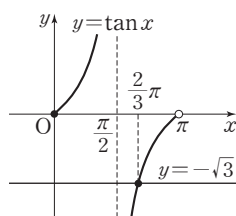
따라서 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{5}{6}\pi$

(2) $\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$ 에서 $\sqrt{3}\tan x = -3$

$\therefore \tan x = -\sqrt{3}$

$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선

$y = -\sqrt{3}$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{2}{3}\pi$



따라서 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{2}{3}\pi$

(3) $2x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < \pi$ 에서

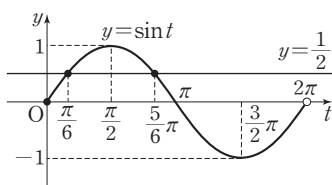
$0 \leq 2x < 2\pi \quad \therefore 0 \leq t < 2\pi$

이때 주어진 방정식은

$2\sin t - 1 = 0 \quad \therefore \sin t = \frac{1}{2}$

$0 \leq t < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin t$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$

의 교점의 t 좌표는 $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$



$t = 2x$ 이므로 $2x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $2x = \frac{5}{6}\pi$

$\therefore x = \frac{\pi}{12}$ 또는 $x = \frac{5}{12}\pi$

(4) $x - \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < \pi$ 에서

$-\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi$

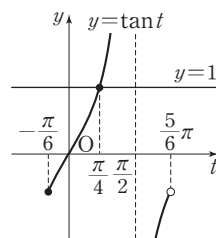
$\therefore -\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{5}{6}\pi$

이때 주어진 방정식은

$\tan t - 1 = 0 \quad \therefore \tan t = 1$

$-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{5}{6}\pi$ 에서 함수 $y = \tan t$ 의 그래프와 직선

$y = 1$ 의 교점의 t 좌표는 $\frac{\pi}{4}$



$t = x - \frac{\pi}{6}$ 이므로 $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$

$\therefore x = \frac{5}{12}\pi$

02-1 ㉡ $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

$2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$ 에서

$2(1 - \cos^2 x) - 5\cos x + 1 = 0$

$2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$

$(\cos x + 3)(2\cos x - 1) = 0$

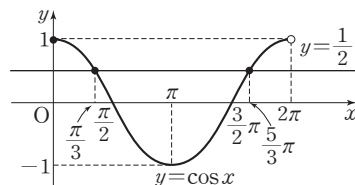
$\therefore \cos x = -3$ 또는 $\cos x = \frac{1}{2}$

그런데 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$\cos x = \frac{1}{2}$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의

교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$



따라서 주어진 방정식의 해는

$x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

02-2 ㉔ $x = \frac{\pi}{6}$

주어진 식의 양변에 $\tan x$ 를 곱하면

$$3\tan^2 x + 1 = 2\sqrt{3}\tan x$$

$$3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 1 = 0$$

$$(\sqrt{3}\tan x - 1)^2 = 0 \quad \therefore \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

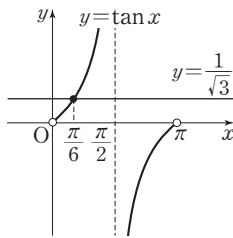
$0 < x < \pi$ 에서 함수 $y = \tan x$

의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 의

교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{6}$

따라서 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{6}$$



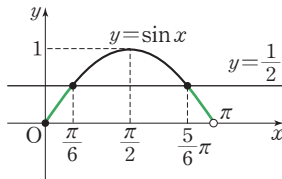
03-1 ㉔ (1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi \leq x < \pi$

$$(2) 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{11}{12}\pi < x < \pi$$

$$(1) 2\sin x \leq 1 \text{에서 } \sin x \leq \frac{1}{2}$$

$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$

의 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$



주어진 부등식의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$ 과 만나거나 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi \leq x < \pi$$

$$(2) x + \frac{\pi}{3} = t \text{로 놓으면 } 0 \leq x < \pi \text{에서}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} < \frac{4}{3}\pi \quad \therefore \frac{\pi}{3} \leq t < \frac{4}{3}\pi$$

이때 주어진 부등식은 $\tan t > 1$ ㉔

$\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{4}{3}\pi$ 에서 함수

$y = \tan t$ 의 그래프와 직선

$y = 1$ 의 교점의 t 좌표는

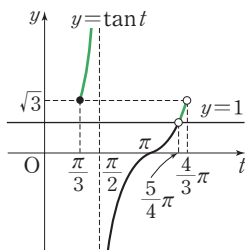
$$\frac{5}{4}\pi$$

부등식 ㉔의 해는 함수

$y = \tan t$ 의 그래프가 직선

$y = 1$ 보다 위쪽에 있는 t 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{5}{4}\pi < t < \frac{4}{3}\pi$$



$$t = x + \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{5}{4}\pi < x + \frac{\pi}{3} < \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{11}{12}\pi < x < \pi$$

04-1 ㉔ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$1 - \cos x \leq \sin^2 x \text{에서}$$

$$1 - \cos x \leq 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x - \cos x \leq 0$$

$$\cos x (\cos x - 1) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq \cos x \leq 1 \quad \dots\dots \text{㉔}$$

$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의

그래프와 두 직선 $y = 0, y = 1$ 의

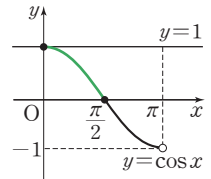
교점의 x 좌표는 $0, \frac{\pi}{2}$

부등식 ㉔의 해는 함수 $y = \cos x$

의 그래프가 직선 $y = 0$ 과 만나거나

나 위쪽에 있고, 직선 $y = 1$ 과 만나거나 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$



04-2 ㉔ $0 \leq x \leq \frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi \leq x < 2\pi$

$$2\cos^2 x - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \geq 0 \text{에서}$$

$$2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 \geq 0$$

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 \leq 0$$

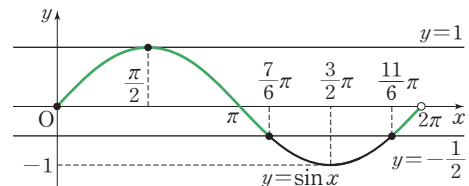
$$(2\sin x + 1)(\sin x - 1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1 \quad \dots\dots \text{㉔}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 두 직선

$y = -\frac{1}{2}, y = 1$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$



부등식 ㉔의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직선

$y = -\frac{1}{2}$ 과 만나거나 위쪽에 있고, 직선 $y = 1$ 과 만나거나

아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$0 \leq x \leq \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{11}{6}\pi \leq x < 2\pi$$

04-3 ㉔ $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$

$$\tan^2 x + (\sqrt{3} + 1)\tan x + \sqrt{3} > 0 \text{에서}$$

$$(\tan x + \sqrt{3})(\tan x + 1) > 0$$

$$\therefore \tan x < -\sqrt{3} \text{ 또는 } \tan x > -1 \quad \dots\dots ㉔$$

$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \tan x$

의 그래프와 두 직선 $y = -\sqrt{3}$,

$y = -1$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi$$

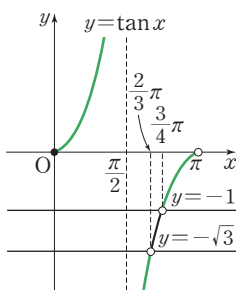
부등식 ㉔의 해는 함수

$y = \tan x$ 의 그래프가 직선

$y = -\sqrt{3}$ 보다 아래쪽에 있거

나 직선 $y = -1$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{4}\pi < x < \pi$$



$$2\cos^2 \theta - 3\sin \theta < 0, 2(1 - \sin^2 \theta) - 3\sin \theta < 0$$

$$2\sin^2 \theta + 3\sin \theta - 2 > 0, (\sin \theta + 2)(2\sin \theta - 1) > 0$$

이때 $\sin \theta + 2 > 0$ 이므로

$$2\sin \theta - 1 > 0 \quad \therefore \sin \theta > \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉔$$

$0 \leq \theta < \pi$ 에서 함수

$y = \sin \theta$ 의 그래프와 직선

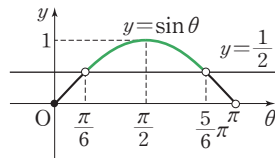
$y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 θ 좌표는

$$\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

부등식 ㉔의 해는 함수 $y = \sin \theta$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$

보다 위쪽에 있는 θ 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$$



05-1 ㉔ $\theta = \frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta = \frac{5}{3}\pi$

이차방정식 $x^2 - 2(2\cos \theta - 1)x + 8\cos \theta - 4 = 0$ 이 중근

을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, $D = 0$

이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (2\cos \theta - 1)^2 - (8\cos \theta - 4) = 0$$

$$4\cos^2 \theta - 12\cos \theta + 5 = 0$$

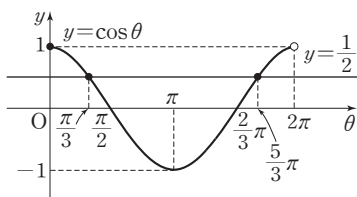
$$(2\cos \theta - 1)(2\cos \theta - 5) = 0$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos \theta = \frac{5}{2}$$

이때 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ 이므로 $\cos \theta = \frac{1}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos \theta$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의

교점의 θ 좌표는 $\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$



따라서 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta = \frac{5}{3}\pi$

05-2 ㉔ $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차

방정식 $3x^2 - 2\sqrt{2}x \cos \theta + \sin \theta = 0$ 의 판별식을 D 라 할

때, $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (\sqrt{2}\cos \theta)^2 - 3\sin \theta < 0$$

연습문제

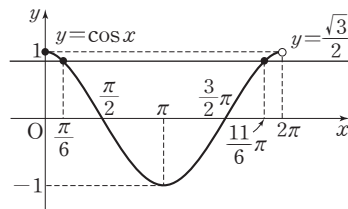
141~142쪽

- | | | | | |
|-------------------------|--------------------|--|--------------------|---------------------|
| 1 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 2 $\frac{5}{6}\pi$ | 3 ㉔ | 4 $\frac{3}{2}\pi$ | 5 $\frac{1}{3}$ |
| 6 7 | 7 $-\frac{1}{3}$ | 8 0 | 9 ㉔ | 10 $\frac{5}{6}\pi$ |
| 11 $\frac{\pi}{3}$ | 12 ㉔ | 13 $\frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi$ | 14 ㉔ | |
| 15 ㉔ | 16 17 | | | |

1 $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ 에서 $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

의 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi$



따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{11}{6}\pi$ 이므로

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin\left(\frac{11}{6}\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{5}{3}\pi$$

$$= \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 $2x - \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < \pi$ 에서 $0 \leq 2x < 2\pi$

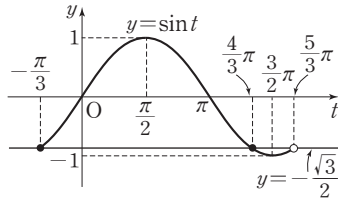
$$-\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi \quad \therefore -\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5}{3}\pi$$

이때 주어진 방정식은

$$2\sin t + \sqrt{3} = 0 \quad \therefore \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5}{3}\pi$ 에서 함수 $y = \sin t$ 의 그래프와 직선

$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 t 좌표는 $-\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$



$t = 2x - \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

따라서 모든 근의 합은 $\frac{5}{6}\pi$ 이다.

3 $4\sin^2 x - 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3 = 0$ 에서

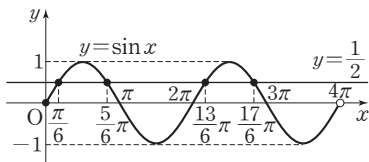
$$4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0, (2\sin x + 3)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $\sin x = \frac{1}{2}$

$0 \leq x < 4\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의

교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi$



따라서 모든 해의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi + \frac{13}{6}\pi + \frac{17}{6}\pi = 6\pi$$

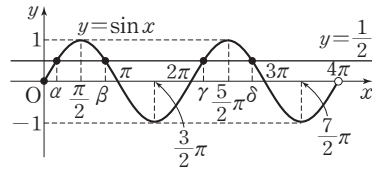
다른 풀이 삼각함수의 그래프의 대칭성 이용

함수 $y = \sin x$ 의 그래프는 두 직선 $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{5}{2}\pi$ 에 대

하여 각각 대칭이므로 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표를 작은 것부터 차례대로 $\alpha, \beta, \gamma,$

δ 라 하면 다음 그림과 같다.



$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{\gamma + \delta}{2} = \frac{5}{2}\pi$$

$$\alpha + \beta = \pi, \gamma + \delta = 5\pi$$

따라서 모든 해의 합은

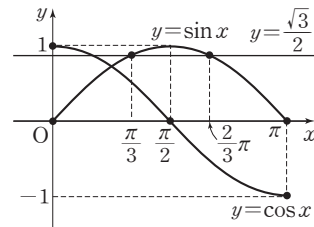
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 6\pi$$

4 $(\sin x + \cos x)^2 = \sqrt{3}\cos x + 1$ 에서

$$1 + 2\sin x \cos x = \sqrt{3}\cos x + 1$$

$$\cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \cos x = 0 \text{ 또는 } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



(i) $0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = 0$ 의

교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{2}$

(ii) $0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$

따라서 모든 근의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

5 $3\sin^2 \frac{A}{2} - 5\cos \frac{A}{2} = 1$ 에서

$$3\left(1 - \cos^2 \frac{A}{2}\right) - 5\cos \frac{A}{2} = 1$$

$$3\cos^2 \frac{A}{2} + 5\cos \frac{A}{2} - 2 = 0$$

$$\left(\cos \frac{A}{2} + 2\right)\left(3\cos \frac{A}{2} - 1\right) = 0$$

$$\therefore \cos \frac{A}{2} = -2 \text{ 또는 } \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{3}$$

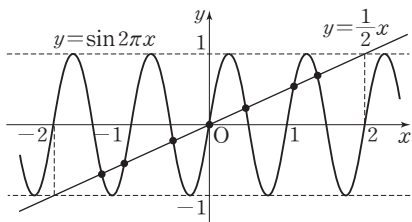
이때 $0 < \cos \frac{A}{2} < 1$ ($\because 0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$)이므로 $\cos \frac{A}{2} = \frac{1}{3}$

따라서 $A + B + C = \pi$ 이므로

$$\sin \frac{B+C}{2} = \sin \frac{\pi-A}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)$$

$$= \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{3}$$

- 6 방정식 $\sin 2\pi x = \frac{1}{2}x$ 의 실근은 함수 $y = \sin 2\pi x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 의 교점의 x 좌표와 같다.



위의 그림에서 함수 $y = \sin 2\pi x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 의 교점의 개수는 7이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 7이다.

- 7 $y = \sin x$ 의 그래프는 두 직선 $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3}{2}\pi$ 에 대하여 대칭이므로 $\frac{a+b}{2} = -\frac{\pi}{2}$, $\frac{c+d}{2} = \frac{3}{2}\pi$
 $a+b = -\pi$, $c+d = 3\pi$
 $\therefore \frac{a+b}{c+d} = \frac{-\pi}{3\pi} = -\frac{1}{3}$

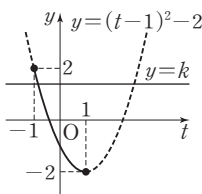
- 8 $\sin^2 x + 2\cos x + k = 0$ 에서 $1 - \cos^2 x + 2\cos x + k = 0$
 $\therefore \cos^2 x - 2\cos x - 1 = k$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y = \cos^2 x - 2\cos x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점이 존재해야 한다.

$y = \cos^2 x - 2\cos x - 1$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면
 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 $y = t^2 - 2t - 1 = (t-1)^2 - 2$

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 가지려면
 $-2 \leq k \leq 2$

따라서 $M=2$, $m=-2$ 이므로
 $M+m=0$



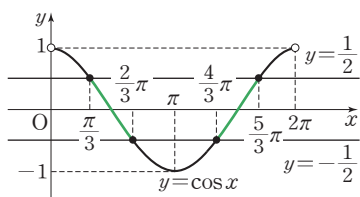
- 9 $|2\cos x| \leq 1$ 에서 $-1 \leq 2\cos x \leq 1$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 두 직선

$y = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$



따라서 위의 그림에서 부등식 $\textcircled{7}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \quad \text{또는} \quad \frac{4}{3}\pi \leq x \leq \frac{5}{3}\pi$$

- 10 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin \alpha + \cos \beta \geq 1$ 에서

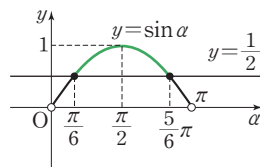
$$\sin \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \geq 1$$

$$2\sin \alpha \geq 1 \quad \therefore \sin \alpha \geq \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$0 < \alpha < \pi$ 에서 함수 $y = \sin \alpha$

의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의

교점의 α 좌표는 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$



따라서 오른쪽 그림에서 부

등식 $\textcircled{7}$ 의 해는 $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{5}{6}\pi$ 이므로 실수 α 의 최댓값은 $\frac{5}{6}\pi$ 이다.

- 11 $2\sin^2 x - \cos x - 1 < 0$ 에서

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 < 0$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 > 0, (\cos x + 1)(2\cos x - 1) > 0$$

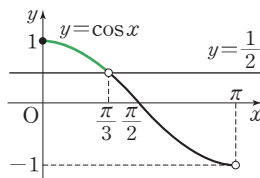
이때 $0 \leq x < \pi$ 에서 $\cos x + 1 > 0$ 이므로

$$2\cos x - 1 > 0 \quad \therefore \cos x > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \cos x$

의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의

교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{3}$



따라서 오른쪽 그림에서 부

등식 $\textcircled{7}$ 의 해는 $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{3}$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$$

- 12 이차방정식 $6x^2 + (4\cos \theta)x + \sin \theta = 0$ 이 실근을 갖지 않으려면 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 4\cos^2 \theta - 6\sin \theta < 0$$

$$2\cos^2 \theta - 3\sin \theta < 0, 2(1 - \sin^2 \theta) - 3\sin \theta < 0$$

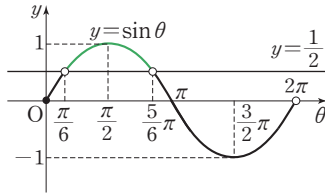
$$2\sin^2 \theta + 3\sin \theta - 2 > 0, (\sin \theta + 2)(2\sin \theta - 1) > 0$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 $\sin \theta + 2 > 0$ 이므로

$$2\sin \theta - 1 > 0 \quad \therefore \sin \theta > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin \theta$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의

교점의 θ 좌표는 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$

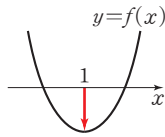


따라서 위의 그림에서 부등식 ㉠의 해는 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}\pi$

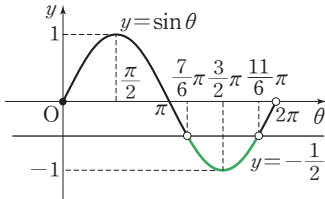
$$\text{므로 } \alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore 3\alpha + \beta = \frac{4}{3}\pi$$

- 13** $f(x) = 2x^2 + 6x \sin \theta + 1$ 이라 할 때,
방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근 사이에 1이
있으려면 $f(1) < 0$ 이어야 하므로
 $2 + 6 \sin \theta + 1 < 0$



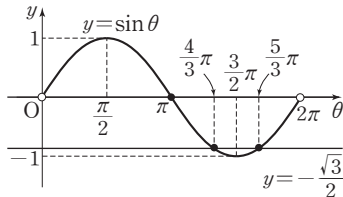
$$6 \sin \theta < -3 \quad \therefore \sin \theta < -\frac{1}{2}$$



위의 그림에서 θ 의 값의 범위는

$$\frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi$$

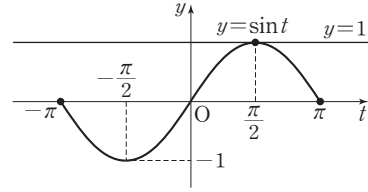
- 14** $y = x^2 - 2x \sin \theta + \cos^2 \theta$
 $= (x - \sin \theta)^2 - \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$
 이므로 꼭짓점의 좌표는 $(\sin \theta, -\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$
 이 점이 직선 $y = \sqrt{3}x + 1$ 위에 있으려면
 $-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \sqrt{3} \sin \theta + 1$
 $-\sin^2 \theta + (1 - \sin^2 \theta) = \sqrt{3} \sin \theta + 1$
 $2 \sin^2 \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 0, \sin \theta (2 \sin \theta + \sqrt{3}) = 0$
 $\therefore \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\sin \theta = 0$
 $0 < \theta < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin \theta$ 의 그래프와 두 직선
 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}, y = 0$ 의 교점의 θ 좌표는 $\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$



따라서 $x_1 = \pi, x_2 = \frac{4}{3}\pi, x_3 = \frac{5}{3}\pi$ 이므로

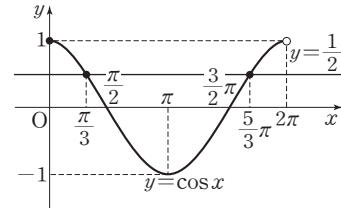
$$x_1 + 3(x_3 - x_2) = \pi + 3\left(\frac{5}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi\right) = 2\pi$$

- 15** $\pi \cos x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이
 므로 $-\pi \leq t \leq \pi$ 이고 주어진 방정식은 $\sin t = 1$
 $-\pi \leq t \leq \pi$ 에서 함수 $y = \sin t$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의
 교점의 t 좌표는 $\frac{\pi}{2}$



$$\text{즉, } \pi \cos x = \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \cos x = \frac{1}{2}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의
 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$



따라서 두 근의 차는

$$\frac{5}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

- 16** $\log_{(b+3)} f(x)$ 가 정의되려면

(i) (밑) > 0 , (밑) $\neq 1$ 이어야 하므로

$$b+3 > 0, b+3 \neq 1 \quad \therefore b > -3, b \neq -2$$

$$\therefore -3 < b < -2 \text{ 또는 } b > -2$$

(ii) (진수) > 0 이어야 하므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = -\cos^2 x - 3 \sin x + a > 0$$

$$-(1 - \sin^2 x) - 3 \sin x + a > 0$$

$$\therefore \sin^2 x - 3 \sin x + a - 1 > 0$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 부등식은

$$t^2 - 3t + a - 1 > 0$$

$$f(t) = t^2 - 3t + a - 1 \text{이라 하면}$$

$$f(t) = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + a - \frac{13}{4}$$

$$-1 \leq t \leq 1 \text{에서 } f(t) \text{의 최솟값은 } f(1) = a - 3$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립하려면

$$a - 3 > 0 \quad \therefore a > 3$$

(i), (ii)에서 a 의 최솟값은 4, b 의 최솟값은 -1 이므로

$$p = 4, q = -1$$

$$\text{따라서 } p^2 + q^2 = 4^2 + (-1)^2 = 17$$

II-2 01 사인법칙과 코사인법칙

Ⅰ 사인법칙

문제

145~148쪽

01-1 [답] (1) $\sqrt{6}$ (2) $B=30^\circ, C=30^\circ$

(1) 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 이므로

$$\frac{3}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}, 3 \sin 45^\circ = b \sin 60^\circ$$

$$3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = b \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore b = \sqrt{6}$$

(2) 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = \frac{1}{\sin B}, \sqrt{3} \sin B = \sin 120^\circ$$

$$\sqrt{3} \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \sin B = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B=30^\circ$ 또는 $B=150^\circ$

그런데 $B=150^\circ$ 이면 $A+B > 180^\circ$ 이므로 $B=30^\circ$

$$\therefore C = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$$

01-2 [답] $10\sqrt{2}$

$A+C=180^\circ$ 이므로 사각형 ABCD는 원에 내접한다.

즉, 삼각형 ACD의 외접원의 지름의 길이가 20이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 135^\circ} = 20, \frac{\overline{AC}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 20$$

$$\therefore \overline{AC} = 10\sqrt{2}$$

02-1 [답] 4 : 10 : 5

사인법칙에 의하여 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

이므로 $a : b : c = 2 : 4 : 5$

따라서 $a=2k, b=4k, c=5k (k>0)$ 로 놓으면

$$ab=8k^2, bc=20k^2, ca=10k^2$$

$$\therefore ab : bc : ca = 8k^2 : 20k^2 : 10k^2 = 4 : 10 : 5$$

02-2 [답] 3

$A+B+C=180^\circ$ 이고 $A : B : C = 1 : 1 : 4$ 이므로

$$A = 180^\circ \times \frac{1}{6} = 30^\circ, B = 180^\circ \times \frac{1}{6} = 30^\circ,$$

$$C = 180^\circ \times \frac{4}{6} = 120^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin A : \sin B : \sin C &= \sin 30^\circ : \sin 30^\circ : \sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 : 1 : \sqrt{3} \end{aligned}$$

사인법칙에 의하여 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

이므로 $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{3}$

따라서 $a=k, b=k, c=\sqrt{3}k (k>0)$ 로 놓으면

$$\frac{c^2}{ab} = \frac{(\sqrt{3}k)^2}{k \times k} = 3$$

02-3 [답] 15

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$a=2R \sin A, b=2R \sin B, c=2R \sin C$$

$$\therefore a+b+c=2R \sin A+2R \sin B+2R \sin C$$

$$=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$=2 \times 5 \times \frac{3}{2} = 15$$

03-1 [답] $A=90^\circ$ 인 직각삼각형

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$ 에 대입하면

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2, \frac{a^2}{4R^2} = \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2}$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

03-2 [답] $a=b$ 인 이등변삼각형

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}$$

이를 $a \sin A = b \sin B$ 에 대입하면

$$a \times \frac{a}{2R} = b \times \frac{b}{2R}$$

$$a^2 = b^2 \quad \therefore a = b (\because a > 0, b > 0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

03-3 [답] $\frac{ab}{2}$

$$A+B+C=\pi \text{ 이므로 } A+B=\pi-C$$

$$a \cos\left(\frac{\pi}{2}+A\right) + c \sin(A+B) = \frac{b^2}{2R} \text{에서}$$

$$a \cos\left(\frac{\pi}{2}+A\right) + c \sin(\pi-C) = \frac{b^2}{2R}$$

$$-a \sin A + c \sin C = \frac{b^2}{2R}$$

사인법칙에 의하여 $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$ 이므로

$$-a \times \frac{a}{2R} + c \times \frac{c}{2R} = \frac{b^2}{2R}$$

$$-a^2 + c^2 = b^2 \quad \therefore c^2 = a^2 + b^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 구하

는 넓이는 $\frac{ab}{2}$ 이다.

04-1 ㉡ $30\sqrt{2}\pi$ m

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$A=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인 법칙에 의하여

$$\frac{30}{\sin 45^\circ}=2R, \frac{30}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R \quad \therefore R=15\sqrt{2}(\text{m})$$

따라서 호수의 둘레의 길이는

$$2 \times \pi \times 15\sqrt{2}=30\sqrt{2}\pi(\text{m})$$

04-2 ㉡ $8\sqrt{2}$ m

삼각형 ABQ에서 $A+B+Q=180^\circ$ 이므로

$$\angle AQB=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$$

삼각형 ABQ에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{24}{\sin 60^\circ}=\frac{\overline{AQ}}{\sin 45^\circ}, 24 \sin 45^\circ=\overline{AQ} \sin 60^\circ$$

$$24 \times \frac{\sqrt{2}}{2}=\overline{AQ} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \overline{AQ}=8\sqrt{6}(\text{m})$$

삼각형 APQ에서 $\angle PQA=90^\circ$ 이므로

$$\overline{PQ}=\overline{AQ} \tan 30^\circ=8\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{3}=8\sqrt{2}(\text{m})$$

따라서 나무의 높이 $\overline{PQ}$ 는 $8\sqrt{2}$ m이다.

2 코사인법칙

문제

150~153쪽

05-1 ㉡ (1) $2\sqrt{7}$ (2) 30°

(1) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \cos 60^\circ \\ &= 36 + 16 - 24 = 28 \end{aligned}$$

$$\therefore a=2\sqrt{7} \quad (\because a>0)$$

(2) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ &= (\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{2} \times (1+\sqrt{3}) \times \cos 45^\circ \\ &= 2 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2(1+\sqrt{3}) = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore c=2 \quad (\because c>0)$$

또 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin A}=\frac{2}{\sin 45^\circ}, \sqrt{2} \sin 45^\circ=2 \sin A$$

$$\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}=2 \sin A \quad \therefore \sin A=\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A=30^\circ$ 또는 $A=150^\circ$

그런데 $A=150^\circ$ 이면 $A+C > 180^\circ$ 이므로 $A=30^\circ$

05-2 ㉡ 7π

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ &= (\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 4 \times \cos 30^\circ \\ &= 3 + 16 - 12 = 7 \end{aligned}$$

$$\therefore b=\sqrt{7} \quad (\because b>0)$$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하

면 사인법칙에 의하여 $\frac{b}{\sin B}=2R$ 이므로

$$\frac{\sqrt{7}}{\sin 30^\circ}=2R, \frac{\sqrt{7}}{\frac{1}{2}}=2R \quad \therefore R=\sqrt{7}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{7})^2=7\pi$$

06-1 ㉡ 150°

삼각형에서 길이가 가장 긴 변의 대각이 세 내각 중 크기가 가장 크므로 가장 큰 각의 크기는 C 이다.

코사인법칙에 의하여 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 이므로

$$\cos C=\frac{2^2+(2\sqrt{3})^2-(2\sqrt{7})^2}{2 \times 2 \times 2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C=150^\circ$

06-2 ㉡ $-\frac{1}{4}$

사인법칙에 의하여 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ 이

므로 $a:b:c=2:3:4$

따라서 $a=2k, b=3k, c=4k(k>0)$ 로 놓으면 코사인

법칙에 의하여 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 이므로

$$\cos C=\frac{(2k)^2+(3k)^2-(4k)^2}{2 \times 2k \times 3k}=-\frac{1}{4}$$

06-3 ㉡ $\frac{8\sqrt{7}}{7}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{4^2+7^2-5^2}{2 \times 4 \times 7}=\frac{5}{7}$$

따라서 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 &= 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \cos B \\ &= 16 + 16 - 2 \times 4 \times 4 \times \frac{5}{7} = \frac{64}{7} \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AD}=\frac{8\sqrt{7}}{7} \quad (\because \overline{AD}>0)$$

07-1 ㉞ $A=90^\circ$ 인 직각삼각형

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이를 $a \cos B - b \cos A = c$ 에 대입하면

$$a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} - b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = c$$

$$c^2 + a^2 - b^2 - (b^2 + c^2 - a^2) = 2c^2$$

$$2a^2 - 2b^2 = 2c^2 \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

07-2 ㉞ $a=c$ 인 이등변삼각형

$$\tan A \cos C = \sin C \text{에서 } \frac{\sin A}{\cos A} \times \cos C = \sin C$$

$$\therefore \sin A \cos C = \sin C \cos A \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}, \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이를 ㉞에 대입하면

$$\frac{a}{2R} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{c}{2R} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = b^2 + c^2 - a^2, 2a^2 = 2c^2$$

$$a^2 = c^2 \quad \therefore a = c \quad (\because a > 0, c > 0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

다른 풀이

$0^\circ < C < 180^\circ$ 에서 $\cos C = 0$ 일 때, $\sin C = 1$ 이므로

$\tan A \cos C \neq \sin C$, 즉 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore \cos C \neq 0$$

$\tan A \cos C = \sin C$ 에서

$$\tan A = \frac{\sin C}{\cos C}, \tan A = \tan C$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ, 0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $A = C$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

07-3 ㉞ $B=90^\circ$ 인 직각삼각형

$$A + B + C = \pi \text{이므로 } A + B = \pi - C$$

$$\sin(A + B) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \sin B \text{에서}$$

$$\sin(\pi - C) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \sin B$$

$$\therefore \sin C = \cos A \sin B \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}, \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

이를 ㉞에 대입하면

$$\frac{c}{2R} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \frac{b}{2R}$$

$$2c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \quad \therefore b^2 = a^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

08-1 ㉞ $20\sqrt{91}$ m

삼각형 ACB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = 120^2 + 100^2 - 2 \times 120 \times 100 \times \cos 120^\circ$$

$$= 14400 + 10000 + 12000 = 36400$$

$$\therefore \overline{AB} = 20\sqrt{91}(\text{m}) \quad (\because \overline{AB} > 0)$$

따라서 두 나무 A, B 사이의 거리는 $20\sqrt{91}$ m이다.

08-2 ㉞ $10\sqrt{21}$ m

삼각형 ABC에서 $\angle CAB = 90^\circ$ 이므로

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{\cos 30^\circ} = \frac{60}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 40\sqrt{3}(\text{m})$$

삼각형 ABD에서

$$\angle BDA = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ \text{이므로}$$

$$\overline{BD} = \overline{AB} \sin 30^\circ = 60 \times \frac{1}{2} = 30(\text{m})$$

삼각형 CBD에서 $\angle CBD = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2 = (40\sqrt{3})^2 + 30^2 - 2 \times 40\sqrt{3} \times 30 \times \cos 30^\circ$$

$$= 4800 + 900 - 3600 = 2100$$

$$\therefore \overline{CD} = 10\sqrt{21}(\text{m}) \quad (\because \overline{CD} > 0)$$

따라서 두 지점 C, D 사이의 거리는 $10\sqrt{21}$ m이다.

3 삼각형의 넓이

개념 Check

155쪽

1 ㉞ (1) $33\sqrt{3}$ (2) $3\sqrt{2}$

$$(1) \frac{1}{2} \times 11 \times 12 \times \sin 60^\circ = 33\sqrt{3}$$

$$(2) \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin 135^\circ = 3\sqrt{2}$$

2 ㉞ (1) $3\sqrt{3}$ (2) $24\sqrt{2}$

$$(1) 2 \times 3 \times \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$$

$$(2) \overline{CD} = \overline{AB} = 6 \text{이므로 } 6 \times 8 \times \sin 135^\circ = 24\sqrt{2}$$

3 ㉞ (1) 9 (2) $5\sqrt{3}$

$$(1) \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 30^\circ = 9$$

$$(2) \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin 120^\circ = 5\sqrt{3}$$

09-1 ㉔ (1) 60° 또는 120° (2) $2\sqrt{2}$ (1) 삼각형 ABC의 넓이가 $3\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \sin A = 3\sqrt{3} \quad \therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$A = 60^\circ \text{ 또는 } A = 120^\circ$$

(2) 삼각형 ABC의 넓이가 8이므로

$$\frac{1}{2} \times 8 \times c \times \sin 135^\circ = 8$$

$$\frac{1}{2} \times 8 \times c \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 8 \quad \therefore c = 2\sqrt{2}$$

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 &= 8^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 8 \times 2\sqrt{2} \times \cos 135^\circ \\ &= 64 + 8 + 32 = 104 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2\sqrt{26} \quad (\because a > 0)$$

09-2 ㉔ $5\sqrt{2}$ $\cos B = \frac{1}{3}$ 이고 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \sin B = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 5\sqrt{2}$$

09-3 ㉔ $\frac{12}{5}$ $\overline{AD} = x$ ($x > 0$)라 하면 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times x \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 4 \times x \times \sin 60^\circ$$

$$6\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}x, \quad 6\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}x \quad \therefore x = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \overline{AD} = \frac{12}{5}$$

10-1 ㉔ (1) $30\sqrt{2}$ (2) $\frac{33\sqrt{2}}{8}$ (1) 코사인법칙에 의하여 $\cos C = \frac{9^2 + 10^2 - 11^2}{2 \times 9 \times 10} = \frac{1}{3}$ 이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 10 \times \sin C = \frac{1}{2} \times 9 \times 10 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 30\sqrt{2}$$

(2) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{abc}{4R}$ 이므로

$$30\sqrt{2} = \frac{9 \times 10 \times 11}{4R} \quad \therefore R = \frac{33\sqrt{2}}{8}$$

다른 풀이

(1) 헤론의 공식을 이용하면

$$s = \frac{9 + 10 + 11}{2} = 15 \text{이므로}$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\sqrt{15 \times (15 - 9) \times (15 - 10) \times (15 - 11)} = 30\sqrt{2}$$

10-2 ㉔ 4

코사인법칙에 의하여 $\cos C = \frac{13^2 + 14^2 - 15^2}{2 \times 13 \times 14} = \frac{5}{13}$ 이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 13 \times 14 \times \frac{12}{13} = 84$$

이때 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}r(a+b+c)$ 이므로

$$84 = \frac{1}{2}r(13 + 14 + 15) \quad \therefore r = 4$$

11-1 ㉔ $7 + 6\sqrt{3}$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 \times \sin 30^\circ = 7$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{3^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 8} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \triangle BCD = \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \sin C$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD = 7 + 6\sqrt{3}$$

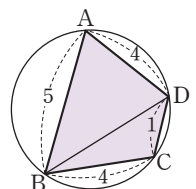
11-2 ㉔ $6\sqrt{3}$ 사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $A + C = 180^\circ$

$$\therefore C = 180^\circ - A$$

오른쪽 그림과 같이 선분 BD를 그

으면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos A \\ &= 41 - 40 \cos A \end{aligned}$$



삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 4^2 + 1^2 - 2 \times 4 \times 1 \times \cos(180^\circ - A) = 17 + 8 \cos A$$

즉, $41 - 40 \cos A = 17 + 8 \cos A$ 이므로

$$48 \cos A = 24 \quad \therefore \cos A = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because 0^\circ < A < 180^\circ)$$

$$\therefore \square ABCD$$

$$= \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \sin A + \frac{1}{2} \times 4 \times 1 \times \sin(180^\circ - A)$$

$$= 10 \sin A + 2 \sin A = 12 \sin A$$

$$= 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

12-1 ㉡ (1) 60° 또는 120° (2) 6

(1) 평행사변형 ABCD에서 $\overline{AD} = \overline{BC} = 2\sqrt{3}$

평행사변형 ABCD의 넓이가 6이므로

$$2\sqrt{3} \times 2 \times \sin A = 6 \quad \therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 60^\circ$ 또는 $A = 120^\circ$

(2) 사각형 ABCD의 넓이가 $9\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times x \times \sin 45^\circ = 9\sqrt{2}$$

$$3x \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2} \quad \therefore x = 6$$

12-2 ㉡ $18\sqrt{2}$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 \times \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 9 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 18\sqrt{2}$$

연습문제

161~164쪽

- | | | | | |
|-------------------------|----------------------------|--|------|------------------|
| 1 90° | 2 ⑤ | 3 $\frac{12}{5}$ | 4 ① | 5 정삼각형 |
| 6 35.6 m | 7 $2\sqrt{6}$ | 8 ② | 9 ④ | 10 $\frac{3}{5}$ |
| 11 41 | 12 ④ | 13 120 m | 14 ③ | 15 ② |
| 16 $\sqrt{3}$ | 17 $\frac{11\sqrt{3}}{12}$ | 18 $\frac{41\sqrt{3}}{2}$ m ² | 19 ③ | |
| 20 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 21 $2\sqrt{7}$ | 22 ② | 23 ③ | 24 $\sqrt{10}$ |
| 25 $7\sqrt{3}$ | | | | |

1 사인법칙에 의하여

$$\frac{8}{\sin C} = 2 \times 8 \quad \therefore \sin C = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 30^\circ$ 또는 $C = 150^\circ$

그런데 $C = 150^\circ$ 이면 $A + C > 180^\circ$ 이므로 $C = 30^\circ$

$$\therefore B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$$

2 $B + C = 180^\circ - A$ 이므로

$$4 \cos(B + C) \cos A = -1 \text{ 에서}$$

$$4 \cos(180^\circ - A) \cos A = -1, 4(-\cos A) \cos A = -1$$

$$-4 \cos^2 A = -1 \quad \therefore \cos^2 A = \frac{1}{4}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

외접원의 반지름의 길이가 4이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2 \times 4, \frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8 \quad \therefore \overline{BC} = 4\sqrt{3}$$

3 $ab : bc : ca = 5 : 6 : 10$ 에서

$ab = 5k, bc = 6k, ca = 10k (k > 0)$ 로 놓으면

$$(abc)^2 = 5k \times 6k \times 10k = 300k^3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $(ab)^2 = 25k^2$ 이므로

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $c^2 = 12k$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라

하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sin^2 C}{\sin A \sin B} = \frac{\left(\frac{c}{2R}\right)^2}{\frac{a}{2R} \times \frac{b}{2R}} = \frac{c^2}{ab} = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$$

4 $A + B = 180^\circ - C$

외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{a}{8}, \sin B = \frac{b}{2R} = \frac{b}{8}, \sin C = \frac{c}{2R} = \frac{c}{8}$$

$$\therefore \sin A + \sin B + \sin(A + B)$$

$$= \sin A + \sin B + \sin(180^\circ - C)$$

$$= \sin A + \sin B + \sin C$$

$$= \frac{a}{8} + \frac{b}{8} + \frac{c}{8} = \frac{a+b+c}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

5 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 $a \sin A = b \sin B = c \sin C$ 에 대입하면

$$a \times \frac{a}{2R} = b \times \frac{b}{2R} = c \times \frac{c}{2R}, a^2 = b^2 = c^2$$

$$\therefore a = b = c \quad (\because a > 0, b > 0, c > 0)$$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

6 $\angle BCA = 43^\circ - 14^\circ = 29^\circ$

삼각형 CAB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 14^\circ} = \frac{100}{\sin 29^\circ}, \overline{BC} \sin 29^\circ = 100 \sin 14^\circ$$

$$\overline{BC} \times 0.48 = 100 \times 0.24 \quad \therefore \overline{BC} = 50(\text{m})$$

지점 C에서 선분 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 D라 하면 삼각형 CBD에서

$$\overline{CD} = \overline{BC} \sin 43^\circ = 50 \times 0.68 = 34(\text{m})$$

이때 서연이의 눈의 높이는 지면으로부터 1.6 m이므로 열기구와 지면 사이의 거리는 $34 + 1.6 = 35.6(\text{m})$

7 $B + D = 180^\circ$ 에서 $D = 180^\circ - B$ 이므로

$$\cos D = \cos(180^\circ - B) = -\cos B = -\frac{1}{4}$$

따라서 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \times \cos D \\ &= 4 + 16 - 2 \times 2 \times 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 24 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC} = 2\sqrt{6} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

8 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2 \times 7, \frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 14 \quad \therefore \overline{BC} = 7\sqrt{3}$$

$\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1$ 이므로 $\overline{AB} = 3k, \overline{AC} = k (k > 0)$ 로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$(7\sqrt{3})^2 = (3k)^2 + k^2 - 2 \times 3k \times k \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$147 = 9k^2 + k^2 - 3k^2, k^2 = 21 \quad \therefore k = \sqrt{21} \quad (\because k > 0)$$

9 $a^2 = b^2 + bc + c^2$ 에서 $b^2 + c^2 - a^2 = -bc$

$$\text{코사인법칙에 의하여 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 120^\circ$

10 $B + C = 180^\circ - A$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos \frac{B+C-A}{2} &= \cos \frac{(180^\circ - A) - A}{2} \\ &= \cos(90^\circ - A) = \sin A \end{aligned}$$

$$\frac{\sin A}{3} = \frac{\sin B}{4} = \frac{\sin C}{5} \text{에서}$$

$$\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 4 : 5$$

사인법칙에 의하여 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ 이

므로 $a : b : c = 3 : 4 : 5$

따라서 $a = 3k, b = 4k, c = 5k (k > 0)$ 로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(4k)^2 + (5k)^2 - (3k)^2}{2 \times 4k \times 5k} = \frac{4}{5}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos \frac{B+C-A}{2} = \frac{3}{5}$$

11 삼각형 ABD에서 $\overline{AB} = \overline{AD} = 6$ 이므로 코사인법칙에 의

$$\text{하여 } \cos A = \frac{6^2 + 6^2 - (\sqrt{15})^2}{2 \times 6 \times 6} = \frac{19}{24}$$

따라서 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos A \\ &= 36 + 100 - 2 \times 6 \times 10 \times \frac{19}{24} = 41 \end{aligned}$$

$$\therefore k^2 = 41$$

12 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이를 $c \cos A = a \cos C$ 에 대입하면

$$c \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = a \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$b^2 + c^2 - a^2 = a^2 + b^2 - c^2, 2a^2 = 2c^2$$

$$a^2 = c^2 \quad \therefore a = c \quad (\because a > 0, c > 0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a = c$ 인 이등변삼각형이다.

13 $\overline{PQ} = x(\text{m}) (x > 0)$ 라 하면 삼각형 PBQ는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{PQ} = \overline{BQ} = x(\text{m})$

$$\text{또 삼각형 PAQ에서 } \overline{AQ} = \frac{\overline{PQ}}{\tan 30^\circ} = \frac{\overline{PQ}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}x(\text{m})$$

따라서 삼각형 ABQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} 120^2 &= (\sqrt{3}x)^2 + x^2 - 2 \times \sqrt{3}x \times x \times \cos 30^\circ \\ &= 3x^2 + x^2 - 3x^2 = x^2 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 120(\text{m}) \quad (\because x > 0)$$

따라서 타워의 높이 $\overline{PQ}$ 는 120 m이다.

14 $A + B = 180^\circ - C$ 이므로

$$\sin(A + B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin C = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

15 부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r 라 하면 부채꼴의 호의

$$\text{길이가 } \pi \text{이므로 } r \times \frac{\pi}{3} = \pi \quad \therefore r = 3$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

16 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos 60^\circ = 64 + 25 - 40 = 49$$

$$\therefore a = 7 \quad (\because a > 0)$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$$

이때 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\frac{1}{2}r(7+8+5) = 10\sqrt{3} \quad \therefore r = \sqrt{3}$$

17 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$5^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos 60^\circ$$

$$25 = a^2 + b^2 - ab \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이때 $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 36 - 2ab \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①을 ②에 대입하면 $25 = 36 - 2ab - ab$

$$3ab = 11 \quad \therefore ab = \frac{11}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{11}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{11\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

18 오른쪽 그림과 같이 선분 AC를 그으

면 직각삼각형 ACD에서

$$\overline{AC} = \sqrt{7^2 + (3\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{19} \text{ (m)}$$

이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{10^2 + 4^2 - (2\sqrt{19})^2}{2 \times 10 \times 4} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

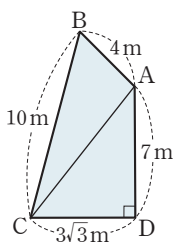
$$\square ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 4 \times \sin B + \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 7$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 7$$

$$= 10\sqrt{3} + \frac{21\sqrt{3}}{2} = \frac{41\sqrt{3}}{2} \text{ (m}^2\text{)}$$

따라서 꽃밭의 넓이는 $\frac{41\sqrt{3}}{2} \text{ m}^2$ 이다.



19 평행사변형 ABCD에서 $\overline{CD} = \overline{AB} = 8$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{10^2 + 8^2 - 12^2}{2 \times 10 \times 8} = \frac{1}{8}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\therefore \square ABCD = 10 \times 8 \times \sin C = 10 \times 8 \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = 30\sqrt{7}$$

20 사각형 ABCD의 넓이가 $6\sqrt{6}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 9 \times \sin \theta = 6\sqrt{6} \quad \therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

이때 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 이므로

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

21 주어진 원뿔의 전개도를 그리

면 오른쪽 그림과 같다.

호의 길이는 원뿔의 밑면인 원

의 둘레의 길이와 같으므로

$$2\pi \times 2 = 4\pi$$

이때 선분 OA의 길이는 6이므로

로 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$4\pi = 6\theta \quad \therefore \theta = \frac{4\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$$

삼각형 OAP에서 $\angle POA = \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3}$ 이고 점 P는 선분

OB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 $\overline{OP} = 4$

따라서 삼각형 OAP에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AP}^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 36 + 16 - 24 = 28$$

$$\therefore \overline{AP} = 2\sqrt{7} \quad (\because \overline{AP} > 0)$$

22 사인법칙에 의하여

$$\frac{10}{\sin C} = 2 \times 3\sqrt{5} \quad \therefore \sin C = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

이때 $0^\circ < C < 90^\circ$ 이므로

$$\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

코사인법칙에 의하여

$$10^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos C$$

$$a^2 + b^2 = 100 + 2ab \cos C \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\frac{a^2 + b^2 - ab \cos C}{ab} = \frac{4}{3} \text{에 } \textcircled{B} \text{을 대입하면}$$

$$\frac{100 + 2ab \cos C - ab \cos C}{ab} = \frac{4}{3}$$

$$100 + ab \cos C = \frac{4}{3}ab$$

$$100 + ab \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}ab \quad (\because \textcircled{A})$$

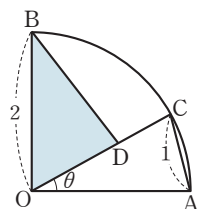
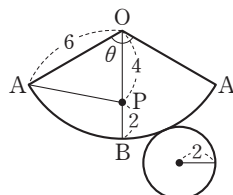
$$100 = \frac{2}{3}ab \quad \therefore ab = 150$$

23 삼각형 COA에서 $\overline{OA} = \overline{OC} = 2$ 이

고, $\angle COA = \theta$ 라 하면 코사인법

칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{2^2 + 2^2 - 1^2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{7}{8}$$



$$\angle BOD = \frac{\pi}{2} - \theta \text{이므로}$$

$$\sin(\angle BOD) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

즉, $\sin(\angle BOD) = \frac{7}{8}$ 이므로 삼각형 BOD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times \overline{OD} \times \sin(\angle BOD) = \frac{1}{2} \times 2 \times \overline{OD} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{8} \overline{OD}$$

$$\text{따라서 } \frac{7}{6} = \frac{7}{8} \overline{OD} \text{이므로 } \overline{OD} = \frac{4}{3}$$

24 $\overline{AP} = x$, $\overline{AQ} = y$ 라 하면 $\triangle APQ = \frac{1}{2} \triangle ABC$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times x \times y \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin 60^\circ \right)$$

$$\therefore xy = 10$$

삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ$$

$$= x^2 + y^2 - 2 \times 10 \times \frac{1}{2} = x^2 + y^2 - 10$$

이때 $x^2 > 0$, $y^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 y^2} = 2 \times 10 = 20$$

(단, 등호는 $x = y$ 일 때 성립)

$$\text{즉, } \overline{PQ}^2 = x^2 + y^2 - 10 \geq 20 - 10 = 10$$

$$\therefore \overline{PQ} \geq \sqrt{10} \quad (\because \overline{PQ} > 0)$$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{10}$ 이다.

25 $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$ 라 하면 $a + b = 6$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$(4\sqrt{2})^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos 120^\circ$$

$$32 = a^2 + b^2 + ab, \quad 32 = (a + b)^2 - ab$$

$$32 = 6^2 - ab \quad \therefore ab = 4$$

$$\therefore \overline{AB} \times \overline{AD} = 4$$

$$\overline{BC} = c, \quad \overline{CD} = d \text{라 하면 } c + d = 2\sqrt{26}$$

$C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ 이므로 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$(4\sqrt{2})^2 = c^2 + d^2 - 2 \times c \times d \times \cos 60^\circ$$

$$32 = c^2 + d^2 - cd, \quad 32 = (c + d)^2 - 3cd$$

$$32 = (2\sqrt{26})^2 - 3cd \quad \therefore cd = 24$$

$$\therefore \overline{BC} \times \overline{CD} = 24$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \sin 120^\circ$$

$$+ \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

III-1 01 등차수열

수열

개념 Check

166쪽

1 답 (1) 5, 8, 11, 14 (2) 3, 5, 9, 17

$$(1) a_1 = 3 \times 1 + 2 = 5, a_2 = 3 \times 2 + 2 = 8,$$

$$a_3 = 3 \times 3 + 2 = 11, a_4 = 3 \times 4 + 2 = 14$$

$$(2) a_1 = 2 + 1 = 3, a_2 = 2^2 + 1 = 5,$$

$$a_3 = 2^3 + 1 = 9, a_4 = 2^4 + 1 = 17$$

문제

167쪽

01-1 답 (1) $a_n = n(n+1)$ (2) $a_n = n^2$

$$(3) a_n = \frac{1}{3}(10^n - 1)$$

(1) $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면

$$a_1 = 1 \times 2 = 1 \times (1 + 1)$$

$$a_2 = 2 \times 3 = 2 \times (2 + 1)$$

$$a_3 = 3 \times 4 = 3 \times (3 + 1)$$

$$a_4 = 4 \times 5 = 4 \times (4 + 1)$$

$\vdots$

따라서 일반항 a_n 은

$$a_n = n(n+1)$$

(2) $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면

$$a_1 = 1 = 1^2$$

$$a_2 = 4 = 2^2$$

$$a_3 = 9 = 3^2$$

$$a_4 = 16 = 4^2$$

$\vdots$

따라서 일반항 a_n 은

$$a_n = n^2$$

(3) $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면

$$a_1 = 3 = \frac{1}{3} \times (10 - 1)$$

$$a_2 = 33 = \frac{1}{3} \times (100 - 1) = \frac{1}{3} \times (10^2 - 1)$$

$$a_3 = 333 = \frac{1}{3} \times (1000 - 1) = \frac{1}{3} \times (10^3 - 1)$$

$$a_4 = 3333 = \frac{1}{3} \times (10000 - 1) = \frac{1}{3} \times (10^4 - 1)$$

$\vdots$

따라서 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{1}{3}(10^n - 1)$$

2 등차수열

개념 Check

169쪽

1 [답] (1) 1 (2) $\frac{1}{6}$

2 [답] (1) $a_n = -2n + 9$ (2) $a_n = 5n - 8$
(3) $a_n = 4n - 5$ (4) $a_n = -3n - 2$

(1) $a_n = 7 + (n-1) \times (-2) = -2n + 9$

(2) $a_n = -3 + (n-1) \times 5 = 5n - 8$

(3) 첫째항이 -1, 공차가 $3 - (-1) = 4$ 인 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = -1 + (n-1) \times 4 = 4n - 5$$

(4) 첫째항이 -5, 공차가 $-8 - (-5) = -3$ 인 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = -5 + (n-1) \times (-3) = -3n - 2$$

3 [답] (1) $x=1, y=-5$ (2) $x=\frac{7}{3}, y=\frac{17}{3}$

(1) x 는 4와 -2의 등차중항이므로

$$x = \frac{4-2}{2} = 1$$

y 는 -2와 -8의 등차중항이므로

$$y = \frac{-2-8}{2} = -5$$

(2) x 는 $\frac{2}{3}$ 와 4의 등차중항이므로

$$x = \frac{\frac{2}{3}+4}{2} = \frac{7}{3}$$

y 는 4와 $\frac{22}{3}$ 의 등차중항이므로

$$y = \frac{4+\frac{22}{3}}{2} = \frac{17}{3}$$

문제

170~174쪽

02-1 [답] (1) $a_n = 6n - 22$ (2) 98 (3) 제30항

(1) 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 제2항이 -10, 제7항이 20이므로

$$a + d = -10, a + 6d = 20$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -16, d = 6$$

따라서 첫째항이 -16, 공차가 6이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -16 + (n-1) \times 6 = 6n - 22$$

(2) $a_{20} = 6 \times 20 - 22 = 98$

(3) 158을 제 n 항이라 하면

$$158 = 6n - 22, 6n = 180$$

$$\therefore n = 30$$

따라서 158은 제30항이다.

02-2 [답] -34

공차는 $5 - 8 = -3$

첫째항이 8, 공차가 -3인 등차수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 8 + (n-1) \times (-3)$$

$$= -3n + 11$$

$$\therefore a_{15} = -3 \times 15 + 11 = -34$$

02-3 [답] $a_n = 2n + 1$

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 + a_4 = 14 \text{에서}$$

$$(a+d) + (a+3d) = 14$$

$$\therefore a + 2d = 7 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$a_{10} + a_{20} = 62 \text{에서}$$

$$(a+9d) + (a+19d) = 62$$

$$\therefore a + 14d = 31 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 3, d = 2$$

$$\therefore a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1$$

03-1 [답] 제18항

첫째항이 -50, 공차가 3인 등차수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -50 + (n-1) \times 3$$

$$= 3n - 53$$

이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면 $a_n > 0$ 에서

$$3n - 53 > 0, 3n > 53$$

$$\therefore n > 17.6 \cdots$$

그런데 n 은 자연수이므로 n 의 최솟값은 18이다.

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제18항이다.

03-2 [답] 제22항

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_5 = 82, a_{10} = 57 \text{이므로}$$

$$a + 4d = 82, a + 9d = 57$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 102, d = -5$$

따라서 첫째항이 102, 공차가 -5이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 102 + (n-1) \times (-5)$$

$$= -5n + 107$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면 $a_n < 0$ 에서
 $-5n + 107 < 0$, $5n > 107$
 $\therefore n > 21.4$
 그런데 n 은 자연수이므로 n 의 최솟값은 22이다.
 따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제22항이다.

03-3 ㉔ 제23항

공차는 $-4 - (-9) = 5$
 첫째항이 -9 , 공차가 5인 등차수열의 일반항을 a_n 이라
 하면
 $a_n = -9 + (n-1) \times 5 = 5n - 14$
 이때 제 n 항에서 처음으로 100보다 커진다고 하면 $a_n > 100$
 에서
 $5n - 14 > 100$, $5n > 114 \quad \therefore n > 22.8$
 그런데 n 은 자연수이므로 n 의 최솟값은 23이다.
 따라서 처음으로 100보다 커지는 항은 제23항이다.

04-1 ㉔ 28

공차를 d 라 하면 첫째항이 -2 , 제17항이 46이므로
 $-2 + 16d = 46$, $16d = 48 \quad \therefore d = 3$
 이때 x_{10} 은 제11항이므로
 $x_{10} = -2 + 10 \times 3 = 28$

04-2 ㉔ 66

공차를 d 라 하면 첫째항이 15, 제5항이 3이므로
 $15 + 4d = 3$, $4d = -12 \quad \therefore d = -3$
 따라서
 $x = 15 + (-3) = 12$,
 $y = 15 + 2 \times (-3) = 9$,
 $z = 15 + 3 \times (-3) = 6$
 이므로
 $x + yz = 12 + 9 \times 6 = 66$

04-3 ㉔ 14

첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열의 제 $(m+2)$ 항이 34이
 므로
 $4 + (m+1) \times 2 = 34$, $2(m+1) = 30$
 $m+1 = 15 \quad \therefore m = 14$

05-1 ㉔ -2, 1

$x^2 + 2x$ 는 $-x$ 와 $3x+4$ 의 등차중항이므로
 $x^2 + 2x = \frac{-x + (3x+4)}{2}$
 $2(x^2 + 2x) = 2x + 4$, $x^2 + x - 2 = 0$
 $(x+2)(x-1) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 1$

05-2 ㉔ $x=6, y=4$

5는 x 와 y 의 등차중항이므로
 $5 = \frac{x+y}{2} \quad \therefore x+y=10 \quad \dots\dots ㉑$
 또 5는 $-2y$ 와 $3x$ 의 등차중항이므로
 $5 = \frac{-2y+3x}{2} \quad \therefore 3x-2y=10 \quad \dots\dots ㉒$
 ㉑, ㉒을 연립하여 풀면
 $x=6, y=4$

05-3 ㉔ -3

$f(x) = x^2 + ax + 1$ 을 $x+2$, $x+1$, $x-1$ 로 나누었을 때
 의 나머지는 나머지정리에 의하여 각각 $f(-2)$, $f(-1)$,
 $f(1)$ 과 같다.
 따라서 $p = f(-2) = 5 - 2a$, $q = f(-1) = 2 - a$,
 $r = f(1) = 2 + a$
 이때 q 는 p 와 r 의 등차중항이므로
 $q = \frac{p+r}{2}$
 즉, $2 - a = \frac{(5-2a) + (2+a)}{2}$
 $4 - 2a = 7 - a$
 $\therefore a = -3$

06-1 ㉔ 120

세 수를 $a-d$, a , $a+d$ 라 하면
 $(a-d) + a + (a+d) = 18 \quad \dots\dots ㉑$
 $(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 140 \quad \dots\dots ㉒$
 ㉑에서 $3a = 18 \quad \therefore a = 6$
 이를 ㉒에 대입하면
 $(6-d)^2 + 6^2 + (6+d)^2 = 140$
 $2d^2 + 108 = 140$, $2d^2 = 32$
 $d^2 = 16$
 $\therefore d = -4$ 또는 $d = 4$
 따라서 세 수는 2, 6, 10이므로 세 수의 곱은
 $2 \times 6 \times 10 = 120$

06-2 ㉔ 1

세 실근을 $a-d$, a , $a+d$ 라 하면 삼차방정식의 근과 계
 수의 관계에 의하여
 $(a-d) + a + (a+d) = 3$
 $3a = 3 \quad \therefore a = 1$
 따라서 1은 주어진 삼차방정식의 한 근이므로 주어진 삼
 차방정식에 $x=1$ 을 대입하면
 $1^3 - 3 \times 1^2 + k \times 1 + 1 = 0$
 $\therefore k = 1$

06-3 ㉡ 9

네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$ 라 하면 네 수의 합이 12이므로

$$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=12$$

$$4a=12 \quad \therefore a=3$$

또 가운데 두 수의 곱은 가장 작은 수와 가장 큰 수의 곱보다 32가 크므로

$$(3-d)(3+d)=(3-3d)(3+3d)+32$$

$$9-d^2=41-9d^2$$

$$8d^2=32, d^2=4$$

$$\therefore d=-2 \text{ 또는 } d=2$$

따라서 네 수는 -3 , 1 , 5 , 9 이므로 네 수 중 가장 큰 수는 9 이다.

3 등차수열의 합

문제

176~180쪽

07-1 ㉡ (1) -160 (2) 525

(1) 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 제3항이 22, 제7항이 6이므로

$$a+2d=22, a+6d=6$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=30, d=-4$$

따라서 첫째항이 30, 공차가 -4 인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{20\{2 \times 30 + (20-1) \times (-4)\}}{2} = -160$$

(2) 첫째항이 7, 공차가 4인 등차수열의 제 k 항이 63이므로

$$7+(k-1) \times 4=63$$

$$4(k-1)=56$$

$$\therefore k=15$$

따라서 첫째항이 7, 제15항이 63인 등차수열의 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$\frac{15(7+63)}{2}=525$$

다른 풀이

(2) 첫째항이 7, 공차가 4인 등차수열의 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$\frac{15\{2 \times 7 + (15-1) \times 4\}}{2}=525$$

07-2 ㉡ 5

첫째항이 3, 끝항이 15, 항수가 $m+2$ 인 등차수열의 모든

$$\text{항의 합이 63이므로 } \frac{(m+2)(3+15)}{2}=63$$

$$9(m+2)=63 \quad \therefore m=5$$

08-1 ㉡ 960

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $S_{15}=255$ 이므로

$$\frac{15\{2a+(15-1)d\}}{2}=255$$

$$\therefore a+7d=17 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$S_{25}=675$ 이므로

$$\frac{25\{2a+(25-1)d\}}{2}=675$$

$$\therefore a+12d=27 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=3$, $d=2$

따라서 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제30항까지의 합은

$$\frac{30\{2 \times 3 + (30-1) \times 2\}}{2}=960$$

08-2 ㉡ 755

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $S_{10}=155$ 이므로

$$\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=155$$

$$\therefore 2a+9d=31 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$S_{20}-S_{10}=455$ 에서

$$S_{20}=S_{10}+455=155+455=610 \text{이므로}$$

$$\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=610$$

$$\therefore 2a+19d=61 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=3$

따라서 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열의 제21항부터 제30항까지의 합은

$$\begin{aligned} S_{30}-S_{20} &= \frac{30\{2 \times 2 + (30-1) \times 3\}}{2} - 610 \\ &= 1365 - 610 = 755 \end{aligned}$$

09-1 ㉡ -338

첫째항이 -50 , 공차가 4이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -50 + (n-1) \times 4 = 4n - 54$$

이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면 $a_n > 0$ 에서

$$4n - 54 > 0, 4n > 54 \quad \therefore n > 13.5$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제14항부터 양수이므로 첫째항부터 제13항까지의 합이 최소이다.

따라서 구하는 최솟값은

$$\frac{13\{2 \times (-50) + (13-1) \times 4\}}{2} = -338$$

다른 풀이

첫째항이 -50 , 공차가 4 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{n\{2 \times (-50) + (n-1) \times 4\}}{2}$$

$$= 2n^2 - 52n = 2(n-13)^2 - 338$$

따라서 구하는 최솟값은 $n=13$ 일 때, -338 이다.

09-2 [답 12]

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

제6항이 55 , 제10항이 23 이므로

$$a + 5d = 55, a + 9d = 23$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=95, d=-8$

따라서 첫째항이 95 , 공차가 -8 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 95 + (n-1) \times (-8) = -8n + 103$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면 $a_n < 0$ 에서
 $-8n + 103 < 0, 8n > 103 \quad \therefore n > 12.875$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제13항부터 음수이므로 첫째항부터 제12항까지의 합이 최대이다.

$$\therefore n=12$$

10-1 [답 1275]

100 이하의 자연수 중에서 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$3, 7, 11, 15, \dots, 99$$

이는 첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열이므로 99를 제 n 항이라 하면

$$3 + (n-1) \times 4 = 99$$

$$4(n-1) = 96 \quad \therefore n = 25$$

따라서 구하는 합은 첫째항이 3, 제25항이 99인 등차수열의 첫째항부터 제25항까지의 합이므로

$$\frac{25(3+99)}{2} = 1275$$

10-2 [답 55350]

세 자리의 자연수 중에서 9의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$108, 117, 126, 135, \dots, 999$$

이는 첫째항이 108, 공차가 9인 등차수열이므로 999를 제 n 항이라 하면

$$108 + (n-1) \times 9 = 999$$

$$9(n-1) = 891 \quad \therefore n = 100$$

따라서 구하는 합은 첫째항이 108, 제100항이 999인 등차수열의 첫째항부터 제100항까지의 합이므로

$$\frac{100(108+999)}{2} = 55350$$

11-1 [답 (1) $a_n=4n-5$

$$(2) a_1=3, a_n=2n+2 \quad (n \geq 2)$$

$$(1) S_n=2n^2-3n \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 2n^2 - 3n - \{2(n-1)^2 - 3(n-1)\}$$

$$= 4n - 5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 구하는 일반항 a_n 은

$$a_n = 4n - 5$$

$$(2) S_n=n^2+3n-1 \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n^2 + 3n - 1 - \{(n-1)^2 + 3(n-1) - 1\}$$

$$= 2n + 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \times 1 - 1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같지 않으므로 구하는 일반항 a_n 은

$$a_1=3, a_n=2n+2 \quad (n \geq 2)$$

11-2 [답 29]

$$S_n=2n^2-4n+1 \text{에서}$$

$$a_1=S_1=2 \times 1^2-4 \times 1+1=-1$$

$$a_9=S_9-S_8$$

$$= (2 \times 9^2 - 4 \times 9 + 1) - (2 \times 8^2 - 4 \times 8 + 1)$$

$$= 127 - 97 = 30$$

$$\therefore a_1 + a_9 = -1 + 30 = 29$$

11-3 [답 8]

$$S_n=n^2-16n \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n^2 - 16n - \{(n-1)^2 - 16(n-1)\}$$

$$= 2n - 17 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 16 \times 1 = -15 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n=2n-17$

$$a_n < 0 \text{에서 } 2n - 17 < 0$$

$$2n < 17 \quad \therefore n < 8.5$$

따라서 구하는 자연수 n 은 1, 2, 3, ..., 8의 8개이다.

연습문제

181~183쪽

1 6	2 32	3 제25항	4 24	5 ③
6 -2	7 ③	8 32	9 5	10 ②
11 ⑤	12 ①	13 5	14 ④	15 755
16 -14	17 150	18 65	19 (-112, 78)	
20 2	21 456	22 ②		

- 1 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_5 = 3a_1 \text{에서 } a + 4d = 3a \quad \therefore a = 2d \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_1^2 + a_3^2 = 20 \text{에서 } a^2 + (a + 2d)^2 = 20 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①을 ②에 대입하면

$$(2d)^2 + (2d + 2d)^2 = 20$$

$$d^2 = 1 \quad \therefore d = 1 (\because d > 0)$$

$$\therefore a = 2 \times 1 = 2 (\because \textcircled{㉠})$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 + (n-1) \times 1 = n + 1$$

$$\therefore a_5 = 5 + 1 = 6$$

- 2 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_5 + a_9 = 0 \text{에서 } (a + 4d) + (a + 8d) = 0$$

$$2a + 12d = 0 \quad \therefore a = -6d \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$|a_4 + a_8| = 8 \text{에서 } |(a + 3d) + (a + 7d)| = 8$$

$$|2a + 10d| = 8$$

①을 대입하면

$$|-12d + 10d| = 8, \quad |-2d| = 8$$

$$\therefore d = 4 (\because d > 0)$$

$$\therefore a = -6 \times 4 = -24 (\because \textcircled{㉠})$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = -24 + (n-1) \times 4 = 4n - 28$$

$$\therefore a_{15} = 4 \times 15 - 28 = 32$$

- 3 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_7 = 16$ 이므로

$$a + 6d = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또 $a_3 : a_9 = 2 : 5$ 에서 $2a_9 = 5a_3$ 이므로

$$2(a + 8d) = 5(a + 2d)$$

$$\therefore a - 2d = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = 4, d = 2$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = 4 + (n-1) \times 2 = 2n + 2$$

이때 제 n 항에서 처음으로 50보다 커진다고 하면 $a_n > 50$ 에서

$$2n + 2 > 50, \quad 2n > 48 \quad \therefore n > 24$$

그런데 n 은 자연수이므로 처음으로 50보다 커지는 항은 제25항이다.

- 4 공차를 d 라 하면 첫째항이 3, 제 $(m+2)$ 항이 78이므로

$$3 + (m+2-1)d = 78$$

$$\therefore (m+1)d = 75$$

이때 m 이 자연수이므로 $m+1$ 은 1이 아닌 자연수이고, d 도 1이 아닌 자연수이므로 $(m+1)d = 75$ 인 경우는 다음과 같다.

$m+1$	3	5	15	25
d	25	15	5	3

따라서 m 의 최댓값은 $m+1=25$ 에서 $m=24$

- 5 α 는 1과 β 의 등차중항이므로

$$\alpha = \frac{1+\beta}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

이차방정식 $x^2 - nx + 4(n-4) = 0$ 에서

$$(x-4)\{x-(n-4)\} = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = n-4$$

(i) $4 < n-4$, 즉 $n > 8$ 일 때

$$\alpha = 4, \beta = n-4 \text{이므로 } \textcircled{㉠} \text{에서}$$

$$4 = \frac{1+(n-4)}{2}, \quad 8 = n-3 \quad \therefore n = 11$$

(ii) $n-4 < 4$, 즉 $n < 8$ 일 때

$$\alpha = n-4, \beta = 4 \text{이므로 } \textcircled{㉠} \text{에서}$$

$$n-4 = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \quad \therefore n = \frac{13}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수 n 의 값은 11이다.

다른 풀이

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } 2\alpha - \beta = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

이차방정식 $x^2 - nx + 4(n-4) = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = n \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\alpha\beta = 4(n-4) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

②, ③을 연립하여 풀면

$$\alpha = \frac{n+1}{3}, \quad \beta = \frac{2n-1}{3}$$

이를 ④에 대입하여 정리하면

$$2n^2 - 35n + 143 = 0, \quad (2n-13)(n-11) = 0$$

$$\therefore n = \frac{13}{2} \text{ 또는 } n = 11$$

이때 n 은 자연수이므로 $n = 11$

- 6 $\log_{27} x$ 는 $\log_{27} 3$ 과 1의 등차중항이므로

$$\log_{27} x = \frac{\log_{27} 3 + 1}{2}, \quad \log_{27} x = \frac{1}{2} \log_{27} 3 + \frac{1}{2}$$

$$\log_{27} x = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore x = 27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$$

또 1은 $\log_{27} 9$ 와 $\log_{27} y$ 의 등차중항이므로

$$1 = \frac{\log_{27} 9 + \log_{27} y}{2}, \quad 2 = \log_{27} 9 + \log_{27} y$$

$$2 = \frac{2}{3} + \log_{27} y, \quad \log_{27} y = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore y = 27^{\frac{4}{3}} = (3^3)^{\frac{4}{3}} = 3^4 = 81$$

$$\therefore \log_3 \frac{x}{y} = \log_3 \frac{9}{81} = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$$

7 사각형의 네 내각의 크기를

$a-3d, a-d, a+d, a+3d$ 라 하면

사각형의 네 내각의 크기의 합은 360° 이므로

$$(a-3d) + (a-d) + (a+d) + (a+3d) = 360^\circ$$

$$4a = 360^\circ \quad \therefore a = 90^\circ$$

이때 가장 큰 각의 크기가 가장 작은 각의 크기의 3배이므로

$$90^\circ + 3d = 3(90^\circ - 3d)$$

$$12d = 180^\circ \quad \therefore d = 15^\circ$$

따라서 네 내각의 크기는 $45^\circ, 75^\circ, 105^\circ, 135^\circ$ 이므로

두 번째로 큰 각의 크기는 105° 이다.

8 $$S_n = \frac{n\{2 \times 60 + (n-1) \times (-4)\}}{2} = -2n^2 + 62n$$

이때 $S_n < 0$ 에서

$$-2n^2 + 62n < 0, \quad n(n-31) > 0$$

$$\therefore n < 0 \text{ 또는 } n > 31$$

그런데 n 은 자연수이므로 n 의 최솟값은 32이다.

9 첫째항이 -11 , 끝항이 31 , 항수가 $m+2$ 인 등차수열의 합이 $-11+200+31=220$ 이므로

$$\frac{(m+2)(-11+31)}{2} = 220$$

$$10(m+2) = 220 \quad \therefore m = 20$$

이때 공차를 d 라 하면 제22항이 31이므로

$$-11 + 21d = 31 \quad \therefore d = 2$$

따라서 x_8 은 제9항이므로

$$-11 + 8 \times 2 = 5$$

10 공차를 d 라 하면 첫째항이 2이므로 $a_6 = 2(S_3 - S_2)$ 에서

$$2 + 5d$$

$$= 2 \times \left[\frac{3\{2 \times 2 + (3-1)d\}}{2} - \frac{2\{2 \times 2 + (2-1)d\}}{2} \right]$$

$$2 + 5d = 4 + 4d \quad \therefore d = 2$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10\{2 \times 2 + (10-1) \times 2\}}{2} = 110$$

다른 풀이

공차를 d 라 하면 $a_6 = 2 + 5d$

$$S_3 - S_2 = (a_1 + a_2 + a_3) - (a_1 + a_2) = a_3 = 2 + 2d$$

$$a_6 = 2(S_3 - S_2) \text{에서}$$

$$2 + 5d = 2(2 + 2d) \quad \therefore d = 2$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10\{2 \times 2 + (10-1) \times 2\}}{2} = 110$$

11 $S_{k+10} = S_k + (a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \dots + a_{k+10})$

이때 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 2이고, $a_k = 31$ 이므로

$$S_{k+10}$$

$$= S_k + \{(a_k + 2) + (a_k + 2 \times 2) + (a_k + 3 \times 2) + \dots$$

$$+ (a_k + 10 \times 2)\}$$

$$= S_k + \{(31 + 2) + (31 + 4) + (31 + 6) + \dots + (31 + 20)\}$$

첫째항이 33, 끝항이 51, 항의 개수가 10인 등차수열의 합

$$= S_k + \frac{10(33 + 51)}{2} = S_k + 420$$

$$\text{즉, } S_k + 420 = 640 \text{이므로 } S_k = 220$$

다른 풀이

첫째항을 a 라 하면

$$a_k = a + (k-1) \times 2 = 31$$

$$\therefore a = -2k + 33 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_{k+10} = \frac{(k+10)\{2a + (k+9) \times 2\}}{2} = 640$$

$$\therefore k^2 + (a+19)k + 10a = 550 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 정리하면

$$k^2 - 32k + 220 = 0$$

$$(k-10)(k-22) = 0$$

$$\therefore k = 10 \text{ 또는 } k = 22$$

(i) $k = 10$ 일 때,

$$a = (-2) \times 10 + 33 = 13 \quad (\because \textcircled{1})$$

(ii) $k = 22$ 일 때,

$$a = (-2) \times 22 + 33 = -11 \quad (\because \textcircled{1})$$

이때 $a > 0$ 이므로 $k = 10, a = 13$

$$\therefore S_k = S_{10} = \frac{10\{2 \times 13 + (10-1) \times 2\}}{2} = 220$$

12 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 양수이므로 $S_3 < S_9$

따라서 $S_9 = |S_3| = 27$ 에서 $S_9 = -S_3 = 27$

첫째항을 a , 공차를 d ($d > 0$)라 하면

$$S_9 = 27 \text{에서}$$

$$\frac{9\{2 \times a + (9-1) \times d\}}{2} = 27$$

$$\therefore a + 4d = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_3 = -27 \text{에서}$$

$$\frac{3\{2 \times a + (3-1) \times d\}}{2} = -27$$

$$\therefore a + d = -9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -13, d = 4$

$$\therefore a_{10} = -13 + 9 \times 4 = 23$$

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 $d(d>0)$ 라 하면

$$S_9=27\text{에서 } \frac{9\{2 \times a + (9-1)d\}}{2} = 27$$

$$\therefore a+4d=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$|S_3|=27\text{에서 } \left| \frac{3\{2 \times a + (3-1)d\}}{2} \right| = 27$$

$$|a+d|=9$$

$$\therefore a+d=9 \text{ 또는 } a+d=-9$$

(i) $a+d=9$ 일 때,

①과 $a+d=9$ 를 연립하여 풀면

$$a=11, d=-2$$

이는 $d>0$ 이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+d=-9$ 일 때,

①과 $a+d=-9$ 를 연립하여 풀면

$$a=-13, d=4$$

(i), (ii)에서 $a=-13, d=4$

$$\therefore a_{10}=-13+9 \times 4=23$$

13 공차를 d 라 하면 첫째항이 6이므로

$$S_3=\frac{3\{2 \times 6 + (3-1)d\}}{2}=18+3d$$

$$S_7=\frac{7\{2 \times 6 + (7-1)d\}}{2}=42+21d$$

이때 $S_3=S_7$ 이므로

$$18+3d=42+21d \quad \therefore d=-\frac{4}{3}$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n=6+(n-1) \times \left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3}n+\frac{22}{3}$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면 $a_n<0$ 에서

$$-\frac{4}{3}n+\frac{22}{3}<0, \frac{4}{3}n>\frac{22}{3} \quad \therefore n>5.5$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제6항부터 음수이므로 첫째항부터 제5항까지의 합이 최대이다.

$$\therefore n=5$$

다른 풀이

첫째항이 6, 공차가 $-\frac{4}{3}$ 인 등차수열이므로 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n=\frac{n\left\{2 \times 6 + (n-1) \times \left(-\frac{4}{3}\right)\right\}}{2}$$

$$=-\frac{2}{3}n^2+\frac{20}{3}n$$

$$=-\frac{2}{3}(n-5)^2+\frac{50}{3}$$

따라서 S_n 은 $n=5$ 일 때, 최댓값을 갖는다.

14 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_1+a_2=132\text{에서}$$

$$a+(a+d)=132$$

$$\therefore 2a+d=132 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_5+a_6+a_7=63\text{에서}$$

$$(a+4d)+(a+5d)+(a+6d)=63$$

$$\therefore a+5d=21 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=71, d=-10$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$\begin{aligned} a_n &= 71+(n-1) \times (-10) \\ &= -10n+81 \end{aligned}$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면 $a_n<0$ 에서

$$-10n+81<0, 10n>81$$

$$\therefore n>8.1$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제9항부터 음수이므로 첫째항부터 제8항까지의 합이 최대이다.

$$\therefore k=8, M=\frac{8\{2 \times 71 + (8-1) \times (-10)\}}{2}=288$$

$$\therefore k+M=296$$

15 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$2, 5, \textcircled{8}, 11, 14, 17, 20, \textcircled{23}, 26, 29, 32, 35, \textcircled{38}, \dots$$

5로 나누었을 때의 나머지가 3인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$3, \textcircled{8}, 13, 18, \textcircled{23}, 28, 33, \textcircled{38}, \dots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 8, 23, 38, ...이므로 첫째항이 8이고 공차가 15인 등차수열이다.

$$\begin{aligned} \therefore a_1+a_2+a_3+\dots+a_{10} &= \frac{10\{2 \times 8 + (10-1) \times 15\}}{2} \\ &= 755 \end{aligned}$$

16 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 $A_n=3n^2+kn, B_n=2n^2+5n$ 이라 하면

$$a_{10}=A_{10}-A_9$$

$$=(3 \times 10^2+10k)-(3 \times 9^2+9k)$$

$$=57+k$$

$$b_{10}=B_{10}-B_9$$

$$=(2 \times 10^2+5 \times 10)-(2 \times 9^2+5 \times 9)$$

$$=43$$

이때 $a_{10}=b_{10}$ 이므로

$$57+k=43$$

$$\therefore k=-14$$

17 $S_n = n^2 - 6n$ 에서 $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 6n - \{(n-1)^2 - 6(n-1)\} \\ &= 2n - 7 \end{aligned}$$

$a_n = 2n - 7$ 에 n 대신 $2n$ 을 대입하면

$$a_{2n} = 2 \times 2n - 7 = 4n - 7$$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 -3 이고 공차가 4 인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20} &= \frac{10\{2 \times (-3) + (10-1) \times 4\}}{2} \\ &= 150 \end{aligned}$$

18 $S_n = an^2 + 3n$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= an^2 + 3n - \{a(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= 2an - a + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = a \times 1^2 + 3 \times 1 = a + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n

$$\text{은 } a_n = 2an - a + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

또 공차가 4 이므로

$$a_2 - a_1 = (3a + 3) - (a + 3) = 2a = 4 \quad \therefore a = 2$$

이를 $\textcircled{9}$ 에 대입하면 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 \times 2n - 2 + 3 = 4n + 1$$

$$\therefore a_{16} = 4 \times 16 + 1 = 65$$

19 n 개의 점이 직선 l 위에 일정한 간격으로 놓여 있으므로

점 P_n 의 x 좌표와 y 좌표는 각각 등차수열을 이룬다.

점 P_n 의 x 좌표를 차례대로 나열하면

$$5, 2, -1, \cdots$$

이는 첫째항이 5 , 공차가 -3 인 등차수열이므로 일반항을 x_n 이라 하면

$$x_n = 5 + (n-1) \times (-3) = -3n + 8$$

또 점 P_n 의 y 좌표를 차례대로 나열하면

$$0, 2, 4, \cdots$$

이는 첫째항이 0 , 공차가 2 인 등차수열이므로 일반항을 y_n 이라 하면

$$y_n = 0 + (n-1) \times 2 = 2n - 2$$

$$\therefore x_{40} = -3 \times 40 + 8 = -112, y_{40} = 2 \times 40 - 2 = 78$$

따라서 점 P_{40} 의 좌표는 $(-112, 78)$

20 공차를 d 라 하면 첫째항이 5 , 제 $(m+2)$ 항이 20 이므로

$$5 + (m+2-1)d = 20$$

$$\therefore d = \frac{15}{m+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 제 $(m+n+3)$ 항이 50 이므로

$$5 + (m+n+3-1)d = 50$$

$$\therefore d = \frac{45}{m+n+2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{15}{m+1} = \frac{45}{m+n+2}$$

$$15(m+n+2) = 45(m+1)$$

$$\therefore 2m = n - 1$$

$$\therefore \frac{n-1}{m} = \frac{2m}{m} = 2$$

21 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_2 = -19$, $a_{13} = 25$ 이므로

$$a + d = -19, a + 12d = 25$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -23, d = 4$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = -23 + (n-1) \times 4 = 4n - 27$$

이때 $a_n > 0$ 에서 $4n - 27 > 0$

$$4n > 27 \quad \therefore n > 6.75$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 제6항까지 음수이고 제7항부터 양수이다.

또 $a_6 = -3$, $a_7 = 1$, $a_{20} = 53$ 이므로

$$\begin{aligned} &|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}| \\ &= -(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9 + \cdots + a_{20}) \\ &= -\frac{6(-23-3)}{2} + \frac{14(1+53)}{2} \\ &= 78 + 378 = 456 \end{aligned}$$

22 $S_{k+2} - S_k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+2}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$

$$= a_{k+1} + a_{k+2}$$

$$\text{이므로 } a_{k+1} + a_{k+2} = -12 - (-16) = 4$$

이때 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$\{a + (k+1-1) \times 2\} + \{a + (k+2-1) \times 2\} = 4$$

$$a + 2k = 1 \quad \therefore a = 1 - 2k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편 $S_k = -16$ 에서

$$\frac{k\{2a + (k-1) \times 2\}}{2} = -16$$

$$\therefore k(a + k - 1) = -16 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$k\{(1-2k) + k - 1\} = -16$$

$$k^2 = 16 \quad \therefore k = 4 (\because k > 0)$$

$$\therefore a = 1 - 2 \times 4 = -7 (\because \textcircled{1})$$

따라서 첫째항이 -7 , 공차가 2 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -7 + (n-1) \times 2$$

$$= 2n - 9$$

$$\therefore a_{2k} = a_8 = 2 \times 8 - 9 = 7$$

III-1 02 등비수열

등비수열

개념 Check

185쪽

1 답 (1) 0.001 (2) -27

2 답 (1) $a_n = 4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ (2) $a_n = 3^{n-2}$
(3) $a_n = 7 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (4) $a_n = 9 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}$

3 답 (1) $x = -3, y = -27$ 또는 $x = 3, y = 27$

(2) $x = -2, y = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = 2, y = \frac{1}{2}$

(1) x 는 1과 9의 등비중항이므로

$$x^2 = 1 \times 9 \quad \therefore x = \pm 3$$

$x = -3$ 일 때, 공비가 -3 이므로

$$y = 9 \times (-3) = -27$$

$x = 3$ 일 때, 공비가 3 이므로 $y = 9 \times 3 = 27$

$$\therefore x = -3, y = -27 \text{ 또는 } x = 3, y = 27$$

(2) x 는 4와 1의 등비중항이므로

$$x^2 = 4 \times 1 \quad \therefore x = \pm 2$$

$x = -2$ 일 때 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$y = 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$x = 2$ 일 때 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로 $y = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\therefore x = -2, y = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 2, y = \frac{1}{2}$$

문제

186~191쪽

01-1 답 (1) $a_n = (-2) \times (-3)^{n-1}$ (2) 4374 (3) 제6항

(1) 공비를 r 라 하면 첫째항이 -2 , 제4항이 54 이므로

$$(-2) \times r^3 = 54, r^3 = -27$$

$$\therefore r = -3$$

따라서 첫째항이 -2 , 공비가 -3 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = (-2) \times (-3)^{n-1}$$

(2) $a_8 = (-2) \times (-3)^7 = 4374$

(3) 486을 제 n 항이라 하면

$$486 = (-2) \times (-3)^{n-1}$$

$$-243 = (-3)^{n-1}, (-3)^5 = (-3)^{n-1}$$

$$n-1 = 5 \quad \therefore n = 6$$

따라서 486은 제6항이다.

01-2 답 $-64\sqrt{2}$

$$\text{공비는 } \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

첫째항이 2, 공비가 $-\sqrt{2}$ 인 등비수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 2 \times (-\sqrt{2})^{n-1}$$

$$\therefore a_{12} = 2 \times (-\sqrt{2})^{11} = -64\sqrt{2}$$

01-3 답 192

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 + a_5 = 54 \text{에서 } ar + ar^4 = 54$$

$$\therefore ar(1+r^3) = 54 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_3 + a_6 = 108 \text{에서 } ar^2 + ar^5 = 108$$

$$\therefore ar^2(1+r^3) = 108 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$\frac{ar^2(1+r^3)}{ar(1+r^3)} = \frac{108}{54} \quad \therefore r = 2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$18a = 54 \quad \therefore a = 3$$

따라서 첫째항이 3, 공비가 2이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

$$\therefore a_7 = 3 \times 2^6 = 192$$

02-1 답 제11항

첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

이때 제 n 항에서 처음으로 2000보다 커진다고 하면

$$a_n > 2000 \text{에서 } 2^n > 2000$$

그런데 n 은 자연수이고 $2^{10} = 1024, 2^{11} = 2048$ 이므로

$$n \geq 11$$

따라서 처음으로 2000보다 커지는 항은 제11항이다.

02-2 답 제12항

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_3 = 48, a_6 = 6$ 이므로

$$ar^2 = 48 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^5 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{6}{48}, r^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore r = \frac{1}{2}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $\frac{a}{4} = 48$

$$\therefore a = 192$$

따라서 첫째항이 192, 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 192 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

이때 제 n 항에서 처음으로 $\frac{1}{10}$ 보다 작아진다고 하면

$a_n < \frac{1}{10}$ 에서

$$192 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{10}, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{1920}$$

그런데 n 은 자연수이고 $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}, \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2048}$ 이

므로

$$n-1 \geq 11 \quad \therefore n \geq 12$$

따라서 처음으로 $\frac{1}{10}$ 보다 작아지는 항은 제12항이다.

02-3 ㉡ 6

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_2=5, a_4=25$ 이므로

$$ar=5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^3=25 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } \frac{ar^3}{ar} = \frac{25}{5}, r^2=5$$

$$\therefore r=\sqrt{5} \quad (\because r>0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \sqrt{5}a=5 \quad \therefore a=\sqrt{5}$$

따라서 첫째항이 $\sqrt{5}$, 공비가 $\sqrt{5}$ 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = \sqrt{5} \times (\sqrt{5})^{n-1} = (\sqrt{5})^n \quad \therefore a_n^2 = 5^n$$

$$a_n^2 > 8000 \text{에서 } 5^n > 8000$$

그런데 n 은 자연수이고 $5^5=3125, 5^6=15625$ 이므로

$$n \geq 6$$

따라서 n 의 최솟값은 6이다.

03-1 ㉡ 2

공비를 r 라 하면 첫째항이 2, 제10항이 1024이므로

$$2r^9=1024 \quad \therefore r^9=512$$

$$\therefore r=2$$

03-2 ㉡ 54

공비를 r 라 하면 첫째항이 6, 제7항이 162이므로

$$6r^6=162 \quad \therefore r^6=27 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 x_1, x_2, x_5 는 각각 제2항, 제3항, 제6항이므로

$$x_1=6r, x_2=6r^2, x_5=6r^5$$

$$\therefore \frac{x_1 x_5}{x_2} = \frac{6r \times 6r^5}{6r^2} = 6 \times r^4$$

$$\text{이때 } \textcircled{1} \text{에서 } r^2=3 \text{이므로 } r^4=3^2=9$$

$$\text{따라서 } \frac{x_1 x_5}{x_2} = 6 \times r^4 = 6 \times 9 = 54$$

03-3 ㉡ 5

첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열의 제 $(m+2)$ 항이 2187

이므로

$$3 \times 3^{m+1} = 2187, 3^{m+1} = 729 = 3^6$$

따라서 $m+1=6$ 이므로 $m=5$

04-1 ㉡ (1) 8 (2) 94

(1) $3x$ 는 $x+1$ 과 $8x$ 의 등비중항이므로

$$(3x)^2 = (x+1) \times 8x$$

$$9x^2 = 8x^2 + 8x, x^2 - 8x = 0$$

$$x(x-8)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=8$$

이때 $x+1, 3x, 8x$ 는 양수이므로 $x=8$

(2) 6은 x 와 y 의 등차중항이므로

$$6 = \frac{x+y}{2}$$

$$\therefore x+y=12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 5는 x 와 y 의 등비중항이므로

$$5^2 = xy$$

$$\therefore xy=25 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \\ &= 12^2 - 2 \times 25 = 94 \end{aligned}$$

04-2 ㉡ 125

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 25, \alpha\beta = k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\beta - \alpha$ 는 α 와 β 의 등비중항이므로

$$(\beta - \alpha)^2 = \alpha\beta$$

이때 $(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha\beta$$

$$\therefore (\alpha + \beta)^2 = 5\alpha\beta$$

$\textcircled{1}$ 을 이 식에 대입하면

$$25^2 = 5k \quad \therefore k = 125$$

05-1 ㉡ 1, 2, 4

세 수를 a, ar, ar^2 이라 하면

$$a + ar + ar^2 = 7$$

$$\therefore a(1+r+r^2) = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a \times ar \times ar^2 = 8$$

$$(ar)^3 = 8 \quad \therefore ar = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 에서 $a = \frac{2}{r}$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{2}{r}(1+r+r^2) = 7$$

$$2r^2 - 5r + 2 = 0$$

$$(2r-1)(r-2) = 0$$

$$\therefore r = \frac{1}{2} \text{ 또는 } r = 2$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 풀면

$$r = \frac{1}{2} \text{일 때 } a = 4, r = 2 \text{일 때 } a = 1$$

따라서 세 수는 1, 2, 4이다.

05-2 ㉡ -27

세 실근을 a, ar, ar^2 이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = -4$$

$$\therefore a(1+r+r^2) = -4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + a \times ar^2 = -12$$

$$\therefore a^2r(1+r+r^2) = -12 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$a \times ar \times ar^2 = -k$$

$$\therefore (ar)^3 = -k \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

①÷②을 하면

$$\frac{a^2r(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)} = \frac{-12}{-4}$$

$$\therefore ar = 3$$

이를 ③에 대입하면

$$3^3 = -k \quad \therefore k = -27$$

05-3 ㉡ 40

세 모서리의 길이 l, m, n 을 각각 a, ar, ar^2 이라 하면 직육면체의 부피가 27이므로

$$a \times ar \times ar^2 = 27$$

$$(ar)^3 = 27 \quad \therefore ar = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 겉넓이가 60이므로

$$2a^2r + 2a^2r^3 + 2a^2r^2 = 60$$

$$2ar(a + ar + ar^2) = 60$$

$$\therefore a + ar + ar^2 = 10 \quad (\because \textcircled{㉠})$$

따라서 모든 모서리의 길이의 합은

$$4(l + m + n) = 4(a + ar + ar^2) = 4 \times 10 = 40$$

06-1 ㉡ 300만 원

10년 전의 물건의 평가 금액을 a 만 원이라 하면

$$a(1-0.14)^{10} = 66, \quad a \times 0.86^{10} = 66$$

$$0.22a = 66 \quad \therefore a = 300(\text{만 원})$$

06-2 ㉡ $\sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

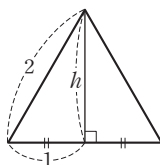
오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가

2인 정삼각형의 높이를 h 라 하면

$$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \text{이므로}$$

정삼각형 모양의 종이의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$$



첫 번째 시행 후 남은 종이의 넓이는

$$\sqrt{3} \times \frac{3}{4}$$

두 번째 시행 후 남은 종이의 넓이는

$$\sqrt{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

세 번째 시행 후 남은 종이의 넓이는

$$\sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

⋮

n 번째 시행 후 남은 종이의 넓이는

$$\sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

따라서 10번째 시행 후 남은 종이의 넓이는

$$\sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

2 등비수열의 합

문제

194~197쪽

07-1 ㉡ $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$

첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{1 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$$

07-2 ㉡ $\frac{1}{18}(3^{10}-1)$

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 제4항이 6, 제6항이 54이므로

$$ar^3 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$ar^5 = 54 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

②÷①을 하면

$$\frac{ar^5}{ar^3} = \frac{54}{6}, \quad r^2 = 9$$

$$\therefore r = -3 \quad (\because r < 0)$$

이를 ①에 대입하면

$$a \times (-3)^3 = 6, \quad -27a = 6 \quad \therefore a = -\frac{2}{9}$$

따라서 첫째항이 $-\frac{2}{9}$, 공비가 -3 인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{-\frac{2}{9} \{ 1 - (-3)^{10} \}}{1 - (-3)} = \frac{1}{18}(3^{10}-1)$$

07-3 ㉔ $\frac{1}{4}(3^{20}-1)$

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2+a_4=15 \text{에서 } ar+ar^3=15$$

$$\therefore ar(1+r^2)=15 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$a_4+a_6=135 \text{에서 } ar^3+ar^5=135$$

$$\therefore ar^3(1+r^2)=135 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8} \div \textcircled{7}$ 을 하면

$$\frac{ar^3(1+r^2)}{ar(1+r^2)} = \frac{135}{15}, r^2=9$$

$$\therefore r=3 \quad (\because r>0)$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$a \times 3 \times (1+3^2)=15, 30a=15 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

따라서 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 3인 등비수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{\frac{1}{2}(3^{20}-1)}{3-1} = \frac{1}{4}(3^{20}-1)$$

08-1 ㉔ 126

첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$)라 하면

$$S_4=18 \text{이므로 } \frac{a(1-r^4)}{1-r}=18 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{또 } S_8=54 \text{이므로 } \frac{a(1-r^8)}{1-r}=54$$

$$\therefore \frac{a(1-r^4)(1+r^4)}{1-r}=54 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8}$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$18(1+r^4)=54 \quad \therefore r^4=2$$

따라서 첫째항부터 제12항까지의 합은

$$\begin{aligned} \frac{a(1-r^{12})}{1-r} &= \frac{a(1-r^4)(1+r^4+r^8)}{1-r} \\ &= 18(1+2+2^2)=126 \end{aligned}$$

08-2 ㉔ 26

첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$)라 하면

$$S_n=18 \text{이므로 } \frac{a(1-r^n)}{1-r}=18 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{또 } S_{2n}=24 \text{이므로 } \frac{a(1-r^{2n})}{1-r}=24$$

$$\therefore \frac{a(1-r^n)(1+r^n)}{1-r}=24 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8}$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$18(1+r^n)=24 \quad \therefore r^n=\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{3n} &= \frac{a(1-r^{3n})}{1-r} = \frac{a(1-r^n)(1+r^n+r^{2n})}{1-r} \\ &= 18 \times \left\{ 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right\} = 26 \end{aligned}$$

09-1 ㉔ $a_n=2 \times 3^{n-1}$

$$S_n=3^n-1 \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) \\ &= 3^{n-1}(3 - 1) \\ &= 2 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 - 1 = 3^1 - 1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

09-2 ㉔ -36

$$S_n = 4 \times 3^{n+2} + k \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 4 \times 3^{n+2} + k - (4 \times 3^{n+1} + k) \\ &= 4 \times 3^{n+1}(3 - 1) \\ &= 8 \times 3^{n+1} \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 - 4 \times 3^3 + k = 108 + k \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값이 $\textcircled{8}$ 과 같아야 하므로

$$\begin{aligned} 8 \times 3^2 &= 108 + k, 72 = 108 + k \\ \therefore k &= -36 \end{aligned}$$

09-3 ㉔ 13

$$3S_n+1=10^n \text{에서 } S_n = \frac{10^n-1}{3}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{10^n-1}{3} - \frac{10^{n-1}-1}{3} \\ &= \frac{10^{n-1}}{3}(10-1) \\ &= 3 \times 10^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = \frac{10^1-1}{3} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 \times 10^{n-1}$$

따라서 $a=3, r=10$ 이므로

$$a+r=13$$

10-1 ㉡ (1) 3465000원 (2) 330만 원

(1) 연이율 5%, 1년마다 복리로 매년 초에 10만 원씩 20년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} & 10(1+0.05) + 10(1+0.05)^2 + \cdots + 10(1+0.05)^{20} \\ &= \frac{10(1+0.05)\{(1+0.05)^{20}-1\}}{(1+0.05)-1} \\ &= \frac{10 \times 1.05 \times 1.65}{0.05} \\ &= 346.5(\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 20년 말의 적립금의 원리합계는 3465000원이다.

(2) 연이율 5%, 1년마다 복리로 매년 말에 10만 원씩 20년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} & 10 + 10(1+0.05) + \cdots + 10(1+0.05)^{19} \\ &= \frac{10\{(1+0.05)^{20}-1\}}{(1+0.05)-1} \\ &= \frac{10 \times 1.65}{0.05} \\ &= 330(\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 20년 말의 적립금의 원리합계는 330만 원이다.

10-2 ㉡ 100만 원

매년 초에 적립해야 하는 금액을 a 만 원이라 하면 연이율 2%, 1년마다 복리로 매년 초에 5년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} & a(1+0.02) + a(1+0.02)^2 + \cdots + a(1+0.02)^5 \\ &= \frac{a(1+0.02)\{(1+0.02)^5-1\}}{(1+0.02)-1} \\ &= \frac{a \times 1.02 \times 0.1}{0.02} \\ &= 5.1a(\text{만 원}) \end{aligned}$$

이때 적립금의 원리합계가 510만 원이어야 하므로

$$5.1a = 510 \quad \therefore a = 100(\text{만 원})$$

따라서 매년 초에 100만 원씩 적립해야 한다.

1 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_5 = 4 \text{이므로 } ar^4 = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_7 = 4a_6 - 16 \text{이므로 } ar^6 = 4ar^5 - 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$4r^2 = 16r - 16, \quad r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$(r-2)^2 = 0 \quad \therefore r = 2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$a \times 2^4 = 4 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

따라서 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 2이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{1}{4} \times 2^{n-1}$$

$$\therefore a_8 = \frac{1}{4} \times 2^7 = 32$$

2 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3 + a_4 = 24 \text{에서}$$

$$ar^2 + ar^3 = 24 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또 $a_3 : a_4 = 2 : 1$ 에서 $2a_4 = a_3$ 이므로

$$2ar^3 = ar^2 \quad \therefore r = \frac{1}{2}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{4}a + \frac{1}{8}a = 24 \quad \therefore a = 64$$

따라서 첫째항이 64, 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{8}$$

3 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공비를 각각 r , s 라 하면

$$a_8b_8 = a_5r^3 \times b_5s^3 = a_5b_5(rs)^3$$

이때 $a_5b_5 = 10$, $a_8b_8 = 20$ 이므로

$$20 = 10(rs)^3 \quad \therefore (rs)^3 = 2$$

$$\therefore a_{11}b_{11} = a_8r^3 \times b_8s^3 = a_8b_8(rs)^3 = 20 \times 2 = 40$$

4 첫째항이 4, 공비가 3인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 4 \times 3^{n-1}$$

$$a_n > 10^{10} \text{에서 } 4 \times 3^{n-1} > 10^{10}$$

$$3^{n-1} > \frac{10^{10}}{4}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 3^{n-1} > \log \frac{10^{10}}{4}, \quad (n-1)\log 3 > 10\log 10 - \log 4$$

$$(n-1)\log 3 > 10 - 2\log 2$$

$$\therefore n > \frac{10 - 2\log 2}{\log 3} + 1 = \frac{10 - 2 \times 0.3}{0.48} + 1 = 20.5 \cdots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 21이다.

연습문제

198~200쪽

- | | | | | |
|----------------------|-----------------|-------------|-------|--------|
| 1 ① | 2 $\frac{1}{8}$ | 3 ④ | 4 21 | 5 ③ |
| 6 36 | 7 -8 | 8 8 | 9 ② | 10 6 |
| 11 ② | 12 ③ | 13 ④ | 14 7 | 15 425 |
| 16 $\neg, \sqsubset$ | 17 ④ | 18 2505000원 | 19 10 | |
| 20 ④ | 21 48000원 | | | |

- 5 공비를 r 라 하면 첫째항이 9, 제6항이 $\frac{32}{27}$ 이므로

$$9r^5 = \frac{32}{27}, r^5 = \frac{32}{243} \quad \therefore r = \frac{2}{3}$$

이때 x_2, x_3 은 각각 제3항, 제4항이므로

$$x_2 = 9r^2, x_3 = 9r^3$$

$$\therefore \frac{x_2}{x_3} = \frac{9r^2}{9r^3} = \frac{1}{r} = \frac{3}{2}$$

- 6 a 는 3과 b 의 등비중항이므로

$$a^2 = 3b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

①을 $\log_a 3b + \log_3 b = 5$ 에 대입하면

$$\log_a a^2 + \log_3 b = 5, 2 + \log_3 b = 5$$

$$\log_3 b = 3 \quad \therefore b = 3^3 = 27$$

이를 ⑦에 대입하면 $a^2 = 3 \times 27 = 81$

이때 a 는 로그의 밑이므로 $a \neq 1, a > 0$

$$\therefore a = 9$$

$$\therefore a + b = 9 + 27 = 36$$

- 7 다항식 $x^2 + ax - 2a$ 를 $P(x)$ 라 하면 다항식 $P(x)$ 를 $x-1, x-2, x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여 각각 $P(1), P(2), P(3)$ 과 같다.

$$\text{따라서 } p = P(1) = 1 - a, q = P(2) = 4,$$

$$r = P(3) = 9 + a$$

이때 q 는 p 와 r 의 등비중항이므로 $q^2 = pr$

$$\text{즉, } 4^2 = (1-a)(9+a), a^2 + 8a + 7 = 0$$

$$(a+7)(a+1) = 0 \quad \therefore a = -7 \text{ 또는 } a = -1$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-7 + (-1) = -8$$

- 8 곡선 $y = x^3 - 3x^2$ 과 직선 $y = 6x - k$ 의 세 교점의 x 좌표를 a, ar, ar^2 이라 하면 a, ar, ar^2 은 방정식 $x^3 - 3x^2 = 6x - k$, 즉 $x^3 - 3x^2 - 6x + k = 0$ 의 세 실근이다.

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = 3$$

$$\therefore a(1+r+r^2) = 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + a \times ar^2 = -6$$

$$\therefore a^2 r(1+r+r^2) = -6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$a \times ar \times ar^2 = -k$$

$$\therefore (ar)^3 = -k \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

⑧ $\div$ ⑦을 하면

$$\frac{a^2 r(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)} = \frac{-6}{3} \quad \therefore ar = -2$$

이를 ⑨에 대입하면

$$(-2)^3 = -k \quad \therefore k = 8$$

- 9 처음 선분의 길이가 81이므로

$$\text{첫 번째 시행 후 남은 선분의 길이의 합은 } 81 \times \frac{2}{3}$$

두 번째 시행 후 남은 선분의 길이의 합은

$$81 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 81 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

세 번째 시행 후 남은 선분의 길이의 합은

$$81 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = 81 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$\vdots$

$$n\text{번째 시행 후 남은 선분의 길이의 합은 } 81 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

따라서 20번째 시행 후 남은 선분의 길이의 합은

$$81 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{20} = 3^4 \times \frac{2^{20}}{3^{20}} = \frac{2^{20}}{3^{16}}$$

- 10 공비가 3, 제 n 항이 729이므로 첫째항을 a 라 하면

$$a \times 3^{n-1} = 729 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

첫째항부터 제 n 항까지의 합이 1092이므로

$$\frac{a(3^n - 1)}{3 - 1} = 1092 \quad \therefore a \times 3^n - a = 2184 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}\text{을 } \textcircled{8}\text{에 대입하면 } 729 \times 3 - a = 2184 \quad \therefore a = 3$$

이를 ⑦에 대입하면 $3 \times 3^{n-1} = 729, 3^n = 729$

$$\therefore n = 6$$

- 11 첫째항이 2, 공비가 -3 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 \times (-3)^{n-1}$$

$$3a_n - a_{n+1} = 3 \times 2 \times (-3)^{n-1} - 2 \times (-3)^n$$

$$= 2 \times (-3)^{n-1} \times \{3 - (-3)\}$$

$$= 12 \times (-3)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{3a_n - a_{n+1}\}$ 은 첫째항이 12, 공비가 -3 인

등비수열이므로 첫째항부터 제5항까지의 합은

$$\frac{12\{1 - (-3)^5\}}{1 - (-3)} = \frac{12\{1 - (-243)\}}{4} = 3 \times 244 = 732$$

- 12 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 a_6 = 1 \text{에서 } ar \times ar^5 = 1 \quad \therefore a^2 r^6 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$S_3 = 3a_3 \text{에서 } \frac{a(1-r^3)}{1-r} = 3ar^2$$

$$\frac{a(1-r)(1+r+r^2)}{1-r} = 3ar^2, 1+r+r^2 = 3r^2$$

$$2r^2 - r - 1 = 0, (2r+1)(r-1) = 0$$

$$\therefore r = -\frac{1}{2} (\because r < 0)$$

이를 ⑦에 대입하면

$$a^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = 1, a^2 = 64 \quad \therefore a = 8 (\because a > 0)$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 8, 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$a_7 = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{8}$$

13 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$S_{2k}=4S_k \text{에서 } \frac{S_{2k}}{S_k}=4 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{S_{2k}}{S_k} &= \frac{\frac{a(1-r^{2k})}{1-r}}{\frac{a(1-r^k)}{1-r}} = \frac{1-r^{2k}}{1-r^k} \\ &= \frac{(1-r^k)(1+r^k)}{1-r^k} \\ &= 1+r^k=4 \end{aligned}$$

$$\therefore r^k=3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{S_{3k}}{S_k} &= \frac{\frac{a(1-r^{3k})}{1-r}}{\frac{a(1-r^k)}{1-r}} = \frac{1-r^{3k}}{1-r^k} \\ &= \frac{(1-r^k)(1+r^k+r^{2k})}{1-r^k} \\ &= 1+r^k+r^{2k} \\ &= 1+3+3^2 (\because \textcircled{7}) \\ &= 13 \end{aligned}$$

14 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2=6, a_5=162 \text{이므로}$$

$$ar=6 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$ar^4=162 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ 을 $\textcircled{8}$ 에 대입하면

$$6r^3=162, r^3=27 \quad \therefore r=3$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$3a=6 \quad \therefore a=2$$

따라서 주어진 수열은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열
이므로

$$S_n = \frac{2(3^n-1)}{3-1} = 3^n - 1$$

$$S_n > 1000 \text{에서 } 3^n - 1 > 1000$$

$$3^n > 1001$$

그런데 n 은 자연수이고 $3^6=729$, $3^7=2187$ 이므로 구하
는 n 의 최솟값은 7이다.

15 첫째항을 a , 공비를 $r(r \neq 1)$ 라 하면

$$S_4=5 \text{이므로 } \frac{a(1-r^4)}{1-r}=5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$S_{12}=105 \text{이므로 } \frac{a(1-r^{12})}{1-r}=105$$

$$\therefore \frac{a(1-r^4)(1+r^4+r^8)}{1-r}=105 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ 을 $\textcircled{8}$ 에 대입하면

$$5(1+r^4+r^8)=105, 1+r^4+r^8=21$$

$$(r^4)^2+r^4-20=0, (r^4+5)(r^4-4)=0$$

$$\therefore r^4=4 (\because r^4 > 0) \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

따라서 첫째항부터 제16항까지의 합은

$$\begin{aligned} \frac{a(1-r^{16})}{1-r} &= \frac{a(1-r^8)(1+r^8)}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^4)(1+r^4)(1+r^8)}{1-r} \\ &= 5(1+4)(1+4^2) (\because \textcircled{7}, \textcircled{9}) \\ &= 425 \end{aligned}$$

16 $\neg$. $S_n=3^{n+1}-2$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3^{n+1} - 2 - (3^n - 2) \\ &= 3^n(3-1) = 2 \times 3^n \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 3^2 - 2 = 7 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같지 않으므로
일반항 a_n 은

$$a_1=7, a_n=2 \times 3^n (n \geq 2)$$

$\neg$. $a_1=7, a_n=2 \times 3^n (n \geq 2)$ 이므로

$$a_1+a_3=7+2 \times 3^3=7+54=61$$

$\neg$. $a_n=2 \times 3^n (n \geq 2)$ 이므로

$$a_{2n}=2 \times 3^{2n}=2 \times 9^n (n \geq 1)$$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 공비가 9인 등비수열이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

17 $\log_2(S_n+k)=n+2$ 에서 $S_n+k=2^{n+2}$

$$\therefore S_n=2^{n+2}-k$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2^{n+2} - k - (2^{n+1} - k) \\ &= 2^{n+1}(2-1) = 2^{n+1} \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2^3 - k = 8 - k \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{7}$ 에
 $n=1$ 을 대입한 값이 $\textcircled{8}$ 과 같아야 하므로

$$2^2=8-k, 4=8-k$$

$$\therefore k=4$$

18 월이율 0.2%, 1개월마다 복리로 매월 초에 10만 원씩 24
개월 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} &10(1+0.002)+10(1+0.002)^2+\dots+10(1+0.002)^{24} \\ &= \frac{10(1+0.002)\{(1+0.002)^{24}-1\}}{(1+0.002)-1} \\ &= \frac{10 \times 1.002 \times 0.05}{0.002} = 250.5(\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 24개월 말의 적립금의 원리합계는 2505000원이다.

- 19 첫째항이 1000, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

주어진 수열은 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로 1000부터 시작하여 항의 값이 감소하므로 1보다 큰 값이 나오는 마지막 항까지의 곱이 최대이다.

이때 제 n 항에서 1보다 큰 수가 나온다고 하면 $a_n > 1$ 에서 $1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 1, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > \frac{1}{1000}$

그런데 n 은 자연수이고 $\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}, \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$ 이므로 $n-1 \leq 9 \quad \therefore n \leq 10$

따라서 $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n$ 의 값이 최대가 되는 n 의 값은 10이다.

- 20 서로 다른 네 수를 a, ar, ar^2, ar^3 ($a \geq 10, r > 1$)이라 하면

$$ar^3 < 100, a < \frac{100}{r^3} \quad \therefore 10 \leq a < \frac{100}{r^3}$$

(i) $r=2$ 일 때,

$$10 \leq a < \frac{100}{8} = 12.5$$

$$\therefore a = 10, 11, 12$$

(ii) $r \geq 3$ 일 때,

$$\frac{100}{r^3} \leq \frac{100}{3^3} = 3.7 \dots \text{이므로}$$

$10 \leq a < \frac{100}{r^3}$ 을 만족시키는 두 자리의 자연수 a 는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 네 수의 합이 가장 클 때는 $r=2, a=12$ 일 때 이므로 그 합은

$$12 + 12 \times 2 + 12 \times 2^2 + 12 \times 2^3 = 180$$

- 21 100만 원의 24개월 동안의 원리합계는

$$100(1+0.008)^{24} = 100 \times 1.008^{24} = 120(\text{만 원})$$

또 이달 말부터 매달 a 만 원씩 24개월 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} & a + a(1+0.008) + a(1+0.008)^2 + \dots + a(1+0.008)^{23} \\ &= \frac{a\{(1+0.008)^{24}-1\}}{(1+0.008)-1} \\ &= \frac{a(1.2-1)}{0.008} = 25a(\text{만 원}) \end{aligned}$$

이때 적립금의 원리합계가 120만 원이어야 하므로

$$25a = 120 \quad \therefore a = 4.8(\text{만 원})$$

따라서 매달 지불해야 하는 금액은 48000원이다.

III-2 01 수열의 합

합의 기호 Σ 와 그 성질

개념 Check

203쪽

1 답 (1) $\sum_{k=1}^{15} k$ (2) $\sum_{k=1}^7 5$

(3) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$ (4) $\sum_{k=1}^n 3^k$

2 답 (1) $2+5+8+11+14+17$

(2) $3^5+3^6+3^7+\dots+3^{n+1}$

(3) $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

(4) $-1+2-3+\dots+10$

3 답 (1) 10 (2) 4 (3) 21 (4) 16

(1) $\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k$
 $= 7+3=10$

(2) $\sum_{k=1}^5 (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^5 a_k - \sum_{k=1}^5 b_k$
 $= 7-3=4$

(3) $\sum_{k=1}^5 3a_k = 3 \sum_{k=1}^5 a_k = 3 \times 7 = 21$

(4) $\sum_{k=1}^5 (2b_k + 2) = 2 \sum_{k=1}^5 b_k + \sum_{k=1}^5 2$
 $= 2 \times 3 + 2 \times 5 = 16$

문제

204~205쪽

01-1 답 381

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \dots + (a_{19} + a_{20}) \\ &= \sum_{k=1}^{20} a_k \\ &= 20^2 - 20 + 1 = 381 \end{aligned}$$

01-2 답 9

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{99} k(a_k - a_{k+1}) \\ &= (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \dots + 99(a_{99} - a_{100}) \\ &= a_1 + (2-1)a_2 + (3-2)a_3 + \dots + (99-98)a_{99} - 99a_{100} \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{99} - 99a_{100} \\ &= \sum_{k=1}^{99} a_k - 99a_{100} \\ &= 20 - 99 \times \frac{1}{9} = 9 \end{aligned}$$

01-3 ㉡ 60

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{14} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{15} a_{k-1} \\ &= a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{15} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{14}) \\ &= a_{15} - a_1 \\ &= 80 - 20 = 60 \end{aligned}$$

02-1 ㉡ (1) -100 (2) 51

$$\begin{aligned} (1) & \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 1)^2 - \sum_{k=1}^{10} (a_k + 3)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{10} \{ (2a_k - 1)^2 - (a_k + 3)^2 \} \\ &= \sum_{k=1}^{10} (3a_k^2 - 10a_k - 8) \\ &= 3 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - 10 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} 8 \\ &= 3 \times 10 - 10 \times 5 - 8 \times 10 = -100 \\ (2) & \sum_{k=1}^{15} (a_k - 2) = 7 \text{에서 } \sum_{k=1}^{15} a_k - \sum_{k=1}^{15} 2 = 7 \\ & \sum_{k=1}^{15} a_k - 2 \times 15 = 7 \\ & \therefore \sum_{k=1}^{15} a_k = 37 \\ & \sum_{k=1}^{15} (2a_k - b_k) = 60 \text{에서 } 2 \sum_{k=1}^{15} a_k - \sum_{k=1}^{15} b_k = 60 \\ & \text{이때 } \sum_{k=1}^{15} a_k = 37 \text{이므로} \\ & 2 \times 37 - \sum_{k=1}^{15} b_k = 60 \\ & \therefore \sum_{k=1}^{15} b_k = 14 \\ & \therefore \sum_{k=1}^{15} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{15} a_k + \sum_{k=1}^{15} b_k \\ &= 37 + 14 = 51 \end{aligned}$$

02-2 ㉡ 36

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{12} a_k = \alpha, \sum_{k=1}^{12} b_k = \beta \text{라 하면} \\ & \sum_{k=1}^{12} (a_k + b_k) = 18 \text{에서 } \sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^{12} b_k = 18 \\ & \therefore \alpha + \beta = 18 \quad \text{..... ㉠} \\ & \sum_{k=1}^{12} (a_k - b_k) = 6 \text{에서 } \sum_{k=1}^{12} a_k - \sum_{k=1}^{12} b_k = 6 \\ & \therefore \alpha - \beta = 6 \quad \text{..... ㉡} \\ & \text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면} \\ & \alpha = 12, \beta = 6 \\ & \text{따라서 } \sum_{k=1}^{12} a_k = 12, \sum_{k=1}^{12} b_k = 6 \text{이므로} \\ & \sum_{k=1}^{12} (3a_k - 2b_k + 1) = 3 \sum_{k=1}^{12} a_k - 2 \sum_{k=1}^{12} b_k + \sum_{k=1}^{12} 1 \\ &= 3 \times 12 - 2 \times 6 + 12 \\ &= 36 \end{aligned}$$

2 자연수의 거듭제곱의 합

개념 Check

206쪽

1 ㉡ (1) 240 (2) 294 (3) 399

$$\begin{aligned} (1) & \sum_{k=1}^{15} 2k = 2 \sum_{k=1}^{15} k = 2 \times \frac{15 \times 16}{2} = 240 \\ (2) & \sum_{k=1}^9 (k^2 + 1) = \sum_{k=1}^9 k^2 + \sum_{k=1}^9 1 \\ &= \frac{9 \times 10 \times 19}{6} + 1 \times 9 = 294 \\ (3) & \sum_{k=1}^6 (k^3 - 2k) = \sum_{k=1}^6 k^3 - 2 \sum_{k=1}^6 k \\ &= \left(\frac{6 \times 7}{2} \right)^2 - 2 \times \frac{6 \times 7}{2} = 399 \end{aligned}$$

문제

207~210쪽

03-1 ㉡ (1) 624 (2) 119

$$\begin{aligned} (1) & \sum_{k=1}^{12} (k+2)^2 - \sum_{k=1}^{12} (k-2)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{12} \{ (k+2)^2 - (k-2)^2 \} \\ &= \sum_{k=1}^{12} 8k = 8 \sum_{k=1}^{12} k = 8 \times \frac{12 \times 13}{2} = 624 \\ (2) & \sum_{k=1}^9 \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2}{k} \\ &= \sum_{k=1}^9 \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\ &= \sum_{k=1}^9 \frac{(k+1)(2k+1)}{6} \\ &= \sum_{k=1}^9 \frac{2k^2 + 3k + 1}{6} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^9 k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^9 k + \sum_{k=1}^9 \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{9 \times 10 \times 19}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{9 \times 10}{2} + \frac{1}{6} \times 9 \\ &= 95 + \frac{45}{2} + \frac{3}{2} = 119 \end{aligned}$$

03-2 ㉡ 7

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^5 (4k^3 - a) = 4 \sum_{k=1}^5 k^3 - \sum_{k=1}^5 a \\ &= 4 \times \left(\frac{5 \times 6}{2} \right)^2 - 5a \\ &= 900 - 5a \\ & \text{이때 } \sum_{k=1}^5 (4k^3 - a) = 865 \text{이므로} \\ & 865 = 900 - 5a, 5a = 35 \\ & \therefore a = 7 \end{aligned}$$

03-3 ㉡ 345

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_k + \beta_k = k, \alpha_k \beta_k = 2 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \alpha_k^2 + \beta_k^2 &= (\alpha_k + \beta_k)^2 - 2\alpha_k \beta_k \\ &= k^2 - 2 \times 2 = k^2 - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) &= \sum_{k=1}^{10} (k^2 - 4) \\ &= \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{10} 4 \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 4 \times 10 \\ &= 345 \end{aligned}$$

04-1 ㉡ (1) $\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

(2) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(1) 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n(n+2) = n^2 + 2n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k) \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} \end{aligned}$$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) \\ &= \sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

04-2 ㉡ 502

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\ &= \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1 \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 8항까지의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 a_k &= \sum_{k=1}^8 (2^k - 1) = \sum_{k=1}^8 2^k - \sum_{k=1}^8 1 \\ &= \frac{2(2^8 - 1)}{2 - 1} - 8 = 502 \end{aligned}$$

05-1 ㉡ (1) 825 (2) $5n(n+12)$

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=1}^5 \left(\sum_{j=1}^5 j k^2 \right) &= \sum_{k=1}^5 \left(k^2 \sum_{j=1}^5 j \right) \\ &= \sum_{k=1}^5 \left(k^2 \times \frac{5 \times 6}{2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^5 15k^2 = 15 \sum_{k=1}^5 k^2 \\ &= 15 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} \\ &= 825 \\ (2) \sum_{l=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^{10} (k+l) \right\} &= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} l \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \left(\frac{10 \times 11}{2} + 10l \right) \\ &= \sum_{l=1}^n (10l + 55) \\ &= 10 \sum_{l=1}^n l + \sum_{l=1}^n 55 \\ &= 10 \times \frac{n(n+1)}{2} + 55n \\ &= 5n^2 + 60n \\ &= 5n(n+12) \end{aligned}$$

05-2 ㉡ 4

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=1}^l 6 \right) \right\} &= \sum_{m=1}^n \left(\sum_{l=1}^m 6l \right) \\ &= \sum_{m=1}^n \left(6 \sum_{l=1}^m l \right) \\ &= \sum_{m=1}^n \left\{ 6 \times \frac{m(m+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{m=1}^n (3m^2 + 3m) \\ &= 3 \sum_{m=1}^n m^2 + 3 \sum_{m=1}^n m \\ &= 3 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &\quad + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

즉, $n(n+1)(n+2) = 120$ 이므로

$$n(n+1)(n+2) = 4 \times 5 \times 6 \quad \therefore n = 4$$

06-1 ㉡ 1040

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 2n \quad \cdots \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

이때 ㉔은 ㉑에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n=2n$

따라서 $a_{2k}=2 \times 2k=4k$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12} (k-5)a_{2k} &= \sum_{k=1}^{12} (k-5) \times 4k \\ &= \sum_{k=1}^{12} (4k^2 - 20k) \\ &= 4 \sum_{k=1}^{12} k^2 - 20 \sum_{k=1}^{12} k \\ &= 4 \times \frac{12 \times 13 \times 25}{6} - 20 \times \frac{12 \times 13}{2} \\ &= 2600 - 1560 = 1040\end{aligned}$$

06-2 ㉔ $\frac{1}{3}(4^{15}-1)$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2^n - 1$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2^n - 1 - (2^{n-1} - 1) \\ &= 2^{n-1} \quad \dots\dots ㉑\end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1 \quad \dots\dots ㉒$$

이때 ㉔은 ㉑에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n=2^{n-1}$

따라서 $a_{2k+1}=2^{(2k+1)-1}=2^{2k}=4^k$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{a_{2k+1}}{4} = \sum_{k=1}^{15} 4^{k-1} = \frac{1(4^{15}-1)}{4-1} = \frac{1}{3}(4^{15}-1)$$

06-3 ㉔ 230

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} = \frac{n}{n+1}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{n} &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2+n} \quad \dots\dots ㉑\end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$\frac{a_1}{1} = S_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉒$$

이때 ㉔은 ㉑에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{n} &= \frac{1}{n^2+n} \quad \therefore a_n = \frac{n}{n^2+n} = \frac{1}{n+1} \\ \therefore \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^{20} (k+1) = \sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} 1 \\ &= \frac{20 \times 21}{2} + 1 \times 20 \\ &= 210 + 20 = 230\end{aligned}$$

3 여러 가지 수열의 합

개념 Check

211쪽

1 ㉔ (1) $\frac{10}{39}$ (2) $4-\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}(1) \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(k+2)(k+3)} &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{13} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{13} = \frac{10}{39} \\ (2) \sum_{k=1}^{13} \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+3}} &= \sum_{k=1}^{13} (\sqrt{k+3} - \sqrt{k+2}) \\ &= (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + \dots + (\sqrt{16} - \sqrt{15}) \\ &= \sqrt{16} - \sqrt{3} = 4 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

문제

212~214쪽

07-1 ㉔ $\frac{n}{4(n+1)}$

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{(2n+1)^2-1} = \frac{1}{4n^2+4n} \\ \therefore \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2+4k} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n}{4(n+1)}\end{aligned}$$

07-2 ㉔ $\frac{9}{5}$

수열 $1, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, \dots, \frac{1}{1+2+3+\dots+9}$ 의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)} \\ \therefore \sum_{k=1}^9 a_k &= \sum_{k=1}^9 \frac{2}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^9 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \right\} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{10} \right) = \frac{9}{5}\end{aligned}$$

07-3 ㉡ 5/12

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 3n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 3n - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ = 2n + 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \times 1 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 ㉡은 ㉡에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n

은 $a_n = 2n + 2$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{4}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{4}{(2k+2)(2k+4)} \\ = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

08-1 ㉡ 5

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \\ \therefore \sum_{k=1}^{60} a_k = \sum_{k=1}^{60} \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}} \\ = \sum_{k=1}^{60} \frac{\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})} \\ = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{60} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \\ = \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) \\ + \dots + (\sqrt{121} - \sqrt{119}) \} \\ = \frac{1}{2} (-1 + 11) = 5$$

08-2 ㉡ $2\sqrt{3}$

첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{36} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \\ = \sum_{k=1}^{36} \frac{1}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k+3}} \\ = \sum_{k=1}^{36} \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k+3}}{(\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k+3})(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k+3})} \\ = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{36} (\sqrt{2k+3} - \sqrt{2k+1}) \\ = \frac{1}{2} \{ (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + (\sqrt{9} - \sqrt{7}) \\ + \dots + (\sqrt{75} - \sqrt{73}) \} \\ = \frac{1}{2} (-\sqrt{3} + 5\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

08-3 ㉡ 30

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} \\ = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2})} \\ = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\ = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) \\ + \dots + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \\ = -\sqrt{2} + \sqrt{n+2}$$

이때 $-\sqrt{2} + \sqrt{n+2} = 3\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{n+2} = 4\sqrt{2}, \quad n+2 = 32$$

$$\therefore n = 30$$

09-1 ㉡ (1) 3 (2) $\log \frac{4}{3}$

$$(1) \sum_{k=1}^{13} \log_3 \frac{2k+1}{2k-1} \\ = \log_3 \frac{3}{1} + \log_3 \frac{5}{3} + \log_3 \frac{7}{5} + \dots + \log_3 \frac{27}{25} \\ = \log_3 \left(\frac{3}{1} \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{5} \times \dots \times \frac{27}{25} \right) \\ = \log_3 27 = 3 \\ (2) \sum_{k=2}^8 \log \sqrt{\frac{k^2}{k^2-1}} \\ = \sum_{k=2}^8 \log \sqrt{\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}} \\ = \log \sqrt{\frac{2 \times 2}{1 \times 3}} + \log \sqrt{\frac{3 \times 3}{2 \times 4}} + \log \sqrt{\frac{4 \times 4}{3 \times 5}} \\ + \dots + \log \sqrt{\frac{8 \times 8}{7 \times 9}} \\ = \log \left(\sqrt{\frac{2 \times 2}{1 \times 3}} \times \sqrt{\frac{3 \times 3}{2 \times 4}} \times \sqrt{\frac{4 \times 4}{3 \times 5}} \times \dots \times \sqrt{\frac{8 \times 8}{7 \times 9}} \right) \\ = \log \sqrt{\frac{2}{1} \times \frac{8}{9}} = \log \frac{4}{3}$$

09-2 ㉡ 4

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \log_2 (n^2 + n)$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} \\ = \log_2 (n^2 + n) - \log_2 \{ (n-1)^2 + (n-1) \} \\ = \log_2 (n^2 + n) - \log_2 (n^2 - n) \\ = \log_2 \frac{n^2 + n}{n^2 - n} \\ = \log_2 \frac{n+1}{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = \log_2(1^2 + 1) = 1$$

이때 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값은 존재하지 않으므로 일반항 a_n 은

$$a_1 = 1, a_n = \log_2 \frac{n+1}{n-1} \quad (n \geq 2)$$

따라서 $a_{2k+1} = \log_2 \frac{k+1}{k} \quad (k \geq 1)$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} a_{2k+1} &= \sum_{k=1}^{15} \log_2 \frac{k+1}{k} \\ &= \log_2 \frac{2}{1} + \log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{3} + \cdots + \log_2 \frac{16}{15} \\ &= \log_2 \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{16}{15} \right) \\ &= \log_2 16 = 4 \end{aligned}$$

연습문제

216~219쪽

1 ②	2 ③	3 ②	4 13	5 100
6 ④	7 ②	8 91	9 ③	10 ③
11 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$	12 ②	13 ②	14 ③	
15 $\frac{72}{55}$	16 ⑤	17 ①	18 18	19 ③
20 ③	21 1240	22 ④	23 ⑤	24 690
25 42				

1. ㄱ. $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$

ㄴ. $\sum_{k=1}^n 3^k = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n$

$$\sum_{k=2}^{n+1} 3^k = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{n+1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n 3^k \neq \sum_{k=2}^{n+1} 3^k$$

ㄷ. $\sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{j=m}^n a_j$
 $= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) + (a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)$
 $= \sum_{k=1}^n a_k \quad (\text{단, } n \geq m \geq 2)$

ㄹ. $\sum_{k=1}^n (a_{3k} + a_{3k+1} + a_{3k+2})$
 $= a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2}$
 $\sum_{k=3}^{3n} a_k = a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{3n}$

$$\therefore \sum_{k=1}^n (a_{3k} + a_{3k+1} + a_{3k+2}) \neq \sum_{k=3}^{3n} a_k$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2. $\sum_{k=1}^{100} ka_k = 600$ 에서
 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 100a_{100} = 600 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$\sum_{k=1}^{99} ka_{k+1} = 300 \text{에서}$$

$$a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \cdots + 99a_{100} = 300 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠-㉡을 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 300$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{100} a_k = 300$$

3. $\sum_{k=1}^{40} (a_k + a_{k+1})$
 $= (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{40} + a_{41})$
 $= a_1 + 2(a_2 + a_3 + \cdots + a_{40}) + a_{41}$
 $= 2 \sum_{k=1}^{40} a_k - a_1 + a_{41} = 30 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\sum_{k=1}^{20} (a_{2k-1} + a_{2k}) = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{39} + a_{40})$
 $= \sum_{k=1}^{40} a_k = 10$

이를 ㉠에 대입하면

$$2 \times 10 - a_1 + a_{41} = 30$$

$$\therefore a_1 - a_{41} = -10$$

4. $\sum_{k=1}^5 ca_k = 65 + \sum_{k=1}^5 c$ 에서 $c \sum_{k=1}^5 a_k = 65 + \sum_{k=1}^5 c$

이때 $\sum_{k=1}^5 a_k = 10$ 이므로

$$10c = 65 + 5c, 5c = 65$$

$$\therefore c = 13$$

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_3 = 7, a_{12} = 25$ 이므로
 $a_1 + 2d = 7, a_1 + 11d = 25$

두 식을 연립하여 풀면

$$a_1 = 3, d = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{50} a_{2k} - \sum_{k=1}^{50} a_{2k-1} = \sum_{k=1}^{50} (a_{2k} - a_{2k-1})$$

$$= 50d = 50 \times 2 = 100$$

다른 풀이

㉠에서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1$$

따라서 $a_{2k} = 4k + 1, a_{2k-1} = 4k - 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{50} a_{2k} - \sum_{k=1}^{50} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{50} (a_{2k} - a_{2k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{50} \{(4k+1) - (4k-1)\} \\ &= \sum_{k=1}^{50} 2 = 50 \times 2 = 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6 \quad & \sum_{k=1}^{20} (2a_k + b_k)^2 + \sum_{k=1}^{20} (a_k - 2b_k)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{20} \{ (2a_k + b_k)^2 + (a_k - 2b_k)^2 \} \\
&= \sum_{k=1}^{20} (5a_k^2 + 5b_k^2) \\
&= 5 \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 + b_k^2) \\
&\therefore 5 \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 + b_k^2) = 1000 \text{ 이므로 } \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 + b_k^2) = 200 \\
&\therefore \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 + b_k^2 + 1) = \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 + b_k^2) + \sum_{k=1}^{20} 1 \\
&\quad = 200 + 1 \times 20 = 220
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7 \quad & \sum_{k=2}^{20} \frac{k^3}{k-1} - \sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k-1} \\
&= \sum_{k=2}^{20} \frac{k^3 - 1}{k-1} \\
&= \sum_{k=2}^{20} \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{k-1} \\
&= \sum_{k=2}^{20} (k^2 + k + 1) \\
&= \sum_{k=1}^{20} (k^2 + k + 1) - (1^2 + 1 + 1) \\
&= \sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} 1 - 3 \\
&= \frac{20 \times 21 \times 41}{6} + \frac{20 \times 21}{2} + 1 \times 20 - 3 \\
&= 2870 + 210 + 20 - 3 = 3097
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8 \quad & \text{나머지정리에 의하여} \\
& a_n = 2n^2 - 3n + 1 \\
& \therefore \sum_{n=1}^7 (a_n - n^2 + n) = \sum_{n=1}^7 (2n^2 - 3n + 1 - n^2 + n) \\
&= \sum_{n=1}^7 (n^2 - 2n + 1) \\
&= \sum_{n=1}^7 n^2 - 2 \sum_{n=1}^7 n + \sum_{n=1}^7 1 \\
&= \frac{7 \times 8 \times 15}{6} - 2 \times \frac{7 \times 8}{2} + 1 \times 7 \\
&= 140 - 56 + 7 = 91
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9 \quad & \sum_{k=1}^{11} (k-a)(2k-a) \\
&= \sum_{k=1}^{11} (2k^2 - 3ak + a^2) \\
&= 2 \sum_{k=1}^{11} k^2 - 3a \sum_{k=1}^{11} k + \sum_{k=1}^{11} a^2 \\
&= 2 \times \frac{11 \times 12 \times 23}{6} - 3a \times \frac{11 \times 12}{2} + a^2 \times 11 \\
&= 11a^2 - 198a + 1012 = 11(a-9)^2 + 121 \\
&\text{따라서 } a=9 \text{ 일 때 최솟값 } 121 \text{ 을 가지므로 } a=9
\end{aligned}$$

10 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 = 1 \times 1 \\
a_2 &= 2 + 4 = 2(1+2) \\
a_3 &= 3 + 6 + 9 = 3(1+2+3) \\
a_4 &= 4 + 8 + 12 + 16 = 4(1+2+3+4) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore a_n &= n(1+2+3+\cdots+n) \\
&= n \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3 + n^2}{2}
\end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{15} a_k &= \sum_{k=1}^{15} \frac{k^3 + k^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{15} k^3 + \sum_{k=1}^{15} k^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{15 \times 16}{2} \right)^2 + \frac{15 \times 16 \times 31}{6} \right\} \\
&= \frac{1}{2} (14400 + 1240) = 7820
\end{aligned}$$

11 수열 $1 \times n, 2 \times (n-1), 3 \times (n-2), \dots, n \times 1$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$\begin{aligned}
a_k &= k \times \{n - (k-1)\} = -k^2 + (n+1)k \\
\therefore 1 \times n + 2 \times (n-1) + 3 \times (n-2) + \cdots + n \times 1 \\
&= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \{-k^2 + (n+1)k\} \\
&= -\sum_{k=1}^n k^2 + (n+1) \sum_{k=1}^n k \\
&= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12 \quad & \sum_{k=1}^{10} \left\{ \sum_{m=1}^n 2^m (2k-1) \right\} = \sum_{k=1}^{10} \left\{ (2k-1) \sum_{m=1}^n 2^m \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{10} \left\{ (2k-1) \times \frac{2(2^n-1)}{2-1} \right\} \\
&= 2(2^n-1) \sum_{k=1}^{10} (2k-1) \\
&= 2(2^n-1) \left(2 \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 1 \right) \\
&= 2(2^n-1) \left(2 \times \frac{10 \times 11}{2} - 1 \times 10 \right) \\
&= 200(2^n-1)
\end{aligned}$$

$$\therefore a = 200$$

$$13 \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n(n+2) = n^2 + 2n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\
&= 2n + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}
\end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \times 1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

이때 $\textcircled{L}$ 은 $\textcircled{I}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 2n + 1$

따라서 $a_{2k} = 2 \times 2k + 1 = 4k + 1$,

$a_{k+1} = 2(k+1) + 1 = 2k + 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 ka_{2k} + \sum_{k=1}^5 a_{k+1} &= \sum_{k=1}^5 k(4k+1) + \sum_{k=1}^5 (2k+3) \\ &= \sum_{k=1}^5 \{(4k^2+k) + (2k+3)\} \\ &= \sum_{k=1}^5 (4k^2+3k+3) \\ &= 4 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + 3 \times \frac{5 \times 6}{2} + 15 \\ &= 220 + 45 + 15 = 280 \end{aligned}$$

14 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 5^n - 1$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (5^n - 1) - (5^{n-1} - 1) \\ &= 4 \times 5^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{I} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 5^1 - 1 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

이때 $\textcircled{L}$ 은 $\textcircled{I}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 4 \times 5^{n-1}$

따라서 $a_{2k} = 4 \times 5^{2k-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{a_{2k}}{a_k} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{4 \times 5^{2k-1}}{4 \times 5^{k-1}} = \sum_{k=1}^{10} 5^k \\ &= \frac{5(5^{10}-1)}{5-1} \\ &= \frac{5}{4}(5^{10}-1) \end{aligned}$$

15 $x^2 + 2x - n^2 + 1 = 0$ 의 두 근이 a_n, b_n 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n + b_n = -2, \quad a_n b_n = -n^2 + 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k} \right) &= \sum_{k=2}^{10} \frac{a_k + b_k}{a_k b_k} = \sum_{k=2}^{10} \frac{2}{k^2 - 1} \\ &= \sum_{k=2}^{10} \frac{2}{(k-1)(k+1)} \\ &= \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{72}{55} \end{aligned}$$

16
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (S_k - a_k) &= \sum_{k=1}^{10} S_k - \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} S_k - S_{10} = \sum_{k=1}^9 S_k \\ &= \sum_{k=1}^9 \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^9 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

17 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 + n$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 + n - \{2(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 4n - 1 \quad \dots\dots \textcircled{I} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 + 1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

이때 $\textcircled{L}$ 은 $\textcircled{I}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 4n - 1$

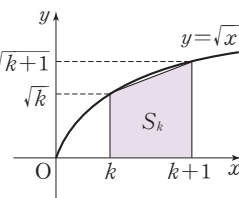
$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{80} \frac{2}{\sqrt{a_k+1} + \sqrt{a_{k+1}+1}} &= \sum_{k=1}^{80} \frac{2}{\sqrt{4k+4} + \sqrt{4k+8}} = \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^{80} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2})} \\ &= \sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}) \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{81} - \sqrt{80}) \\ &= -1 + 9 = 8 \end{aligned}$$

18 오른쪽 그림과 같이 네 점

$(k, 0), (k+1, 0), (k, \sqrt{k}), (k+1, \sqrt{k+1})$ 을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이 S_k 는

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{2} \times (\sqrt{k} + \sqrt{k+1}) \times 1 \\ &= \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{S_k} &= \sum_{k=1}^{99} \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{99} \frac{2(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{99} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= 2\{(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \\ &\quad + \dots + (\sqrt{100} - \sqrt{99})\} \\ &= 2(-1 + 10) = 18 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 19 \quad & \sum_{k=1}^{30} \log_5 \{ \log_{k+1} (k+2) \} \\
 &= \log_5 (\log_2 3) + \log_5 (\log_3 4) + \log_5 (\log_4 5) \\
 &\quad + \cdots + \log_5 (\log_{31} 32) \\
 &= \log_5 (\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \cdots \times \log_{31} 32) \\
 &= \log_5 \left(\frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 4}{\log 3} \times \frac{\log 5}{\log 4} \times \cdots \times \frac{\log 32}{\log 31} \right) \\
 &= \log_5 \left(\frac{\log 32}{\log 2} \right) = \log_5 (\log_2 32) = \log_5 5 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20 \quad & \sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} \text{에서 } a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10} \text{의} \\
 & \text{각 항의 값은 } 0, 1, 3 \text{ 중 하나이므로 항의 값이 } 1 \text{인 항의} \\
 & \text{개수를 } a, \text{ 항의 값이 } 3 \text{인 항의 개수를 } b \text{라 하면} \\
 & \sum_{k=1}^{10} a_k = 10 \text{에서 } 1 \times a + 3 \times b = 10 \\
 & \therefore a + 3b = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\
 & \sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 22 \text{에서 } 1^2 \times a + 3^2 \times b = 22 \\
 & \therefore a + 9b = 22 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\
 & \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면} \\
 & a = 4, b = 2 \\
 & \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k^3 = 1^3 \times 4 + 3^3 \times 2 = 58
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21 \quad & \text{각 행에 나열된 모든 수의 합을 구해 보면} \\
 & a_1 = 1 = 1^2 \\
 & a_2 = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2 \\
 & a_3 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 = 3^2 \\
 & a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16 = 4^2 \\
 & \vdots \\
 & a_n = n^2 \\
 & \therefore \sum_{k=1}^{15} a_k = \sum_{k=1}^{15} k^2 = \frac{15 \times 16 \times 31}{6} = 1240
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 22 \quad & \sum_{k=1}^{30} (-1)^{k+1} a_k \\
 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{29} - a_{30} \\
 &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29} + a_{30} - 2(a_2 + a_4 + \cdots + a_{30}) \\
 &= \sum_{k=1}^{30} a_k - 2 \sum_{k=1}^{15} a_{2k} \\
 &= (4 \times 15^2 + 15) - 2(2 \times 15^2 - 1) = 17
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 23 \quad & \text{등차수열 } \{a_n\} \text{의 첫째항을 } a, \text{ 공차를 } d \text{라 하면} \\
 & \text{조건 (가)에서 } a + 6d = 37 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\
 & \text{조건 (나)에서 } a_{13} \geq 0, a_{14} \leq 0 \text{이므로} \\
 & a_{13} \geq 0 \text{에서 } a_7 + 6d \geq 0, 37 + 6d \geq 0 \quad \therefore d \geq -\frac{37}{6} \\
 & a_{14} \leq 0 \text{에서 } a_7 + 7d \leq 0, 37 + 7d \leq 0 \quad \therefore d \leq -\frac{37}{7}
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{37}{6} \leq d \leq -\frac{37}{7} \text{이고 } d \text{는 정수이므로}$$

$$\begin{aligned}
 d &= -6 \\
 \text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \\
 a + 6 \times (-6) &= 37 \quad \therefore a = 73 \\
 \therefore \sum_{k=1}^{21} |a_k| &= |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{21}| \\
 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{13} \\
 &\quad + (-a_{14}) + (-a_{15}) + \cdots + (-a_{21}) \\
 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{13} - (a_{14} + a_{15} + \cdots + a_{21}) \\
 &\quad \cdots \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{이때 } a_{13} &= 73 + 12 \times (-6) = 1, \\
 a_{14} &= 73 + 13 \times (-6) = -5, \\
 a_{21} &= 73 + 20 \times (-6) = -47 \text{이므로} \\
 \textcircled{2} \text{에서} \\
 \sum_{k=1}^{21} |a_k| &= \frac{13(73+1)}{2} - \frac{8\{-5+(-47)\}}{2} \\
 &= 481 - (-208) = 689
 \end{aligned}$$

$$24 \quad \text{수열 } \{na_n\} \text{의 첫째항부터 제 } n \text{항까지의 합 } S_n \text{은}$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= n(n+1)(n+2) \\
 \text{(i) } n \geq 2 \text{일 때,} \\
 na_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) \\
 &= 3n(n+1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii) } n = 1 \text{일 때,} \\
 a_1 &= S_1 = 1 \times 2 \times 3 = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\
 \text{이때 } \textcircled{2} \text{은 } \textcircled{1} \text{에 } n = 1 \text{을 대입한 값과 같으므로 일반항 } na_n \text{은} \\
 na_n &= 3n(n+1) \quad \therefore a_n = 3(n+1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} + a_{2k}) \\
 &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{19} + a_{20}) \\
 &= \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} 3(k+1) = 3 \sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} 3 \\
 &= 3 \times \frac{20 \times 21}{2} + 3 \times 20 = 690
 \end{aligned}$$

$$25 \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{4k-3}{a_k} = 2n^2 + 7n \text{에 대하여 } n \geq 2 \text{일 때,}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{4n-3}{a_n} &= S_n - S_{n-1} \\
 &= (2n^2 + 7n) - \{2(n-1)^2 + 7(n-1)\} \\
 &= 4n + 5
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } a_n = \frac{4n-3}{4n+5} \quad (n \geq 2) \text{이므로}$$

$$a_5 = \frac{4 \times 5 - 3}{4 \times 5 + 5} = \frac{17}{25}$$

$$\text{따라서 } p = 17, q = 25 \text{이므로 } p + q = 42$$

III-2 02 수학적 귀납법

수열의 귀납적 정의

문제

221~227쪽

01-1 ㉡ (1) -13 (2) 47

(1) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 5, 공차가 -2인 등차수열이므로

일반항 a_n 은

$$a_n = 5 + (n-1) \times (-2) = -2n + 7$$

$$\therefore a_{10} = -2 \times 10 + 7 = -13$$

(2) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 5인 등차수열이므로

일반항 a_n 은

$$a_n = 2 + (n-1) \times 5 = 5n - 3$$

$$\therefore a_{10} = 5 \times 10 - 3 = 47$$

01-2 ㉡ 20

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 -2, 공차가 6인 등차수열이므로

일반항 a_n 은

$$a_n = -2 + (n-1) \times 6 = 6n - 8$$

$$\text{이때 } a_k = 112 \text{에서 } 6k - 8 = 112 \quad \therefore k = 20$$

01-3 ㉡ 55

$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$, 즉 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

공차를 d 라 하면 $a_1 = 20$, $a_4 = 11$ 이므로

$$20 + 3d = 11 \quad \therefore d = -3$$

따라서 주어진 수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 20 + (n-1) \times (-3) = -3n + 23$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{11} a_k = \sum_{k=1}^{11} (-3k + 23) = -3 \sum_{k=1}^{11} k + \sum_{k=1}^{11} 23$$

$$= -3 \times \frac{11 \times 12}{2} + 23 \times 11 = -198 + 253 = 55$$

다른 풀이

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 20, 공차가 -3인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{11} a_k = \frac{11 \{2 \times 20 + (11-1) \times (-3)\}}{2} = 55$$

02-1 ㉡ (1) 2×5^{11} (2) 2048

(1) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 5인 등비수열이므로

일반항 a_n 은

$$a_n = 2 \times 5^{n-1} \quad \therefore a_{12} = 2 \times 5^{11}$$

(2) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 -1, 공비가 -2인 등비수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -1 \times (-2)^{n-1} \quad \therefore a_{12} = -1 \times (-2)^{11} = 2048$$

02-2 ㉡ 6

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로 일

반항 a_n 은 $a_n = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$$\text{이때 } a_k = \frac{1}{512} \text{에서 } 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{512}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{1024} = \left(\frac{1}{4}\right)^5$$

$$k-1=5 \quad \therefore k=6$$

02-3 ㉡ $3^{16}-3$

$$\log a_{n+1} = \frac{1}{2}(\log a_n + \log a_{n+2}) \text{에서}$$

$$2 \log a_{n+1} = \log a_n a_{n+2}$$

$$\log a_{n+1}^2 = \log a_n a_{n+2}$$

$$\therefore a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 6, 공비가 3인 등비수열이므로

$$\sum_{k=1}^{15} a_k = \frac{6(3^{15}-1)}{3-1} = 3^{16}-3$$

03-1 ㉡ 393

$a_{n+1} = a_n + 4n - 2$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + 4 \times 1 - 2$$

$$a_3 = a_2 + 4 \times 2 - 2$$

$$a_4 = a_3 + 4 \times 3 - 2$$

$\vdots$

$$+) \quad a_n = a_{n-1} + 4 \times (n-1) - 2$$

$$a_n = a_1 + 4\{1+2+3+\dots+(n-1)\} - 2(n-1)$$

$$\therefore a_n = a_1 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} k - 2(n-1)$$

$$= 1 + 4 \times \frac{(n-1)n}{2} - 2(n-1)$$

$$= 2n^2 - 4n + 3$$

$$\therefore a_{15} = 2 \times 15^2 - 4 \times 15 + 3 = 393$$

03-2 ㉡ 제7항

$$a_{n+1} - a_n = 3^n \text{에서 } a_{n+1} = a_n + 3^n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + 3$$

$$a_3 = a_2 + 3^2$$

$$a_4 = a_3 + 3^3$$

$\vdots$

$$+) \quad a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}$$

$$a_n = a_1 + (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{n-1})$$

$$\begin{aligned}\therefore a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 1 + \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} \\ &= \frac{1}{2}(3^n - 1)\end{aligned}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 제 k 항을 1093이라 하면

$$\frac{1}{2}(3^k - 1) = 1093$$

$$3^k = 2187 = 3^7 \quad \therefore k = 7$$

따라서 1093은 제7항이다.

03-3 [답] $\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \text{에서} \\ a_{n+1} &= a_n + \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} \\ &= a_n + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)\end{aligned}$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후
변끼리 모두 더하면

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1 + \sqrt{2} - \sqrt{1} \\ a_3 &= a_2 + \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ a_4 &= a_3 + \sqrt{4} - \sqrt{3} \\ &\vdots \\ +) \quad a_n &= a_{n-1} + \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \\ a_n &= a_1 + \sqrt{n} - 1 \\ \therefore a_n &= a_1 + \sqrt{n} - 1 = \sqrt{n} \\ \therefore a_{75} - a_{48} &= \sqrt{75} - \sqrt{48} = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

04-1 [답] $\frac{2}{11}$

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)a_n \text{에서} \\ a_{n+1} &= \frac{n+1}{n+2}a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ \text{위의 식의 } n \text{에 } 1, 2, 3, \dots, n-1 \text{을 차례대로 대입한 후} \\ \text{변끼리 모두 곱하면} \\ a_2 &= \frac{2}{3}a_1 \\ a_3 &= \frac{3}{4}a_2 \\ a_4 &= \frac{4}{5}a_3 \\ &\vdots \\ \times) \quad a_n &= \frac{n}{n+1}a_{n-1} \\ a_n &= a_1 \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{n}{n+1}\right) \\ \therefore a_n &= a_1 \times \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n+1} \\ \therefore a_{10} &= \frac{2}{11}\end{aligned}$$

04-2 [답] 67

$a_{n+1} = 3^n a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한
후 변끼리 모두 곱하면

$$\begin{aligned}a_2 &= 3 \times a_1 \\ a_3 &= 3^2 \times a_2 \\ a_4 &= 3^3 \times a_3 \\ &\vdots \\ \times) \quad a_n &= 3^{n-1} \times a_{n-1} \\ a_n &= a_1 \times (3 \times 3^2 \times 3^3 \times \dots \times 3^{n-1}) \\ \therefore a_n &= a_1 \times 3^{1+2+3+\dots+(n-1)} \\ &= 3 \times 3^{\frac{(n-1)n}{2}} \\ &= 3^{\frac{n^2-n+2}{2}}\end{aligned}$$

따라서 $a_{12} = 3^{67}$ 이므로

$$\log_3 a_{12} = \log_3 3^{67} = 67$$

04-3 [답] 16

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}a_{n+1} &= \sqrt{n}a_n \text{에서} \\ a_{n+1} &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ \text{위의 식의 } n \text{에 } 1, 2, 3, \dots, n-1 \text{을 차례대로 대입한 후} \\ \text{변끼리 모두 곱하면} \\ a_2 &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}a_1 \\ a_3 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a_2 \\ a_4 &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}a_3 \\ &\vdots \\ \times) \quad a_n &= \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}a_{n-1} \\ a_n &= a_1 \times \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \times \dots \times \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}\right) \\ \therefore a_n &= a_1 \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \text{이때 } a_k &= \frac{1}{4} \text{에서} \\ \frac{1}{\sqrt{k}} &= \frac{1}{4}, \sqrt{k} = 4 \\ \therefore k &= 16\end{aligned}$$

05-1 [답] 242

$a_{n+1} = 3a_n + 2$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_2 = 3a_1 + 2 = 3 \times 2 + 2 = 8$$

$$a_3 = 3a_2 + 2 = 3 \times 8 + 2 = 26$$

$$a_4 = 3a_3 + 2 = 3 \times 26 + 2 = 80$$

$$\therefore a_5 = 3a_4 + 2 = 3 \times 80 + 2 = 242$$

05-2 ㉡ 31

$$a_1=1 \text{이므로 } a_2=\frac{a_1+3}{2}=\frac{1+3}{2}=2$$

$$a_2=2 \text{이므로 } a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$a_3=1 \text{이므로 } a_4=\frac{a_3+3}{2}=\frac{1+3}{2}=2$$

$$a_4=2 \text{이므로 } a_5=\frac{a_4}{2}=\frac{2}{2}=1$$

⋮

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1 & (n \text{은 홀수}) \\ 2 & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{21} a_k &= 10(a_1 + a_2) + a_1 \\ &= 10(1+2) + 1 = 31 \end{aligned}$$

05-3 ㉡ 9

$11a_1=11 \times 3=33$ 을 7로 나누었을 때의 나머지는 5이므로 $a_2=5$

$11a_2=11 \times 5=55$ 를 7로 나누었을 때의 나머지는 6이므로 $a_3=6$

$11a_3=11 \times 6=66$ 을 7로 나누었을 때의 나머지는 3이므로 $a_4=3$

⋮

$$\therefore a_n = \begin{cases} 3 & (n=3k-2) \\ 5 & (n=3k-1) \text{ (단, } k \text{는 자연수)} \\ 6 & (n=3k) \end{cases}$$

이때 $15=3 \times 5$, $16=3 \times 6 - 2$ 이므로

$$a_{15} + a_{16} = 6 + 3 = 9$$

06-1 ㉡ $\left(\frac{4}{3}\right)^7$

$S_n=4a_n-3$ 의 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$S_{n+1}=4a_{n+1}-3$$

$S_{n+1}-S_n$ 을 하면

$$\begin{aligned} S_{n+1}-S_n &= 4a_{n+1}-3-(4a_n-3) \\ &= 4a_{n+1}-4a_n \end{aligned}$$

이때 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1}=4a_{n+1}-4a_n, \quad 3a_{n+1}=4a_n$$

$$\therefore a_{n+1}=\frac{4}{3}a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{4}{3}$ 인 등비수열이므로

$$a_n=1 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_8=\left(\frac{4}{3}\right)^7$$

06-2 ㉡ 64

$$S_1=a_1=3$$

$S_{n+1}=2S_n+1$ 의 n 에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$$S_2=2S_1+1=2 \times 3 + 1 = 7$$

$$S_3=2S_2+1=2 \times 7 + 1 = 15$$

$$S_4=2S_3+1=2 \times 15 + 1 = 31$$

$$S_5=2S_4+1=2 \times 31 + 1 = 63$$

$$S_6=2S_5+1=2 \times 63 + 1 = 127$$

$$\therefore a_6=S_6-S_5=127-63=64$$

06-3 ㉡ -47

$S_n=2a_n+n$ 의 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$S_{n+1}=2a_{n+1}+n+1$$

$S_{n+1}-S_n$ 을 하면

$$S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}+n+1-(2a_n+n)=2a_{n+1}-2a_n+1$$

이때 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n+1$$

$$\therefore a_{n+1}=2a_n-1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_2=2a_1-1=2 \times (-2) - 1 = -5$$

$$a_3=2a_2-1=2 \times (-5) - 1 = -11$$

$$a_4=2a_3-1=2 \times (-11) - 1 = -23$$

$$\therefore a_5=2a_4-1=2 \times (-23) - 1 = -47$$

07-1 ㉡ $a_{n+1}=a_n+3(n+1)$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

처음 정삼각형의 아래쪽에 작은 정삼각형 여러 개가 추가 된다고 생각하면 성냥개비의 총개수 a_n 은

$$a_1=3$$

$$a_2=a_1+3 \times 2 \quad \leftarrow a_1 \text{에 작은 정삼각형 2개 추가}$$

$$a_3=a_2+3 \times 3 \quad \leftarrow a_2 \text{에 작은 정삼각형 3개 추가}$$

⋮

$$\therefore a_{n+1}=a_n+3(n+1) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

07-2 ㉡ $a_1=4, a_{n+1}=\frac{4}{5}a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

농도가 5%인 소금물 160g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{5}{100} \times 160 = 8(\text{g})$$

1회 시행 후 소금물 200g의 농도는

$$\frac{8}{200} \times 100 = 4(\%) \quad \therefore a_1=4$$

$a_n\%$ 인 소금물 160g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{a_n}{100} \times 160 = \frac{8}{5}a_n(\text{g})$$

이때 물 40g을 넣은 소금물 200g의 농도는 $a_{n+1}\%$ 이므로

$$a_{n+1}=\frac{\frac{8}{5}a_n}{200} \times 100 = \frac{4}{5}a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

1 [답] ㄴ, ㄷ

ㄱ. $p(1)$ 이 참이면 $p(3), p(5), p(7), \dots$ 도 참이다.

ㄴ. $p(2)$ 가 참이면 $p(4), p(6), p(8), \dots$ 도 참이다.

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $p(1), p(2)$ 가 참이면 모든 자연수 n 에 대하여 $p(n)$ 이 참이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

문제

229~230쪽

08-1 [답] 풀이 참조

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}, (\text{우변}) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

따라서 $n=1$ 일 때 등식 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 등식 ①이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

이 등식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 을 더하면

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2}$$

$$= \frac{k+1}{(k+1)+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 등식 ①이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 등식 ①이 성립한다.

08-2 [답] 풀이 참조

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{2}, (\text{우변}) = 2 - \frac{1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

따라서 $n=1$ 일 때 등식 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 등식 ①이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k}$$

이 등식의 양변에 $\frac{k+1}{2^{k+1}}$ 을 더하면

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}}$$

$$= 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}}$$

$$= 2 - \frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 등식 ①이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 등식 ①이 성립한다.

09-1 [답] 풀이 참조

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n > 2^n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $n=4$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24, (\text{우변}) = 2^4 = 16$$

따라서 $n=4$ 일 때 부등식 ①이 성립한다.

(ii) $n=k (k \geq 4)$ 일 때, 부등식 ①이 성립한다고 가정하면

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k > 2^k$$

이 부등식의 양변에 $k+1$ 을 곱하면

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k \times (k+1) > 2^k \times (k+1)$$

이때 $k+1 > 2$ 이므로

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k \times (k+1) > 2^{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 ①이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 ①이 성립한다.

09-2 [답] 풀이 참조

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}, (\text{우변}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

따라서 $n=2$ 일 때 부등식 ①이 성립한다.

(ii) $n=k (k \geq 2)$ 일 때, 부등식 ①이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

이 부등식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$= 2 - \frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}$$

$$< 2 - \frac{k^2+k}{k(k+1)^2}$$

$$= 2 - \frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 ①이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 ①이 성립한다.

연습문제

231~233쪽

1 ③	2 ①	3 ③	4 4	5 ⑤
6 50	7 ②	8 8	9 ③	10 134
11 16	12 ⑤	13 720	14 400	15 341
16 7	17 ④			

- 1 $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$, 즉 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_5 = 11$, $a_9 = 19$ 이므로
 $a + 4d = 11$ ㉠
 $a + 8d = 19$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 3$, $d = 2$
 따라서 주어진 수열의 일반항 a_n 은
 $a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1$
 이때 $a_n > 100$ 에서
 $2n + 1 > 100$, $2n > 99$ $\therefore n > 49.5$
 따라서 자연수 n 의 최솟값은 50이다.
- 2 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이므로
 $S_n = \frac{n\{2 \times 2 + (n-1) \times 2\}}{2} = n(n+1)$
 $\therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{S_k} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$
 $= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$
 $+ \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right)$
 $= 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$
- 3 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3인 등비수열이므로 공비를 r 라 하면 $\log_3 a_6 = 6$ 에서
 $\log_3 3r^5 = 6$, $3r^5 = 3^6$ $\therefore r = 3$
 따라서 주어진 수열의 일반항 a_n 은
 $a_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$
 $\therefore a_{10} = 3^{10}$
- 4 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 즉 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 5, 공비가 5인 등비수열이므로
 $S_n = \frac{5(5^n - 1)}{5 - 1} = \frac{5}{4}(5^n - 1)$
 이때 $S_n \geq 400$ 에서 $\frac{5}{4}(5^n - 1) \geq 400$
 $5^n - 1 \geq 320$ $\therefore 5^n \geq 321$
 이때 $5^3 = 125$, $5^4 = 625$ 이므로 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

- 5 $a_{n+1} = a_n + 2^n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입
 한 후 변끼리 모두 더하면
 $a_2 = a_1 + 2$
 $a_3 = a_2 + 2^2$
 $a_4 = a_3 + 2^3$
 $\vdots$
 $+) a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$
 $a_n = a_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1})$
 $\therefore a_n = a_1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = a_1 + 2^n - 2$
 이때 $a_6 = 68$ 에서 $a_1 + 2^6 - 2 = 68$
 $a_1 + 62 = 68$ $\therefore a_1 = 6$
- 6 $(n+1)a_{n+1} = n(n+2)a_n$ 에서
 $a_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} a_n = \left(\frac{n}{n+1} \times \frac{n+2}{n+1} \right) a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)
 위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후
 변끼리 모두 곱하면
 $a_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} a_1$
 $a_3 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} a_2$
 $a_4 = \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} a_3$
 $\vdots$
 $\times) a_n = \left(\frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} \right) a_{n-1}$
 $a_n = a_1 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} \right)$
 $\therefore a_n = a_1 \times \frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{2n}$
 이때 $a_k = \frac{51}{100}$ 에서 $\frac{k+1}{2k} = \frac{51}{100}$
 $100k + 100 = 102k$ $\therefore k = 50$
- 7 $a_n + a_{n+1} = n + 3$ 의 n 에 1, 3, 5, ..., 19를 차례대로 대입
 하면
 $a_1 + a_2 = 4$
 $a_3 + a_4 = 6$
 $a_5 + a_6 = 8$
 $\vdots$
 $a_{19} + a_{20} = 22$
 $\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6)$
 $+ \cdots + (a_{19} + a_{20})$
 $= 4 + 6 + 8 + \cdots + 22 = \sum_{k=1}^{10} (2k + 2)$
 $= 2 \times \frac{10 \times 11}{2} + 2 \times 10 = 130$

- 8 $a_{n+2}+a_{n+1}+a_n=0$, 즉 $a_{n+2}=-a_{n+1}-a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_3=-a_2-a_1=-6$$

$$a_4=-a_3-a_2=2$$

$$a_5=-a_4-a_3=4$$

⋮

$$\therefore a_n = \begin{cases} 2 & (n=3k-2) \\ 4 & (n=3k-1) \text{ (단, } k \text{는 자연수)} \\ -6 & (n=3k) \end{cases}$$

이때 $24=3 \times 8$, $25=3 \times 9-2$ 이므로

$$a_{25}-a_{24}=2-(-6)=8$$

- 9 $S_n=-a_n+2n$ 의 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$S_{n+1}=-a_{n+1}+2(n+1)$$

$S_{n+1}-S_n$ 을 하면

$$\begin{aligned} S_{n+1}-S_n &= -a_{n+1}+2(n+1)-(-a_n+2n) \\ &= -a_{n+1}+a_n+2 \end{aligned}$$

이때 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1}=-a_{n+1}+a_n+2$$

$$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{1}{2}a_1+1=\frac{1}{2} \times 1+1=\frac{3}{2}$$

$$a_3=\frac{1}{2}a_2+1=\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}+1=\frac{7}{4}$$

$$a_4=\frac{1}{2}a_3+1=\frac{1}{2} \times \frac{7}{4}+1=\frac{15}{8}$$

$$a_5=\frac{1}{2}a_4+1=\frac{1}{2} \times \frac{15}{8}+1=\frac{31}{16}$$

$$\therefore a_6=\frac{1}{2}a_5+1=\frac{1}{2} \times \frac{31}{16}+1=\frac{63}{32}$$

- 10 n 시간이 지난 후 살아 있는 단세포 생물의 수를 a_n 이라 하면 1시간이 지난 후 살아 있는 단세포 생물의 수 a_1 은 10마리에서 3마리가 죽고 나머지는 각각 2마리로 분열하므로

$$a_1=(10-3) \times 2=14$$

같은 방법으로 a_2, a_3, a_4, a_5 를 구하면

$$a_2=(a_1-3) \times 2=(14-3) \times 2=22$$

$$a_3=(a_2-3) \times 2=(22-3) \times 2=38$$

$$a_4=(a_3-3) \times 2=(38-3) \times 2=70$$

$$a_5=(a_4-3) \times 2=(70-3) \times 2=134$$

따라서 5시간이 지난 후 살아 있는 단세포 생물의 수는 134이다.

- 11 n 개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n 개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 $(n+1)$ 개의 새로운 영역이 생긴다.

즉, $(n+1)$ 개의 직선에 의하여 분할된 영역은 n 개의 직선에 의하여 분할된 영역보다 $(n+1)$ 개가 많으므로

$$a_{n+1}=a_n+n+1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

이때 $a_3=7$ 이므로

$$a_4=a_3+3+1=7+3+1=11$$

$$\therefore a_5=a_4+4+1=11+4+1=16$$

- 12 (i) $n=1$ 일 때, (좌변) $=a_1$, (우변) $=a_2-\boxed{\frac{1}{2}}=1=a_1$ 이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$$a_1+2a_2+3a_3+\dots+ma_m=\frac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1)$$

이다.

$n=m+1$ 일 때 (★)이 성립함을 보이자.

이 등식의 양변에 $(m+1)a_{m+1}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} a_1+2a_2+3a_3+\dots+ma_m+(m+1)a_{m+1} \\ = \frac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1)+(m+1)a_{m+1} \end{aligned}$$

$$= (m+1)a_{m+1} \left(\boxed{\frac{m}{2}} + 1 \right) - \frac{m(m+1)}{4}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)}{2}a_{m+1} - \frac{m(m+1)}{4}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)}{2} \left(a_{m+2} - \boxed{\frac{1}{m+2}} \right) - \frac{m(m+1)}{4}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)}{4}(2a_{m+2}-1)$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 (★)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 (★)이 성립한다.

따라서 $p=\frac{1}{2}$, $f(m)=\frac{m}{2}$, $g(m)=\frac{1}{m+2}$ 이므로

$$p + \frac{f(5)}{g(3)} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{5}} = 13$$

- 13 (i) $n=1$ 일 때, $9^1-1=8$ 은 8의 배수이다.

(ii) $n=k$ 일 때, $9^k-1=8m$ (m 은 자연수)이라 하면

$$\begin{aligned} 9^{k+1}-1 &= \boxed{9^k} \times 9 - 1 = (8+1)9^k - 1 \\ &= 8 \times 9^k + \boxed{9^k-1} = 8 \times 9^k + 8m \\ &= 8(9^k+m) \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 8의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 9^n-1 은 8의 배수이다.

따라서 $a=9$, $f(k)=9^k-1$ 이므로

$$af(2)=9 \times (9^2-1)=720$$

14 (i) $n=3$ 일 때,

$$(\text{좌변})=2^3=8, (\text{우변})=2 \times 3 + 1 = 7$$

따라서 $n=3$ 일 때 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 3$)일 때, 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$2^k > 2k + 1$$

위의 식의 양변에 $\boxed{2}$ 를 곱하면

$$2^k \times \boxed{2} > (2k+1) \times \boxed{2}$$

$$2^{k+1} > \boxed{4k+2}$$

이때 $(\boxed{4k+2}) - (\boxed{2k+3}) = 2k-1 > 0$ 이므로

$$\boxed{4k+2} > \boxed{2k+3}$$

$$\therefore 2^{k+1} > \boxed{2k+3}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

따라서 $a=2, f(k)=4k+2, g(k)=2k+3$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \{a+f(k)+g(k)\} &= \sum_{k=1}^{10} (2+4k+2+2k+3) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (6k+7) \\ &= 6 \times \frac{10 \times 11}{2} + 70 = 400 \end{aligned}$$

15 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때 $D=0$ 이어야 하므로

$$D=(a_{n+1})^2-4 \times a_n \times 4a_n=0$$

$$(a_{n+1})^2-16a_n^2=0, (a_{n+1}+4a_n)(a_{n+1}-4a_n)=0$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 항이 양수이므로

$$a_{n+1}-4a_n=0 \quad \therefore a_{n+1}=4a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 4인 등비수열이므로

$$\sum_{k=1}^5 a_k = \frac{4^5-1}{4-1} = \frac{1023}{3} = 341$$

16 ㉠의 식의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_3=a_1-3$$

$$a_4=a_2+3$$

$$a_5=a_3-3=(a_1-3)-3=a_1-6$$

$$a_6=a_4+3=(a_2+3)+3=a_2+6$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 a_k &= a_1+a_2+(a_1-3)+(a_2+3)+(a_1-6)+(a_2+6) \\ &= 3(a_1+a_2) \end{aligned}$$

㉡에 의하여 수열 $\{a_n\}$ 은 6개의 수가 반복되고,

$$32=5 \times 6 + 2 \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{32} a_k = 5 \sum_{k=1}^6 a_k + a_{31} + a_{32}$$

$$= 15(a_1+a_2) + a_1 + a_2$$

$$= 16(a_1+a_2)$$

따라서 $16(a_1+a_2)=112$ 이므로

$$a_1+a_2=7$$

17 1개의 계단을 오르는 경우가 1가지, 2개의 계단을 오르는 경우가 2가지이므로

$$a_1=1, a_2=2$$

$(n+2)$ 개의 계단을 오르는 경우는 n 개의 계단을 오르고 두 계단을 오르는 경우와 $(n+1)$ 개의 계단을 오르고 한 계단을 오르는 경우가 있으므로

$$a_{n+2}=a_n+a_{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$a_1=1, a_2=2 \text{이므로}$$

$$a_3=a_1+a_2=1+2=3$$

$$a_4=a_2+a_3=2+3=5$$

$$a_5=a_3+a_4=3+5=8$$

$$a_6=a_4+a_5=5+8=13$$

$$\therefore a_7=a_6+a_7=8+13=21$$

유형편

정답과 해설

I-1. 지수와 로그

01 지수

4~8쪽

1 ④	2 ③	3 4	4 ⑤	5 ④
6 ⑤	7 13	8 ④	9 ②	10 ①
11 ④	12 $\frac{9}{25}$	13 ②	14 7	15 6
16 ④	17 ②	18 2	19 2	20 ③
21 ⑤	22 ③	23 4	24 ③	25 $\frac{\sqrt{7}}{5}$
26 ④	27 ④	28 ③	29 ②	30 $\frac{1}{2}$
31 ④	32 ②	33 64	34 $\frac{3}{2}$	35 $32\sqrt{2}$ 배
36 2.07배				

- 1 ① $\sqrt{9}=3$ 의 제곱근은 $\pm\sqrt{3}$ 이다.
 ② -8의 세제곱근은 -2, $1\pm\sqrt{3}i$ 이다.
 ③ 16의 네제곱근은 $\pm 2, \pm 2i$ 이다.
 ④ n 이 홀수일 때, -27의 n 제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{-27}$ 의 1개이다.
 ⑤ n 이 짝수일 때, -81의 n 제곱근 중 실수인 것은 없다.
 따라서 옳은 것은 ④이다.
- 2 $a^3=27$ 이므로 $a=3$
 $\sqrt{625}=25$ 이므로 $b^4=25 \quad \therefore b=\sqrt{5} \quad (\because b>0)$
 $\therefore ab=3\times\sqrt{5}=3\sqrt{5}$
- 3 $n=3$ 일 때, $2n^2-9n=-9<0$ 이고 n 은 홀수이므로 $f(3)=1$
 $n=4$ 일 때, $2n^2-9n=-4<0$ 이고 n 은 짝수이므로 $f(4)=0$
 $n=5$ 일 때, $2n^2-9n=5>0$ 이고 n 은 홀수이므로 $f(5)=1$
 $n=6$ 일 때, $2n^2-9n=18>0$ 이고 n 은 짝수이므로 $f(6)=2$
 $\therefore f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1+0+1+2=4$

- 4 ① $\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3^2}\times\sqrt[3]{3^4}=\sqrt[3]{3^6}=3^2=9$
 ② $\frac{\sqrt[4]{512}}{\sqrt[4]{8}}=\frac{\sqrt[4]{2^9}}{\sqrt[4]{2^3}}=\sqrt[4]{\frac{2^9}{2^3}}=\sqrt[4]{2^6}=\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{2^2\times 2}=2\sqrt[4]{2}$
 ③ $(\sqrt[3]{4})^4=\sqrt[3]{4^4}=\sqrt[3]{4^3\times 4}=4\sqrt[3]{4}$
 ④ $\sqrt[3]{729}=\sqrt[3]{3^6}=3^2=9$
 ⑤ $\sqrt[18]{64}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[18]{2^6}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2^2}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{2}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

$$5 \quad \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt[3]{64}\times\sqrt[6]{\sqrt{8}}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{32}}=\frac{12\sqrt[12]{2^6}\times 12\sqrt[12]{2^3}}{12\sqrt[12]{2^5}}=12\sqrt[12]{\frac{2^6\times 2^3}{2^5}}=12\sqrt[12]{2^4}=3\sqrt{2}$$

$$6 \quad \sqrt[3]{\frac{4}{a}}\times\sqrt[3]{\frac{3}{a}}\times\sqrt[3]{\frac{a}{3}}=\frac{12\sqrt[12]{a}}{6\sqrt[12]{a}}\times\frac{6\sqrt[12]{a}}{8\sqrt[12]{a}}\times\frac{4\sqrt[12]{a}}{6\sqrt[12]{a}}=\frac{12\sqrt[12]{a}\times 4\sqrt[12]{a}}{8\sqrt[12]{a}\times 6\sqrt[12]{a}}\\ =\frac{24\sqrt[12]{a^2}\times 24\sqrt[12]{a^6}}{24\sqrt[12]{a^3}\times 24\sqrt[12]{a^4}}=24\sqrt[12]{\frac{a^2\times a^6}{a^3\times a^4}}\\ =24\sqrt[12]{a}$$

$$7 \quad \sqrt[3]{a^6b^4}\times\sqrt[4]{a^5b^3}\div\sqrt[3]{4a^3b^7}\\ =\sqrt[12]{3^4a^6b^4}\times\sqrt[12]{4^3a^5b^3}\div\sqrt[12]{3^4a^3b^7}\\ =\frac{6\sqrt[12]{a^6b^4}\times 4\sqrt[12]{a^5b^3}}{12\sqrt[12]{a^3b^7}}\\ =\frac{12\sqrt[12]{a^{12}b^8}\times 12\sqrt[12]{a^{15}b^9}}{12\sqrt[12]{a^3b^7}}=12\sqrt[12]{\frac{a^{12}b^8\times a^{15}b^9}{a^3b^7}}\\ =12\sqrt[12]{a^{24}b^{10}}=6\sqrt[12]{a^{12}b^5}=a^2b^{\frac{5}{6}}$$

따라서 $n=2, p=6, q=5$ 이므로 $n+p+q=13$

$$8 \quad \sqrt[3]{4}=12\sqrt[12]{4^4}=12\sqrt[12]{256}, \sqrt[4]{6}=12\sqrt[12]{6^3}=12\sqrt[12]{216}, \\ \sqrt[6]{15}=12\sqrt[12]{15^2}=12\sqrt[12]{225}$$

이때 $216<225<256$ 이므로 $12\sqrt[12]{216}<12\sqrt[12]{225}<12\sqrt[12]{256}$
 $\therefore \sqrt[4]{6}<\sqrt[6]{15}<\sqrt[3]{4}$

$$9 \quad ① \sqrt[3]{2\times 3}=\sqrt[3]{6}=\sqrt[6]{6^2}=\sqrt[6]{36}\\ ② \sqrt[3]{3\sqrt{2}}=\sqrt[3]{3^3\times 2}=\sqrt[6]{54}\\ ③ \sqrt[3]{2^3\sqrt{5}}=\sqrt[3]{2^3\times 5}=\sqrt[6]{40}\\ ④ \sqrt[3]{2\sqrt{5}}=\sqrt[3]{2^2\times 5}=\sqrt[6]{20}\\ ⑤ \sqrt[3]{5\sqrt{2}}=\sqrt[3]{5^2\times 2}=\sqrt[6]{50}$$

따라서 가장 큰 수는 ②이다.

$$10 \quad A-B=(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})-2\sqrt[3]{3}=\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}\\ =\sqrt[6]{2^3}-\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{9}<0 \\ \therefore A<B \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$B-C=2\sqrt[3]{3}-(\sqrt[4]{5}+\sqrt[3]{3})=\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{5}\\ =12\sqrt[12]{3^4}-12\sqrt[12]{5^3}=12\sqrt[12]{81}-12\sqrt[12]{125}<0 \\ \therefore B<C \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서 $A<B<C$

$$\begin{aligned} 11 \quad \{(-3)^4\}^{\frac{1}{2}} - 25^{-\frac{3}{2}} \times 100^{\frac{3}{2}} &= (3^4)^{\frac{1}{2}} - (5^2)^{-\frac{3}{2}} \times (10^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= 3^2 - 5^{-3} \times 10^3 \\ &= 3^2 - \left(\frac{10}{5}\right)^3 = 9 - 8 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 \quad \frac{9^{-10} + 3^{-8}}{3^{-10} + 9^{-11}} \times \frac{26}{5^2 + 25^2} &= \frac{3^{-20} + 3^{-8}}{3^{-10} + 3^{-22}} \times \frac{26}{5^2 + 5^4} \\ &= \frac{3^{-20}(1 + 3^{12})}{3^{-22}(3^{12} + 1)} \times \frac{26}{5^2(1 + 5^2)} \\ &= 3^2 \times \frac{1}{5^2} = \frac{9}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13 \quad \sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{4} \times \sqrt[6]{6} &= 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{\frac{1}{4}} \times (2 \times 3)^{\frac{1}{6}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{6}} \\ &= 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 2^{\frac{7}{6}} \times 3^{\frac{1}{2}} \\ \text{따라서 } a &= \frac{7}{6}, b = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } a + b = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14 \quad \sqrt{a} \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{a^3} &= (a \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{9}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{9}{8}} \\ \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{a^k} &= (a \times a^{\frac{k}{8}})^{\frac{1}{4}} = (a^{\frac{k+2}{8}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{k+2}{8}} \\ a^{\frac{9}{8}} &= a^{\frac{k+2}{8}} \text{ 에서 } \frac{9}{8} = \frac{k+2}{8} \\ \therefore k &= 7 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} \sqrt{a} \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{a^3} &= \sqrt{a} \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[8]{a^3} = \sqrt{a} \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[8]{a^3} \\ &= a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{3}{8}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}} = a^{\frac{9}{8}} \\ \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{a^k} &= \sqrt[4]{a} \times \sqrt[8]{a^k} = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[8]{a^k} \\ &= a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{k}{8}} = a^{\frac{1}{4} + \frac{k}{8}} = a^{\frac{k+2}{8}} \\ a^{\frac{9}{8}} &= a^{\frac{k+2}{8}} \text{ 에서 } \frac{9}{8} = \frac{k+2}{8} \\ \therefore k &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15 \quad (a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{2}} \times (3\sqrt{a})^{6\sqrt{6}} \div a^{3\sqrt{6}} &= a^{2\sqrt{6}} \times a^{2\sqrt{6}} \div a^{3\sqrt{6}} \\ &= a^{2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 3\sqrt{6}} = a^{\sqrt{6}} \\ \text{따라서 } k &= \sqrt{6} \text{ 이므로 } k^2 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16 \quad a &= 3^{\frac{1}{2}}, b = 2^{\frac{1}{3}} \text{ 이므로 } a^2 = 3, b^3 = 2 \\ \therefore 18^{\frac{1}{6}} &= (2 \times 3^2)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{3}} = (b^3)^{\frac{1}{6}} \times (a^2)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17 \quad 625^{\frac{1}{n}} &= (5^4)^{\frac{1}{n}} = 5^{\frac{4}{n}} \text{ 이 자연수가 되려면 정수 } n \text{ 은 4의 양의} \\ &\text{약수이어야 하므로 모든 정수 } n \text{ 의 값의 합은} \\ 1 + 2 + 4 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18 \quad \text{넓이가 } \sqrt[n]{64} \text{ 인 정사각형의 한 변의 길이는 } \sqrt[n]{\sqrt[n]{64}} \text{ 이므로} \\ f(n) &= \sqrt[n]{\sqrt[n]{64}} = 2\sqrt[n]{2^6} = 2^{\frac{3}{n}} \\ \therefore f(4) \times f(12) &= 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{3}{12}} = 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19 \quad (3^{\frac{1}{3}} - 1)(9^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} + 1) &= (3^{\frac{1}{3}} - 1)\{(3^{\frac{1}{3}})^2 + 3^{\frac{1}{3}} + 1\} \\ &= (3^{\frac{1}{3}})^3 - 1^3 = 3 - 1 = 2 \\ (2^{\frac{1}{2}} - 1)^2(2^{\frac{3}{2}} + 3) &= \{(2^{\frac{1}{2}})^2 - 2 \times 2^{\frac{1}{2}} + 1\}(2^{\frac{3}{2}} + 3) \\ &= (3 - 2^{\frac{3}{2}})(3 + 2^{\frac{3}{2}}) = 3^2 - (2^{\frac{3}{2}})^2 \\ &= 9 - 2^3 = 1 \\ \therefore \frac{(3^{\frac{1}{3}} - 1)(9^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} + 1)}{(2^{\frac{1}{2}} - 1)^2(2^{\frac{3}{2}} + 3)} &= \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20 \quad 2^{x+y} &= X, 2^{x-y} = Y \text{ 로 놓으면} \\ (2^{x+y} + 2^{x-y})^2 - (2^{x+y} - 2^{x-y})^2 &= (X+Y)^2 - (X-Y)^2 = 4XY \\ &= 2^2 \times 2^{x+y} \times 2^{x-y} \\ &= 2^{2+(x+y)+(x-y)} = 2^{2x+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21 \quad a^{\frac{1}{3}} &= X, a^{-\frac{2}{3}} = Y \text{ 로 놓으면 } a^{-\frac{1}{3}} = XY \text{ 이므로} \\ (a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{2}{3}})^3 - 3a^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{2}{3}}) &= (X+Y)^3 - 3XY(X+Y) = X^3 + Y^3 \\ &= (a^{\frac{1}{3}})^3 + (a^{-\frac{2}{3}})^3 = a + a^{-2} = a + \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22 \quad x &= \sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ 의 양변을 세제곱하면} \\ x^3 &= 2 - 3\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) - \frac{1}{2} \\ x^3 &= \frac{3}{2} - 3x \quad \therefore 2x^3 + 6x = 3 \\ \therefore 2x^3 + 6x + 1 &= 3 + 1 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23 \quad (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 &= x + 2 + x^{-1} = 14 + 2 = 16 \\ \text{이때 } x > 0 \text{ 이면 } x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} > 0 \text{ 이므로} \\ x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24 \quad x + x^{-1} &= (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 + 2 \\ &= 1^2 + 2 = 3 \\ \therefore x^3 + x^{-3} &= (x + x^{-1})^3 - 3(x + x^{-1}) \\ &= 3^3 - 3 \times 3 = 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25 \quad (x + x^{-1})^2 &= x^2 + 2 + x^{-2} = 23 + 2 = 25 \\ \text{이때 } x > 0 \text{ 에서 } x + x^{-1} > 0 \text{ 이므로 } x + x^{-1} &= 5 \\ (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 &= x + 2 + x^{-1} = 5 + 2 = 7 \\ \text{이때 } x > 0 \text{ 에서 } x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} > 0 \text{ 이므로} \\ x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} &= \sqrt{7} \\ \therefore \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}{x + x^{-1}} &= \frac{\sqrt{7}}{5} \end{aligned}$$

26 $(3^x + 3^{-x})^2 = 9^x + 2 + 9^{-x} = 47 + 2 = 49$

$\therefore 3^x + 3^{-x} = 7$ ($\because 3^x + 3^{-x} > 0$)

$(3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}})^2 = 3^x + 2 + 3^{-x} = 7 + 2 = 9$

$\therefore 3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}} = 3$ ($\because 3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}} > 0$)

$(3^{\frac{x}{4}} + 3^{-\frac{x}{4}})^2 = 3^{\frac{x}{2}} + 2 + 3^{-\frac{x}{2}} = 3 + 2 = 5$

$\therefore 3^{\frac{x}{4}} + 3^{-\frac{x}{4}} = \sqrt{5}$ ($\because 3^{\frac{x}{4}} + 3^{-\frac{x}{4}} > 0$)

27 주어진 식의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{(a^x + a^{-x})a^x}{(a^x - a^{-x})a^x} = \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1} = \frac{7 + 1}{7 - 1} = \frac{4}{3}$$

28 $3^{\frac{1}{x}} = 25$ 의 양변을 x 제곱하면

$3 = 25^x \quad \therefore 5^{2x} = 3$

주어진 식의 분모, 분자에 5^x 을 곱하면

$$\begin{aligned} \frac{5^{3x} + 5^{-3x}}{5^x - 5^{-x}} &= \frac{(5^{3x} + 5^{-3x})5^x}{(5^x - 5^{-x})5^x} = \frac{5^{4x} + 5^{-2x}}{5^{2x} - 1} \\ &= \frac{(5^{2x})^2 + (5^{2x})^{-1}}{5^{2x} - 1} \\ &= \frac{3^2 + 3^{-1}}{3 - 1} = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

29 $\frac{a^m + a^{-m}}{a^m - a^{-m}} = 3$ 의 좌변의 분모, 분자에 a^m 을 곱하면

$\frac{a^{2m} + 1}{a^{2m} - 1} = 3, a^{2m} + 1 = 3a^{2m} - 3$

$2a^{2m} = 4 \quad \therefore a^{2m} = 2$

$\therefore (a^m + a^{-m})(a^m - a^{-m}) = a^{2m} - a^{-2m}$
 $= 2 - 2^{-1} = \frac{3}{2}$

30 $18^x = 81$ 에서 $18 = 81^{\frac{1}{x}}$ ㉠

$2^y = 81$ 에서 $2 = 81^{\frac{1}{y}}$ ㉡

㉠ $\div$ ㉡을 하면

$81^{\frac{1}{x}} \div 81^{\frac{1}{y}} = 18 \div 2 = 9 \quad \therefore 81^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = 81^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

31 $15^x = 8$ 에서 $15^x = 2^3$

$\therefore 15 = 2^{\frac{3}{x}}$ ㉠

$a^y = 2$ 에서 $a = 2^{\frac{1}{y}}$ ㉡

㉠ $\times$ ㉡을 하면

$15 \times a = 2^{\frac{3}{x}} \times 2^{\frac{1}{y}}, 15a = 2^{\frac{3}{x} + \frac{1}{y}}$

이때 $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 2$ 이므로

$15a = 2^2 = 4 \quad \therefore a = \frac{4}{15}$

32 $a^x = 3^4$ 에서 $a = 3^{\frac{4}{x}}$ ㉠

$b^y = 3^4$ 에서 $b = 3^{\frac{4}{y}}$ ㉡

$c^z = 3^4$ 에서 $c = 3^{\frac{4}{z}}$ ㉢

㉠ $\times$ ㉡ $\times$ ㉢을 하면 $abc = 3^{\frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z}}$

이때 $abc = 27$ 이므로 $3^{\frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z}} = 3^3$

$\frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} = 3 \quad \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4}$

33 $a^x = b^y = 4^z = k$ ($k > 0$)로 놓으면 $k \neq 1$ ($\because xyz \neq 0$)

$a^x = k$ 에서 $a = k^{\frac{1}{x}}$ ㉠

$b^y = k$ 에서 $b = k^{\frac{1}{y}}$ ㉡

$4^z = k$ 에서 $4 = k^{\frac{1}{z}}$

㉠ $\times$ ㉡을 하면 $ab = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$

이때 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} = 0$ 에서 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{z}$

$\therefore ab = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = k^{\frac{3}{z}} = (k^{\frac{1}{z}})^3 = 4^3 = 64$

34 100만 원을 투자하고 3년이 지난 후의 금액은

$P_1 = 100 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$

100만 원을 투자하고 7년이 지난 후의 금액은

$P_2 = 100 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{7}{4}}$

$\therefore \frac{P_2}{P_1} = \frac{100 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{7}{4}}}{100 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{7}{4} - \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$

35 음식물의 개수가 $4p$, 음식물의 부피가 $8q$ 일 때, 음식물을 데우는 데 걸리는 시간을 t' 이라 하면

$t' = a(4p)^{\frac{1}{2}}(8q)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{3}{2}} \times ap^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}}$

$= 2 \times 2^{\frac{9}{2}} \times ap^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{11}{2}} \times ap^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}}$

$= 32\sqrt{2}t$ ($\because t = ap^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}}$)

따라서 음식물을 데우는 데 걸리는 시간은 $32\sqrt{2}$ 배 증가한다.

36 10년 동안 품목 A, B의 연평균 가격 상승률은 각각

$\sqrt[10]{\frac{2a}{a}} - 1 = \sqrt[10]{2} - 1, \sqrt[10]{\frac{4a}{a}} - 1 = \sqrt[10]{4} - 1$

$\therefore \frac{\sqrt[10]{4} - 1}{\sqrt[10]{2} - 1} = \frac{(\sqrt[10]{2})^2 - 1}{\sqrt[10]{2} - 1} = \frac{(\sqrt[10]{2} - 1)(\sqrt[10]{2} + 1)}{\sqrt[10]{2} - 1}$

$= \sqrt[10]{2} + 1 = 1.07 + 1 = 2.07$ $\blacktriangleleft \sqrt[10]{2} = 2^{\frac{1}{10}} = 1.07$

따라서 10년 동안 품목 B의 연평균 가격 상승률은 품목 A의 연평균 가격 상승률의 2.07배이다.

1 $\sqrt{3}$	2 ③	3 24	4 ④	5 8
6 ②	7 3	8 7	9 1	10 ②
11 9	12 2	13 ②	14 4	15 ①
16 4	17 ②	18 ⑤	19 $\frac{25}{9}$	20 ④
21 4	22 $a+3b$	23 $\frac{a+2b}{1-a}$	24 ④	25 ③
26 ②	27 48	28 2	29 49	30 ③
31 80	32 ⑤	33 2	34 7	35 ④

1 $x = \log_2 27$ 에서 $2^x = 27 = 3^3$
 $\therefore 2^{\frac{x}{6}} = (2^x)^{\frac{1}{6}} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

2 $\log_5 \{ \log_3 (\log_2 a) \} = 0$ 에서
 $\log_3 (\log_2 a) = 5^0 = 1$
 $\log_3 (\log_2 a) = 1$ 에서
 $\log_2 a = 3$
 $\therefore a = 2^3 = 8$

3 $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$ 에서 $x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
 $\log_y 2 = -\frac{1}{3}$ 에서 $2 = y^{-\frac{1}{3}}$
 $\therefore y = 2^{-3} = \frac{1}{8}$
 $\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 16 + 8 = 24$

4 $x = \log_5 (\sqrt{2} + 1)$ 에서 $5^x = \sqrt{2} + 1$ 이므로
 $5^{-x} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$
 $\therefore 5^x + 5^{-x} = (\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}$

5 (i) $a+3 > 0$, $a+3 \neq 1$ 이어야 하므로
 $a > -3$, $a \neq -2$ ㉠
(ii) $-a^2 + 3a + 28 > 0$ 이어야 하므로
 $a^2 - 3a - 28 < 0$, $(a+4)(a-7) < 0$
 $\therefore -4 < a < 7$ ㉡
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는
 $-3 < a < -2$ 또는 $-2 < a < 7$
따라서 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 의 8개이다.

6 (i) $a-3 > 0$, $a-3 \neq 1$ 이어야 하므로
 $a > 3$, $a \neq 4$ ㉠
(ii) $a-1 > 0$ 이어야 하므로 $a > 1$ ㉡
(iii) $8-a > 0$ 이어야 하므로 $a < 8$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는
 $3 < a < 4$ 또는 $4 < a < 8$
따라서 정수 a 는 5, 6, 7이므로 그 합은
 $5+6+7=18$

7 (i) $|x-1| > 0$, $|x-1| \neq 1$ 이어야 하므로
 $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 2$ ㉠
(ii) $-x^2 + 3x + 4 > 0$ 이어야 하므로
 $x^2 - 3x - 4 < 0$, $(x+1)(x-4) < 0$
 $\therefore -1 < x < 4$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $-1 < x < 0$ 또는 $0 < x < 1$ 또는 $1 < x < 2$ 또는 $2 < x < 4$
따라서 정수 x 의 값은 3이다.

8 (i) $(a-2)^2 > 0$, $(a-2)^2 \neq 1$ 이어야 하므로
 $a \neq 1$, $a \neq 2$, $a \neq 3$ ㉠
(ii) 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + 2ax + 8 > 0$ 이어야 한다.
㉠ $a=0$ 이면 $8 > 0$ 이므로 성립한다.
㉡ $a > 0$ 이고 이차방정식 $ax^2 + 2ax + 8 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = a^2 - 8a < 0$, $a(a-8) < 0$
 $\therefore 0 < a < 8$

㉠, ㉡에서 $0 \leq a < 8$ ㉢
㉠, ㉢을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는
 $0 \leq a < 1$ 또는 $1 < a < 2$ 또는 $2 < a < 3$ 또는 $3 < a < 8$
따라서 정수 a 는 0, 4, 5, 6, 7이므로 최댓값과 최솟값의
합은 $7+0=7$

9 $\log_3 \sqrt{54} + 2 \log_3 \sqrt{2} - \frac{1}{2} \log_3 24$
 $= \log_3 3\sqrt{6} + \log_3 (\sqrt{2})^2 - \log_3 24^{\frac{1}{2}}$
 $= \log_3 3\sqrt{6} + \log_3 2 - \log_3 \sqrt{24}$
 $= \log_3 3\sqrt{6} + \log_3 2 - \log_3 2\sqrt{6}$
 $= \log_3 \frac{3\sqrt{6} \times 2}{2\sqrt{6}} = \log_3 3 = 1$

10 $\log_2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_2 \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \log_2 \left(1 + \frac{1}{4}\right)$
 $\quad \quad \quad + \cdots + \log_2 \left(1 + \frac{1}{63}\right)$
 $= \log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{3} + \log_2 \frac{5}{4} + \cdots + \log_2 \frac{64}{63}$
 $= \log_2 \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{64}{63}\right)$
 $= \log_2 \frac{64}{2} = \log_2 32$
 $= \log_2 2^5 = 5$

- 11 $36=2^2 \times 3^2$ 이므로 36의 모든 양의 약수는 다음과 같다.

$2^0 \times 3^0$	$2^0 \times 3^1$	$2^0 \times 3^2$
$2^1 \times 3^0$	$2^1 \times 3^1$	$2^1 \times 3^2$
$2^2 \times 3^0$	$2^2 \times 3^1$	$2^2 \times 3^2$

$$\begin{aligned} \therefore \log_6 a_1 + \log_6 a_2 + \log_6 a_3 + \cdots + \log_6 a_9 \\ &= \log_6 (a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_9) \\ &= \log_6 \{2^{3(0+1+2)} \times 3^{3(0+1+2)}\} \\ &= \log_6 (2^9 \times 3^9) = \log_6 6^9 = 9 \end{aligned}$$

12 $\log_3 4 \times \log_2 5 \times \log_5 6 - \log_3 25 \times \log_5 2$

$$\begin{aligned} &= 2 \log_3 2 \times \frac{\log_3 5}{\log_3 2} \times \frac{\log_3 6}{\log_3 5} - 2 \log_3 5 \times \frac{\log_3 2}{\log_3 5} \\ &= 2 \log_3 6 - 2 \log_3 2 = 2(\log_3 6 - \log_3 2) \\ &= 2 \log_3 3 = 2 \end{aligned}$$

13 $(\log_2 5 + \log_4 125) \left(\log_5 2 + \log_{25} \frac{1}{2} \right)$

$$\begin{aligned} &= (\log_2 5 + \log_{2^2} 5^3) (\log_5 2 + \log_{5^2} 2^{-1}) \\ &= \left(\log_2 5 + \frac{3}{2} \log_2 5 \right) \left(\log_5 2 - \frac{1}{2} \log_5 2 \right) \\ &= \frac{5}{2} \log_2 5 \times \frac{1}{2} \log_5 2 = \frac{5}{4} \times \log_2 5 \times \frac{1}{\log_2 5} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

14 $\frac{\log_7 4}{a} = \log_7 6$ 에서 $a = \frac{\log_7 4}{\log_7 6} = \log_6 4$

$$\begin{aligned} \frac{\log_7 12}{b} &= \log_7 6 \text{에서 } b = \frac{\log_7 12}{\log_7 6} = \log_6 12 \\ \frac{\log_7 27}{c} &= \log_7 6 \text{에서 } c = \frac{\log_7 27}{\log_7 6} = \log_6 27 \\ \therefore a + b + c &= \log_6 4 + \log_6 12 + \log_6 27 \\ &= \log_6 (4 \times 12 \times 27) = \log_6 6^4 = 4 \end{aligned}$$

15 $\log_n 4 \times \log_2 9 = \frac{\log_2 4}{\log_2 n} \times \log_2 9 = \frac{2}{\log_2 n} \times 2 \log_2 3$

$$= 4 \times \frac{\log_2 3}{\log_2 n} = 4 \log_n 3$$

$$4 \log_n 3 = k \quad (k \text{는 자연수}) \text{로 놓으면 } \log_n 3 = \frac{k}{4} \text{에서}$$

$$n^{\frac{k}{4}} = 3 \quad \therefore n = 3^{\frac{4}{k}}$$

이때 n 이 2 이상의 자연수이어야 하므로 k 는 4의 약수이어야 한다.

즉, 자연수 k 는 1, 2, 4이다.

$$k=1 \text{일 때, } n=3^4=81$$

$$k=2 \text{일 때, } n=3^2=9$$

$$k=4 \text{일 때, } n=3$$

따라서 모든 n 의 값의 합은 $81+9+3=93$

16 $3 \log_3 2 - 2 \log_3 10 - 2 \log_{\frac{1}{3}} 5 = \log_3 2^3 - \log_3 10^2 + \log_3 5^2$

$$= \log_3 \frac{2^3 \times 5^2}{10^2} = \log_3 2$$

$$\therefore 9^{3 \log_3 2 - 2 \log_3 10 - 2 \log_{\frac{1}{3}} 5} = 9^{\log_3 2} = 2^{\log_3 9} = 2^2 = 4$$

17 $(5^{\log_5 9 - \log_5 3})^{\log_5 2} + 4^{\log_5 5} = (5^{2 \log_5 3 - \log_5 3})^{\log_5 2} + 5^{\log_5 4}$

$$\begin{aligned} &= (5^{\log_5 3})^{\log_5 2} + 5^{2 \log_5 2} \\ &= 3^{\log_5 2} + 5^2 \\ &= 2 + 25 = 27 \end{aligned}$$

18 $\frac{2}{x} = \frac{2}{\log_{\sqrt{2}} 5} = 2 \log_5 \sqrt{2} = \log_5 2$

$$\begin{aligned} \therefore 2^x \times 5^{\frac{2}{x}} &= 2^{\log_5 5} \times 5^{\log_5 2} = 2^{\log_5 5^2} \times 5^{\log_5 2} \\ &= 5^2 \times 2 = 50 \end{aligned}$$

19 $\log_3 9 < \log_3 15 < \log_3 27$ 이므로

$$2 < \log_3 15 < 3$$

즉, $\log_3 15$ 의 정수 부분은 2이므로

$$a = \log_3 15 - 2 = \log_3 15 - \log_3 9 = \log_3 \frac{5}{3}$$

$$\therefore 9^a = 9^{\log_3 \frac{5}{3}} = \left(\frac{5}{3} \right)^{\log_3 9} = \left(\frac{5}{3} \right)^2 = \frac{25}{9}$$

20 $\log_2 8 < \log_2 12 < \log_2 16$ 이므로

$$3 < \log_2 12 < 4 \quad \therefore x = 3$$

$$\therefore y = \log_2 12 - 3 = \log_2 12 - \log_2 8 = \log_2 \frac{3}{2}$$

$$\therefore 2(2^y + 3^x) = 2(2^{\log_2 \frac{3}{2}} + 3^3) = 2\left(\frac{3}{2} + 27\right) = 57$$

21 $\frac{\log_5 9}{\log_5 4} = \log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3$

$$\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 \text{이므로}$$

$$1 < \log_2 3 < 2 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore b = \log_2 3 - 1$$

$$\therefore \frac{b-a}{a+b} = \frac{\log_2 3 - 2}{\log_2 3} = 1 - \frac{2}{\log_2 3}$$

$$= 1 - 2 \log_3 2 = 1 - \log_3 4$$

따라서 자연수 x 의 값은 4이다.

22 $\log_5 54 = \log_5 (2 \times 3^3) = \log_5 2 + 3 \log_5 3 = a + 3b$

23 $\log_5 18 = \frac{\log_{10} 18}{\log_{10} 5} = \frac{\log_{10} (2 \times 3^2)}{\log_{10} \frac{10}{2}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3}{1 - \log_{10} 2} \\ &= \frac{a + 2b}{1 - a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 24 \quad \log_2 3 = a \text{에서 } \log_3 2 &= \frac{1}{a} \\
 \therefore \log_{24} 30 &= \frac{\log_3 30}{\log_3 24} = \frac{\log_3 (2 \times 3 \times 5)}{\log_3 (2^3 \times 3)} \\
 &= \frac{\log_3 2 + 1 + \log_3 5}{3 \log_3 2 + 1} \\
 &= \frac{\frac{1}{a} + 1 + b}{\frac{3}{a} + 1} = \frac{ab + a + 1}{a + 3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 25 \quad 2^a = 3 \text{에서 } a &= \log_2 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\
 3^b = 5 \text{에서 } b &= \log_3 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\
 5^c = 7 \text{에서 } c &= \log_5 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢} \\
 \log_5 42 &= \frac{\log_3 42}{\log_3 5} = \frac{\log_3 (2 \times 3 \times 7)}{\log_3 5} \\
 &= \frac{\log_3 2 + 1 + \log_3 7}{\log_3 5} \\
 \text{이때 } \textcircled{㉠} \text{에서} \\
 \log_3 2 &= \frac{1}{\log_2 3} = \frac{1}{a} \\
 \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{에서} \\
 \log_3 7 &= \frac{\log_5 7}{\log_5 3} = \log_5 3 \times \log_5 7 = bc \\
 \therefore \log_5 42 &= \frac{\log_3 2 + 1 + \log_3 7}{\log_3 5} \\
 &= \frac{\frac{1}{a} + 1 + bc}{b} \\
 &= \frac{1 + a + abc}{ab}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 26 \quad a^2 b = 1 \text{에서 } b &= a^{-2} \\
 \therefore b^6 &= a^{-12} \\
 \therefore \log_{a^2} a^7 b^6 &= \log_{a^2} (a^7 \times a^{-12}) = \log_{a^2} a^{-5} = -\frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 a^2 b = 1 \text{이므로 } \log_a a^2 b &= 0 \\
 2 + \log_a b &= 0 \quad \therefore \log_a b = -2 \\
 \therefore \log_{a^2} a^7 b^6 &= \log_{a^2} a^7 + \log_{a^2} b^6 = \frac{7}{2} + 3 \log_a b \\
 &= \frac{7}{2} + 3 \times (-2) = -\frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 27 \quad \log_2 (a+b) &= 3 \text{에서} \\
 a+b &= 2^3 = 8 \\
 \log_2 a + \log_2 b &= 3 \text{에서} \\
 \log_2 ab &= 3 \quad \therefore ab = 2^3 = 8 \\
 \therefore a^2 + b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \\
 &= 8^2 - 2 \times 8 = 48
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 28 \quad 27^x = 18 \text{에서 } x &= \log_{27} 18 \\
 12^y = 18 \text{에서 } y &= \log_{12} 18 \\
 \therefore \frac{x+y}{xy} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{\log_{27} 18} + \frac{1}{\log_{12} 18} \\
 &= \log_{18} 27 + \log_{18} 12 \\
 &= \log_{18} 18^2 = 2
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 27^x = 18 \text{에서 } 27 &= 18^{\frac{1}{x}} \\
 12^y = 18 \text{에서 } 12 &= 18^{\frac{1}{y}} \\
 18^{\frac{1}{x}} \times 18^{\frac{1}{y}} &= 27 \times 12 \text{이므로 } 18^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 18^2 \\
 \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 2 \\
 \therefore \frac{x+y}{xy} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 29 \quad b = \log_2 7 &= \frac{\log_5 7}{\log_5 2} = \frac{\log_5 7}{a} \text{이므로} \\
 ab &= \log_5 7 \\
 \therefore 25^{ab} &= 25^{\log_5 7} = 7^{\log_5 25} = 7^2 = 49
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 \log_5 2 = a \text{에서 } 2 &= 5^a \\
 \log_2 7 = b \text{에서 } 7 &= 2^b \\
 \therefore 25^{ab} &= 5^{2ab} = (5^a)^{2b} = 2^{2b} = (2^b)^2 = 7^2 = 49
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 30 \quad a^2 = b^3 \text{에서 } b &= a^{\frac{2}{3}} \\
 \therefore A = \log_a b &= \log_a a^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b^3 = c^5 \text{에서 } c &= b^{\frac{3}{5}} \\
 \therefore B = \log_b c &= \log_b b^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^2 = c^5 \text{에서 } a &= c^{\frac{5}{2}} \\
 \therefore C = \log_c a &= \log_c c^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{따라서 } \frac{3}{5} &< \frac{2}{3} < \frac{5}{2} \text{이므로} \\
 B &< A < C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 31 \quad \textcircled{㉠} \text{에서 } \log_4 a &= 2 \\
 \therefore a &= 4^2 = 16 \\
 \textcircled{㉡} \text{에서} \\
 \log_a 5 \times \log_5 b &= \frac{\log_5 b}{\log_5 a} = \log_a b \\
 \text{즉, } \log_a b &= \frac{3}{2} \text{이므로} \\
 b &= a^{\frac{3}{2}} = 16^{\frac{3}{2}} = (2^4)^{\frac{3}{2}} = 2^6 = 64 \\
 \therefore a+b &= 16 + 64 = 80
 \end{aligned}$$

32 $\log_a 4 = \log_b 8$ 에서

$$2 \log_a 2 = 3 \log_b 2$$

$$\frac{2}{\log_2 a} = \frac{3}{\log_2 b}$$

$$2 \log_2 b = 3 \log_2 a$$

$$\log_2 b = \frac{3}{2} \log_2 a \quad \therefore b = a^{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_{ab} a^2 b^3 &= \log_{a \times a^{\frac{3}{2}}} \{a^2 \times (a^{\frac{3}{2}})^3\} \\ &= \log_{a^{\frac{5}{2}}} a^{\frac{13}{2}} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{13}{5} \end{aligned}$$

33 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 7, \alpha\beta = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_3(\alpha+1) + \log_3(\beta+1) &= \log_3(\alpha+1)(\beta+1) \\ &= \log_3(\alpha\beta + \alpha + \beta + 1) \\ &= \log_3(1+7+1) \\ &= \log_3 9 = 2 \end{aligned}$$

34 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_5 \alpha + \log_5 \beta = 6, \log_5 \alpha \times \log_5 \beta = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a \beta + \frac{1}{\log_a \beta} &= \log_a \beta + \log_\beta a \\ &= \log_5 \beta + \log_5 \alpha \\ &= \frac{\log_5 \beta}{\log_5 \alpha} + \frac{\log_5 \alpha}{\log_5 \beta} \\ &= \frac{(\log_5 \beta)^2 + (\log_5 \alpha)^2}{\log_5 \alpha \times \log_5 \beta} \\ &= \frac{(\log_5 \alpha + \log_5 \beta)^2 - 2 \times \log_5 \alpha \times \log_5 \beta}{\log_5 \alpha \times \log_5 \beta} \\ &= \frac{6^2 - 2 \times 4}{4} = 7 \end{aligned}$$

35 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 a + \log_2 b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_2 a \times \log_2 b = k \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠에서

$$\log_2 ab = 5 \quad \therefore ab = 2^5 = 32 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$a+b=12 \text{에서 } b=12-a$$

이를 ㉢에 대입하면

$$a(12-a) = 32, a^2 - 12a + 32 = 0$$

$$(a-4)(a-8) = 0$$

$$\therefore a=4 \text{ 또는 } a=8$$

즉, $a=4, b=8$ 또는 $a=8, b=4$ 이므로

㉡에서

$$k = \log_2 4 \times \log_2 8 = 2 \times 3 = 6$$

03 상용로그

14~16쪽

1 $-\frac{5}{3}$

2 ③

3 ④

4 0.3266

5 ⑤

6 7.96

7 0.00612

8 $\frac{12}{5}$

9 4

10 2500

11 12

12 128만 원

13 100배

14 $\frac{1}{2}$

15 2배

16 ③

17 3.3배

18 ⑤

19 7

20 ①

$$\begin{aligned} 1 \quad & \log \sqrt{10} - \log \sqrt[3]{100} + \log \sqrt{\frac{1}{1000}} \\ &= \log 10^{\frac{1}{2}} - \log 10^{\frac{2}{3}} + \log 10^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad & \textcircled{1} \log 163 = \log (10^2 \times 1.63) \\ &= 2 + 0.2122 = 2.2122 \\ & \textcircled{2} \log 1630 = \log (10^3 \times 1.63) \\ &= 3 + 0.2122 = 3.2122 \\ & \textcircled{3} \log 0.163 = \log (10^{-1} \times 1.63) \\ &= -1 + 0.2122 = -0.7878 \\ & \textcircled{4} \log 0.0163 = \log (10^{-2} \times 1.63) \\ &= -2 + 0.2122 = -1.7878 \\ & \textcircled{5} \log 0.00163 = \log (10^{-3} \times 1.63) \\ &= -3 + 0.2122 = -2.7878 \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

$$\begin{aligned} 3 \quad & \text{상용로그표에서 } \log 3.24 = 0.5105 \text{이므로} \\ & \log 32.4 = \log (10 \times 3.24) \\ &= 1 + 0.5105 = 1.5105 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad & \log \sqrt{3} - \log 2\sqrt{6} + \log 6 = \log \frac{\sqrt{3} \times 6}{2\sqrt{6}} = \log \frac{3}{\sqrt{2}} \\ &= \log 3 - \log \sqrt{2} \\ &= \log 3 - \frac{1}{2} \log 2 \\ &= 0.4771 - \frac{1}{2} \times 0.3010 \\ &= 0.3266 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad & a = \log 2340 = \log (10^3 \times 2.34) \\ &= 3 + 0.3692 = 3.3692 \\ & \log b = -1.6308 = (-1-1) + (1-0.6308) \\ &= -2 + 0.3692 = \log 10^{-2} + \log 2.34 \\ &= \log (10^{-2} \times 2.34) = \log 0.0234 \\ &\therefore b = 0.0234 \\ &\therefore a + 100b = 3.3692 + 2.34 = 5.7092 \end{aligned}$$

6 $\log 641 = 2.8069$ 에서
 $\log(10^2 \times 6.41) = 2.8069$
 $2 + \log 6.41 = 2.8069 \quad \therefore \log 6.41 = 0.8069$
 이때 $\log a = 0.8069$ 이므로 $a = 6.41$
 $\log 0.155 = -0.8097$ 에서
 $\log(10^{-1} \times 1.55) = -0.8097$
 $-1 + \log 1.55 = -0.8097 \quad \therefore \log 1.55 = 0.1903$
 이때 $\log b = 0.1903$ 이므로 $b = 1.55$
 $\therefore a + b = 6.41 + 1.55 = 7.96$

7 $\log 612 = 2.7868$ 에서
 $\log(10^2 \times 6.12) = 2.7868$
 $2 + \log 6.12 = 2.7868 \quad \therefore \log 6.12 = 0.7868$
 $\log N = -2 + (-0.2132)$
 $= (-2 - 1) + (1 - 0.2132)$
 $= -3 + 0.7868$
 $= \log 10^{-3} + \log 6.12$
 $= \log(10^{-3} \times 6.12) = \log 0.00612$
 $\therefore N = 0.00612$

8 $\log x^2 - \log \sqrt[3]{x} = 2 \log x - \frac{1}{3} \log x$
 $= \frac{5}{3} \log x \Rightarrow$ 정수
 $\log x$ 의 정수 부분이 2이므로
 $2 \leq \log x < 3 \quad \therefore \frac{10}{3} \leq \frac{5}{3} \log x < 5$
 이때 $\frac{5}{3} \log x$ 가 정수이므로
 $\frac{5}{3} \log x = 4 \quad \therefore \log x = \frac{12}{5}$

9 $\log x^3 - \log \frac{1}{x} = 3 \log x + \log x$
 $= 4 \log x \Rightarrow$ 홀수
 $1 < x \leq 100$ 에서 $0 < \log x \leq 2$
 $\therefore 0 < 4 \log x \leq 8$
 이때 $4 \log x$ 는 홀수이므로
 $4 \log x = 1$ 또는 $4 \log x = 3$ 또는 $4 \log x = 5$ 또는
 $4 \log x = 7$
 즉, $\log x = \frac{1}{4}$ 또는 $\log x = \frac{3}{4}$ 또는 $\log x = \frac{5}{4}$ 또는
 $\log x = \frac{7}{4}$ 이므로
 $x = 10^{\frac{1}{4}}$ 또는 $x = 10^{\frac{3}{4}}$ 또는 $x = 10^{\frac{5}{4}}$ 또는 $x = 10^{\frac{7}{4}}$
 $\therefore A = 10^{\frac{1}{4}} \times 10^{\frac{3}{4}} \times 10^{\frac{5}{4}} \times 10^{\frac{7}{4}}$
 $= 10^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} + \frac{7}{4}} = 10^4$
 $\therefore \log A = \log 10^4 = 4$

10 $2 \log N - \log \frac{N}{4} = \log N^2 - \log \frac{N}{4}$
 $= \log \left(N^2 \times \frac{4}{N} \right)$
 $= \log 4N \Rightarrow$ 정수
 $\log N$ 의 정수 부분이 3이므로
 $3 \leq \log N < 4, \log 1000 \leq \log N < \log 10000$
 $\therefore 1000 \leq N < 10000 \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 이때 $\log 4N$ 이 정수이므로 $4N$ 은 10의 거듭제곱 꼴이다.
 즉, $\textcircled{A}$ 에서 $4000 \leq 4N < 40000$ 이므로
 $4N = 10000 \quad \therefore N = 2500$

11 (가)에서
 $\log \sqrt{x} + \log \sqrt[3]{x} = \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{3} \log x$
 $= \frac{5}{6} \log x \Rightarrow$ 정수
 (가)에 의하여 $\frac{10}{3} \leq \frac{5}{6} \log x \leq \frac{20}{3}$
 이때 $\frac{5}{6} \log x$ 는 정수이므로
 $\frac{5}{6} \log x = 4$ 또는 $\frac{5}{6} \log x = 5$ 또는 $\frac{5}{6} \log x = 6$
 즉, $\log x = \frac{24}{5}$ 또는 $\log x = 6$ 또는 $\log x = \frac{36}{5}$
 또 (나)에서 $\frac{1}{2} \log x$ 와 $\frac{1}{3} \log x$ 는 모두 정수가 아니므로
 $\log x = \frac{24}{5}$ 또는 $\log x = \frac{36}{5}$
 $\therefore x = 10^{\frac{24}{5}}$ 또는 $x = 10^{\frac{36}{5}}$
 따라서 $N = 10^{\frac{24}{5}} \times 10^{\frac{36}{5}} = 10^{\frac{24}{5} + \frac{36}{5}} = 10^{12}$ 이므로
 $\log N = \log 10^{12} = 12$

12 3년 후의 중고 상품의 가격을 a 만 원이라 하면
 $\log(1 - 0.2) = \frac{1}{3} \log \frac{a}{250}$
 $3 \log 0.8 = \log a - \log 250$
 $\log a = \log \left(\frac{4}{5} \right)^3 + \log 250$
 $= \log \left(\frac{4^3}{5^3} \times 250 \right) = \log 128$
 $\therefore a = 128$
 따라서 3년 후의 중고 상품의 가격은 128만 원이다.

13 높이가 400m인 곳의 기압을 P_1 , 높이가 7km인 곳의 기압을 P_2 라 하면
 $0.4 = 3.3 \log \frac{1}{P_1} \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 $7 = 3.3 \log \frac{1}{P_2} \quad \dots\dots \textcircled{B}$

㉔-㉕을 하면

$$6.6 = 3.3 \left(\log \frac{1}{P_2} - \log \frac{1}{P_1} \right)$$

$$\log \frac{P_1}{P_2} = 2 \quad \therefore \frac{P_1}{P_2} = 10^2 = 100$$

따라서 높이가 400m인 곳의 기압은 높이가 7km인 곳의 기압의 100배이다.

- 14 처음 기억 상태가 100일 때, 1개월 후의 기억 상태를 $2a$ 라 하면 7개월 후의 기억 상태는 a 이므로

$$\log \frac{100}{2a} = c \log 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log \frac{100}{a} = c \log 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉔-㉕을 하면

$$\log \frac{100}{a} - \log \frac{100}{2a} = c \log 8 - c \log 2$$

$$\log 2 = c \log 4, \log 2 = 2c \log 2$$

$$\therefore c = \frac{1}{2}$$

- 15 이번 달 저축 금액을 a 라 하면 저축 금액이 매달 6%씩 증가하므로 12개월 후의 저축 금액은

$$a \left(1 + \frac{6}{100} \right)^{12} = a \times 1.06^{12}$$

1.06^{12} 에 상용로그를 취하면

$$\log 1.06^{12} = 12 \log 1.06 = 12 \times 0.025 = 0.3$$

$$\text{이때 } \log 2 = 0.3 \text{이므로 } 1.06^{12} = 2$$

따라서 1년 후의 저축 금액은 이번 달 저축 금액의 2배이다.

- 16 현재 미세 먼지의 농도를 a 라 하고 매년 $r\%$ 씩 감소시킨다고 하면 10년 후의 농도는 $\frac{1}{3}a$ 이므로

$$a \left(1 - \frac{r}{100} \right)^{10} = \frac{1}{3}a \quad \therefore \left(1 - \frac{r}{100} \right)^{10} = \frac{1}{3}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log \left(1 - \frac{r}{100} \right)^{10} = \log \frac{1}{3}$$

$$10 \log \left(1 - \frac{r}{100} \right) = -\log 3$$

$$\log \left(1 - \frac{r}{100} \right) = -\frac{0.48}{10} = -0.048$$

$$= -1 + 0.952$$

$$= \log 10^{-1} + \log 8.96$$

$$= \log (10^{-1} \times 8.96)$$

$$= \log 0.896$$

$$\text{즉, } 1 - \frac{r}{100} = 0.896 \text{이므로 } r = 10.4$$

따라서 매년 10.4%씩 감소시켜야 한다.

- 17 2009년의 매출액을 a 라 하면 2010년의 매출액은 $0.5a$ 이므로 2030년의 매출액은

$$0.5a(1+0.1)^{20} = a \times 0.5 \times 1.1^{20}$$

0.5×1.1^{20} 에 상용로그를 취하면

$$\log (0.5 \times 1.1^{20}) = -\log 2 + 20 \log 1.1$$

$$= -0.301 + 20 \times 0.041$$

$$= 0.519$$

$$\text{이때 } \log 3.3 = 0.519 \text{이므로 } 0.5 \times 1.1^{20} = 3.3$$

따라서 2030년의 매출액은 창업한 해의 매출액의 3.3배이다.

- 18 $\log 6^{30} = 30 \log (2 \times 3)$

$$= 30(\log 2 + \log 3)$$

$$= 30(0.3010 + 0.4771)$$

$$= 23.343$$

따라서 $\log 6^{30}$ 의 정수 부분이 23이므로 6^{30} 은 24자리의 자연수이다.

- 19 $\log \left(\frac{3}{4} \right)^{50} = 50 \log \frac{3}{2^2}$

$$= 50(\log 3 - 2 \log 2)$$

$$= 50(0.4771 - 2 \times 0.3010)$$

$$= -6.245$$

$$= -7 + 0.755$$

따라서 $\log \left(\frac{3}{4} \right)^{50}$ 의 정수 부분이 -7 이므로 $\left(\frac{3}{4} \right)^{50}$ 은 소수점 아래 7째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$$\therefore n = 7$$

- 20 N^{100} 이 150자리의 자연수이므로 $\log N^{100}$ 의 정수 부분은 149이다.

$$\text{즉, } 149 \leq \log N^{100} < 150 \text{이므로}$$

$$149 \leq 100 \log N < 150$$

$$1.49 \leq \log N < 1.5$$

$$-1.5 < -\log N \leq -1.49$$

$$\therefore -2 + 0.5 < \log \frac{1}{N} \leq -2 + 0.51$$

따라서 $\log \frac{1}{N}$ 의 정수 부분이 -2 이므로 $\frac{1}{N}$ 은 소수점 아래 2째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

I-2. 지수함수와 로그함수

01 지수함수

18~22쪽

1 ④	2 $\sqrt{2}$	3 $\neg, \sqsubset$	4 $\neg, \sqcup$	5 ③
6 $-1 < a < 0$	7 ②	8 ②	9 3	
10 ②	11 2	12 $\frac{1}{4}$	13 ③	14 $3\sqrt{3}$
15 ④	16 $\frac{1}{5}$	17 $b^m < b^n < a^n < a^m$	18 $\frac{17}{72}$	
19 ②	20 2	21 $\frac{5}{2}$	22 8	23 ④
24 21	25 -17	26 ③	27 ③	28 ③
29 11	30 ③			

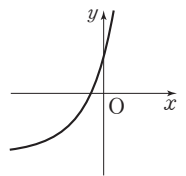
- 1 $f(m)=3$ 이므로 $a^m=3$
 $f(n)=6$ 이므로 $a^n=6$
 $\therefore f(m+n)=a^{m+n}=a^m \times a^n=3 \times 6=18$
- 2 $g(a)=\frac{1}{6}$ 이므로 $f\left(\frac{1}{6}\right)=a \quad \therefore a=2^{\frac{1}{6}}$
 $g(b)=\frac{1}{3}$ 이므로 $f\left(\frac{1}{3}\right)=b \quad \therefore b=2^{\frac{1}{3}}$
 $\therefore ab=2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$
- 3 $\neg. f(m)f(-m)=a^m a^{-m}=a^0=1$
 $\sqcup. f(2m)=a^{2m}=(a^m)^2=\{f(m)\}^2$
 $\sqsubset. f(m+n)=a^{m+n}=a^m a^n=f(m)f(n)$
 $\kappa. f\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{a^m}, \frac{1}{f(m)}=\frac{1}{a^m}=a^{-m}$
 $\therefore f\left(\frac{1}{m}\right) \neq \frac{1}{f(m)}$
따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \sqsubset$ 이다.
- 4 $\neg.$ 함수 $f(x)$ 는 일대일함수이므로 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.
 $\sqcup.$ 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$ 이다.
 $\sqsubset.$ $a>1$ 일 때 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하고,
 $0<a<1$ 일 때 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
즉, $a>1$ 일 때 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이고,
 $0<a<1$ 일 때 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 이다.
 $\kappa.$ 그래프는 $(0, 1)$ 을 지난다.
따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \sqcup$ 이다.
- 5 주어진 조건을 만족시키는 함수는 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가하는 함수이므로 (밑) >1 인 지수함수이다.
① $f(x)=3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x \Rightarrow 0 < (\text{밑}) < 1$

- ② $f(x)=0.5^x \Rightarrow 0 < (\text{밑}) < 1$
③ $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=2^x \Rightarrow (\text{밑}) > 1$
④ $f(x)=\left(\frac{5}{4}\right)^{-x}=\left(\frac{4}{5}\right)^x \Rightarrow 0 < (\text{밑}) < 1$
⑤ $f(x)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x \Rightarrow 0 < (\text{밑}) < 1$

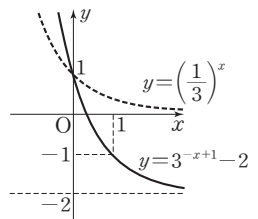
따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ③이다.

- 6 $y=(a^2+a+1)^x$ 에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값이 감소하려면 $0 < (\text{밑}) < 1$ 이어야 하므로
 $0 < a^2+a+1 < 1$
(i) $0 < a^2+a+1$ 에서 $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$
따라서 모든 실수 a 에 대하여 성립한다.
(ii) $a^2+a+1 < 1$ 에서 $a^2+a < 0$
 $a(a+1) < 0 \quad \therefore -1 < a < 0$
(i), (ii)에서 실수 a 의 값의 범위는 $-1 < a < 0$

- 7 함수 $y=2^{x+3}-6$ 의 그래프는 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -6 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $y=2^{x+3}-6$ 의 그래프로 알맞은 것은 ②이다.



- 8 $y=3^{-x+1}-2=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-2$
함수 $y=3^{-x+1}-2$ 의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
 $\neg.$ 치역은 $\{y|y > -2\}$ 이다.
 $\sqcup.$ 그래프의 점근선의 방정식은 $y=-2$ 이다.
 $\sqsubset.$ $0 < (\text{밑}) < 1$ 이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
 $\kappa.$ 함수 $y=3^{-x+1}-2$ 의 그래프는 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면을 지난다.
따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \kappa$ 이다.



- 9 함수 $y=4(2^{2x}+1)=4^{x+1}+4$ 의 그래프는 함수 $y=2^{2x}=4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이므로
 $m=-1, n=4$
 $\therefore m+n=-1+4=3$

- 10 함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=3^{x-m}+n$$

이때 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=2$ 이므로 $n=2$

함수 $y=3^{x-m}+2$ 의 그래프가 점 (7, 5)를 지나므로

$$5=3^{7-m}+2, 3^{7-m}=3$$

$$7-m=1 \quad \therefore m=6$$

$$\therefore m+n=6+2=8$$

- 11 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=-2^x$$

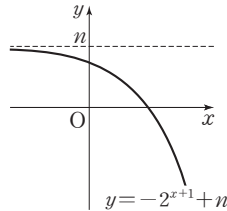
이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-2^{x+1}+n$$

이 함수의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $-2+n \geq 0$ 이어야 한다.

$$\therefore n \geq 2$$

따라서 n 의 최솟값은 2이다.



- 12 함수 $y=2^x$ 의 그래프는 점 (1, a)를 지나므로

$$a=2^1=2$$

함수 $y=2^x$ 의 그래프는 점 (a , b), 즉 점 (2, b)를 지나므로

$$b=2^2=4$$

$$\therefore 2^{a-b}=2^{2-4}=\frac{1}{4}$$

- 13 $A(a, 3^a)$, $B(b, 3^b)$ 이고 직선 AB의 기울기가 2이므로

$$\frac{3^b-3^a}{b-a}=2$$

$$\therefore b-a=\frac{1}{2}(3^b-3^a) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $\overline{AB}=5$ 에서

$$\sqrt{(b-a)^2+(3^b-3^a)^2}=5$$

$$(b-a)^2+(3^b-3^a)^2=5^2$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$\frac{1}{4}(3^b-3^a)^2+(3^b-3^a)^2=25$$

$$(3^b-3^a)^2=20$$

$$\therefore 3^b-3^a=2\sqrt{5} \quad (\because 3^a < 3^b)$$

- 14 점 A의 x 좌표를 a 라 하면

$$A(a, k), B\left(a+\frac{3}{4}, k\right)$$

점 A는 함수 $y=3^{2x}$ 의 그래프 위의 점이므로

$$k=3^{2a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 B는 함수 $y=3^x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$k=3^{a+\frac{3}{4}}$$

$$\text{즉, } 3^{2a}=3^{a+\frac{3}{4}} \text{이므로}$$

$$2a=a+\frac{3}{4} \quad \therefore a=\frac{3}{4}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$k=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$$

- 15 $A=8^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$, $B=\sqrt[5]{16}=2^{\frac{4}{5}}$, $C=0.25^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$

이때 $\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$ 이고, 밑이 1보다 크므로

$$2^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{3}{4}} < 2^{\frac{4}{5}}$$

$$\therefore C < A < B$$

- 16 $\frac{1}{\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[5]{\frac{1}{25}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$,

$$\sqrt[3]{0.2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$$

이때 $\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ 이고, 밑이 1보다 작으므로

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{5}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$$

따라서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱은

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$$

- 17 $0 < a < 1$ 이고 $m < n$ 이므로

$$a^m > a^n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$b > 1$ 이고 $m < n$ 이므로

$$b^m < b^n \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$0 < a < 1 < b$ 이고 $n < 0$ 이므로

$$b^n < a^n \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 에 의하여

$$b^m < b^n < a^n < a^m$$

- 18 $y=2^{3x}3^{-2x}=\left(\frac{8}{9}\right)^x$ 의 밑이 1보다 작으므로

$-1 \leq x \leq 1$ 일 때 함수 $y=2^{3x}3^{-2x}$ 은

$$x=-1 \text{에서 최댓값 } \left(\frac{8}{9}\right)^{-1}=\frac{9}{8},$$

$x=1$ 에서 최솟값 $\frac{8}{9}$ 을 갖는다.

따라서 $M = \frac{9}{8}$, $m = \frac{8}{9}$ 이므로

$$M - m = \frac{17}{72}$$

19 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-a} + 1$ 의 밑이 1보다 작으므로

$1 \leq x \leq 3$ 일 때 $x=1$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-a} + 1$, $x=3$ 에서

최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-a} + 1$ 을 갖는다.

즉, $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-a} + 1 = 5$ 이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-a} = 4, 2^{a-1} = 2^2$$

$$a-1=2 \quad \therefore a=3$$

따라서 함수 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + 1$ 의 최솟값은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

20 함수 $y = a^{x-2} + 3$ 은 $2 \leq x \leq 5$ 일 때

(i) $0 < a < 1$ 이면 $x=2$ 에서 최댓값 $a^0 + 3 = 4$ 를 갖는다.

이때 $4 \neq 11$ 이므로 조건을 만족시키는 a 의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $a > 1$ 이면 $x=5$ 에서 최댓값 $a^3 + 3$ 을 갖는다.

$$\text{즉, } a^3 + 3 = 11 \text{이므로 } a^3 = 8$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 1)$$

(i), (ii)에서 $a = 2$

21 $y = a^{3-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^{x-3}$

(i) $0 < \frac{1}{a} < 1$, 즉 $a > 1$ 이면 $1 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $y = a^{3-x}$ 은

$x = -1$ 에서 최댓값 a^4 ,

$x = 2$ 에서 최솟값 a 를 갖는다.

$$\text{즉, } M = a^4, m = a \text{이므로}$$

$$\frac{a^4}{a} = 8, a^3 = 8$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 1)$$

(ii) $\frac{1}{a} > 1$, 즉 $0 < a < 1$ 이면 $1 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $y = a^{3-x}$ 은

$x = 2$ 에서 최댓값 a ,

$x = -1$ 에서 최솟값 a^4 을 갖는다.

$$\text{즉, } M = a, m = a^4 \text{이므로}$$

$$\frac{a}{a^4} = 8, a^3 = \frac{1}{8}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < a < 1)$$

(i), (ii)에서 모든 a 의 값의 합은 $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

22 $y = 3^{-x^2+2x+1}$ 에서 $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ 이라 하면

$$f(x) = -(x-1)^2 + 2$$

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ 이므로
 $-2 \leq f(x) \leq 2$

이때 $y = 3^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 크므로 함수 $y = 3^{f(x)}$ 은

$f(x) = 2$ 에서 최댓값 $3^2 = 9$,

$f(x) = -2$ 에서 최솟값 $3^{-2} = \frac{1}{9}$ 을 갖는다.

따라서 $M = 9$, $m = \frac{1}{9}$ 이므로

$$M - 9m = 9 - 9 \times \frac{1}{9} = 9 - 1 = 8$$

23 $y = a^{2x^2-4x+5}$ 에서 $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ 라 하면

$$f(x) = 2(x-1)^2 + 3 \quad \therefore f(x) \geq 3$$

이때 $y = a^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 작으므로 함수 $y = a^{f(x)}$ 은

$f(x) = 3$ 에서 최댓값 a^3 을 갖는다.

따라서 $a^3 = \frac{8}{27}$ 이므로 $a = \frac{2}{3}$ ($\because 0 < a < 1$)

24 $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x^2+8x-a}$ 에서 $f(x) = -x^2 + 8x - a$ 라 하면

$$f(x) = -(x-4)^2 + 16 - a \quad \therefore f(x) \leq 16 - a$$

이때 $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 크므로 함수 $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}$ 은

$f(x) = 16 - a$, 즉 $x = 4$ 에서 최댓값 $\left(\frac{3}{2}\right)^{16-a}$ 을 갖는다.

$$\therefore b = 4$$

$$\text{또 } \left(\frac{3}{2}\right)^{16-a} = \frac{2}{3} \text{이므로 } 16 - a = -1 \quad \therefore a = 17$$

$$\therefore a + b = 17 + 4 = 21$$

25 $y = 25^x - 2 \times 5^x + 2 = (5^x)^2 - 2 \times 5^x + 2$

$5^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$-2 \leq x \leq 1 \text{일 때 } \frac{1}{25} \leq t \leq 5$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1 \text{이므로}$$

$t = 5$, 즉 $x = 1$ 에서 최댓값 $4^2 + 1 = 17$,

$t = 1$, 즉 $x = 0$ 에서 최솟값 1을 갖는다.

따라서 $a = 1$, $b = 17$, $c = 0$, $d = 1$ 이므로

$$a - b + c - d = 1 - 17 + 0 - 1 = -17$$

26 $y = \frac{1-2^{x+1}+4^{x+1}}{4^x} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$-3 \leq x \leq 1 \text{일 때 } \frac{1}{2} \leq t \leq 8$$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-2t+4=(t-1)^2+3 \text{이므로}$$

$$t=8 \text{에서 최댓값 } 7^2+3=52,$$

$$t=1 \text{에서 최솟값 } 3 \text{을 갖는다.}$$

$$\text{따라서 } M=52, m=3 \text{이므로}$$

$$M-m=49$$

27 $y=9^x-2 \times 3^{x+a}+4 \times 3^b$

$$=(3^x)^2-2 \times 3^a \times 3^x+4 \times 3^b$$

$$3^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$y=t^2-2 \times 3^a \times t+4 \times 3^b=(t-3^a)^2-3^{2a}+4 \times 3^b \text{이므로}$$

$$t=3^a, \text{ 즉 } x=a \text{에서 최솟값 } -3^{2a}+4 \times 3^b \text{을 갖는다.}$$

$$\therefore a=1$$

$$\text{또 } -3^2+4 \times 3^b=3 \text{이므로}$$

$$3^b=3 \quad \therefore b=1$$

$$\therefore a+b=1+1=2$$

28 $2^x>0, 2^{-x+4}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$f(x)=2^x+2^{-x+4} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x+4}}=2\sqrt{2^4}=8$$

$$(\text{단, 등호는 } 2^x=2^{-x+4}, \text{ 즉 } x=2 \text{일 때 성립})$$

$$\text{따라서 함수 } f(x) \text{는 } x=2 \text{에서 최솟값 } 8 \text{을 가지므로}$$

$$a=2, b=8$$

$$\therefore a+b=10$$

29 $3^x+3^{-x}=t$ 로 놓으면 $3^x>0, 3^{-x}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t=3^x+3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \times 3^{-x}}=2$$

$$(\text{단, 등호는 } 3^x=3^{-x}, \text{ 즉 } x=0 \text{일 때 성립})$$

$$\therefore t \geq 2$$

$$9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2 \text{이므로}$$

$$\text{주어진 함수는}$$

$$y=6t-(t^2-2)=-(t-3)^2+11$$

$$\text{따라서 } t \geq 2 \text{에서 함수 } y=-(t-3)^2+11 \text{은}$$

$$t=3 \text{일 때, 최댓값은 } 11$$

30 $4 \times 2^{a+x}>0, 9 \times 2^{a-x}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$y=4 \times 2^{a+x}+9 \times 2^{a-x}$$

$$\geq 2\sqrt{4 \times 2^{a+x} \times 9 \times 2^{a-x}}$$

$$=2\sqrt{36 \times 2^{2a}}$$

$$=12 \times 2^a \quad (\text{단, 등호는 } 4^x=\frac{9}{4} \text{일 때 성립})$$

$$\text{따라서 주어진 함수의 최솟값은 } 12 \times 2^a \text{이므로}$$

$$12 \times 2^a=96$$

$$2^a=8 \quad \therefore a=3$$

02 지수함수의 활용

23~27쪽

1 ②

2 4

3 2

4 -9

5 2

6 $x=0$

7 ③

8 $x=-1$ 또는 $x=1$

9 ④

10 ④

11 6

12 ①

13 $\frac{1}{27}$

14 ④

15 ③

16 $0 < k < \frac{25}{4}$

17 ④

18 $8 \leq m < 10$

19 ④

20 24

21 ①

22 4

23 ①

24 -2

25 31

26 2

27 ③

28 ④

29 ③

30 ③

31 ①

32 $a \leq 2$

33 ②

34 ③

35 3장

1 $2^{2x}=16$ 에서 $2^{2x}=2^4$ 이므로

$$2x=4 \quad \therefore x=2$$

$$3^{3x}=27 \text{에서 } 3^{3x}=3^3 \text{이므로}$$

$$3x=3 \quad \therefore x=1$$

$$\text{따라서 모든 근의 곱은}$$

$$2 \times 1=2$$

2 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-8}=\left(\frac{3}{2}\right)^{5-x}$ 에서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-8}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5}$ 이므로

$$2x^2-8=x-5, 2x^2-x-3=0$$

$$(x+1)(2x-3)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } a=-1, \beta=\frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$2\beta-a=2 \times \frac{3}{2}-(-1)=4$$

3 $(2\sqrt{2})^x=4^{x+1}$ 에서 $2^{\frac{3}{2}x}=2^{2x+2}$ 이므로

$$\frac{3}{2}x^2=2x+2, 3x^2-4x-4=0$$

$$(3x+2)(x-2)=0 \quad \therefore x=-\frac{2}{3} \text{ 또는 } x=2$$

$$\text{그런데 } x \text{는 자연수이므로 } x=2$$

4 $9^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x+a}$ 에서 $3^{2x}=3^{3x-a}$ 이므로

$$2x^2=3x-a \quad \therefore 2x^2-3x+a=0$$

$$\text{이때 주어진 방정식의 한 근이 } 3 \text{이므로}$$

$$2 \times 3^2-3 \times 3+a=0 \quad \therefore a=-9$$

5 $5^x-5^{2-x}=24$ 에서 $5^x-\frac{25}{5^x}=24$ 이므로

$$5^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t-\frac{25}{t}=24, t^2-24t-25=0$$

$$(t+1)(t-25)=0 \quad \therefore t=25 \ (\because t>0)$$

$$t=5^x \text{이므로}$$

$$5^x=25=5^2 \quad \therefore x=2$$

- 6 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 에서
 $2 \times 2^x + 2 = 2^{2x+2}$, $2 \times 2^x + 2 = 4 \times 2^{2x}$
 $2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $2t + 2 = 4t^2$, $4t^2 - 2t - 2 = 0$
 $2t^2 - t - 1 = 0$, $(2t+1)(t-1) = 0$
 $\therefore t = 1 (\because t > 0)$
 $t = 2^x$ 이므로 $2^x = 1 \quad \therefore x = 0$
- 7 $9^x + 27 = 12 \times 3^x$ 에서 $(3^x)^2 + 27 = 12 \times 3^x$ 이므로
 $3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 + 27 = 12t$, $t^2 - 12t + 27 = 0$
 $(t-3)(t-9) = 0 \quad \therefore t = 3$ 또는 $t = 9$
 $t = 3^x$ 이므로 $3^x = 3$ 또는 $3^x = 9$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$
따라서 두 함수 $y = 9^x + 27$, $y = 12 \times 3^x$ 의 그래프가 만나는 두 점 A, B의 x좌표는 1, 2이므로 그 합은
 $1 + 2 = 3$
- 8 $2^x + 2^{-x} = t (t \geq 2)$ 로 놓으면
 $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ 이므로
 $2(t^2 - 2) - 3t - 1 = 0$, $2t^2 - 3t - 5 = 0$
 $(t+1)(2t-5) = 0 \quad \therefore t = \frac{5}{2} (\because t \geq 2)$
 $t = 2^x + 2^{-x}$ 이므로 $2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}$
 $2^x = X (X > 0)$ 로 놓으면
 $X + \frac{1}{X} = \frac{5}{2}$, $2X^2 - 5X + 2 = 0$
 $(2X-1)(X-2) = 0$
 $\therefore X = \frac{1}{2}$ 또는 $X = 2$
 $X = 2^x$ 이므로 $2^x = \frac{1}{2}$ 또는 $2^x = 2$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 1$
- 9 $(x-1)^{4+3x} = (x-1)^{x^2}$ 에서
(i) 밑이 1이면 $x-1=1 \quad \therefore x=2$
(ii) 지수가 같으면
 $4+3x = x^2$, $x^2 - 3x - 4 = 0$
 $(x+1)(x-4) = 0 \quad \therefore x = 4 (\because x > 1)$
(i), (ii)에서 모든 근의 곱은 $2 \times 4 = 8$
- 10 $x^{x+6} = (x^x)^3$ 에서 $x^{x+6} = x^{3x}$
(i) 밑이 1이면 $x=1$
(ii) 지수가 같으면 $x+6=3x \quad \therefore x=3$
(i), (ii)에서 모든 근의 합은 $1+3=4$

- 11 $16(x+1)^x = 2^{2x}(x+1)^2$ 에서 $(x+1)^{x-2} = 2^{2x-4}$
 $(x+1)^{x-2} = 4^{x-2}$
(i) 밑이 같으면 $x+1=4 \quad \therefore x=3$
(ii) 지수가 0이면 $x-2=0 \quad \therefore x=2$
(i), (ii)에서 모든 근의 곱은 $3 \times 2 = 6$
- 12 $9^{x+2} - 3^{x+4} + 1 = 0$ 에서
 $81 \times (3^x)^2 - 81 \times 3^x + 1 = 0$
 $3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $81t^2 - 81t + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
이차방정식 ⑦의 두 근은 3^α , 3^β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $3^\alpha \times 3^\beta = \frac{1}{81}$, $3^{\alpha+\beta} = 3^{-4} \quad \therefore \alpha + \beta = -4$
- 13 주어진 방정식의 두 근을 α , β 라 하면
 $\alpha + \beta = -4$
 $3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $3t^2 - t + k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
이차방정식 ⑦의 두 근은 3^α , 3^β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $3^\alpha \times 3^\beta = \frac{k}{3}$, $3^{\alpha+\beta} = \frac{k}{3}$
이때 $\alpha + \beta = -4$ 이므로 $\frac{1}{81} = \frac{k}{3} \quad \therefore k = \frac{1}{27}$
- 14 주어진 방정식의 두 근을 α , β 라 하면
 $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$
 $a^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 7t + 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
이차방정식 ⑦의 두 근은 a^α , a^β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $a^\alpha \times a^\beta = 5$, $a^{\alpha+\beta} = 5$
이때 $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ 이므로 $a^{\frac{1}{2}} = 5 \quad \therefore a = 5^2 = 25$
- 15 $4^x - 10 \times 2^x + 20 = 0$ 에서
 $(2^x)^2 - 10 \times 2^x + 20 = 0$
 $2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 10t + 20 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
이차방정식 ⑦의 두 근은 2^α , 2^β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $2^\alpha + 2^\beta = 10$, $2^\alpha \times 2^\beta = 20$
 $\therefore 2^{2\alpha} + 2^{2\beta} = (2^\alpha + 2^\beta)^2 - 2 \times 2^\alpha \times 2^\beta$
 $= 10^2 - 2 \times 20 = 60$

16 $9^x - 5 \times 3^x + k = 0$ 에서

$$(3^x)^2 - 5 \times 3^x + k = 0$$

$3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$t^2 - 5t + k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 은 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$D = 5^2 - 4k > 0 \quad \therefore k < \frac{25}{4}$$

(ii) (두 근의 합) > 0 에서 $5 > 0$

(iii) (두 근의 곱) > 0 에서 $k > 0$

(i), (ii), (iii)을 동시에 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$0 < k < \frac{25}{4}$$

17 $4^x - k \times 2^{x+1} + 16 = 0$ 에서

$$(2^x)^2 - 2k \times 2^x + 16 = 0$$

$2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$t^2 - 2kt + 16 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 은 오직 하나의 양의 실근을 갖는다.

이때 $\textcircled{1}$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 (두 근의 곱) $= 16 > 0$ 이므로 이차방정식 $\textcircled{1}$ 은 양수인 중근을 갖다.

따라서 (두 근의 합) $= 2k > 0$ 이므로 $k > 0$

이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - 16 = 0, (k+4)(k-4) = 0$$

$$\therefore k = 4 \quad (\because k > 0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$t^2 - 8t + 16 = 0$$

$$(t-4)^2 = 0 \quad \therefore t = 4$$

$$t = 2^x \text{이므로 } 2^x = 4 = 2^2$$

$$\therefore x = 2$$

따라서 $k = 4, \alpha = 2$ 이므로

$$k + \alpha = 6$$

18 $4^x - 2(m-4)2^x + 2m = 0$ 에서

$$(2^x)^2 - 2(m-4)2^x + 2m = 0$$

$2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$t^2 - 2(m-4)t + 2m = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha > 1, \beta > 1$ 이므로 $2^\alpha > 2, 2^\beta > 2$, 즉 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 2보다 크다.

$f(t) = t^2 - 2(m-4)t + 2m$ 이라 하자.

(i) 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (m-4)^2 - 2m \geq 0$$

$$m^2 - 10m + 16 \geq 0, (m-2)(m-8) \geq 0$$

$$\therefore m \leq 2 \text{ 또는 } m \geq 8$$

(ii) 함수 $y = f(t)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $t = m - 4$ 이므로

$$m - 4 > 2 \quad \therefore m > 6$$

(iii) $f(2) > 0$ 이어야 하므로

$$4 - 4(m-4) + 2m > 0 \quad \therefore m < 10$$

(i), (ii), (iii)을 동시에 만족시키는 m 의 값의 범위는 $8 \leq m < 10$

19 $5^{x(x+1)} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 에서 $5^{x(x+1)} \geq 5^{-x+3}$ ◀ (밑)>1

$$x(x+1) \geq -x+3$$

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0, (x+3)(x-1) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 1$$

20 $8^{x^2} < 2^{-ax}$ 에서 $2^{3x^2} < 2^{-ax}$ ◀ (밑)>1

$$3x^2 < -ax, 3x^2 + ax < 0$$

$$x(3x+a) < 0$$

$$\therefore -\frac{a}{3} < x < 0 \quad (\because a \text{는 자연수})$$

이때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 2이므로

$$-3 \leq -\frac{a}{3} < -2 \quad \therefore 6 < a \leq 9$$

따라서 모든 자연수 a 의 값의 합은

$$7 + 8 + 9 = 24$$

21 $(2^x - 8)\left(\frac{1}{3^x} - 9\right) \geq 0$ 에서

(i) $2^x - 8 \geq 0, \frac{1}{3^x} - 9 \geq 0$ 일 때

$$2^x \geq 8 \text{에서 } 2^x \geq 2^3 \quad \text{◀ (밑)>1}$$

$$\therefore x \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{3^x} \geq 9 \text{에서 } 3^{-x} \geq 3^2 \quad \text{◀ (밑)>1}$$

$$-x \geq 2 \quad \therefore x \leq -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 정수 x 는 존재하지 않는다.

(ii) $2^x - 8 \leq 0, \frac{1}{3^x} - 9 \leq 0$ 일 때

$$2^x \leq 8 \text{에서 } 2^x \leq 2^3 \quad \text{◀ (밑)>1}$$

$$\therefore x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\frac{1}{3^x} \leq 9 \text{에서 } 3^{-x} \leq 3^2 \quad \text{◀ (밑)>1}$$

$$-x \leq 2 \quad \therefore x \geq -2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

㉔, ㉕을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$-2 \leq x \leq 3$$

(i), (ii)에서 구하는 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 6개이다.

22 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+6} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$ 에서 $\blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$

$$x+6 > x^2, x^2-x-6 < 0$$

$$(x+2)(x-3) < 0 \quad \therefore -2 < x < 3$$

$$\therefore A = \{x \mid -2 < x < 3\}$$

$$3^{|x-2|} \leq 3^a \text{에서} \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$|x-2| \leq a, -a \leq x-2 \leq a \quad \therefore 2-a \leq x \leq a+2$$

$$\therefore B = \{x \mid 2-a \leq x \leq a+2\}$$

$A \cap B = A$ 를 만족시키려면 $A \subset B$ 이어야 하므로

$$2-a \leq -2 \text{에서 } a \geq 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$a+2 \geq 3 \text{에서 } a \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

㉔, ㉕을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는 $a \geq 4$

따라서 양수 a 의 최솟값은 4이다.

23 $9^x+7 \leq 4(3^{x+1}-5)$ 에서 $(3^x)^2+7 \leq 4(3 \times 3^x-5)$

$$3^x=t(t>0) \text{로 놓으면 } t^2+7 \leq 4(3t-5)$$

$$t^2-12t+27 \leq 0, (t-3)(t-9) \leq 0 \quad \therefore 3 \leq t \leq 9$$

$$t=3^x \text{이므로 } 3 \leq 3^x \leq 9, 3^1 \leq 3^x \leq 3^2 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 2$$

따라서 모든 자연수 x 의 값의 합은 $1+2=3$

24 $\left(\frac{1}{25}\right)^x \geq 4 \times 5^{1-x} + 125$ 에서 $\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2 \geq 20 \times \left(\frac{1}{5}\right)^x + 125$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = t(t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 \geq 20t + 125, t^2 - 20t - 125 \geq 0$$

$$(t+5)(t-25) \geq 0 \quad \therefore t \geq 25 (\because t > 0)$$

$$t = \left(\frac{1}{5}\right)^x \text{이므로 } \left(\frac{1}{5}\right)^x \geq 25, \left(\frac{1}{5}\right)^x \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \quad \blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$$

$$\therefore x \leq -2$$

따라서 구하는 x 의 최댓값은 -2 이다.

25 $9^{x+1}-a \times 3^x+b < 0$ 에서 $9 \times (3^x)^2-a \times 3^x+b < 0$

$$3^x=t(t>0) \text{로 놓으면 } 9t^2-at+b < 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$\text{한편 } t=3^x \text{이므로 } -2 < x < 1 \text{에서 } \frac{1}{9} < t < 3$$

이차항의 계수가 9이고 해가 $\frac{1}{9} < t < 3$ 인 t 에 대한 이차부등식은

$$9\left(t-\frac{1}{9}\right)(t-3) < 0 \quad \therefore 9t^2-28t+3 < 0$$

이 부등식이 부등식 ㉔과 일치하므로

$$a=28, b=3 \quad \therefore a+b=31$$

26
$$\begin{cases} 2^{x^2-6} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x & \dots\dots \textcircled{㉔} \\ \left(\frac{1}{4}\right)^x - 3 \times 2^{-x} - 4 < 0 & \dots\dots \textcircled{㉕} \end{cases}$$

$$\textcircled{㉔} \text{에서 } 2^{x^2-6} \leq 2^{-x} \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$x^2-6 \leq -x, x^2+x-6 \leq 0$$

$$(x+3)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$\textcircled{㉕} \text{에서 } \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4 < 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t(t>0) \text{로 놓으면 } t^2-3t-4 < 0$$

$$(t+1)(t-4) < 0 \quad \therefore 0 < t < 4 (\because t > 0)$$

$$t = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{이므로}$$

$$0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < 4, 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad \blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$$

$$\therefore x > -2 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

㉔, ㉕을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$-2 < x \leq 2$$

따라서 모든 정수 x 의 값의 합은

$$-1+0+1+2=2$$

27 $x^{x-3} \geq x^{5-x}$ 에서

(i) $0 < x < 1$ 일 때,

$$x-3 \geq 5-x \quad \therefore x \leq 4$$

$$\text{그런데 } 0 < x < 1 \text{이므로 } 0 < x < 1$$

(ii) $x=1$ 일 때,

$$1 \geq 1 \text{이므로 부등식이 성립한다.}$$

따라서 $x=1$ 은 해이다.

(iii) $x > 1$ 일 때,

$$x-3 \geq 5-x \quad \therefore x \geq 4$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$0 < x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 4$$

28 $(x-1)^{x^2-x} < (x-1)^{8+x}$ 에서

(i) $0 < x-1 < 1$, 즉 $1 < x < 2$ 일 때

$$x^2-x > 8+x, x^2-2x-8 > 0$$

$$(x+2)(x-4) > 0 \quad \therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 4$$

그런데 $1 < x < 2$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x-1=1$, 즉 $x=2$ 일 때

$$1 < 1 \text{이므로 부등식이 성립하지 않는다.}$$

따라서 해는 없다.

(iii) $x-1 > 1$, 즉 $x > 2$ 일 때

$$x^2-x < 8+x, x^2-2x-8 < 0$$

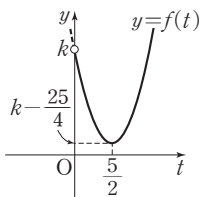
$$(x+2)(x-4) < 0 \quad \therefore -2 < x < 4$$

그런데 $x > 2$ 이므로 $2 < x < 4$

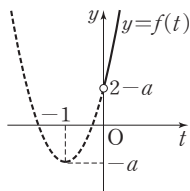
(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $2 < x < 4$
따라서 $\alpha = 2, \beta = 4$ 이므로
 $\alpha + \beta = 6$

- 29** $(x^2 - x + 1)^{2x-5} < (x^2 - x + 1)^{x+2}$ 에서
(i) $0 < x^2 - x + 1 < 1$, 즉 $0 < x < 1$ 일 때
 $2x - 5 > x + 2 \quad \therefore x > 7$
그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해는 없다.
(ii) $x^2 - x + 1 = 1$, 즉 $x = 0$ 또는 $x = 1$ 일 때
 $1 < 1$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.
따라서 해는 없다.
(iii) $x^2 - x + 1 > 1$, 즉 $x < 0$ 또는 $x > 1$ 일 때
 $2x - 5 < x + 2 \quad \therefore x < 7$
그런데 $x < 0$ 또는 $x > 1$ 이므로
 $x < 0$ 또는 $1 < x < 7$
(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는
 $x < 0$ 또는 $1 < x < 7$
따라서 자연수 x 는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다.

- 30** $25^x - 5^{x+1} + k \geq 0$ 에서
 $(5^x)^2 - 5 \times 5^x + k \geq 0$
 $5^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 5t + k \geq 0$
 $f(t) = t^2 - 5t + k$ 라 하면
 $f(t) = \left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + k - \frac{25}{4}$
 $t > 0$ 에서 $f(t)$ 의 최솟값은
 $k - \frac{25}{4}$ 이므로 부등식 $f(t) \geq 0$ 이
성립하려면
 $k - \frac{25}{4} \geq 0 \quad \therefore k \geq \frac{25}{4}$
따라서 자연수 k 의 최솟값은 7이다.



- 31** $2^{2x+1} + 2^{x+2} + 2 - a > 0$ 에서
 $2 \times (2^x)^2 + 4 \times 2^x + 2 - a > 0$
 $2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $2t^2 + 4t + 2 - a > 0$
 $f(t) = 2t^2 + 4t + 2 - a$ 라 하면
 $f(t) = 2(t+1)^2 - a$
 $t > 0$ 에서 부등식 $f(t) > 0$ 이 성립
하려면 $f(0) \geq 0$ 이어야 한다.
즉, $f(0) = 2 - a \geq 0 \quad \therefore a \leq 2$
따라서 자연수 a 는 1, 2이므로 그 합은
 $1 + 2 = 3$



- 32** $9^x - a \times 3^{x+1} + 9 \geq 0$ 에서
 $(3^x)^2 - 3a \times 3^x + 9 \geq 0$
 $3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 3at + 9 \geq 0$
 $f(t) = t^2 - 3at + 9$ 라 하면
 $f(t) = \left(t - \frac{3}{2}a\right)^2 + 9 - \frac{9}{4}a^2$
 $t > 0$ 에서 부등식 $f(t) \geq 0$ 이 성립하려면
(i) $\frac{3}{2}a \geq 0$, 즉 $a \geq 0$ 일 때

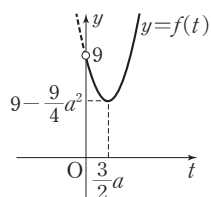
$$9 - \frac{9}{4}a^2 \geq 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$a^2 - 4 \leq 0$$

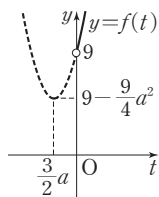
$$(a+2)(a-2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 2$$

그런데 $a \geq 0$ 이므로 $0 \leq a \leq 2$



- (ii) $\frac{3}{2}a < 0$, 즉 $a < 0$ 일 때
 $f(0) \geq 0$ 이어야 한다.
이때 $f(0) = 9 \geq 0$ 이므로 모든 실수
 t 에 대하여 성립한다.
 $\therefore a > 0$



- (i), (ii)에서 $t > 0$ 에서 부등식 $f(t) \geq 0$ 이 성립하려면
 $a \leq 2$

- 33** 투자한 2500만 원이 x 년 후에 1억 원 이상이 된다고 하면
 $2500 \times 2^{\frac{x}{5}} \geq 10000, 2^{\frac{x}{5}} \geq 4$
 $2^{\frac{x}{5}} \geq 2^2 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$
 $\frac{x}{5} \geq 2 \quad \therefore x \geq 10$
따라서 투자금이 1억 원 이상이 되는 것은 10년 후부터이다.

- 34** x 분 후 실험실 A의 암모니아 분자는 $2^{10} \times 8^x$ 개, 실험실 B의 암모니아 분자는 $4^{15} \times 2^x$ 개이므로
 $2^{10} \times 8^x = 4^{15} \times 2^x$
 $2^{10+3x} = 2^{30+x}$
 $10 + 3x = 30 + x \quad \therefore x = 10$
따라서 두 실험실의 암모니아 분자 수가 같아지는 것은
10분 후이다.

- 35** 처음 자외선의 양을 a 라 하면 n 장의 필름을 통과한 자외선의 양은 $a \times 0.2^n$ 이므로
 $a \times 0.2^n = 0.008a, 0.2^n = 0.2^3$
 $\therefore n = 3$
따라서 처음 자외선의 양의 99.2%가 차단되려면 통과해야 하는 필름은 3장이다.

03 로그함수

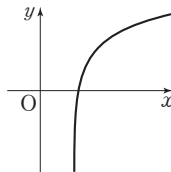
28~33쪽

1 ③	2 3	3 ㄱ	4 ②	5 ①
6 3	7 ㄱ, ㄴ	8 $\{x -2 < x < 6\}$	9 ③	
10 ④	11 ④	12 5	13 -5	14 8
15 ③	16 $\frac{15}{4}$	17 ⑤	18 $\sqrt{3}$	
19 $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$		20 ①	21 ④	
22 $\log_b \frac{a}{b} < \log_b a < \log_a b < \log_a ab$				23 $\log_a x$
24 ③	25 ④	26 ①	27 3	28 ②
29 30	30 ④	31 24	32 1	33 ④
34 9	35 ③	36 ②	37 ①	

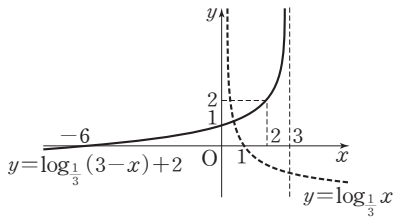
- $f(m) = \log_a m = 2$, $f(n) = \log_a n = 4$ 이므로
 $f(mn) = \log_a mn = \log_a m + \log_a n = 6$
- $f(x) = \log_3 \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \log_3 \frac{x+1}{x}$ 이므로
 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(26)$
 $= \log_3 2 + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \dots + \log_3 \frac{27}{26}$
 $= \log_3 \left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{27}{26}\right)$
 $= \log_3 27 = 3$
- ㄱ. $f(ab) = \log_2 ab = \log_2 a + \log_2 b = f(a) + f(b)$
 ㄴ. $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = \log_2 a + \log_2 \frac{1}{a}$
 $= \log_2 a - \log_2 a = 0$
 ㄷ. $f(a-b) = \log_2(a-b)$
 $f(a) - f(b) = \log_2 a - \log_2 b = \log_2 \frac{a}{b}$
 $\therefore f(a-b) \neq f(a) - f(b)$
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.
- $y = \log_2(x-3) + 1$ 에서 $\log_2(x-3) = y-1$
 로그의 정의에 의하여
 $x-3 = 2^{y-1} \quad \therefore x = 2^{y-1} + 3$
 x 와 y 를 서로 바꾸어 역함수를 구하면
 $y = 2^{x-1} + 3$
 따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=3$ 이므로
 $a+b+c=4$
- $g(2)=4$ 에서 $f(4)=2$ 이므로
 $\log_{\frac{1}{3}}(4-k) + 2 = 2$, $\log_{\frac{1}{3}}(4-k) = 0$
 $4-k=1 \quad \therefore k=3$
 $\therefore f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-3) + 2$

$g(1)=a$ 라 하면 $f(a)=1$ 이므로
 $\log_{\frac{1}{3}}(a-3) + 2 = 1$, $\log_{\frac{1}{3}}(a-3) = -1$
 $a-3=3 \quad \therefore a=6$

- $(f \circ g)(x) = x$ 이므로 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.
 $(g \circ g)(a) = 127$ 에서 $g(a) = b$ 라 하면
 $g(b) = 127$
 $g(b) = 127$ 에서 $f(127) = b$ 이므로
 $b = \log_2(127+1) = \log_2 2^7 = 7$
 $g(a) = 7$ 에서 $f(7) = a$ 이므로
 $a = \log_2(7+1) = \log_2 2^3 = 3$
- ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 일대일함수이므로 $x_1 = x_2$ 이면
 $f(x_1) = f(x_2)$ 이다.
 ㄴ. $a > 1$ 일 때 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하고,
 $0 < a < 1$ 일 때 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
 즉, $a > 1$ 일 때 $x_1 > x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 이고,
 $0 < a < 1$ 일 때 $x_1 > x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.
 ㄷ. 함수의 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지난다.
 ㄹ. 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$ 이다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.
- $y = \log_5(-x^2 + 4x + 12)$ 에서 진수의 조건에 의하여
 $-x^2 + 4x + 12 > 0$, $x^2 - 4x - 12 < 0$
 $(x+2)(x-6) < 0 \quad \therefore -2 < x < 6$
 따라서 구하는 정의역은
 $\{x | -2 < x < 6\}$
- $y = \log_3(x^2 - 2ax + 16)$ 이 실수 전체의 집합에서 정의되려면 $x^2 - 2ax + 16 > 0$ 이어야 한다.
 즉, 이차방정식 $x^2 - 2ax + 16 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D < 0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4} = (-a)^2 - 16 < 0$
 $a^2 - 16 < 0$, $(a+4)(a-4) < 0 \quad \therefore -4 < a < 4$
 따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 7개이다.
- $y = \log_2 2(x-2) + 1 = \log_2(x-2) + 2$
 함수 $y = \log_2 2(x-2) + 1$ 의 그래프
 는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축
 의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로
 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽
 그림과 같다.
 따라서 함수 $y = \log_2 2(x-2) + 1$ 의 그래프로 알맞은 것
 은 ④이다.



- 11 $y = \log_{\frac{1}{3}}(3-x) + 2$ 의 그래프는 $y = \log_{\frac{1}{3}}x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



- ㄱ. 정의역은 $\{x | x < 3\}$ 이다.
 ㄴ. 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$ 이다.
 ㄷ. x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
 ㄹ. $y = \log_{\frac{1}{3}}(3-x) + 2$ 의 그래프는 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면을 지난다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

- 12 함수 $y = \log_3 x + 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_3(x-a) + 1$$

이 함수의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$x = \log_3(y-a) + 1$$

$$x-1 = \log_3(y-a), \quad 3^{x-1} = y-a$$

$$\therefore y = 3^{x-1} + a$$

이 함수의 그래프가 함수 $y = 3^{x-1} + 5$ 의 그래프와 일치하므로

$$a=5$$

- 13 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\log_2(x-m) + n$$

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$ 이므로 $m=-2$

따라서 함수 $y = -\log_2(x+2) + n$ 의 그래프가 점

$(0, -4)$ 를 지나므로

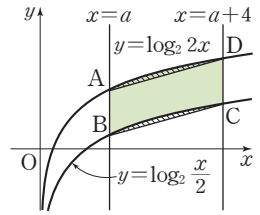
$$-4 = -\log_2 2 + n \quad \therefore n = -3$$

$$\therefore m+n = -2 + (-3) = -5$$

- 14 $y = \log_2 2x = \log_2 x + 1$, $y = \log_2 \frac{x}{2} = \log_2 x - 1$ 이므로

함수 $y = \log_2 \frac{x}{2}$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는 평행사변형 ABCD의 넓이와 같다. 이때 $\overline{AB}=2$ 이고 두 직선 $x=a$, $x=a+4$ 사이의 거리는 4이므로 구하는 넓이는 $2 \times 4 = 8$



- 15 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프는 점

(a, c) 를 지나므로

$$\log_{\frac{1}{3}} a = c$$

$$\therefore a = \left(\frac{1}{3}\right)^c = 3^{-c}$$

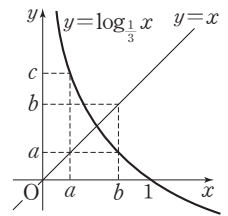
또 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프는

점 (b, a) 를 지나므로

$$\log_{\frac{1}{3}} b = a$$

$$\therefore b = \left(\frac{1}{3}\right)^a = 3^{-a}$$

$$\therefore 3^{-a-c} = 3^{-a} \times 3^{-c} = ab$$



- 16 $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 에 대하여

$$x = \frac{1}{2} \text{ 일 때, } y = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \therefore A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } y = \log_{\frac{1}{4}} 2 = -\frac{1}{2} \quad \therefore C\left(2, -\frac{1}{2}\right)$$

$y = \log_{\sqrt{2}} x$ 에 대하여

$$x = \frac{1}{2} \text{ 일 때, } y = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = -2 \quad \therefore B\left(\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } y = \log_{\sqrt{2}} 2 = 2 \quad \therefore D(2, 2)$$

$$\text{이때 } \overline{AB} = \overline{CD} = \left\{2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{5}{2} \text{ 이므로 사각형}$$

ABCD는 평행사변형이다.

$$\text{따라서 구하는 넓이는 } \frac{5}{2} \times \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4}$$

- 17 $A_m(p, m)$ 이라 하면 점 A_m 이 함수 $y = 3^x$ 의 그래프 위에 있으므로

$$3^p = m \quad \therefore p = \log_3 m$$

$$\therefore A_m(\log_3 m, m)$$

$B_m(q, m)$ 이라 하면 점 B_m 이 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위에 있으므로

$$\log_2 q = m \quad \therefore q = 2^m$$

$$\therefore B_m(2^m, m)$$

$$\therefore \overline{A_mB_m} = 2^m - \log_3 m$$

$\overline{A_mB_m}$ 이 자연수이려면 $m, 2^m$ 이 자연수이므로 $\log_3 m$ 이 음이 아닌 정수이어야 한다.

즉, $\log_3 m = k$ (k 는 음이 아닌 정수)라 할 때, $m = 3^k$ 꼴이어야 한다.

$$m = 3^0 = 1 \text{ 일 때, } \overline{A_1B_1} = 2^1 - \log_3 1 = 2$$

$$m = 3^1 = 3 \text{ 일 때, } \overline{A_3B_3} = 2^3 - \log_3 3 = 8 - 1 = 7$$

$$m = 3^2 = 9 \text{ 일 때, } \overline{A_9B_9} = 2^9 - \log_3 9 = 512 - 2 = 510$$

⋮

이때 m 의 값이 증가하면 $\overline{A_mB_m}$ 의 값도 증가하므로

$$a_3 = \overline{A_9B_9} = 510$$

- 18 함수 $y = \log_a x + b$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 두 교점의 x 좌표가 1, 3이고, 함수 $y = \log_a x + b$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수 $y = \log_a x + b$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같으므로 함수 $y = \log_a x + b$ 의 그래프는 두 점 (1, 1), (3, 3)을 지난다.

$$1 = \log_a 1 + b \text{ 에서 } b = 1$$

$$3 = \log_a 3 + 1 \text{ 에서 } 2 = \log_a 3$$

$$a^2 = 3 \quad \therefore a = \sqrt{3} \quad (\because a > 1)$$

$$\therefore ab = \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$$

- 19 $g(-1) = a$ 에서 $2^{-1} = a$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \quad \therefore D\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

$$f(b) = \frac{1}{2} \text{ 에서 } \log_2 b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore b = \sqrt{2} \quad \therefore B\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$$

함수 $f(x)$ 는 함수 $g(x)$ 의 역함수이므로

$$B\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ 에서 } C\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$$

$$D\left(-1, \frac{1}{2}\right) \text{ 에서 } A\left(\frac{1}{2}, -1\right)$$

$$\therefore \square ABCD$$

$$= \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times (\sqrt{2} + 1) \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times (\sqrt{2} + 1) \times \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3 + 3\sqrt{2}}{4} + \frac{3 + \sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$$

- 20 점 B의 x 좌표는 4이므로 $\log_2 4 = 2$

$$\therefore B(4, 2)$$

점 B(4, 2)를 지나고 기울기가 -1인 직선을 l 이라 하고,

함수 $y = 2^x$ 의 그래프가 직선 l 과 만나는 점을 C' 이라 하자.

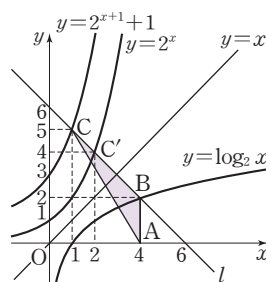
이때 함수 $y = \log_2 x$ 의 역함수는 $y = 2^x$ 이고 B(4, 2)이므로 $C'(2, 4)$

함수 $y = 2^{x+1} + 1$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행 이동한 것이므로 점 C는 점 C' 을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$$(2-1, 4+1) \quad \therefore C(1, 5)$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times (4-1) = 3$$



- 21 $A = 2 \log_3 5 = \log_3 5^2 = \log_3 25$

$$B = 3 = \log_3 3^3 = \log_3 27$$

$$C = \log_9 400 = \log_3 20^2 = \log_3 20$$

$20 < 25 < 27$ 이고, 밑이 1보다 크므로

$$\log_3 20 < \log_3 25 < \log_3 27 \quad \therefore C < A < B$$

- 22 $0 < a < 1$ 이므로 $b < a$ 의 양변에 밑이 a 인 로그를 취하면

$$\log_a b > 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$0 < b < 1$ 이므로 $b < a$ 의 양변에 밑이 b 인 로그를 취하면

$$1 > \log_b a \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{ 에서 } \log_b a < \log_a b$$

$$\log_a ab = \log_a b + 1, \log_b \frac{a}{b} = \log_b a - 1 \text{ 이므로}$$

$$\log_a b < \log_a ab, \log_b \frac{a}{b} < \log_b a$$

$$\therefore \log_b \frac{a}{b} < \log_b a < \log_a b < \log_a ab$$

- 23 $\log_a x = \frac{1}{2} \log_a x, \log_a x^2 = 2 \log_a x$

$a \leq x < a^2$ 의 각 변에 밑이 a 인 로그를 취하면

$$1 \leq \log_a x < 2$$

이때 $\log_a x > 0$ 이므로 각 변에 $\log_a x$ 를 곱하면

$$\log_a x \leq (\log_a x)^2 < 2 \log_a x$$

$$\therefore \frac{1}{2} \log_a x < (\log_a x)^2 < 2 \log_a x$$

따라서 가장 작은 수는 $\log_a x$ 이다.

- 24 $y = \log_2(x-1) + 2$ 의 밑이 1보다 크므로 $3 \leq x \leq 17$ 일 때

함수 $y = \log_2(x-1) + 2$ 는

$$x = 17 \text{ 에서 최댓값 } \log_2 16 + 2 = 6,$$

$$x = 3 \text{ 에서 최솟값 } \log_2 2 + 2 = 3 \text{ 을 갖는다.}$$

따라서 $M = 6, m = 3$ 이므로

$$\therefore M + m = 9$$

- 25 $f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$ 의 밑이 1보다 작으므로
 $0 \leq x \leq 12$ 일 때 함수 $f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$ 는
 $x=0$ 에서 최댓값 $2\log_{\frac{1}{2}}k$,
 $x=12$ 에서 최솟값 $2\log_{\frac{1}{2}}(12+k)$ 를 갖는다.
 즉, $2\log_{\frac{1}{2}}k = -4$ 이므로 $\log_{\frac{1}{2}}k = -2 \quad \therefore k=4$
 따라서 함수 $f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x+4)$ 의 최솟값은
 $2\log_{\frac{1}{2}}16 = -8 \quad \therefore m = -8$
 $\therefore k+m=4+(-8)=-4$
- 26 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+b$ 의 밑이 1보다 작으므로
 $a \leq x \leq 10$ 일 때 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+b$ 는
 $x=a$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}}(a-1)+b$,
 $x=10$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{3}}9+b=-2+b$ 를 갖는다.
 즉, $\log_{\frac{1}{3}}(a-1)+b=1, -2+b=-3$ 이므로
 $b=-1, a=\frac{10}{9}$
 $\therefore 9ab=-10$
- 27 함수 $y=\log_a(x+4)+1$ 은 $-3 \leq x \leq 5$ 일 때
 (i) $0 < a < 1$ 이면 $x=-3$ 에서 최댓값 $\log_a 1+1=1$ 을 갖는다.
 이때 $1 \neq 3$ 이므로 조건을 만족시키는 a 는 존재하지 않는다.
 (ii) $a > 1$ 이면 $x=5$ 에서 최댓값 $\log_a 9+1$ 을 갖는다.
 즉, $\log_a 9+1=3$ 이므로 $a^2=9 \quad \therefore a=3 (\because a > 1)$
 (i), (ii)에서 $a=3$
- 28 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+3)$ 에서 $f(x)=x^2-2x+3$ 이라 하면
 $f(x)=(x-1)^2+2$
 $2 \leq x \leq 6$ 에서 $f(2)=3, f(6)=27$ 이므로
 $3 \leq f(x) \leq 27$
 이때 $y=\log_{\frac{1}{3}}f(x)$ 의 밑이 1보다 작으므로 함수
 $y=\log_{\frac{1}{3}}f(x)$ 는
 $f(x)=3$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}}3=-1$,
 $f(x)=27$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{3}}27=-3$ 을 갖는다.
 따라서 $M=-1, m=-3$ 이므로
 $M^2+m=(-1)^2+(-3)=-2$
- 29 진수의 조건에서
 $x-5 > 0, 25-x > 0 \quad \therefore 5 < x < 25 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $y=\log(x-5)+\log(25-x)=\log(-x^2+30x-125)$
 $f(x)=-x^2+30x-125$ 라 하면
 $f(x)=-(x-15)^2+100$

$\textcircled{1}$ 에서 $f(5)=0, f(15)=100, f(25)=0$ 이므로
 $0 < f(x) \leq 100$
 이때 $y=\log f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로 함수
 $y=\log f(x)$ 는
 $f(x)=100$, 즉 $x=15$ 에서 최댓값 $\log 100=2$ 를 갖는다.
 따라서 $a=15, b=2$ 이므로 $ab=30$

- 30 $y=\log_a(|x-1|+2)$ 에서 $f(x)=|x-1|+2$ 라 하면
 $0 \leq x \leq 7$ 에서 $2 \leq f(x) \leq 8$
 (i) $a > 1$ 이면 $y=\log_a f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로
 함수 $y=\log_a f(x)$ 는 $f(x)=8$ 에서 최댓값 $\log_a 8$ 을 갖는다.
 즉, $\log_a 8 = -1$ 이므로 $a=\frac{1}{8}$
 그런데 $a > 1$ 이므로 조건을 만족시키는 a 는 존재하지 않는다.
 (ii) $0 < a < 1$ 이면 $y=\log_a f(x)$ 의 밑이 1보다 작으므로
 함수 $y=\log_a f(x)$ 는 $f(x)=2$ 에서 최댓값 $\log_a 2$ 를 갖는다.
 즉, $\log_a 2 = -1$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$
 (i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$
 따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}f(x)$ 는 $f(x)=8$ 일 때 최소이므로
 구하는 최솟값은 $\log_{\frac{1}{2}}8=-3$
- 31 $y=(\log_{\frac{1}{3}}x)^2-\log_{\frac{1}{3}}x^2+3=(\log_{\frac{1}{3}}x)^2-2\log_{\frac{1}{3}}x+3$
 $\log_{\frac{1}{3}}x=t$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 27$ 에서 $-3 \leq t \leq 0$
 이때 주어진 함수는 $y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$ 이므로
 $-3 \leq t \leq 0$ 일 때 함수 $y=(t-1)^2+2$ 는
 $t=-3$ 에서 최댓값 18, $t=0$ 에서 최솟값 3을 갖는다.
 따라서 $M=18, m=3$ 이므로
 $M+2m=18+2 \times 3=24$
- 32 $y=\log x^{\log x}-4\log 10x$
 $=(\log x)^2-4(1+\log x)$
 $=(\log x)^2-4\log x-4$
 $\log x=t$ 로 놓으면 $10 \leq x \leq 1000$ 에서 $1 \leq t \leq 3$
 이때 주어진 함수는 $y=t^2-4t-4=(t-2)^2-8$ 이므로
 $1 \leq t \leq 3$ 일 때 함수 $y=(t-2)^2-8$ 은
 $t=1$ 또는 $t=3$ 에서 최댓값 -7 ,
 $t=2$ 에서 최솟값 -8 을 갖는다.
 따라서 $M=-7, m=-8$ 이므로
 $M-m=-7-(-8)=1$

33 $y = (\log_2 x)^2 + a \log_2 x + b$
 $= (\log_2 x)^2 + 2a \log_2 x + b$
 $\log_2 x = t$ 로 놓으면 주어진 함수는
 $y = t^2 + 2at + b = (t+a)^2 - a^2 + b$
 이때 $x = \frac{1}{4}$, 즉 $t = -2$ 에서 최솟값 2를 가지므로
 $-a = -2, -a^2 + b = 2$
 따라서 $a = 2, b = 6$ 이므로 $a + b = 8$

34 $y = x^{-2 + \log_3 x}$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면
 $\log_3 y = \log_3 x^{-2 + \log_3 x}$
 $= (-2 + \log_3 x) \times \log_3 x$
 $= (\log_3 x)^2 - 2 \log_3 x$
 $\log_3 x = t$ 로 놓으면
 $1 \leq x \leq 27$ 에서 $0 \leq t \leq 3$
 $\log_3 y = t^2 - 2t = (t-1)^2 - 1$
 즉, $0 \leq t \leq 3$ 일 때 함수 $\log_3 y$ 는 $t = 3$ 에서 최댓값 3,
 $t = 1$ 에서 최솟값 -1 을 갖는다.
 이때 $\log_3 y$ 의 밑이 1보다 크므로
 $\log_3 y = 3$ 에서 $M = 3^3 = 27$
 $\log_3 y = -1$ 에서 $m = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
 $\therefore Mm = 27 \times \frac{1}{3} = 9$

35 $\log_5 \left(x + \frac{1}{y}\right) + \log_5 \left(y + \frac{16}{x}\right) = \log_5 \left(xy + \frac{16}{xy} + 17\right)$
 $x > 0, y > 0$ 에서 $xy > 0, \frac{16}{xy} > 0$ 이므로 산술평균과 기하
 평균의 관계에 의하여
 $xy + \frac{16}{xy} \geq 2\sqrt{xy \times \frac{16}{xy}} = 8$ (단, 등호는 $xy = 4$ 일 때 성립)
 이때 $\log_5 \left(xy + \frac{16}{xy} + 17\right)$ 의 밑이 1보다 크므로
 $\log_5 \left(xy + \frac{16}{xy} + 17\right) \geq \log_5 (8 + 17) = \log_5 25 = 2$
 따라서 구하는 최솟값은 2이다.

36 $y = \log_2 x + \log_x 128$
 $= \log_2 x + 7 \log_x 2$
 $= \log_2 x + \frac{7}{\log_2 x}$
 $x > 1$ 에서 $\log_2 x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계
 에 의하여
 $y = \log_2 x + \frac{7}{\log_2 x} \geq 2\sqrt{\log_2 x \times \frac{7}{\log_2 x}} = 2\sqrt{7}$
 (단, 등호는 $\log_2 x = \sqrt{7}$ 일 때 성립)
 따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{7}$ 이다.

37 $\log_x \sqrt{y} + \log_{y^2} x = \frac{1}{2} \log_x y + \frac{1}{2} \log_y x$
 $= \frac{1}{2} (\log_x y + \log_y x)$
 $= \frac{1}{2} \left(\log_x y + \frac{1}{\log_x y} \right)$
 $x > 1, y > 1$ 에서 $\log_x y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의
 관계에 의하여
 $\log_x y + \frac{1}{\log_x y} \geq 2\sqrt{\log_x y \times \frac{1}{\log_x y}} = 2$
 (단, 등호는 $\log_x y = 1$ 일 때 성립)
 $\therefore \log_x \sqrt{y} + \log_{y^2} x = \frac{1}{2} \left(\log_x y + \frac{1}{\log_x y} \right)$
 $\geq \frac{1}{2} \times 2 = 1$
 따라서 구하는 최솟값은 1이다.

04 로그함수의 활용

34~38쪽

1 ②	2 ③	3 $x=1$	4 ③	5 80
6 32	7 5	8 ⑤	9 ①	10 ②
11 -4	12 ②	13 $\frac{1}{10}$		
14 $x=10$ 또는 $x=100$	15 ⑤	16 ①	17 ④	
18 2	19 ④	20 $3 < x < 5$	21 3	
22 15	23 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 또는 $x \geq 16$	24 ③		
25 2	26 ⑤	27 100	28 ③	29 10
30 $0 < a \leq 3$ 또는 $a \geq 27$	31 6	32 10		
33 $0 < a \leq \frac{1}{4}$	34 ⑤	35 ④	36 30년	

1 진수의 조건에서
 $x-1 > 0, x+2 > 0$
 $\therefore x > 1$ ㉠
 $\log_2 (x-1) + \log_2 (x+2) = 2$ 에서
 $\log_2 (x-1)(x+2) = 2$
 $\log_2 (x^2 + x - 2) = 2$
 $x^2 + x - 2 = 2^2, x^2 + x - 6 = 0$
 $(x+3)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -3$ 또는 $x = 2$
 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 2$ 이므로 $a = 2$
 $\therefore 2a = 4$

2 진수의 조건에서

$$x^2 - 3x - 10 > 0, x + 2 > 0$$

$$\therefore x > 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2\log_9(x^2 - 3x - 10) = \log_3(x + 2) + 1 \text{에서}$$

$$\log_{9^{\frac{1}{2}}}(x^2 - 3x - 10) = \log_3(x + 2) + \log_3 3$$

$$\log_3(x^2 - 3x - 10) = \log_3 3(x + 2)$$

$$x^2 - 3x - 10 = 3(x + 2), x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$(x + 2)(x - 8) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 8$$

따라서 ①에 의하여 $x = 8$

3 진수의 조건에서

$$2x + 2 > 0, 2x - 1 > 0 \quad \therefore x > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_2 \sqrt{2x + 2} = 1 - \frac{1}{2} \log_2(2x - 1) \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \log_2(2x + 2) + \frac{1}{2} \log_2(2x - 1) = 1$$

$$\log_2(2x + 2)(2x - 1) = 2$$

$$(2x + 2)(2x - 1) = 4, 2x^2 + x - 3 = 0$$

$$(2x + 3)(x - 1) = 0 \quad \therefore x = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 ①에 의하여 $x = 1$

4 밑과 진수의 조건에서

$$a > 0, a \neq 1$$

$$\therefore 0 < a < 1 \text{ 또는 } a > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_2 8a = \frac{2}{\log_a 2} \text{에서}$$

$$\log_2 8a = 2 \log_2 a, \log_2 8a = \log_2 a^2$$

$$8a = a^2, a^2 - 8a = 0$$

$$a(a - 8) = 0 \quad \therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 8$$

따라서 ①에 의하여 $a = 8$

5 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$\left(\log_3 \frac{x}{3}\right)^2 = \log_3 x + 5 \text{에서}$$

$$(\log_3 x - \log_3 3)^2 = \log_3 x + 5$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면 } (t - 1)^2 = t + 5$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0, (t + 1)(t - 4) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 4$$

$$t = \log_3 x \text{이므로 } \log_3 x = -1 \text{ 또는 } \log_3 x = 4$$

$$\therefore x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 81$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 81$$

$$\text{이때 } a < \beta \text{이므로 } a = \frac{1}{3}, \beta = 81$$

$$\therefore \beta - 3a = 81 - 3 \times \frac{1}{3} = 80$$

6 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$\left(\log_2 \frac{x}{2}\right)(\log_2 4x) = 4 \text{에서}$$

$$(\log_2 x - 1)(2 + \log_2 x) = 4$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$(t - 1)(2 + t) = 4, t^2 + t - 6 = 0$$

$$(t + 3)(t - 2) = 0 \quad \therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 2$$

$$t = \log_2 x \text{이므로 } \log_2 x = -3 \text{ 또는 } \log_2 x = 2$$

$$\therefore x = \frac{1}{8} \text{ 또는 } x = 4$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } x = \frac{1}{8} \text{ 또는 } x = 4$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{8}, \beta = 4 \text{ 또는 } a = 4, \beta = \frac{1}{8} \text{이므로}$$

$$64a\beta = 32$$

7 밑과 진수의 조건에서 $x > 0, x \neq 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$\log_5 x + 6 \log_x 5 - 5 = 0 \text{에서}$$

$$\log_5 x + \frac{6}{\log_5 x} - 5 = 0$$

$$\log_5 x = t (t \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$t + \frac{6}{t} - 5 = 0, t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t - 2)(t - 3) = 0 \quad \therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 3$$

$$t = \log_5 x \text{이므로 } \log_5 x = 2 \text{ 또는 } \log_5 x = 3$$

$$\therefore x = 25 \text{ 또는 } x = 125$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } x = 25 \text{ 또는 } x = 125$$

$$\text{이때 } a < \beta \text{이므로 } a = 25, \beta = 125$$

$$\therefore \frac{\beta}{a} = 5$$

8 진수의 조건에서 $x > 0, y > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$\log_2 x \times \log_3 \sqrt{y} = 5 \text{에서}$$

$$\log_2 x \times \frac{1}{2} \log_3 y = 5 \quad \therefore \log_2 x \times \log_3 y = 10$$

$$\log_2 x = X, \log_3 y = Y \text{로 놓으면}$$

$$X + Y = 7, XY = 10$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면}$$

$$X = 2, Y = 5 \text{ 또는 } X = 5, Y = 2$$

$$\log_2 x = 2, \log_3 y = 5 \text{ 또는 } \log_2 x = 5, \log_3 y = 2$$

$$\therefore x = 4, y = 243 \text{ 또는 } x = 32, y = 9$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } x = 4, y = 243 \text{ 또는 } x = 32, y = 9$$

$$\text{그런데 } a > \beta \text{이므로 } a = 32, \beta = 9 \quad \therefore a - \beta = 23$$

9 $(\log_2 2x)^2 - 2 \log_2 8x^2 = 0$ 에서

$$(\log_2 2 + \log_2 x)^2 - 2(\log_2 8 + 2 \log_2 x) = 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$(1 + t)^2 - 2(3 + 2t) = 0$$

$$t^2 - 2t - 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식 ㉠의 두 근은 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 2, \log_2 \alpha \beta = 2 \quad \therefore \alpha \beta = 4$

10 $\log 2x \times \log 5x = 2$ 에서
 $(\log 2 + \log x)(\log 5 + \log x) = 2$
 $\log x = t$ 로 놓으면 $(\log 2 + t)(\log 5 + t) = 2$
 $t^2 + (\log 2 + \log 5)t + \log 2 \times \log 5 - 2 = 0$
 $t^2 + t + \log 2 \times \log 5 - 2 = 0$
 이 이차방정식의 두 근은 $\log \alpha, \log \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\log \alpha + \log \beta = -1, \log \alpha \beta = -1$
 $\therefore \alpha \beta = \frac{1}{10}$

11 $\log_3 x = t$ 로 놓으면 $(t+k)(t+1)+2=0$
 $t^2 + (k+1)t + k + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식 ㉠의 두 근은 $\log_3 \alpha, \log_3 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\log_3 \alpha + \log_3 \beta = -(k+1), \log_3 \alpha \beta = -k-1$
 이때 $\alpha \beta = 27$ 이므로
 $\log_3 27 = -k-1 \quad \therefore k = -4$

12 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 주어진 방정식의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면
 $\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 27x^2, (\log_3 x)^2 = 3 + 2\log_3 x$
 $\log_3 x = t$ 로 놓으면 $t^2 = 3 + 2t, t^2 - 2t - 3 = 0$
 $(t+1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = -1$ 또는 $t = 3$
 $t = \log_3 x$ 이므로 $\log_3 x = -1$ 또는 $\log_3 x = 3$
 $\therefore x = \frac{1}{3}$ 또는 $x = 27$
 따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는
 $x = \frac{1}{3}$ 또는 $x = 27$

13 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 주어진 방정식의 양변에 상용로그를 취하면
 $\log x^{1-\log x} = \log \frac{x^2}{100}$
 $(1-\log x) \log x = 2 \log x - 2$
 $\log x = t$ 로 놓으면 $(1-t)t = 2t - 2, t^2 + t - 2 = 0$
 $(t+2)(t-1) = 0 \quad \therefore t = -2$ 또는 $t = 1$
 $t = \log x$ 이므로 $\log x = -2$ 또는 $\log x = 1$
 $\therefore x = \frac{1}{100}$ 또는 $x = 10$

㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{1}{100} \text{ 또는 } x = 10$$

따라서 모든 근의 곱은 $\frac{1}{100} \times 10 = \frac{1}{10}$

14 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $2^{\log x} \times x^{\log 2} - 3(2^{\log x} + x^{\log 2}) + 8 = 0$ 에서
 $(2^{\log x})^2 - 6 \times 2^{\log x} + 8 = 0$
 $2^{\log x} = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 6t + 8 = 0, (t-2)(t-4) = 0$
 $\therefore t = 2$ 또는 $t = 4$
 $t = 2^{\log x}$ 이므로 $2^{\log x} = 2$ 또는 $2^{\log x} = 4$
 $\log x = 1$ 또는 $\log x = 2$
 $\therefore x = 10$ 또는 $x = 100$
 따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는
 $x = 10$ 또는 $x = 100$

15 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 주어진 방정식의 양변에 상용로그를 취하면
 $(\log 5x)^2 = (\log 3x)^2$
 $\therefore \log 5x = -\log 3x$ 또는 $\log 5x = \log 3x$
 (i) $\log 5x = -\log 3x$ 에서 $5x = \frac{1}{3x} \quad \therefore x^2 = \frac{1}{15}$
 (ii) $\log 5x = \log 3x$ 에서 $5x = 3x, \text{ 즉 } x = 0$
 그런데 ㉠에서 $x > 0$ 이므로 해는 없다.
 (i), (ii)에서 $a^2 = \frac{1}{15} \quad \therefore \frac{1}{a^2} = 15$

16 진수의 조건에서
 $x^2 - 2x - 15 > 0, x - 3 > 0 \quad \therefore x > 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 주어진 부등식에서
 $\log_3 (x^2 - 2x - 15) < \log_3 (3x - 9)$ 이므로 $\blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$
 $x^2 - 2x - 15 < 3x - 9, x^2 - 5x - 6 < 0$
 $(x+1)(x-6) < 0 \quad \therefore -1 < x < 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $5 < x < 6$
 따라서 $\alpha = 5, \beta = 6$ 이므로 $\beta - \alpha = 1$

17 진수의 조건에서
 $1 - x > 0, 2x + 6 > 0 \quad \therefore -3 < x < 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 주어진 부등식에서
 $\log_{\frac{1}{4}} (1-x)^2 > \log_{\frac{1}{4}} (2x+6)$ 이므로 $\blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$
 $(1-x)^2 < 2x+6, x^2 - 4x - 5 < 0$
 $(x+1)(x-5) < 0 \quad \therefore -1 < x < 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $-1 < x < 1$

18 진수의 조건에서

$$x > 0, \log_9 x > 0 \quad \therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_9 x) > 1 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_9 x) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \quad \blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$$

$$\log_9 x < \frac{1}{2}, \log_9 x < \log_9 3 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$\therefore x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$1 < x < 3$$

따라서 자연수 x 의 값은 2이다.

19 진수의 조건에서

$$|x-3| > 0 \quad \therefore x \neq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_{\frac{1}{5}}|x-3| > -1 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{5}}|x-3| > \log_{\frac{1}{5}} 5 \quad \blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$$

$$|x-3| < 5, -5 < x-3 < 5$$

$$\therefore -2 < x < 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x 는

-1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7의 8개이다.

20 (i) 부등식 $2^{x(x-4)} < 32$

$$2^{x(x-4)} < 32 \text{에서 } 2^{x(x-4)} < 2^5$$

$$x(x-4) < 5, x^2 - 4x - 5 < 0$$

$$(x+1)(x-5) < 0 \quad \therefore -1 < x < 5$$

(ii) 부등식 $2\log_{\frac{1}{3}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$

진수의 조건에서

$$x-3 > 0, x+3 > 0 \quad \therefore x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$2\log_{\frac{1}{3}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x+3) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-3)^2 \geq \log_{\frac{1}{3}}(x+3) \quad \blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$$

$$(x-3)^2 \leq (x+3), x^2 - 7x + 6 \leq 0$$

$$(x-1)(x-6) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq x \leq 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$3 < x \leq 6$$

(i), (ii)에서 주어진 연립부등식의 해는 $3 < x < 5$

21 진수의 조건에서

$$x-1 > 0, \frac{x}{2} + k > 0$$

$$\therefore x > 1, x > -2k$$

그런데 k 는 자연수이므로 $x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$

$$\log_5(x-1) \leq \log_5\left(\frac{x}{2} + k\right) \text{에서} \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$x-1 \leq \frac{x}{2} + k \quad \therefore x \leq 2k+2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$1 < x \leq 2k+2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

따라서 ㉢을 만족시키는 정수 x 가 7개이므로

$$8 \leq 2k+2 < 9 \quad \therefore 3 \leq k < \frac{7}{2}$$

이때 k 가 자연수이므로 $k=3$

22 진수의 조건에서

$$f(x) > 0, x-1 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_3 f(x) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leq 0 \text{에서}$$

$$\log_3 f(x) - \log_3(x-1) \leq 0$$

$$\log_3 f(x) \leq \log_3(x-1) \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$\therefore f(x) \leq x-1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$0 < f(x) \leq x-1 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

㉣을 만족시키는 x 의 값의 범위는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있으면서 동시에 직선 $y=x-1$ 과 만나거나 아래쪽에 있는 부분이므로

$$4 \leq x < 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉤}$$

㉢, ㉤을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$4 \leq x < 7$$

따라서 모든 자연수 x 의 값의 합은

$$4+5+6=15$$

23 진수의 조건에서

$$\frac{32}{x} > 0, 4x > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_2 \frac{32}{x} \times \log_2 4x \leq 6 \text{에서}$$

$$(5 - \log_2 x)(2 + \log_2 x) \leq 6$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$(5-t)(2+t) \leq 6, t^2 - 3t - 4 \geq 0$$

$$(t+1)(t-4) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -1 \text{ 또는 } t \geq 4$$

$$t = \log_2 x \text{이므로}$$

$$\log_2 x \leq -1 \text{ 또는 } \log_2 x \geq 4 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$\therefore x \leq \frac{1}{2} \text{ 또는 } x \geq 16 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ 또는 } x \geq 16$$

24 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$

$$\log_3 x^2 - \log_3 x \times \log_3 3x + 6 \geq 0 \text{에서}$$

$$2\log_3 x - \log_3 x(1 + \log_3 x) + 6 \geq 0$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면}$$

$$2t - t(1+t) + 6 \geq 0, t^2 - t - 6 \leq 0$$

$$(t+2)(t-3) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq t \leq 3$$

$$t = \log_3 x \text{이므로 } -2 \leq \log_3 x \leq 3 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$\therefore \frac{1}{9} \leq x \leq 27 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{9} \leq x \leq 27$$

따라서 자연수 x 는 1, 2, 3, ..., 27의 27개이다.

25 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$(1 + \log_{\frac{1}{2}} x) \log_2 x > -2 \text{에서}$$

$$(1 - \log_2 x) \log_2 x > -2$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$(1-t)t > -2, t^2 - t - 2 < 0$$

$$(t+1)(t-2) < 0 \quad \therefore -1 < t < 2$$

$$t = \log_2 x \text{이므로 } -1 < \log_2 x < 2 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} < x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{2} < x < 4$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{2}, \beta = 4 \text{이므로 } a\beta = 2$$

26 $\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면 $t^2 + at + b < 0$ ㉠

주어진 부등식의 해가 $1 < x < 9$ 이므로 각 변에 밑이 $\frac{1}{3}$ 인

로그를 취하면

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 < \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 1 \quad \blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$$

$$\therefore -2 < t < 0$$

이차항의 계수가 1이고 해가 $-2 < t < 0$ 인 t 에 대한 이차 부등식은

$$t(t+2) < 0 \quad \therefore t^2 + 2t < 0$$

이 부등식이 부등식 ㉠과 일치하므로

$$a=2, b=0 \quad \therefore a+b=2$$

27 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

주어진 부등식의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x^{\log x} < \log 1000x^2, (\log x)^2 < 3 + 2\log x$$

$$\log x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 < 3 + 2t, t^2 - 2t - 3 < 0$$

$$(t+1)(t-3) < 0 \quad \therefore -1 < t < 3$$

$$t = \log x \text{이므로 } -1 < \log x < 3 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$\therefore \frac{1}{10} < x < 1000 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{10} < x < 1000$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{10}, \beta = 1000 \text{이므로 } a\beta = 100$$

28 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

주어진 부등식의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{\log_3 x - 3} < \log_3 \frac{1}{9}$$

$$(\log_3 x - 3) \log_3 x < -2$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면}$$

$$(t-3)t < -2, t^2 - 3t + 2 < 0$$

$$(t-1)(t-2) < 0 \quad \therefore 1 < t < 2$$

$$t = \log_3 x \text{이므로 } 1 < \log_3 x < 2 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$\therefore 3 < x < 9 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$3 < x < 9$$

따라서 모든 자연수 x 의 값의 합은

$$4+5+6+7+8=30$$

29 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$3^{\log x} \times x^{\log 3} - (3^{\log x} + x^{\log 3}) - 3 \leq 0 \text{에서}$$

$$(3^{\log x})^2 - 2 \times 3^{\log x} - 3 \leq 0$$

$$3^{\log x} = t (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 - 2t - 3 \leq 0$$

$$(t+1)(t-3) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq t \leq 3$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $0 < t \leq 3$

$$t = 3^{\log x} \text{이므로 } 0 < 3^{\log x} \leq 3$$

$$\log x \leq 1 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$\therefore x \leq 10 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 < x \leq 10$$

따라서 자연수 x 는 1, 2, 3, ..., 10의 10개이다.

30 이차방정식 $x^2 - 2(2 - \log_3 a)x + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라

하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (2 - \log_3 a)^2 - 1 \geq 0$$

$$(\log_3 a)^2 - 4 \log_3 a + 3 \geq 0$$

진수의 조건에서 $a > 0$ ㉠

$$\log_3 a = t \text{로 놓으면 } t^2 - 4t + 3 \geq 0$$

$$(t-1)(t-3) \geq 0 \quad \therefore t \leq 1 \text{ 또는 } t \geq 3$$

$$t = \log_3 a \text{이므로}$$

$$\log_3 a \leq 1 \text{ 또는 } \log_3 a \geq 3 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$\therefore a \leq 3 \text{ 또는 } a \geq 27 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 < a \leq 3 \text{ 또는 } a \geq 27$$

- 31 이차방정식 $3x^2 - 2(\log_2 n)x + \log_2 n = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로
- $$\frac{D}{4} = (\log_2 n)^2 - 3\log_2 n < 0$$
- 진수의 조건에서 $n > 0$ ㉠
- $$\log_2 n = t \text{로 놓으면 } t^2 - 3t < 0$$
- $$t(t-3) < 0 \quad \therefore 0 < t < 3$$
- $$t = \log_2 n \text{이므로 } 0 < \log_2 n < 3 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$
- $$\therefore 1 < n < 8 \quad \text{..... } \textcircled{L}$$
- ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 n 의 값의 범위는 $1 < n < 8$
- 따라서 자연수 n 은 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개이다.
- 32 진수의 조건에서 $k > 0$ ㉠
- $$(\log x)^2 + 2\log 10x - \log k \geq 0 \text{에서}$$
- $$\log x = t \text{로 놓으면 } t^2 + 2(t+1) - \log k \geq 0$$
- $$t^2 + 2t + 2 - \log k \geq 0$$
- 이 부등식이 모든 실수 t 에 대하여 성립하려면 이차방정식 $t^2 + 2t + 2 - \log k = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때 $D \leq 0$ 이어야 하므로
- $$\frac{D}{4} = 1^2 - (2 - \log k) \leq 0$$
- $$\log k \leq 1 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$
- $$\therefore k \leq 10 \quad \text{..... } \textcircled{L}$$
- ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 k 의 값의 범위는 $0 < k \leq 10$
- 따라서 구하는 자연수 k 의 최댓값은 10이다.
- 33 진수의 조건에서 $a > 0$ ㉠
- 이차방정식 $x^2 - 2x\log_2 a + 2 - \log_2 a = 0$ 의 두 근이 모두 음수일 조건은
- (i) 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로
- $$\frac{D}{4} = (\log_2 a)^2 - (2 - \log_2 a) \geq 0$$
- $$(\log_2 a)^2 + \log_2 a - 2 \geq 0$$
- $$\log_2 a = t \text{로 놓으면 } t^2 + t - 2 \geq 0$$
- $$(t+2)(t-1) \geq 0 \quad \therefore t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 1$$
- $$t = \log_2 a \text{이므로}$$
- $$\log_2 a \leq -2 \text{ 또는 } \log_2 a \geq 1 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$
- $$\therefore a \leq \frac{1}{4} \text{ 또는 } a \geq 2$$
- (ii) (두 근의 합) < 0
- 주어진 이차방정식에서 근과 계수의 관계에 의하여
- $$2\log_2 a < 0, \log_2 a < 0 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$
- $$\therefore a < 1$$

- (iii) (두 근의 곱) > 0
- 주어진 이차방정식에서 근과 계수의 관계에 의하여
- $$2 - \log_2 a > 0, \log_2 a < 2 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$
- $$\therefore a < 4$$
- (i), (ii), (iii)을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는
- $$a \leq \frac{1}{4} \quad \text{..... } \textcircled{L}$$
- ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는
- $$0 < a \leq \frac{1}{4}$$
- 34 초기 온도가 25°C 인 건물에서 화재가 발생한 지 $\frac{9}{8}$ 분 후의 건물의 온도가 250°C 이므로
- $$250 = 25 + k \log 10 \quad \therefore k = 225$$
- 화재가 발생한 지 t 분 후의 건물의 온도가 700°C 라 하면
- $$700 = 25 + 225 \log(8t+1)$$
- $$\log(8t+1) = 3$$
- $$8t+1 = 1000 \quad \therefore t = \frac{999}{8}$$
- 따라서 초기 온도가 25°C 인 건물에서 화재가 발생하여 건물의 온도가 700°C 가 되는 것은 $\frac{999}{8}$ 분 후이다.
- 35 처음 물의 양을 a 라 하면 x 일 후 남아 있는 물의 양은 $a \times \left(\frac{9}{10}\right)^x$ 이므로
- $$a \times \left(\frac{9}{10}\right)^x \leq \frac{1}{2}a \quad \therefore \left(\frac{9}{10}\right)^x \leq \frac{1}{2}$$
- 양변에 상용로그를 취하면
- $$x \log \frac{9}{10} \leq \log \frac{1}{2}$$
- $$x(2\log 3 - 1) \leq -\log 2, -0.04x \leq -0.3$$
- $$\therefore x \geq \frac{-0.3}{-0.04} = 7.5$$
- 따라서 물의 양이 절반 이하가 되는 것은 8일 후부터이다.
- 36 n 년 후의 두 도시 A, B의 인구는 각각 $10^6 \times 1.05^n$, $2 \times 10^6 \times 1.02^n$ 이므로
- $$10^6 \times 1.05^n \geq 2 \times 10^6 \times 1.02^n$$
- $$\therefore 1.05^n \geq 2 \times 1.02^n$$
- 양변에 상용로그를 취하면
- $$n \log 1.05 \geq \log 2 + n \log 1.02$$
- $$0.02n \geq 0.3 + 0.01n$$
- $$0.01n \geq 0.3$$
- $$\therefore n \geq \frac{0.3}{0.01} = 30$$
- 따라서 A도시의 인구가 B도시의 인구 이상이 되는 것은 30년 후부터이다.

II-1. 삼각함수

01 삼각함수

40~45쪽

1 ③	2 ③	3 ②	4 ④	5 ②
6 제1사분면	7 ④	8 6	9 ⑤	
10 $\frac{1}{2}$	11 $\neg, \sqsubset$	12 ④	13 $\neg, \sqsubset, \sqsupset$	
14 4	15 ③	16 ③	17 ④	18 ③
19 24	20 ⑤	21 $\frac{1}{2}$	22 $-\frac{6}{5}$	23 $\frac{3}{2}$
24 $\frac{5}{2}\pi$	25 $\neg, \sqsubset$	26 $\cos \theta$	27 ④	28 $\neg, \sqsubset$
29 ⑤	30 $-\frac{3}{2}$	31 ⑤	32 ②	33 $\frac{5}{12}$
34 $\frac{\sqrt{15}}{3}$	35 ⑤	36 ④	37 ②	38 $4\sqrt{5}$
39 $3x^2+8x+3=0$				

- 1 ① $840^\circ=360^\circ \times 2+120^\circ$
 ② $1200^\circ=360^\circ \times 3+120^\circ$
 ③ $1680^\circ=360^\circ \times 4+240^\circ$
 ④ $-240^\circ=360^\circ \times (-1)+120^\circ$
 ⑤ $-1320^\circ=360^\circ \times (-4)+120^\circ$
 따라서 α 의 값이 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

- 2 ① $420^\circ=360^\circ \times 1+60^\circ$
 ② $780^\circ=360^\circ \times 2+60^\circ$
 ③ $1020^\circ=360^\circ \times 2+300^\circ$
 ④ $-300^\circ=360^\circ \times (-1)+60^\circ$
 ⑤ $-660^\circ=360^\circ \times (-2)+60^\circ$
 따라서 동경 OP가 나타낼 수 없는 각은 ③이다.

- 3 $675^\circ=360^\circ \times 1+315^\circ$
 $\neg, 315^\circ=360^\circ \times 0+315^\circ$
 $\sqsubset, 585^\circ=360^\circ \times 1+225^\circ$
 $\sqsupset, 1125^\circ=360^\circ \times 3+45^\circ$
 $\sqsupset, -405^\circ=360^\circ \times (-2)+315^\circ$
 $\sqsupset, -765^\circ=360^\circ \times (-3)+315^\circ$
 $\sqsupset, -1035^\circ=360^\circ \times (-3)+45^\circ$
 따라서 675° 를 나타내는 동경과 일치하는 것은 $\neg, \sqsupset, \sqsupset$ 이다.

- 4 $\neg, 160^\circ=360^\circ \times 0+160^\circ$ $\Rightarrow$ 제2사분면의 각
 $\sqsubset, 390^\circ=360^\circ \times 1+30^\circ$ $\Rightarrow$ 제1사분면의 각
 $\sqsupset, 570^\circ=360^\circ \times 1+210^\circ$ $\Rightarrow$ 제3사분면의 각

$\sqsupset, -70^\circ=360^\circ \times (-1)+290^\circ \Rightarrow$ 제4사분면의 각
 $\sqsupset, -480^\circ=360^\circ \times (-2)+240^\circ \Rightarrow$ 제3사분면의 각
 $\sqsupset, -600^\circ=360^\circ \times (-2)+120^\circ \Rightarrow$ 제2사분면의 각
 따라서 동경이 같은 사분면에 있는 각은 $\neg, \sqsupset$ 과 $\sqsupset, \sqsupset$ 이다.

- 5 θ 가 제2사분면의 각이므로
 $360^\circ \times n+90^\circ < \theta < 360^\circ \times n+180^\circ$ (단, n 은 정수)
 $\therefore 180^\circ \times n+45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n+90^\circ$ ㉠

(i) $n=0$ 일 때, $45^\circ < \frac{\theta}{2} < 90^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면의 각

(ii) $n=1$ 일 때, $225^\circ < \frac{\theta}{2} < 270^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제3사분면의 각

$n=2, 3, 4, \dots$ 에 대해서도 동경의 위치가 제1사분면과 제3사분면으로 반복되므로 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제1사분면, 제3사분면이다.

다른 풀이

㉠에서

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k+45^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k+90^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면의 각

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k+225^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k+270^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제3사분면의 각

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제1사분면, 제3사분면이다.

- 6 $660^\circ=360^\circ \times 1+300^\circ \Rightarrow$ 제4사분면의 각
 θ 가 제4사분면의 각이므로
 $360^\circ \times n+270^\circ < \theta < 360^\circ \times n+360^\circ$ (단, n 은 정수)
 $\therefore 120^\circ \times n+90^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n+120^\circ$ ㉡

(i) $n=0$ 일 때, $90^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제2사분면의 각

(ii) $n=1$ 일 때, $210^\circ < \frac{\theta}{3} < 240^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각

(iii) $n=2$ 일 때, $330^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각
 $n=3, 4, 5, \dots$ 에 대해서도 동경의 위치가 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면으로 반복되므로 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제1사분면이다.

다른 풀이

㉠에서

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 90^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 120^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제2사분면의 각

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 210^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 240^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 330^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 360^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각

(i), (ii), (iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제1사분면이다.

7 두 각 $\theta, 6\theta$ 를 나타내는 두 동경이 일치하므로

$$6\theta - \theta = 360^\circ \times n \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$5\theta = 360^\circ \times n$$

$$\therefore \theta = 72^\circ \times n \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ \text{이므로}$$

$$90^\circ < 72^\circ \times n < 180^\circ$$

$$\therefore \frac{5}{4} < n < \frac{5}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=2$

이를 ㉠에 대입하면

$$\theta = 144^\circ$$

8 두 각 $\theta, 5\theta$ 를 나타내는 두 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여

대칭이므로

$$\theta + 5\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$6\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ \times n + 15^\circ$$

$$0^\circ < \theta < 360^\circ \text{이므로}$$

$$0^\circ < 60^\circ \times n + 15^\circ < 360^\circ$$

$$\therefore -\frac{1}{4} < n < \frac{23}{4}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$

따라서 각 θ 의 개수는 6이다.

9 두 각 $5\theta, 7\theta$ 를 나타내는 두 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$5\theta + 7\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$12\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 30^\circ \times n + 15^\circ \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$0^\circ < \theta < 360^\circ \text{이므로}$$

$$0^\circ < 30^\circ \times n + 15^\circ < 360^\circ$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{23}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 각 θ 는 $n=11$ 일 때 최댓값, $n=0$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$$n=11 \text{을 } \text{㉠에 대입하면 } \theta = 345^\circ$$

$$n=0 \text{을 } \text{㉠에 대입하면 } \theta = 15^\circ$$

따라서 각 θ 의 최댓값과 최솟값의 합은

$$345^\circ + 15^\circ = 360^\circ$$

10 두 각 $2\theta, 6\theta$ 를 나타내는 두 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$$6\theta - 2\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 90^\circ \times n + 45^\circ \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$0^\circ < \theta < 90^\circ \text{이므로}$$

$$0^\circ < 90^\circ \times n + 45^\circ < 90^\circ$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta = 45^\circ$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \theta \times \cos \theta &= \sin 45^\circ + \cos 45^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

11 $\neg. -132^\circ = -132 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{11}{15}\pi$

$$\angle. 36^\circ = 36 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$$

$$\sqcap. \frac{5}{12}\pi = \frac{5}{12}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 75^\circ$$

$$\rceil. \frac{8}{5}\pi = \frac{8}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 288^\circ$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \sqcap$ 이다.

- 12 ① $-880^\circ = 360^\circ \times (-3) + 200^\circ \Rightarrow$ 제3사분면의 각
 ② $985^\circ = 360^\circ \times 2 + 265^\circ \Rightarrow$ 제3사분면의 각
 ③ $\frac{19}{6}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{7}{6}\pi \Rightarrow$ 제3사분면의 각
 ④ $-\frac{16}{3}\pi = 2\pi \times (-3) + \frac{2}{3}\pi \Rightarrow$ 제2사분면의 각
 ⑤ $\frac{71}{10}\pi = 2\pi \times 3 + \frac{11}{10}\pi \Rightarrow$ 제3사분면의 각
 따라서 동경이 존재하는 사분면이 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

- 13 ㄱ. $25^\circ = 25 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{36}\pi$
 ㄴ. $3 = 3 \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{540^\circ}{\pi}$
 ㄷ. $-\frac{5}{6}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{7}{6}\pi \Rightarrow$ 제3사분면의 각
 ㄹ. $-\frac{2}{5}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{8}{5}\pi$
 $\frac{18}{5}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{8}{5}\pi$
 $\frac{38}{5}\pi = 2\pi \times 3 + \frac{8}{5}\pi$
 이므로 동경은 모두 일치한다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

- 14 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면 반지름의 길이가 3이므로 부채꼴의 둘레의 길이는
 $2 \times 3 + 3 \times \theta = 6 + 3\theta$
 또 부채꼴의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 3^2 \times \theta = \frac{9}{2}\theta$
 이때 부채꼴의 둘레의 길이와 넓이가 같으므로
 $6 + 3\theta = \frac{9}{2}\theta, \frac{3}{2}\theta = 6$
 $\therefore \theta = 4$

- 15 (ㄴ)에서 두 각 $\theta, 8\theta$ 를 나타내는 두 동경이 일치하므로
 $8\theta - \theta = 360^\circ \times n$ (단, n 은 정수)
 $7\theta = 360^\circ \times n$, 즉 $7\theta = 2\pi n$
 $\therefore \theta = \frac{2n}{7}\pi$ (단, n 은 정수) ㉠

(ㄷ)에서 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$0 < \frac{2n}{7}\pi < \frac{\pi}{2} \quad \therefore 0 < n < \frac{7}{4}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=1$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta = \frac{2}{7}\pi$

따라서 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{2}{7}\pi = \frac{4}{7}\pi$$

- 16 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 12인 원을 6등분 한 부채꼴은 중심각의 크기가

$$2\pi \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$\angle COA = \frac{\pi}{6}, \angle ACO = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \angle BCA = \frac{2}{3}\pi$$

내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면 직각삼각형 COA에서 $\overline{CA} = r$ 이므로

$$\overline{OC} = 2r, \overline{OA} = \sqrt{3}r$$

이때 $\overline{OB} = 12$ 이므로

$$2r + r = 12 \quad \therefore r = 4$$

위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 S 라 하면

$$S = (\text{부채꼴 BOD의 넓이}) - (\text{부채꼴 BCA의 넓이}) - (\text{삼각형 COA의 넓이})$$

$$= \frac{1}{2} \times 12^2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4$$

$$= 12\pi - \frac{16}{3}\pi - 8\sqrt{3}$$

$$= \frac{20}{3}\pi - 8\sqrt{3}$$

이때 구하는 넓이는 $12S$ 이므로

$$12S = 12 \left(\frac{20}{3}\pi - 8\sqrt{3} \right) = 80\pi - 96\sqrt{3}$$

따라서 $p=80, q=-96$ 이므로

$$p+q = -16$$

- 17 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 16이므로

$$2r + l = 16 \quad \therefore l = 16 - 2r$$

이때 $r > 0, 16 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 8$

부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}r(16 - 2r) = -r^2 + 8r = -(r - 4)^2 + 16$$

따라서 $r=4$ 일 때, 부채꼴의 넓이가 최대이다.

- 18 부채꼴의 반지름의 길이를 r m, 호의 길이를 l m라 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 100m이므로

$$2r + l = 100 \quad \therefore l = 100 - 2r$$

이때 $r > 0, 100 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 50$

부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}r(100 - 2r) = -r^2 + 50r = -(r - 25)^2 + 625$$

따라서 $r=25$ 일 때, 부채꼴의 넓이의 최댓값은 625 m^2 이다.

- 19 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면
부채꼴의 넓이가 36이므로

$$\frac{1}{2} \times r \times l = 36 \quad \therefore rl = 72 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

부채꼴의 둘레의 길이는 $2r+l$ 이고 $r>0, l>0$ 이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2r+l \geq 2\sqrt{2rl} \quad (\text{단, 등호는 } 2r=l \text{ 일 때 성립})$$

$$2r+l \geq 2\sqrt{144} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 24$$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 24이다.

- 20 $\overline{OP} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = 13$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{5}{13}, \tan \theta = -\frac{5}{12}$$

$$\therefore 13 \sin \theta - 12 \tan \theta = 13 \times \frac{5}{13} - 12 \times \left(-\frac{5}{12}\right) = 10$$

- 21 오른쪽 그림과 같이 $\frac{5}{6}\pi$ 를 나타

내는 동경과 단위원의 교점을 P,
점 P에서 x 축에 내린 수선의 발
을 H라 하면 삼각형 OPH에서

$$\overline{OP} = 1 \text{ 이고 } \angle POH = \frac{\pi}{6} \text{ 이므로}$$

$$\overline{PH} = \overline{OP} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \overline{OH} = \overline{OP} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

점 P가 제2사분면의 점이므로 $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \cos \theta \tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}$$

- 22 원점 O와 점 P(-4, -3)에 대하여

$$\overline{OP} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\therefore \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

점 P(-4, -3)을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 Q
의 좌표는 (-3, -4)이므로

$$\overline{OQ} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\therefore \cos \beta = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \sin \alpha + \cos \beta = -\frac{3}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{6}{5}$$

- 23 (나)에서 점 P(a, b)는 제4사분면의 점이므로

$$a > 0, b < 0$$

또 점 P는 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(b) \text{에서 } b^2 = 3a^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=-\sqrt{3}$ ($\because a>0, b<0$)

따라서 $\overline{OP} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin \theta \tan \theta = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (-\sqrt{3}) = \frac{3}{2}$$

- 24 두 각 $\theta, 9\theta$ 가 나타내는 두 동경이 일치하므로

$$9\theta - \theta = 2\pi \times n \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} \times n \quad (n \text{은 정수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\sin \theta \cos \theta < 0$ 에서

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \text{ 또는 } \sin \theta < 0, \cos \theta > 0$$

즉, θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 } \theta = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{7}{4}\pi \quad (\because 0 < \theta < 2\pi)$$

따라서 모든 θ 의 값의 합은 $\frac{3}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi = \frac{5}{2}\pi$

- 25 ㄱ. θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \quad \therefore \sin \theta - \cos \theta > 0$$

ㄴ. θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

$$\text{따라서 } |\sin \theta| = -\sin \theta, |\cos \theta| = -\cos \theta,$$

$$|\tan \theta| = \tan \theta \text{ 이므로}$$

$$\frac{\sin \theta}{|\sin \theta|} - \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|} + \frac{\tan \theta}{|\tan \theta|} = -1 - (-1) + 1 = 1$$

ㄷ. θ 가 제4사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$$

따라서 $\cos \theta \sin \theta < 0$ 이고 $\sin \theta + \tan \theta < 0$ 이므로

$$\frac{\cos \theta \sin \theta}{\sin \theta + \tan \theta} > 0$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

- 26 $\sqrt{\tan \theta} \sqrt{\sin \theta} = -\sqrt{\tan \theta \sin \theta}$ 에서

$$\tan \theta < 0, \sin \theta < 0$$

즉, θ 는 제4사분면의 각이므로 $\cos \theta > 0$

따라서 $\sin \theta - \cos \theta < 0$ 이므로

$$|\sin \theta - \cos \theta| = \sqrt{\sin^2 \theta}$$

$$= |\sin \theta - \cos \theta| = |\sin \theta|$$

$$= -(\sin \theta - \cos \theta) - (-\sin \theta)$$

$$= -\sin \theta + \cos \theta + \sin \theta = \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
 27 \quad & (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\
 & (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\
 \therefore & \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{1 - 2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \\
 & = \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{(\sin \theta - \cos \theta)^2}{\sin \theta - \cos \theta} \\
 & = \sin \theta + \cos \theta + \sin \theta - \cos \theta \\
 & = 2 \sin \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 28 \quad & \neg. \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \\
 & = \frac{\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} \\
 & = \frac{\sin^2 \theta + 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} \\
 & = \frac{2(1 - \cos \theta)}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} = \frac{2}{\sin \theta} \\
 & \sqcup. \frac{\cos \theta - \tan \theta \sin \theta}{1 - \tan \theta} \\
 & = \frac{\cos \theta - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}}{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \\
 & = \frac{(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)}{\cos \theta - \sin \theta} \\
 & = \sin \theta + \cos \theta \\
 & \sqsubset. \tan^2 \theta + (1 - \tan^4 \theta) \cos^2 \theta \\
 & = \tan^2 \theta + (1 + \tan^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta) \cos^2 \theta \\
 & = \tan^2 \theta + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta) \\
 & = \tan^2 \theta + (1 - \tan^2 \theta) = 1
 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\sqsubset$ 이다.

$$\begin{aligned}
 29 \quad & \bullet \sin^4 \theta - \cos^4 \theta \\
 & = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\
 & = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta \\
 & = 1 - \boxed{2 \cos^2 \theta} \\
 & \bullet \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \\
 & = \tan^2 \theta - \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \\
 & = \tan^2 \theta \left(1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \right) \\
 & = \tan^2 \theta \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} \right) \\
 & = \tan^2 \theta \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \right) \\
 & = \tan^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) \\
 & = \tan^2 \theta \sin^2 \theta \\
 & = \sin^2 \theta \times \boxed{\tan^2 \theta} \\
 \therefore & \textcircled{㉞} 2 \cos^2 \theta \quad \textcircled{㉟} \tan^2 \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 30 \quad & \frac{1}{1 - \cos \theta} + \frac{1}{1 + \cos \theta} = \frac{1 + \cos \theta + 1 - \cos \theta}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} \\
 & = \frac{2}{1 - \cos^2 \theta} \\
 & = \frac{2}{\sin^2 \theta} = 4
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{또 } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

이때 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$

따라서 $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -1$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta + \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + (-1) = -\frac{3}{2}$$

$$31 \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \cos \theta > 0$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} &= \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}} \\
 &= \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{1}{|\cos \theta|}} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{1}{\cos \theta}} \\
 &= \sin \theta = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{또 } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\text{이때 } \cos \theta > 0 \text{이므로 } \cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta = \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 32 \quad & \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\tan \theta} \\
 & = \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\
 & = \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{\cos \theta (1 - \cos \theta)}{\sin \theta} \\
 & = \frac{\sin^2 \theta \cos \theta + \cos \theta (1 - \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} \\
 & = \frac{\cos \theta (\sin^2 \theta + 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta)}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} \\
 & = \frac{2 \cos \theta (1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} = 1 \\
 \therefore & 2 \cos \theta = \sin \theta
 \end{aligned}$$

이때 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$4 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$5 \cos^2 \theta = 1 \quad \therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$2 \cos \theta = \sin \theta$ 에서 $\sin \theta$ 와 $\cos \theta$ 의 부호가 같으므로

$$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \quad (\because \pi < \theta < 2\pi)$$

따라서 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

33 $\sin \theta - \cos \theta = -\frac{1}{5}$ 의 양변을 제곱하면

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{12}{25}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta} &= \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{-\left(-\frac{1}{5}\right)}{\frac{12}{25}} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

34 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta}$

$$= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 3$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta > 0$

따라서 $\sin \theta + \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

35 $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$

$$= 1 - 2(\sin \theta \cos \theta)^2 = \frac{23}{32}$$

$$\therefore (\sin \theta \cos \theta)^2 = \frac{9}{64}$$

이때 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$

따라서 $\sin \theta \cos \theta < 0$ 이므로 $\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

이때 $\sin \theta - \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

36 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{25} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{49}{25}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{12}{25} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{에서 } \frac{k}{25} = \frac{12}{25}$$

$$\therefore k = 12$$

37 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\cos \theta + \sin \theta) + (\cos \theta - \sin \theta) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta) = a \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } 2 \cos \theta = 1 \quad \therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$$

㉡에서 $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = a$ 이므로

$$\begin{aligned} a &= \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 2 \cos^2 \theta - 1 \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

38 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = k, \quad \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 8$$

이때 $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{8}$ 이므로

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

그런데 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta > 0$ 이므로 $\sin \theta + \cos \theta > 0$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore k = \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{8}} = 4\sqrt{5}$$

39 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

양변을 제곱하면

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

이때 $\tan \theta$, $\frac{1}{\tan \theta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식에서 두 근의 합은

$$\begin{aligned} \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

두 근의 곱은 $\tan \theta \times \frac{1}{\tan \theta} = 1$

따라서 x^2 의 계수가 3이고 두 근의 합이 $-\frac{8}{3}$, 두 근의 곱이 1인 이차방정식은

$$3\left(x^2 + \frac{8}{3}x + 1\right) = 0$$

$$\therefore 3x^2 + 8x + 3 = 0$$

02 삼각함수의 그래프

46~50쪽

1 ③	2 $-\frac{3}{2}$	3 $\sqrt{3}-2$	4 ③	5 ③
6 ④	7 ⑤	8 ④	9 ⑤	10 $\frac{1}{6}$
11 -8	12 4	13 $\frac{10}{3}\pi$	14 $-\frac{\pi}{2}$	15 ②
16 ④	17 25	18 1	19 $-\frac{1}{3}$	20 3
21 $\neg$	22 1	23 ③	24 -1	25 4
26 6	27 ③	28 3	29 $\frac{2}{3}$	30 10
31 9	32 ③			

- ① 함수 $y = \sin(3x + \pi) = \sin 3\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 의 그래프는 함수 $y = \sin 3x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$ 만큼 평행이동한 것이다.
 - ② 함수 $y = \sin 3x - 2$ 의 그래프는 함수 $y = \sin 3x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.
 - ③ 함수 $y = 3\sin x + 1$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3배 한 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
 - ④ 함수 $y = \sin(-3x) + 2$ 의 그래프는 함수 $y = \sin 3x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
 - ⑤ 함수 $y = -\sin(3x - 6) = -\sin 3(x - 2)$ 의 그래프는 함수 $y = \sin 3x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
- 따라서 $y = \sin 3x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지지 않는 것은 ③이다.

- 함수 $y = \cos 2x + 2$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면 $y = -\cos 2x - 2$

이 함수의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼 평행이동하면

$$y = -\cos 2x - \frac{1}{2}$$

따라서 $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$ 이므로 $a + b = -\frac{3}{2}$

- 함수 $y = \tan \frac{\pi}{5}x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은 $y = \tan \frac{\pi}{5}(x - 1) - 2$

이때 이 함수의 그래프가 $\left(\frac{8}{3}, a\right)$ 를 지나므로

$$a = \tan \frac{\pi}{5}\left(\frac{8}{3} - 1\right) - 2 = \tan \frac{\pi}{3} - 2 = \sqrt{3} - 2$$

- (최댓값) $= 2 + 1 = 3 \quad \therefore a = 3$
(최솟값) $= -2 + 1 = -1 \quad \therefore b = -1$
(주기) $= \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore c = \frac{\pi}{2}$
 $\therefore abc = 3 \times (-1) \times \frac{\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi$

- $\neg$. 최댓값은 $3 + 2 = 5$, 최솟값은 $-3 + 2 = -1$
 $\neg$. 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

$$\neg. y = -3\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + 2 = -3\cos\left\{\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right\} + 2$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y = -3\cos \frac{x}{2}$

의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로

2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

- 함수 $f(x)$ 는 주기함수이고 주기를 p 라 할 때, $pn = 6$ 을 만족시키는 정수 n 이 존재해야 한다.

$$\textcircled{1} \text{ 함수의 주기는 } \frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = 3 \text{이므로 } 3 \times 2 = 6$$

$$\textcircled{2} \text{ 함수의 주기는 } \frac{\pi}{\pi} = 1 \text{이므로 } 1 \times 6 = 6$$

$$\textcircled{3} \text{ 함수의 주기는 } \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6 \text{이므로 } 6 \times 1 = 6$$

$$\textcircled{4} \text{ 함수의 주기는 } \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \text{이므로 } 4n = 6 \text{을 만족시키는 정수 } n \text{이 존재하지 않는다.}$$

⑤ 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$ 이므로 $2 \times 3=6$

따라서 $f(x+6)=f(x)$ 를 만족시키지 않는 것은 ④이다.

7 주기는 $\frac{\pi}{2}=2$

점근선의 방정식은 $\frac{\pi}{2}x + \pi = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)에서

$$\frac{\pi}{2}x = n\pi - \frac{\pi}{2}$$

$\therefore x=2n-1$ (단, n 은 정수)

8 함수 $f(x)=-\sin 2x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$ 이고, 함수

$f(x)=-\sin 2x$ 의 그래프는

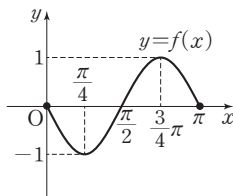
함수 $y=\sin 2x$ 의 그래프를 x

축에 대하여 대칭이동한 것이

므로 $0 \leq x < \pi$ 에서 함수

$f(x)=-\sin 2x$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$ 는 $x=\frac{3}{4}\pi$ 일 때 최댓값이 1, $x=\frac{\pi}{4}$ 일 때 최솟값이 -1이므로

$$a=\frac{3}{4}\pi, f(a)=1, b=\frac{\pi}{4}, f(b)=-1$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{-1-1}{\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\pi} = \frac{-2}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

9 $y=a \sin bx+c$ 의 최댓값이 5, 최솟값이 -1이고 $a>0$ 이므로

$$a+c=5, -a+c=-1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3, c=2$

또 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 $b>0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b=4$$

$$\therefore abc=3 \times 4 \times 2=24$$

10 $y=2 \tan \left(ax + \frac{\pi}{3}\right) + 1$ 의 주기가 3π 이고 $a>0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a} = 3\pi \quad \therefore a=\frac{1}{3}$$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2 \tan \left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$ 이므로

로 점근선의 방정식은 $\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)에서

$$\frac{1}{3}x = n\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore x=3n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$\therefore b=\frac{1}{2} \text{ (}\because 0 < b < 1\text{)}$$

$$\therefore ab=\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

11 (타)에서 주기가 3π 이고 $b>0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 3\pi \quad \therefore b=\frac{2}{3}$$

따라서 주어진 함수의 식은 $f(x)=a \cos \left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) + c$

(가)에서 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=a \cos \left(\frac{2}{3} \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + c=1$ 이므로

$$\frac{1}{2}a + c = 1$$

$$\therefore a + 2c = 2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

(나)에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 4이고 $a>0$ 이므로

$$a + c = 4 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6, c=-2$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$-a + c = -6 - 2 = -8$$

12 $y=a \sin b\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + c$ 의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이고

$a>0$ 이므로

$$a + c = 3, -a + c = -1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, c=1$

주어진 그래프에서 주기는 $\frac{3}{4}\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi$ 이고 $b>0$

$$\text{이므로 } \frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b=2$$

$$\therefore abc=2 \times 2 \times 1=4$$

13 $y=a \cos (bx-c)+d$ 의 최댓값이 4, 최솟값이 0이고

$a>0$ 이므로

$$a+d=4, -a+d=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, d=2$

또 주기가 $\frac{11}{6}\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\pi$ 이고 $b>0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 2\pi \quad \therefore b=1$$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2 \cos (x-c)+2$ 이고,

이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{5}{6}\pi, 4\right)$ 를 지나므로

$$4=2 \cos \left(\frac{5}{6}\pi - c\right) + 2 \quad \therefore \cos \left(\frac{5}{6}\pi - c\right) = 1$$

이때 $0 < c < \pi$ 에서 $-\frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi - c < \frac{5}{6}\pi$ 이므로

$$\frac{5}{6}\pi - c = 0 \quad \therefore c = \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore abcd=2 \times 1 \times \frac{5}{6}\pi \times 2 = \frac{10}{3}\pi$$

- 14 $y = \tan(ax+b) + c$ 의 주기가 $\frac{3}{8}\pi - \left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{2}$ 이고

$$a > 0 \text{ 이므로 } \frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore a = 2$$

$$a = 2 \text{ 이고 } -\frac{\pi}{2} < b < 0 \text{ 이므로 주어진 그래프는 } y = \tan 2x$$

의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

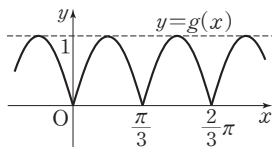
$$\text{즉, } y = \tan 2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 1 = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

$$\therefore b = -\frac{\pi}{4}, c = 1$$

$$\therefore abc = 2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) \times 1 = -\frac{\pi}{2}$$

- 15 함수 $f(x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$ ($\because a > 0$)

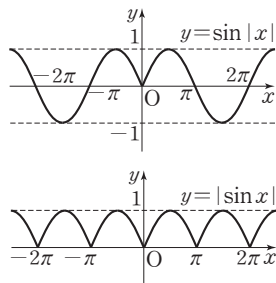
$g(x) = |\sin 3x|$ 의 그래프는 다음과 같으므로 함수 $g(x)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다.



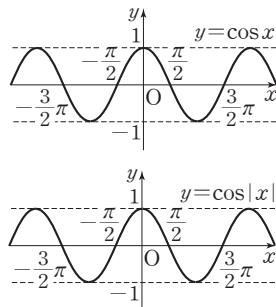
이때 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 주기가 서로 같으므로

$$\frac{2\pi}{a} = \frac{\pi}{3} \quad \therefore a = 6$$

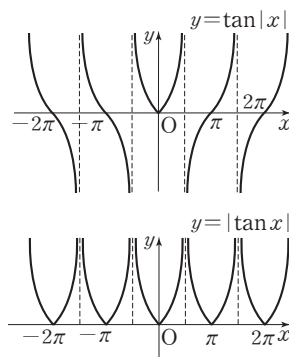
- 16 $y = \sin |x|$ 와 $y = |\sin x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



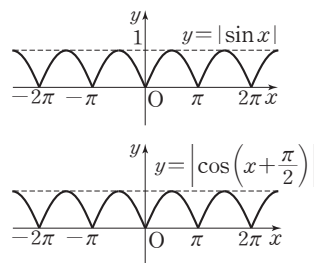
$\therefore y = \cos x$ 와 $y = \cos |x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore y = \tan |x|$ 와 $y = |\tan x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

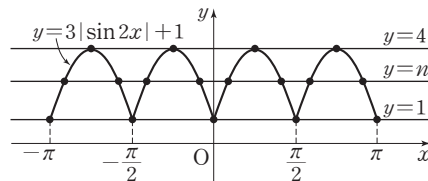


$\therefore y = |\sin x|$ 와 $y = \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 보기에서 두 함수의 그래프가 일치하는 것은 $\therefore$ 이다.

- 17 $-\pi \leq x \leq \pi$ 에서 $y = 3|\sin 2x| + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $a_1 = 5, a_2 = 8, a_3 = 8, a_4 = 4$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5 + 8 + 8 + 4 = 25$$

- 18 $\cos \frac{7}{6}\pi = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} \tan\left(-\frac{4}{3}\pi\right) &= -\tan \frac{4}{3}\pi = -\tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{11}{6}\pi &= \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\tan \frac{5}{4}\pi = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \frac{7}{6} \pi \tan \left(-\frac{4}{3} \pi \right) + \sin \frac{11}{6} \pi \tan \frac{5}{4} \pi \\ = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times (-\sqrt{3}) + \left(-\frac{1}{2} \right) \times 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19 \quad \tan \left(\frac{3}{2} \pi + \theta \right) &= \tan \left(\frac{\pi}{2} \times 3 + \theta \right) = -\frac{1}{\tan \theta} \\ \therefore \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{\sin (\pi + \theta)} &\times \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)}{\cos (\pi + \theta)} \times \frac{\tan \left(\frac{3}{2} \pi + \theta \right)}{\tan (\pi - \theta)} \\ &= \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} \times \frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} \times \frac{-\tan \theta}{-\tan \theta} \\ &= -\frac{1}{\tan^2 \theta} \end{aligned}$$

이때 $\theta = \frac{2}{3} \pi$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan \frac{2}{3} \pi = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \\ \therefore -\frac{1}{\tan^2 \theta} &= -\frac{1}{(-\sqrt{3})^2} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$20 \quad y + 2x - 1 = 0 \text{에서 } y = -2x + 1$$

$$\therefore \tan \theta = -2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} - \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{\sin (\pi - \theta)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)} \\ = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} - \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ = \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta) - \sin \theta (1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ = \frac{-2 \sin \theta \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ = \frac{-2 \cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ = -\frac{2}{\tan \theta} - \tan \theta \\ = -\frac{2}{-2} - (-2) = 3 \end{aligned}$$

$$21 \quad A + B + C = \pi \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \neg. \text{ (우변)} &= \sin (B + C) = \sin (\pi - A) = \sin A \text{이므로} \\ \sin A &= \sin (B + C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \text{ (우변)} &= \cos \frac{B+C}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = \sin \frac{A}{2} \text{이므로} \\ \cos \frac{A}{2} &\neq \cos \frac{B+C}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \text{ (좌변)} &= \tan A \tan (B + C) = \tan A \tan (\pi - A) \\ &= \tan A \times (-\tan A) = -\tan^2 A \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \tan A \tan (B + C) \neq 1$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$ 이다.

$$22 \quad \tan (90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \tan 10^\circ \times \tan 20^\circ \times \cdots \times \tan 70^\circ \times \tan 80^\circ \\ = (\tan 10^\circ \times \tan 80^\circ) \times (\tan 20^\circ \times \tan 70^\circ) \\ \quad \times (\tan 30^\circ \times \tan 60^\circ) \times (\tan 40^\circ \times \tan 50^\circ) \\ = \left(\tan 10^\circ \times \frac{1}{\tan 10^\circ} \right) \times \left(\tan 20^\circ \times \frac{1}{\tan 20^\circ} \right) \\ \quad \times \left(\tan 30^\circ \times \frac{1}{\tan 30^\circ} \right) \times \left(\tan 40^\circ \times \frac{1}{\tan 40^\circ} \right) \\ = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

$$23 \quad \cos 110^\circ = \cos (180^\circ - 70^\circ) = -\cos 70^\circ$$

$$\cos 130^\circ = \cos (180^\circ - 50^\circ) = -\cos 50^\circ$$

$$\cos 150^\circ = \cos (180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ$$

$$\cos 170^\circ = \cos (180^\circ - 10^\circ) = -\cos 10^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore a + b &= \sin^2 10^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ \\ &\quad + \cos^2 110^\circ + \cos^2 130^\circ + \cos^2 150^\circ + \cos^2 170^\circ \\ &= \sin^2 10^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ \\ &\quad + (-\cos 70^\circ)^2 + (-\cos 50^\circ)^2 + (-\cos 30^\circ)^2 \\ &\quad \quad + (-\cos 10^\circ)^2 \\ &= (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) \\ &\quad + (\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ) + (\sin^2 70^\circ + \cos^2 70^\circ) \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \end{aligned}$$

$$24 \quad 10\theta = 2\pi \text{이므로 } 5\theta = \pi$$

$$\cos 6\theta = \cos (\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos 7\theta = \cos (\pi + 2\theta) = -\cos 2\theta$$

$$\cos 8\theta = \cos (\pi + 3\theta) = -\cos 3\theta$$

$$\cos 9\theta = \cos (\pi + 4\theta) = -\cos 4\theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos 8\theta + \cos 9\theta \\ = \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots - \cos 3\theta - \cos 4\theta \\ = \cos 5\theta = \cos \pi = -1 \end{aligned}$$

$$25 \quad \sin \frac{7}{8} \pi = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{8} \right) = \sin \frac{\pi}{8}$$

$$\sin \frac{6}{8} \pi = \sin \left(\pi - \frac{2}{8} \pi \right) = \sin \frac{2}{8} \pi$$

$$\sin \frac{5}{8} \pi = \sin \left(\pi - \frac{3}{8} \pi \right) = \sin \frac{3}{8} \pi$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{2}{8} \pi + \sin^2 \frac{3}{8} \pi + \cdots + \sin^2 \frac{7}{8} \pi \\ = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{2}{8} \pi + \sin^2 \frac{3}{8} \pi + \cdots + \sin^2 \frac{2}{8} \pi + \sin^2 \frac{\pi}{8} \\ = 2 \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{2}{8} \pi + \sin^2 \frac{3}{8} \pi \right) + \sin^2 \frac{4}{8} \pi \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \sin \frac{3}{8} \pi = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = \cos \frac{\pi}{8} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 & 2\left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{2}{8} \pi + \sin^2 \frac{3}{8} \pi\right) + \sin^2 \frac{4}{8} \pi \\
 &= 2\left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{2}{8} \pi + \cos^2 \frac{\pi}{8}\right) + \sin^2 \frac{4}{8} \pi \\
 &= 2\left(1 + \sin^2 \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2 \frac{\pi}{2} \\
 &= 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1 = 4
 \end{aligned}$$

26 $y = 2 \sin(x + \pi) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \sin x - \sin x - 2 \\
 &= -3 \sin x - 2
 \end{aligned}$$

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 &-3 \leq -3 \sin x \leq 3 \\
 \therefore &-5 \leq -3 \sin x - 2 \leq 1
 \end{aligned}$$

따라서 $M=1, m=-5$ 이므로

$$M - m = 6$$

27 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = a|2t+1| + b \quad \text{..... ㉠}$$

이때 $a > 0$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 ㉠의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $t=1$ 일 때 최댓값은 $3a+b$, $t=-\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값은 b 이다.

이때 최댓값이 5, 최솟값이 -1 이므로

$$3a + b = 5 \quad \text{..... ㉡}$$

$$b = -1 \quad \text{..... ㉢}$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$3a - 1 = 5 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore a + b = 2 + (-1) = 1$$

다른 풀이

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로 } -1 \leq 2 \cos x + 1 \leq 3$$

$$\therefore 0 \leq |2 \cos x + 1| \leq 3$$

이때 $a > 0$ 이므로

$$b \leq a|2 \cos x + 1| + b \leq 3a + b$$

따라서 최댓값이 5, 최솟값이 -1 이므로

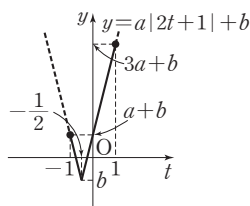
$$3a + b = 5 \quad \text{..... ㉠}$$

$$b = -1 \quad \text{..... ㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$3a - 1 = 5 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore a + b = 2 + (-1) = 1$$



28 $\tan x = t$ 로 놓으면 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $-1 \leq \tan x \leq 1$ 이

므로 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -|t-1| + k \quad \text{..... ㉠}$$

따라서 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 ㉠의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

므로

$t=1$ 일 때 최댓값은 k ,

$t=-1$ 일 때 최솟값은 $-2+k$

이때 최댓값과 최솟값의 합이 4이므로

$$k + (-2 + k) = 4 \quad \therefore k = 3$$

다른 풀이

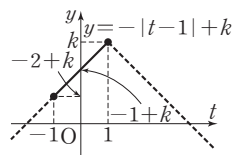
$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{에서 } -1 \leq \tan x \leq 1 \text{이므로}$$

$$-2 \leq \tan x - 1 \leq 0, \quad 0 \leq |\tan x - 1| \leq 2$$

$$\therefore -2 + k \leq -|\tan x - 1| + k \leq k$$

따라서 최댓값은 k , 최솟값은 $-2+k$ 이므로

$$k + (-2 + k) = 4 \quad \therefore k = 3$$



29 $\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = \frac{1}{t-2} + 1 \quad \text{..... ㉠}$$

따라서 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 ㉠의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$t = -1 \text{일 때, } M = \frac{2}{3}$$

$$t = 1 \text{일 때, } m = 0$$

$$\therefore M + m = \frac{2}{3}$$

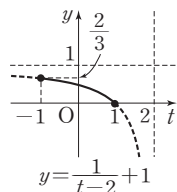
다른 풀이

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{이므로 } -3 \leq \sin x - 2 \leq -1$$

$$-1 \leq \frac{1}{\sin x - 2} \leq -\frac{1}{3}$$

$$\therefore 0 \leq \frac{1}{\sin x - 2} + 1 \leq \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{따라서 } M = \frac{2}{3}, m = 0 \text{이므로 } M + m = \frac{2}{3}$$



30 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = \frac{t-5}{t+3} = -\frac{8}{t+3} + 1 \quad \text{..... ㉠}$$

따라서 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 ㉠의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

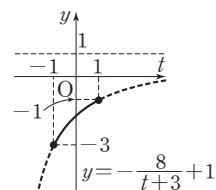
$$t = 1 \text{일 때 최댓값은 } -1,$$

$$t = -1 \text{일 때 최솟값은 } -3 \text{이다.}$$

이때 주어진 함수의 치역은

$$\{y \mid -3 \leq y \leq -1\} \text{이므로}$$

$$a = -3, b = -1 \quad \therefore a^2 + b^2 = 10$$



주어진 함수를 변형하면 $y = \frac{-8}{\cos x + 3} + 1$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{\cos x + 3} \leq \frac{1}{2}, \quad -4 \leq \frac{-8}{\cos x + 3} \leq -2$$

$$\therefore -3 \leq \frac{-8}{\cos x + 3} + 1 \leq -1$$

따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y | -3 \leq y \leq -1\}$ 이므로

$$a = -3, b = -1 \quad \therefore a^2 + b^2 = 10$$

31 $y = \sin^2 x - 3 \cos^2 x - 4 \sin x$

$$= \sin^2 x - 3(1 - \sin^2 x) - 4 \sin x$$

$$= 4 \sin^2 x - 4 \sin x - 3$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = 4t^2 - 4t - 3 = 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 $\textcircled{1}$ 의

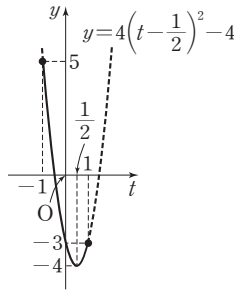
그래프는 오른쪽 그림과 같으

므로

$$t = -1 \text{ 일 때, } M = 5$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ 일 때, } m = -4$$

$$\therefore M - m = 9$$



32 $f(x) = \cos^2\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$

에서 $x - \frac{3}{4}\pi = \alpha$ 로 놓으면 $x = \alpha + \frac{3}{4}\pi$ 이므로

$$f(x) = \cos^2 \alpha - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + k$$

$$= \cos^2 \alpha + \sin \alpha + k$$

$$= (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha + k$$

$$= -\sin^2 \alpha + \sin \alpha + k + 1$$

$\sin \alpha = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -t^2 + t + k + 1 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + k + \frac{5}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $-1 \leq t \leq 1$ 에서

$\textcircled{1}$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로 $t = \frac{1}{2}$

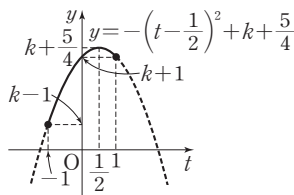
일 때 최댓값은 $k + \frac{5}{4}$,

$t = -1$ 일 때 최솟값은 $k - 1$

$$\text{즉, } k + \frac{5}{4} = 3 \text{ 이므로 } k = \frac{7}{4}$$

$$\therefore m = k - 1 = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore k + m = \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$$



1 $x = \frac{4}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

2 ②

3 ④

4 ③

5 $\frac{\pi}{4}$

6 3π

7 ④

8 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9 ⑤

10 8π

11 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

12 4π

13 ②

14 $-\frac{25}{8} \leq k \leq 3$

15 ③

16 $\frac{3}{2}\pi$

17 $\frac{\pi}{6}$

18 $-\frac{1}{2}$

19 ⑤

20 ⑤

21 ③

22 $a \leq -2$

23 π

24 ②

25 ①

1 $2 \sin x = -\sqrt{3}$ 에서 $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{의 교점의 } x \text{좌표는 } \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

따라서 주어진 방정식의 두 근은

$$x = \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

2 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = -\sin x + 1$ 이므로

$$\sin x = -\sin x + 1 \text{에서 } 2 \sin x = 1$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 이

$$\text{만나는 점의 } x \text{좌표는 } \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

따라서 모든 점의 x 좌표의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi = \pi$$

3 $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면 $0 < x < 2\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{3} < t < \frac{2}{3}\pi$ 이

고 주어진 방정식은

$$\sqrt{2} \sin t = 1 \quad \therefore \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$-\frac{\pi}{3} < t < \frac{2}{3}\pi$ 에서 함수 $y = \sin t$ 의 그래프와 직선

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{의 교점의 } t \text{좌표는 } \frac{\pi}{4}$$

$$\text{이때 } t = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} \quad \therefore x = \frac{7}{6}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{7}{6}\pi$ 이므로

$$\sin 4\alpha = \sin \frac{14}{3}\pi = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- 4 $2x + \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓으면 $0 < x < 2\pi$ 에서 $\frac{\pi}{4} < t < \frac{17}{4}\pi$ 이고
주어진 방정식은
 $\cos t = \sin t \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\frac{\pi}{4} < t < \frac{17}{4}\pi$ 에서 $\cos t = 0$ 일 때 $\sin t \neq 0$ 이므로
 $\cos t \neq \sin t$
즉, $\textcircled{1}$ 을 만족시키지 않으므로 $\cos t \neq 0$
따라서 $\textcircled{1}$ 의 양변을 $\cos t$ 로 나누면
 $1 = \frac{\sin t}{\cos t} \quad \therefore \tan t = 1$
 $\frac{\pi}{4} < t < \frac{17}{4}\pi$ 에서 함수 $y = \tan t$ 의 그래프와 직선 $y = 1$
의 교점의 t 좌표는
 $\frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{13}{4}\pi$
이때 $t = 2x + \frac{\pi}{4}$ 이므로
 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$ 또는 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{9}{4}\pi$ 또는 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{13}{4}\pi$
 $\therefore x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \pi$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi$
따라서 모든 근의 합은
 $\frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3}{2}\pi = 3\pi$
- 5 $\log_{\frac{1}{2}} \sin \theta + \log_2 \tan \theta = \frac{1}{2}$ 에서
 $-\log_2 \sin \theta + \log_2 \tan \theta = \frac{1}{2}$
 $\log_2 \frac{\tan \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{2}, \frac{\tan \theta}{\sin \theta} = \sqrt{2}$
 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sqrt{2}, \frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{2}$
 $\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $y = \cos \theta$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$
의 교점의 θ 좌표는 $\frac{\pi}{4}$
 $\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$
- 6 $\pi \sin x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로
 $-\pi \leq t \leq \pi$ 이고 주어진 방정식은
 $\sin t = -1$
 $-\pi \leq t \leq \pi$ 에서 함수 $y = \sin t$ 의 그래프와 직선 $y = -1$
의 교점의 t 좌표는 $-\frac{\pi}{2}$

- 즉, $-\frac{\pi}{2} = \pi \sin x$ 이므로 $\sin x = -\frac{1}{2}$
 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}$
의 교점의 x 좌표는
 $\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$
따라서 모든 근의 합은
 $\frac{7}{6}\pi + \frac{11}{6}\pi = 3\pi$
- 7 $\cos^2 x + \sin x - \sin^2 x = 0$ 에서
 $(1 - \sin^2 x) + \sin x - \sin^2 x = 0$
 $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$
 $(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$
 $\therefore \sin x = -\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x = 1$
 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 두 직선
 $y = -\frac{1}{2}, y = 1$ 의 교점의 x 좌표는
 $\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$
따라서 모든 근의 합은
 $\frac{\pi}{2} + \frac{7}{6}\pi + \frac{11}{6}\pi = \frac{7}{2}\pi$
- 8 $\tan^2 x - (\sqrt{3} + 1)\tan x + \sqrt{3} = 0$ 에서
 $(\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3}) = 0$
 $\therefore \tan x = 1$ 또는 $\tan x = \sqrt{3}$
 $0 < x < \pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 두 직선 $y = 1,$
 $y = \sqrt{3}$ 의 교점의 x 좌표는
 $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$
따라서 $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{3}$ 이므로
 $2\alpha - \beta = 2 \times \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$
 $\therefore \cos(2\alpha - \beta) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 9 $\sin x = \sqrt{3}(1 + \cos x)$ 의 양변을 제곱하면
 $\sin^2 x = 3(1 + \cos x)^2$
 $1 - \cos^2 x = 3(1 + 2\cos x + \cos^2 x)$
 $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$
 $(\cos x + 1)(2\cos x + 1) = 0$
 $\therefore \cos x = -1$ 또는 $\cos x = -\frac{1}{2}$

(i) $\cos x = -1$ 일 때,

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = -1$ 의 교점의 x 좌표는 π 이고 $x = \pi$ 이면 $\sin \pi = 0$ 이므로 주어진 방정식이 성립한다.

(ii) $\cos x = -\frac{1}{2}$ 일 때,

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ $x = \frac{2}{3}\pi$ 이면 $\sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 주어진 방정식이 성립한다.

$x = \frac{4}{3}\pi$ 이면 $\sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 주어진 방정식이 성립하지 않는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 해의 합은

$$\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$$

10 함수 $y = \cos x$ 의 그래프에서

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \pi, \frac{x_3 + x_4}{2} = 3\pi$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\pi + 6\pi = 8\pi$$

11 $0 \leq x < \pi$ 에서 함수

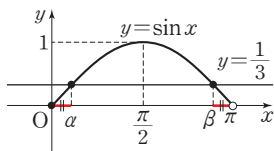
$y = \sin x$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{1}{3}$ 의 교점의 x 좌표가

α, β 이므로

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \alpha + \beta = \pi$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



12 $\cos x - 3|\cos x| + 1 = 0$ 에서

(i) $\cos x \geq 0$ 일 때,

$$\cos x - 3\cos x + 1 = 0$$

$$-2\cos x + 1 = 0$$

$$\therefore \cos x = \frac{1}{2}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$

의 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

(ii) $\cos x < 0$ 일 때,

$$\cos x + 3\cos x + 1 = 0$$

$$4\cos x + 1 = 0$$

$$\therefore \cos x = -\frac{1}{4}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

$y = \cos x$ 의 그래프

와 직선 $y = -\frac{1}{4}$ 의

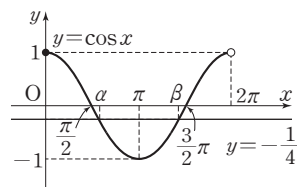
교점의 x 좌표를 α, β

($\alpha < \beta$)라 하면

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \pi \quad \therefore \alpha + \beta = 2\pi$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi + 2\pi = 4\pi$$



13 $\cos^2 x + 4\sin x + k = 0$ 에서

$$(1 - \sin^2 x) + 4\sin x + k = 0$$

$$\therefore \sin^2 x - 4\sin x - 1 = k$$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수

$y = \sin^2 x - 4\sin x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점이 존재해야 한다.

$y = \sin^2 x - 4\sin x - 1$ 에서 $\sin x = t$ 로 놓으면

$$-1 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

$$y = t^2 - 4t - 1 = (t - 2)^2 - 5$$

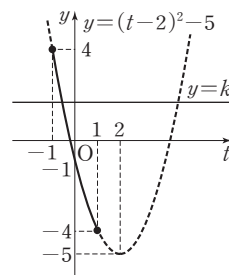
이때 오른쪽 그림에서 주어진

방정식이 실근을 가지려면

$$-4 \leq k \leq 4$$

따라서 $M = 4, m = -4$ 이므로

$$M - m = 8$$



14 $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + k = 0$ 에서

$$2\cos^2 x + 3\sin x + k = 0$$

$$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x + k = 0$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = k$$

$$\therefore 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = k$$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수

$y = 2\sin^2 x - 3\sin x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점이 존재해야 한다.

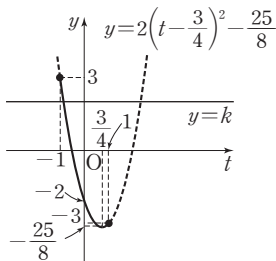
$y = 2\sin^2 x - 3\sin x - 2$ 에서 $\sin x = t$ 로 놓으면

$$-1 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

$$y=2t^2-3t-2=2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$$

이때 오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 가지려면

$$-\frac{25}{8} \leq k \leq 3$$



- 15 $\cos^2 x + \cos(\pi + x) - k + 1 = 0$ 에서

$$\cos^2 x - \cos x - k + 1 = 0$$

$$\therefore \cos^2 x - \cos x + 1 = k$$

따라서 주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 함수 $y = \cos^2 x - \cos x + 1$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 한 점에서 만나야 한다.

$y = \cos^2 x - \cos x + 1$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면

$0 \leq x \leq \pi$ 에서 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

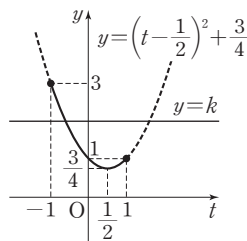
$$y = t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

이때 오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면

$$k = \frac{3}{4} \text{ 또는 } 1 < k \leq 3$$

따라서 모든 정수 k 의 값의 합은

$$2 + 3 = 5$$



- 16 $\sin x - \cos x > 0$ 에서 $\sin x > \cos x$

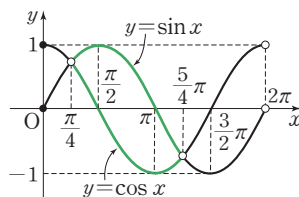
이 부등식의 해는 $y = \sin x$ 의 그래프가 $y = \cos x$ 의 그래프 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

오른쪽 그림에서

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{이므로 } \alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$$



- 17 $2x - \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면 $0 < x < \pi$ 에서 $-\frac{\pi}{3} < t < \frac{5\pi}{3}$ 이고

주어진 부등식은 $2\sin t + \sqrt{3} < 0$

$$\therefore \sin t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서

t 의 값의 범위는

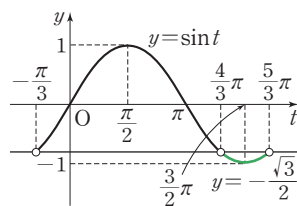
$$\frac{4}{3}\pi < t < \frac{5}{3}\pi$$

이때 $t = 2x - \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\frac{4}{3}\pi < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore \frac{5}{6}\pi < x < \pi$$

따라서 $\alpha = \frac{5}{6}\pi, \beta = \pi$ 이므로 $\beta - \alpha = \frac{\pi}{6}$



- 18 $\log_2(\cos x) + 1 \leq 0$ 에서 $\log_2(\cos x) \leq -1$

$$\therefore 0 < \cos x \leq \frac{1}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서

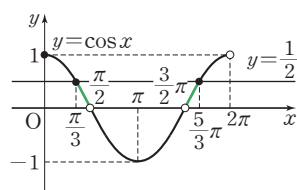
x 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{3}$$

$$\frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{3} \text{이므로}$$

$$\alpha = \frac{5}{3}\pi, \beta = \frac{\pi}{3} \quad \therefore \alpha - \beta = \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos \frac{4}{3}\pi = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$



- 19 $A + B + C = \pi$ 이므로

$$\tan(B + C) = \tan(\pi - A) = -\tan A$$

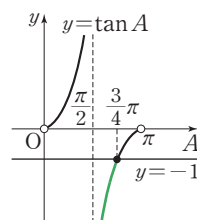
$$\tan A - \tan(B + C) + 2 \leq 0 \text{에서}$$

$$2\tan A + 2 \leq 0 \quad \therefore \tan A \leq -1$$

따라서 오른쪽 그림에서 A 의 값의

$$\text{범위는 } \frac{\pi}{2} < A \leq \frac{3\pi}{4} \text{이므로}$$

A 의 최댓값은 $\frac{3\pi}{4}$ 이다.



- 20 $2\cos^2 x - 5\sin x - 4 \geq 0$ 에서

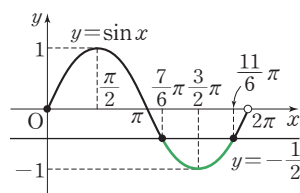
$$2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x - 4 \geq 0$$

$$2\sin^2 x + 5\sin x + 2 \leq 0$$

$$(2\sin x + 1)(\sin x + 2) \leq 0$$

이때 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $\sin x + 2 > 0$ 이므로 $2\sin x + 1 \leq 0$

$$\therefore \sin x \leq -\frac{1}{2}$$



따라서 위의 그림에서 x 의 값의 범위는
 $\frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi$ 이므로 $\alpha = \frac{7}{6}\pi$, $\beta = \frac{11}{6}\pi$
 $\therefore \beta - \alpha = \frac{2}{3}\pi$
 $\therefore \sin(\beta - \alpha) = \sin \frac{2}{3}\pi = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- 21 $\cos x + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) < \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ 에서

$$\begin{aligned} \cos x + \cos^2 x &< \sin^2 x \\ \cos x + \cos^2 x &< 1 - \cos^2 x \\ 2\cos^2 x + \cos x - 1 &< 0 \\ (\cos x + 1)(2\cos x - 1) &< 0 \end{aligned}$$

이때 $0 \leq x < \pi$ 에서 $\cos x + 1 > 0$ 이므로

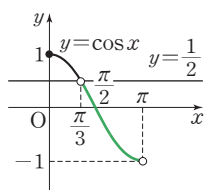
$$2\cos x - 1 < 0 \quad \therefore \cos x < \frac{1}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 x 의 값의

범위는 $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ 이므로

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \pi$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{4}{3}\pi$$



- 22 $\sin^2 x + 4\cos x + 2a \leq 0$ 에서

$$(1 - \cos^2 x) + 4\cos x + 2a \leq 0$$

$$\therefore \cos^2 x - 4\cos x - 2a - 1 \geq 0$$

이때 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 부등식은

$$t^2 - 4t - 2a - 1 \geq 0$$

$$f(t) = t^2 - 4t - 2a - 1 \text{이라 하면}$$

$$f(t) = (t - 2)^2 - 2a - 5$$

$$-1 \leq t \leq 1 \text{에서 } f(t) \text{의 최솟값은 } f(1) = -2a - 4$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립하려면

$$-2a - 4 \geq 0$$

$$\therefore a \leq -2$$

- 23 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차 방정식 $x^2 - 2x\sin\theta + \sin\theta = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \sin^2\theta - \sin\theta \leq 0$$

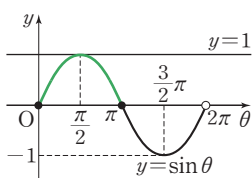
$$\sin\theta(\sin\theta - 1) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq \sin\theta \leq 1$$

따라서 오른쪽 그림에서 θ 의

값의 범위는 $0 \leq \theta \leq \pi$ 이므로

$$\alpha = 0, \beta = \pi$$

$$\therefore \alpha + \beta = \pi$$



- 24 이차방정식 $x^2 - 2x\cos\theta + \sin^2\theta + \cos\theta = 0$ 이 중근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \cos^2\theta - (\sin^2\theta + \cos\theta) = 0$$

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta - \cos\theta = 0$$

$$\cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) - \cos\theta = 0$$

$$2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$$

$$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) = 0$$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos\theta = 1$$

이때 $0 < \theta < 2\pi$ 에서 $-1 \leq \cos\theta < 1$ 이므로

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$0 < \theta < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos\theta$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}$

의 교점의 θ 좌표는 $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

따라서 $\alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{4}{3}\pi$ 이므로

$$\beta - \alpha = \frac{2}{3}\pi$$

- 25 이차방정식 $x^2 - (2\sin\theta)x - 3\cos^2\theta - 5\sin\theta + 5 = 0$ 이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \sin^2\theta - (-3\cos^2\theta - 5\sin\theta + 5) \geq 0$$

$$\sin^2\theta + 3\cos^2\theta + 5\sin\theta - 5 \geq 0$$

$$\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) + 5\sin\theta - 5 \geq 0$$

$$2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 \leq 0$$

$$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 2) \leq 0$$

이때 $0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 $\sin\theta - 2 < 0$ 이므로

$$2\sin\theta - 1 \geq 0 \quad \therefore \sin\theta \geq \frac{1}{2}$$

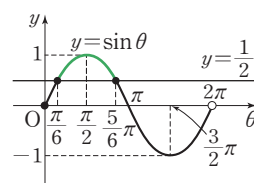
따라서 오른쪽 그림에서 θ 의

값의 범위는 $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$ 이

$$\text{므로 } \alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore 4\beta - 2\alpha = 4 \times \frac{5}{6}\pi - 2 \times \frac{\pi}{6}$$

$$= 3\pi$$



II-2. 사인법칙과 코사인법칙

01 사인법칙과 코사인법칙

56~62쪽

- 1 ③ 2 ⑤ 3 $8\sqrt{2}$ 4 ③ 5 $2\sqrt{2}$
 6 ③ 7 $\frac{13}{4}$ 8 $4:2:5$ 9 $\frac{4}{5}$ 10 $3-\sqrt{3}$
 11 ③ 12 ⑤ 13 $a=b$ 인 이등변삼각형
 14 30 m 15 ⑤ 16 $10\sqrt{6}$ m 17 $\sqrt{19}$ 18 ①
 19 ④ 20 30° 21 ⑤ 22 6 23 $\frac{5\sqrt{7}}{14}$
 24 ③ 25 25 26 $a=c$ 인 이등변삼각형
 27 $a=b$ 인 이등변삼각형 28 ④
 29 $a=b$ 인 이등변삼각형 또는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형
 30 $40\sqrt{7}$ m 31 $\frac{169}{3}\pi$ m² 32 300 m 33 ⑤
 34 ⑤ 35 ③ 36 $15\sqrt{7}$ 37 ④ 38 ③
 39 $20\sqrt{3}$ 40 ③ 41 $5\sqrt{3}$ 42 $\sqrt{26}$ 43 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
 44 9 45 $14\sqrt{3}$

- 1 $A=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{6}}{\sin 45^\circ} &= \frac{b}{\sin 60^\circ} \\ 2\sqrt{6} \sin 60^\circ &= b \sin 45^\circ \\ 2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} &= b \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \therefore b &= 6\end{aligned}$$

- 2 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABH에서

$$\overline{BH} = 4\sqrt{3} \cos 45^\circ$$

$$= 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 2\sqrt{6}$$

삼각형 AHC에서

$$\overline{CH} = 4\sqrt{2} \cos 60^\circ$$

$$= 4\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{BC} = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$$

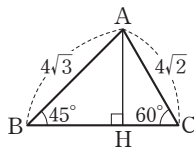
$$\angle A = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ \text{이므로}$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{\sin 75^\circ} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$

$$4\sqrt{2} \sin 75^\circ = (2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) \sin 45^\circ$$

$$\therefore \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$



- 3 한 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$$\angle BCA = \angle BDA = 45^\circ$$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin 30^\circ} = \frac{16}{\sin 45^\circ}, \overline{AD} \sin 45^\circ = 16 \sin 30^\circ$$

$$\overline{AD} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16 \times \frac{1}{2} \quad \therefore \overline{AD} = 8\sqrt{2}$$

- 4 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

$$a = 8 \sin A \text{를 대입하면 } \frac{8 \sin A}{\sin A} = 2R$$

$$2R = 8 \quad \therefore R = 4$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi \times 4^2 = 16\pi$$

- 5 $B+C=180^\circ-A$ 이므로

$$2 \sin A \sin (B+C) = 1, 2 \sin A \sin (180^\circ - A) = 1$$

$$2 \sin^2 A = 1, \sin^2 A = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2} (\because 0^\circ < A < 180^\circ)$$

$$\text{사인법칙에 의하여 } \frac{a}{\sin A} = 2 \times 2$$

$$\therefore a = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

- 6 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\pi r^2 = 9\pi \text{에서 } r = 3 (\because r > 0)$$

따라서 호 AB의 길이는 $3 \times 3 = 9$

이므로

$$3 \times \theta = 9 \text{에서 } \theta = 3$$

호 AB 위의 점이 아닌 원 위의 한

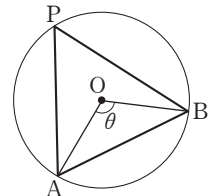
점 P에 대하여

$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{\theta}{2} = \frac{3}{2}$$

삼각형 ABP에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin (\angle APB)} = 6, \frac{\overline{AB}}{\sin \frac{3}{2}} = 6$$

$$\therefore \overline{AB} = 6 \sin \frac{3}{2}$$



- 7 사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 4 : 5 : 7$$

따라서 $a=4k, b=5k, c=7k (k>0)$ 로 놓으면

$$\frac{a^2+c^2}{ab} = \frac{(4k)^2+(7k)^2}{4k \times 5k} = \frac{65k^2}{20k^2} = \frac{13}{4}$$

- 8 $a+b=6k, b+c=7k, c+a=9k (k>0)$ 로 놓고 세 식을 변끼리 더하면

$$2(a+b+c)=22k \quad \therefore a+b+c=11k$$

따라서 $a=4k, b=2k, c=5k$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = 4k : 2k : 5k = 4 : 2 : 5$$

- 9 $a-2b+2c=0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

$$2a+b-2c=0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}+\textcircled{8}$ 을 하면

$$3a-b=0 \quad \therefore b=3a$$

이를 $\textcircled{8}$ 에 대입하면

$$2a+3a-2c=0$$

$$5a-2c=0 \quad \therefore c=\frac{5}{2}a$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : 3a : \frac{5}{2}a = 2 : 6 : 5$$

$\sin A=2k, \sin B=6k, \sin C=5k (k>0)$ 로 놓으면

$$\frac{\sin A + \sin B}{2 \sin C} = \frac{2k+6k}{2 \times 5k} = \frac{4}{5}$$

- 10 $A+B+C=180^\circ$ 이고 $A:B:C=1:2:3$ 이므로

$$A=180^\circ \times \frac{1}{6} = 30^\circ, B=180^\circ \times \frac{2}{6} = 60^\circ,$$

$$C=180^\circ \times \frac{3}{6} = 90^\circ$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$a=2R \sin A=2R \sin 30^\circ=R$$

$$b=2R \sin B=2R \sin 60^\circ=\sqrt{3}R$$

$$c=2R \sin C=2R \sin 90^\circ=2R$$

이를 $a+b+c=6$ 에 대입하면

$$R+\sqrt{3}R+2R=6, (3+\sqrt{3})R=6$$

$$\therefore R=\frac{6}{3+\sqrt{3}}=3-\sqrt{3}$$

- 11 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin B=\frac{b}{2R}, \sin C=\frac{c}{2R}$$

이를 $b^2 \sin C=c^2 \sin B$ 에 대입하면

$$b^2 \times \frac{c}{2R}=c^2 \times \frac{b}{2R}$$

$$b^2 c=c^2 b, bc(b-c)=0$$

$$\therefore b=c (\because b \neq 0, c \neq 0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

- 12 $\cos^2 A + \cos^2 B = \cos^2 C + 1$ 에서

$$(1-\sin^2 A) + (1-\sin^2 B) = (1-\sin^2 C) + 1$$

$$\therefore \sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R}, \sin B=\frac{b}{2R}, \sin C=\frac{c}{2R}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\left(\frac{c}{2R}\right)^2 = \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \quad \therefore c^2 = a^2 + b^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

- 13 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \sin^2 B - \sin^2 A = 0$$

$$\therefore \sin^2 B = \sin^2 A \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R}, \sin B=\frac{b}{2R}$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \left(\frac{a}{2R}\right)^2$$

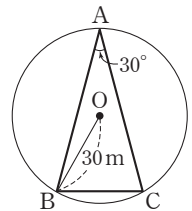
$$b^2 = a^2 \quad \therefore a=b (\because a>0, b>0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

- 14 오른쪽 그림과 같이 선분 BC를 그으면 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 30m이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 30^\circ} = 2 \times 30, \frac{\overline{BC}}{\frac{1}{2}} = 60$$

$$\therefore \overline{BC} = 30(\text{m})$$



- 15 $C=180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{60}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ}$$

$$60 \sin 45^\circ = \overline{BC} \sin 60^\circ, 60 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{BC} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \overline{BC} = 20\sqrt{6}(\text{m})$$

- 16 삼각형 AQB에서

$$\angle AQB = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BQ}}{\sin 60^\circ} = \frac{20}{\sin 45^\circ}, \overline{BQ} \sin 45^\circ = 20 \sin 60^\circ$$

$$\overline{BQ} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \overline{BQ} = 10\sqrt{6}(\text{m})$$

$$\therefore \overline{PQ} = \overline{BQ} \tan 45^\circ = 10\sqrt{6} \times 1 = 10\sqrt{6}(\text{m})$$

- 17 사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$$B = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 60^\circ \\ &= 25 + 9 - 15 = 19 \\ \therefore \overline{AC} &= \sqrt{19} \quad (\because \overline{AC} > 0)\end{aligned}$$

- 18 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}b^2 &= (\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \times (\sqrt{3} + 1) \times \sqrt{2} \times \cos 45^\circ \\ &= 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 2 - 2(\sqrt{3} + 1) = 4\end{aligned}$$

$$\therefore b = 2 \quad (\because b > 0)$$

또 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{\sin A} &= \frac{2}{\sin 45^\circ} \\ \sqrt{2} \sin 45^\circ &= 2 \sin A, \quad 1 = 2 \sin A\end{aligned}$$

$$\therefore \sin A = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$A = 30^\circ \text{ 또는 } A = 150^\circ$$

그런데 $A = 150^\circ$ 이면 $A + B > 180^\circ$ 이므로

$$A = 30^\circ$$

- 19 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= 3^2 + 1^2 - 2 \times 3 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 9 + 1 - 3 = 7\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{BC} = \sqrt{7} \quad (\because \overline{BC} > 0)$$

$\overline{AP}$ 가 $\angle BAC$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP}$$

즉, $\overline{BP} : \overline{CP} = 3 : 1$ 이므로

$$\overline{CP} = \frac{1}{4} \overline{BC} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{또 } \angle BAC = \frac{\pi}{3} \text{ 이므로 } \angle CAP = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{\pi}{6}$$

삼각형 APC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 삼각형 APC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CP}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2R, \quad \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{1}{2}} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

따라서 삼각형 APC의 외접원의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \pi$$

- 20 삼각형에서 길이가 가장 짧은 변의 대각이 세 내각 중 크기가 가장 작으므로 길이가 2인 변의 대각의 크기가 가장 작다. 이 각의 크기를 θ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{(2\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 2\sqrt{3} \times 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $\theta = 30^\circ$

- 21 $(a+b)^2 = c^2 + 3ab$, $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 3ab$

$$\therefore a^2 + b^2 - c^2 = ab \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

코사인법칙에 의하여 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

$$\textcircled{1} \text{을 대입하면 } \cos C = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \sin C + \tan C = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

- 22 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \times 8 \times 9} = \frac{2}{3}$$

따라서 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \cos B$$

$$= 64 + 36 - 64 = 36$$

$$\therefore \overline{AD} = 6 \quad (\because \overline{AD} > 0)$$

- 23 정육각형의 한 내각의 크기는

$$\frac{180^\circ \times (6-2)}{6} = 120^\circ \quad \leftarrow \text{정 } n\text{각형의 한 내각의 크기는 } \frac{180^\circ \times (n-2)}{n} \text{이다.}$$

$$\overline{MF} = \frac{1}{2} \overline{EF} = 3 \text{이므로 삼각형}$$

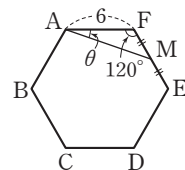
AMF에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AM}^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \times 6 \times 3 \times \cos 120^\circ$$

$$= 36 + 9 + 18 = 63$$

$$\therefore \overline{AM} = 3\sqrt{7} \quad (\because \overline{AM} > 0)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{6^2 + (3\sqrt{7})^2 - 3^2}{2 \times 6 \times 3\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$



- 24 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{(3\sqrt{7})^2 + a^2 - 3^2}{2 \times 3\sqrt{7} \times a} = \frac{54 + a^2}{6\sqrt{7}a}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{7}a} + \frac{a}{6\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7} \left(\frac{9}{a} + \frac{a}{6} \right)$$

이때 $\frac{9}{a} > 0$, $\frac{a}{6} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{9}{a} + \frac{a}{6} \geq 2\sqrt{\frac{9}{a} \times \frac{a}{6}} = 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}$$

(단, 등호는 $\frac{9}{a} = \frac{a}{6}$ 일 때 성립)

$$\therefore \cos B = \frac{\sqrt{7}}{7} \left(\frac{9}{a} + \frac{a}{6} \right) \geq \frac{\sqrt{7}}{7} \times \sqrt{6} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

따라서 $\cos B$ 의 최솟값은 $\frac{\sqrt{42}}{7}$ 이다.

25 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\overline{BE} = \frac{1}{6} \overline{BC} = \frac{1}{6} \times 6 = 1 \text{ 이므로 직각삼각형 ABE에서}$$

$$\overline{AE} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\overline{EC} = \overline{BC} - \overline{BE} = 6 - 1 = 5 \text{ 이므로}$$

삼각형 AEC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{(\sqrt{10})^2 + (3\sqrt{5})^2 - 5^2}{2 \times \sqrt{10} \times 3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore 50 \sin \theta \cos \theta = 50 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 25$$

26 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이를 $b = 2a \cos C$ 에 대입하면

$$b = 2a \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$b^2 = a^2 + b^2 - c^2, a^2 = c^2$$

$$\therefore a = c \quad (\because a > 0, c > 0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a = c$ 인 이등변삼각형이다.

27 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이를 $\sin A \cos B = \cos A \sin B$ 에 대입하면

$$\frac{a}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \frac{b}{2R}$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

$$b^2 = a^2$$

$$\therefore a = b \quad (\because a > 0, b > 0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a = b$ 인 이등변삼각형이다.

28 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이를 $a \cos A + c \cos C = b \cos B$ 에 대입하면

$$a \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + c \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = b \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2) = b^2(c^2 + a^2 - b^2)$$

$$a^4 - 2a^2c^2 + c^4 - b^4 = 0$$

$$(a^2 - c^2)^2 - (b^2)^2 = 0$$

$$(a^2 - c^2 - b^2)(a^2 - c^2 + b^2) = 0$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 \text{ 또는 } c^2 = a^2 + b^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A = 90^\circ$ 또는 $C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

29 $\tan A : \tan B = a^2 : b^2$ 에서

$$a^2 \tan B = b^2 \tan A$$

$$a^2 \times \frac{\sin B}{\cos B} = b^2 \times \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\therefore a^2 \sin B \cos A = b^2 \sin A \cos B \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a^2 \times \frac{b}{2R} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b^2 \times \frac{a}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) = b^2(c^2 + a^2 - b^2)$$

$$a^2b^2 + a^2c^2 - a^4 = b^2c^2 + a^2b^2 - b^4$$

$$a^4 - b^4 - a^2c^2 + b^2c^2 = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) - c^2(a^2 - b^2) = 0$$

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$\therefore a = b \text{ 또는 } a^2 + b^2 = c^2 \quad (\because a > 0, b > 0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a = b$ 인 이등변삼각형 또는 $C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

30 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = 120^2 + 80^2 - 2 \times 120 \times 80 \times \cos 60^\circ$$

$$= 14400 + 6400 - 9600$$

$$= 11200$$

$$\therefore \overline{PQ} = 40\sqrt{7} \text{ (m)} \quad (\because \overline{PQ} > 0)$$

따라서 두 나무 P, Q 사이의 거리는 $40\sqrt{7}$ m이다.

31 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{8^2 + 7^2 - 13^2}{2 \times 8 \times 7} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 120^\circ$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 $R(m)$ ($R > 0$)라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{13}{\sin 120^\circ} = 2R, \quad \frac{13}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \quad \therefore R = \frac{13\sqrt{3}}{3} (m)$$

따라서 물웅덩이의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{13\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{169}{3} \pi (m^2)$$

32 오른쪽 그림에서

$\overline{DE} = x(m)$ ($x > 0$)라 하면

$$\overline{AE} = \frac{\overline{DE}}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} x (m)$$

$$\overline{BE} = \frac{\overline{DE}}{\tan 45^\circ} = x (m)$$

$$\overline{CE} = \frac{\overline{DE}}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3} x (m)$$

$\angle EAB = \theta$ 라 하면 삼각형 ABE에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{100^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} x \right)^2 - x^2}{2 \times 100 \times \frac{\sqrt{3}}{3} x} = \frac{10000 - \frac{2}{3} x^2}{\frac{200\sqrt{3}}{3} x} \quad \cdots \textcircled{A}$$

또 삼각형 ACE에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{300^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} x \right)^2 - (\sqrt{3} x)^2}{2 \times 300 \times \frac{\sqrt{3}}{3} x} = \frac{90000 - \frac{8}{3} x^2}{200\sqrt{3} x} \quad \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 에서

$$\frac{10000 - \frac{2}{3} x^2}{\frac{200\sqrt{3}}{3} x} = \frac{90000 - \frac{8}{3} x^2}{200\sqrt{3} x}$$

$$-2x^2 + 30000 = -\frac{8}{3} x^2 + 90000$$

$$x^2 = 90000 \quad \therefore x = 300 (m) \quad (\because x > 0)$$

따라서 지면에서 산꼭대기까지의 높이는 300 m이다.

33 삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{6}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{7} \times \sin \theta = \sqrt{6}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

$$\therefore \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{42}}{7} \right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

34 원의 중심을 O라 하면

$$\angle BOA = 360^\circ \times \frac{3}{12} = 90^\circ$$

$$\angle COB = 360^\circ \times \frac{4}{12} = 120^\circ$$

$$\angle AOC = 360^\circ \times \frac{5}{12} = 150^\circ$$

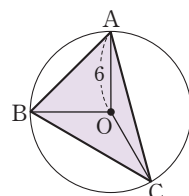
$\therefore \triangle ABC$

$$= \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$$

$$= \frac{1}{2} \times 6^2 \times \sin 90^\circ + \frac{1}{2} \times 6^2 \times \sin 120^\circ$$

$$+ \frac{1}{2} \times 6^2 \times \sin 150^\circ$$

$$= 18 + 9\sqrt{3} + 9 = 9(3 + \sqrt{3})$$



35 $A = 60^\circ$, $\overline{AP} = \frac{3}{4} \overline{AB} = \frac{3}{4} \times 8 = 6$,

$$\overline{AR} = \frac{1}{4} \overline{AC} = \frac{1}{4} \times 8 = 2 \text{이므로}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \sin 60^\circ = 16\sqrt{3}$$

$$\triangle APR = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 \times \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$$

이때 $\triangle APR = \triangle BQP = \triangle CRQ$ 이므로

$$\triangle PQR = \triangle ABC - 3\triangle APR = 16\sqrt{3} - 3 \times 3\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

다른 풀이

$$A = 60^\circ, \overline{AP} = \frac{3}{4} \overline{AB} = \frac{3}{4} \times 8 = 6,$$

$$\overline{AR} = \frac{1}{4} \overline{AC} = \frac{1}{4} \times 8 = 2 \text{이므로}$$

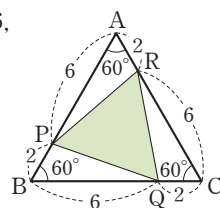
삼각형 APR에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PR}^2 = 6^2 + 2^2 - 2 \times 6 \times 2 \times \cos 60^\circ = 36 + 4 - 12 = 28$$

$$\therefore \overline{PR} = 2\sqrt{7} \quad (\because \overline{PR} > 0)$$

이때 $\triangle APR = \triangle BQP = \triangle CRQ$ 이므로 삼각형 PQR는 한 변의 길이가 $2\sqrt{7}$ 인 정삼각형이다.

$$\therefore \triangle PQR = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} \times 2\sqrt{7} \times \sin 60^\circ = 7\sqrt{3}$$



36 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{8^2 + 10^2 - 12^2}{2 \times 8 \times 10} = \frac{1}{8}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8} \right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 10 \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = 15\sqrt{7}$$

다른 풀이

헤론의 공식을 이용하면

$$s = \frac{8+10+12}{2} = 15 \text{이므로}$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\sqrt{15 \times (15-8) \times (15-10) \times (15-12)} = 15\sqrt{7}$$

37 사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 3 : 3 : 2 \text{이므로}$$

$a=3k, b=3k, c=2k (k>0)$ 로 놓으면 헤론의 공식에서

$$s = \frac{3k+3k+2k}{2} = 4k \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \sqrt{4k \times (4k-3k) \times (4k-3k) \times (4k-2k)} \\ &= 2\sqrt{2}k^2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2\sqrt{2}k^2 = 48\sqrt{2} \text{이므로 } k^2 = 24$$

$$\therefore k = 2\sqrt{6} (\because k > 0)$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$3k+3k+2k=8k=8 \times 2\sqrt{6} = 16\sqrt{6}$$

38 코사인법칙에 의하여 $\cos C = \frac{5^2+7^2-8^2}{2 \times 5 \times 7} = \frac{1}{7}$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = 10\sqrt{3}$$

이때 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\frac{1}{2}r(5+7+8) = 10\sqrt{3} \quad \therefore r = \sqrt{3}$$

39 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= 5^2 + 10^2 - 2 \times 5 \times 10 \times \cos 60^\circ \\ &= 25 + 100 - 50 = 75 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{BD} = 5\sqrt{3} (\because \overline{BD} > 0)$$

$$\therefore \square ABCD$$

$$= \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 5\sqrt{3} \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times 5 \times 10 \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{15\sqrt{3}}{2} + \frac{25\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$$

40 오른쪽 그림과 같이 선분

BD를 그으면 삼각형 ABD

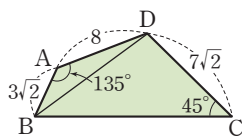
에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2$$

$$= (3\sqrt{2})^2 + 8^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 8 \times \cos 135^\circ$$

$$= 18 + 64 + 48 = 130$$

$$\therefore \overline{BD} = \sqrt{130} (\because \overline{BD} > 0)$$



또 $\overline{BC} = x (x > 0)$ 라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{130})^2 = x^2 + (7\sqrt{2})^2 - 2 \times x \times 7\sqrt{2} \times \cos 45^\circ$$

$$130 = x^2 + 98 - 14x, \quad x^2 - 14x - 32 = 0$$

$$(x+2)(x-16) = 0 \quad \therefore x = 16 (\because x > 0)$$

$$\therefore \overline{BC} = 16$$

$$\therefore \square ABCD$$

$$= \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 8 \times \sin 135^\circ + \frac{1}{2} \times 16 \times 7\sqrt{2} \times \sin 45^\circ$$

$$= 12 + 56 = 68$$

41 오른쪽 그림과 같이 선분 AC를 그

으면 삼각형 ABC에서 코사인법칙

에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos B \\ &= 8 - 8 \cos B \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos D \\ &= 52 - 48 \cos (180^\circ - B) \\ &= 52 + 48 \cos B \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$$8 - 8 \cos B = 52 + 48 \cos B$$

$$\therefore \cos B = -\frac{11}{14}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin B &= \sqrt{1 - \cos^2 B} \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{11}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14} \end{aligned}$$

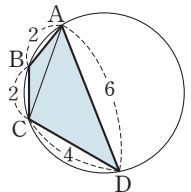
$$\therefore \square ABCD$$

$$= \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin B + \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin (180^\circ - B)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{5\sqrt{3}}{14} + \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$= 5\sqrt{3}$$



42 평행사변형 ABCD의 넓이가 20이므로

$$4 \times \overline{BC} \times \sin 45^\circ = 20, \quad 2\sqrt{2} \overline{BC} = 20$$

$$\therefore \overline{BC} = 5\sqrt{2}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 4^2 + (5\sqrt{2})^2 - 2 \times 4 \times 5\sqrt{2} \times \cos 45^\circ$$

$$= 16 + 50 - 40 = 26$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{26} (\because \overline{AC} > 0)$$

- 43 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$
 직각삼각형 ABD에서 $\overline{BD} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$
 사다리꼴 ABCD의 넓이는 $\frac{1}{2} \times (4+8) \times 4 = 24$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times 4\sqrt{2} \times \sin \theta = 24$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

- 44 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ 에서 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4}$ 이므로 $\cos \theta = \frac{4 \sin \theta}{3}$

이를 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 대입하면

$$\sin^2 \theta + \left(\frac{4 \sin \theta}{3}\right)^2 = 1, \sin^2 \theta + \frac{16 \sin^2 \theta}{9} = 1$$

$$\frac{25 \sin^2 \theta}{9} = 1, \sin^2 \theta = \frac{9}{25}$$

이때 $\tan \theta > 0$ 에서 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 이므로 $\sin \theta = \frac{3}{5}$

$$\begin{aligned} \therefore \square ABCD &= \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \frac{3}{5} = 9 \end{aligned}$$

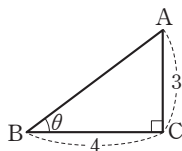
다른 풀이

$\tan \theta = \frac{3}{4}$ 이므로 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC를 생각할 수 있다.

$$\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \frac{3}{5} = 9$$



- 45 두 대각선의 교점을 O,
 $\overline{OA} = x$, $\overline{OB} = y$ 라 하면 삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$$6^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ$$

$$\therefore x^2 + y^2 - xy = 36 \quad \text{..... ㉠}$$

또 삼각형 OBC에서 코사인법칙에 의하여

$$8^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ$$

$$\therefore x^2 + y^2 + xy = 64 \quad \text{..... ㉡}$$

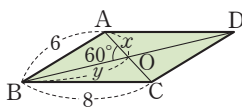
㉡ - ㉠을 하면

$$2xy = 28 \quad \therefore xy = 14$$

$$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 2x \times 2y \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3}xy = 14\sqrt{3}$$



III-1. 등차수열과 등비수열

01 등차수열

64~69쪽

1 ④	2 ④	3 ②	4 2	5 ③
6 -3	7 ②	8 ④	9 ②	10 13
11 2	12 -16	13 70	14 ①	15 -6
16 ③	17 6	18 5	19 -24	20 ③
21 ④	22 6	23 ①	24 ③	25 200
26 ③	27 290	28 15	29 81	30 ③
31 ③	32 -64	33 ②	34 ③	35 1667
36 630	37 ④	38 ⑤	39 ④	40 16
41 75	42 6	43 143		

- $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면
 $a_1 = (1+1)^2 - 1, a_2 = (2+1)^2 - 2, a_3 = (3+1)^2 - 3,$
 $a_4 = (4+1)^2 - 4, \dots$
 $\therefore a_n = (n+1)^2 - n = n^2 + n + 1$
- $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면
 $a_1 = \frac{1}{2 \times 1 - 1}, a_2 = \frac{1}{2 \times 2 - 1}, a_3 = \frac{1}{2 \times 3 - 1},$
 $a_4 = \frac{1}{2 \times 4 - 1}, \dots$
 $\therefore a_n = \frac{1}{2n - 1}$
 $a_k = \frac{1}{101}$ 에서 $\frac{1}{2k - 1} = \frac{1}{101}$
 $2k - 1 = 101 \quad \therefore k = 51$
- $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면
 $a_1 = 1 \times 3, a_2 = 2 \times 4, a_3 = 3 \times 5, a_4 = 4 \times 6, \dots$
 $\therefore a_n = n(n+2)$
 $\therefore a_{10} - a_9 = 10 \times 12 - 9 \times 11 = 21$
- 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_2 = 7, a_{10} = 23$ 이므로
 $a + d = 7 \quad \text{..... ㉠}$
 $a + 9d = 23 \quad \text{..... ㉡}$
 $\text{㉡} - \text{㉠}$ 을 하면 $8d = 16$
 $\therefore d = 2$
- 첫째항을 a 라 하면 $a_3 a_7 = 64$ 에서
 $\{a + 2 \times (-3)\} \{a + 6 \times (-3)\} = 64$
 $(a - 6)(a - 18) = 64$
 $a^2 - 24a + 44 = 0, (a - 2)(a - 22) = 0$
 $\therefore a = 2$ 또는 $a = 22$
 $a_8 > 0$ 에서 $a + 7 \times (-3) > 0$, 즉 $a > 21$ 이므로 $a = 22$
 $\therefore a_2 = 22 + (-3) = 19$

- 6 첫째항을 a , 공차를 $d(d < 0)$ 라 하면

$$(\text{㉠}) \text{에서 } (a+4d) + (a+8d) = 0$$

$$a+6d=0 \quad \therefore a=-6d \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$(\text{㉢}) \text{에서 } |a+4d| = |a+7d| + 1 \quad \dots\dots \text{㉣}$$

㉡을 ㉣에 대입하면

$$|-6d+4d| = |-6d+7d| + 1$$

$$|-2d| = |d| + 1$$

이때 $d < 0$ 이므로

$$-2d = -d + 1$$

$$\therefore d = -1$$

이를 ㉡에 대입하면 $a = 6$

$$\therefore a_{10} = 6 + 9 \times (-1) = -3$$

- 7 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 각각 d_1 , d_2 라 하면 $a_3 : b_3 = 4 : 5$ 에서 $4b_3 = 5a_3$ 이므로

$$4(a+2d_2) = 5(a+2d_1)$$

$$\therefore a+10d_1-8d_2=0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또 $a_5 : b_5 = 7 : 9$ 에서 $7b_5 = 9a_5$ 이므로

$$7(a+4d_2) = 9(a+4d_1)$$

$$\therefore a+18d_1-14d_2=0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠-㉡을 하면

$$-8d_1+6d_2=0$$

$$\therefore d_1 = \frac{3}{4}d_2$$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$a = \frac{1}{2}d_2 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$\therefore a_7 : b_7 = (a+6d_1) : (a+6d_2)$$

$$= \left(\frac{1}{2}d_2 + \frac{9}{2}d_2\right) : \left(\frac{1}{2}d_2 + 6d_2\right) (\because \text{㉢})$$

$$= 5d_2 : \frac{13}{2}d_2$$

$$= 10 : 13$$

- 8 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_3 = -47$, $a_{10} = -19$ 이므로

$$a+2d = -47, a+9d = -19$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -55, d = 4$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = -55 + (n-1) \times 4 = 4n - 59$$

이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면 $a_n > 0$ 에서

$$4n - 59 > 0, 4n > 59$$

$$\therefore n > 14.75$$

그런데 n 은 자연수이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제 15항이다.

- 9 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_1 = a_3 + 8 \text{에서 } a = (a+2d) + 8$$

$$\therefore d = -4 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$2a_4 - 3a_6 = 3 \text{에서 } 2(a+3d) - 3(a+5d) = 3$$

$$\therefore a+9d = -3 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a+9 \times (-4) = -3$$

$$\therefore a = 33$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = 33 + (n-1) \times (-4)$$

$$= -4n + 37$$

$$a_k < 0 \text{에서 } -4k + 37 < 0$$

$$4k > 37 \quad \therefore k > 9.25$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 10이다.

- 10 공차를 d 라 하면 $a_1 = 47$, $a_{10} = 11$ 이므로

$$47+9d=11 \quad \therefore d=-4$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = 47 + (n-1) \times (-4)$$

$$= -4n + 51$$

이때 $-4n+51=0$ 에서 $n=12.75$ 이므로

$$|a_{12}| = |-4 \times 12 + 51| = 3$$

$$|a_{13}| = |-4 \times 13 + 51| = 1$$

따라서 $|a_n|$ 의 값이 최소가 되는 자연수 n 의 값은 13이다.

- 11 공차를 d 라 하면 첫째항이 8, 제7항이 20이므로

$$8+6d=20$$

$$\therefore d=2$$

- 12 공차를 d 라 하면 첫째항이 3, 제6항이 23이므로

$$3+5d=23$$

$$\therefore d=4$$

따라서 $x=3+4=7$, $y=3+2 \times 4=11$,

$$z=3+3 \times 4=15, w=3+4 \times 4=19 \text{이므로}$$

$$x+y-z-w=7+11-15-19=-16$$

다른 풀이

공차를 d 라 하면

$$x=3+d, y=3+2d, z=3+3d, w=3+4d \text{이므로}$$

$$x+y-z-w=-4d$$

이때 제6항이 23이므로

$$3+5d=23 \quad \therefore d=4$$

$$\therefore x+y-z-w=-4 \times 4 = -16$$

- 13 공차를 d 라 하면 첫째항이 2, 제5항이 18이므로

$$2+4d=18 \quad \therefore d=4$$

따라서

$$\frac{1}{x}=2+4=6, \frac{1}{y}=2+2 \times 4=10, \frac{1}{z}=2+3 \times 4=14$$

$$\text{이므로 } x=\frac{1}{6}, y=\frac{1}{10}, z=\frac{1}{14}$$

$$\therefore \frac{3x}{yz} = \frac{3 \times \frac{1}{6}}{\frac{1}{10} \times \frac{1}{14}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{140}} = 70$$

- 14 공차를 d 라 하면 첫째항이 1, 제 $(m+2)$ 항이 100이므로

$$1+(m+2-1)d=100$$

$$\therefore (m+1)d=99$$

이때 m 이 자연수이므로 $m+1$ 은 1이 아닌 자연수이고 d 도 자연수이므로 $(m+1)d=99$ 인 경우는 다음과 같다.

$m+1$	3	9	11	33	99
d	33	11	9	3	1

따라서 자연수 d 의 개수는 5이다.

- 15 a 는 $1-2\sqrt{3}$ 과 1의 등차중항이므로

$$a = \frac{(1-2\sqrt{3})+1}{2} = 1-\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

1은 a 와 b 의 등차중항이므로

$$1 = \frac{a+b}{2}, 2 = (1-\sqrt{3})+b \quad (\because \textcircled{7})$$

$$\therefore b = 1+\sqrt{3}$$

c 는 5와 1의 등차중항이므로

$$c = \frac{5+1}{2} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

1은 c 와 d 의 등차중항이므로

$$1 = \frac{c+d}{2}, 2 = 3+d \quad (\because \textcircled{8})$$

$$\therefore d = -1$$

$$\therefore ab-c+d = (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})-3+(-1) = -6$$

- 16 a_1, a_1+a_2, a_2+a_3 에서 a_1+a_2 는 a_1 과 a_2+a_3 의 등차중항이므로

$$a_1+a_2 = \frac{a_1+(a_2+a_3)}{2}$$

$$2(a_1+a_2) = a_1+a_2+a_3$$

$$\therefore a_1+a_2 = a_3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $\textcircled{7}$ 에서

$$a+(a+d) = a+2d$$

$$\therefore a = d$$

$$\therefore \frac{a_3}{a_2} = \frac{a+2d}{a+d} = \frac{3d}{2d} = \frac{3}{2}$$

- 17 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=6, \alpha\beta=6$$

이때 p 는 α 와 β 의 등차중항이므로

$$p = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

또 q 는 $\frac{1}{\alpha}$ 과 $\frac{1}{\beta}$ 의 등차중항이므로

$$q = \frac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta} = \frac{6}{2 \times 6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{p}{q} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

- 18 $a, b, 10$ 에서 b 는 a 와 10의 등차중항이므로

$$b = \frac{a+10}{2} \quad \therefore 2b = a+10 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

10, c, d 에서 c 는 10과 d 의 등차중항이므로

$$c = \frac{10+d}{2} \quad \therefore 2c = 10+d \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}-\textcircled{8} \text{을 하면 } 2(b-c) = a-d$$

또 $b, e, 0$ 에서 e 는 b 와 0의 등차중항이고, 5, e, c 에서 e 는 5와 c 의 등차중항이므로

$$\frac{b+0}{2} = \frac{5+c}{2}, b=5+c \quad \therefore b-c=5$$

$$\therefore a-b+c-d = (a-d)-(b-c)$$

$$= 2(b-c)-(b-c)$$

$$= b-c=5$$

- 19 세 실근을 $a-d, a, a+d$ 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a-d)+a+(a+d)=9$$

$$3a=9 \quad \therefore a=3$$

따라서 3은 주어진 삼차방정식의 한 근이므로

주어진 삼차방정식에 $x=3$ 을 대입하면

$$3^3-9 \times 3^2+26 \times 3+k=0$$

$$\therefore k=-24$$

- 20 가로 길이, 세로 길이, 높이를 각각 $a-d, a, a+d$ 라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 48이므로

$$4\{(a-d)+a+(a+d)\}=48$$

$$12a=48 \quad \therefore a=4$$

또 부피가 60이므로

$$(4-d) \times 4 \times (4+d) = 60$$

$$16-d^2=15, d^2=1 \quad \therefore d=\pm 1$$

따라서 가로 길이, 세로 길이, 높이는 각각 3, 4, 5 또는 5, 4, 3이므로 구하는 겉넓이는

$$2(3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 3) = 94$$

- 21 (가)에서 직각삼각형의 세 변의 길이를 각각 $a-d$, a , $a+d$ ($a>d>0$)라 하면 빗변의 길이가 $a+d$ 이므로
 $(a+d)^2 = a^2 + (a-d)^2$
 $a(a-4d)=0$
 $\therefore a=4d$ ($\because a \neq 0$) ㉠
 (나)에서 $a+d=15$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $a=12$, $d=3$
 따라서 직각삼각형의 세 변의 길이는 9, 12, 15이므로 구하는 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 9 \times 12 = 54$

- 22 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$ 라 하면 네 수의 합이 20이므로
 $(a-3d) + (a-d) + (a+d) + (a+3d) = 20$
 $4a = 20 \quad \therefore a = 5$
 또 네 수의 제곱의 합이 120이므로
 $(5-3d)^2 + (5-d)^2 + (5+d)^2 + (5+3d)^2 = 120$
 $100 + 20d^2 = 120$, $d^2 = 1$
 $\therefore d = \pm 1$
 따라서 네 수는 2, 4, 6, 8이므로 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차는
 $8 - 2 = 6$

- 23 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_2=5$, $a_6=17$ 이므로
 $a+d=5$, $a+5d=17$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a=2$, $d=3$
 따라서 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은
 $\frac{20\{2 \times 2 + (20-1) \times 3\}}{2} = 610$

- 24 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_1+2a_{11}=49$ 에서 $a+2(a+10d)=49$
 $3a+20d=49$ ㉠
 $2a_1-a_{11}=-17$ 에서 $2a-(a+10d)=-17$
 $a-10d=-17$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $a=3$, $d=2$
 따라서 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제11항까지의 합은
 $\frac{11\{2 \times 3 + (11-1) \times 2\}}{2} = 143$

다른 풀이

$$a_1+2a_{11}=49, 2a_1-a_{11}=-17$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a_1=3, a_{11}=23$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제11항까지의 합은

$$\frac{11(3+23)}{2} = 143$$

- 25 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차를 각각 d_1 , d_2 라 하면
 $a_1+b_1=2$, $d_1+d_2=4$
 $\therefore (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}) + (b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10})$
 $= \frac{10(2a_1+9d_1)}{2} + \frac{10(2b_1+9d_2)}{2}$
 $= 10a_1+45d_1+10b_1+45d_2$
 $= 10(a_1+b_1)+45(d_1+d_2)$
 $= 10 \times 2 + 45 \times 4 = 200$

- 26 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $S_3=6$, $S_6=3$ 이므로
 $\frac{3\{2a+(3-1)d\}}{2} = 6$
 $\therefore a+d=2$ ㉠
 $\frac{6\{2a+(6-1)d\}}{2} = 3$
 $\therefore 2a+5d=1$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $a=3$, $d=-1$
 $\therefore S_9 = \frac{9\{2 \times 3 + (9-1) \times (-1)\}}{2} = -9$

- 27 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 (가)에서 $S_{20}=90$ 이므로
 $\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2} = 90$
 $\therefore 2a+19d=9$ ㉠
 (나)에서 $S_{40}-S_{20}=490$ 이므로
 $\frac{40\{2a+(40-1)d\}}{2} - 90 = 490$
 $\therefore 2a+39d=29$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $a=-5$, $d=1$
 $\therefore a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{30}$
 $= S_{30}-S_{10}$
 $= \frac{30\{2 \times (-5) + (30-1) \times 1\}}{2}$
 $\quad - \frac{10\{2 \times (-5) + (10-1) \times 1\}}{2}$
 $= 285 - (-5) = 290$

28 (가), (나)에서

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) = 26 + 158$$

$$(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + (a_4 + a_{n-3}) = 184$$

이때 $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3}$ 이므로

$$(a_1 + a_n) \times 4 = 184 \quad \therefore a_1 + a_n = 46 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

(다)에서 $\frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 345$

⑦을 대입하면

$$\frac{n \times 46}{2} = 345 \quad \therefore n = 15$$

29 첫째항이 17, 공차가 -2이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 17 + (n-1) \times (-2) = -2n + 19$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면 $a_n < 0$ 에서

$$-2n + 19 < 0, 2n > 19$$

$$\therefore n > 9.5$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제10항부터 음수이므로 첫째항부터 제9항까지의 합이 최대이다.

따라서 구하는 최댓값은

$$S_9 = \frac{9\{2 \times 17 + (9-1) \times (-2)\}}{2} = 81$$

다른 풀이

$$S_n = \frac{n\{2 \times 17 + (n-1) \times (-2)\}}{2}$$

$$= -n^2 + 18n = -(n-9)^2 + 81$$

따라서 구하는 최댓값은 $n=9$ 일 때 81이다.

30 공차를 d 라 하면 $a_1 = -45$, $a_{10} = -27$ 이므로

$$-45 + 9d = -27 \quad \therefore d = 2$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = -45 + (n-1) \times 2 = 2n - 47$$

이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면 $a_n > 0$ 에서

$$2n - 47 > 0, 2n > 47 \quad \therefore n > 23.5$$

즉, 제24항부터 양수이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제23항까지의 합이 최소이다.

$$\therefore k = 23$$

$$\therefore m = S_{23} = \frac{23\{2 \times (-45) + (23-1) \times 2\}}{2} = -529$$

$$\therefore k - m = 23 - (-529) = 552$$

다른 풀이

공차를 d 라 하면 $a_1 = -45$, $a_{10} = -27$ 이므로

$$-45 + 9d = -27 \quad \therefore d = 2$$

첫째항이 -45, 공차가 2이므로

$$S_k = \frac{k\{2 \times (-45) + (k-1) \times 2\}}{2}$$

$$= k^2 - 46k = (k-23)^2 - 529$$

따라서 $k=23$, $m=-529$ 이므로

$$k - m = 23 - (-529) = 552$$

31 S_n 이 최댓값을 가지므로 주어진 등차수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 음수이고 주어진 조건에서 S_{16} 의 값이 최대이므로 제16항까지는 양수이고, 제17항부터 음수이다.

공차를 d ($d < 0$)라 하면 첫째항이 47이므로 등차수열

$\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = 47 + (n-1)d$$

이때 $a_{16} > 0$, $a_{17} < 0$ 이므로

$$47 + 15d > 0 \quad \therefore d > -3.1\cdots$$

$$47 + 16d < 0 \quad \therefore d < -2.9375$$

따라서 $-3.1\cdots < d < -2.9375$ 를 만족시키는 정수 d 는

$$d = -3$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 공차는 -3이다.

32 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_1 a_8 = a_6 a_7 \text{에서}$$

$$a(a+7d) = (a+5d)(a+6d)$$

$$30d^2 + 4ad = 0, 2d(15d + 2a) = 0$$

$$\therefore d = -\frac{2}{15}a \quad (\because d \neq 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{21} = 25 \text{이므로 } a + 20d = 25$$

①을 대입하면

$$a + 20 \times \left(-\frac{2}{15}a\right) = 25, -\frac{5}{3}a = 25$$

$$\therefore a = -15$$

이를 ①에 대입하면 $d = 2$

$$\therefore S_n = \frac{n\{2 \times (-15) + (n-1) \times 2\}}{2}$$

$$= n^2 - 16n = (n-8)^2 - 64$$

따라서 구하는 최솟값은 -64이다.

33 두 자리의 자연수 중에서 7로 나누었을 때의 나머지가 5인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$12, 19, 26, \cdots, 96$$

이는 첫째항이 12, 공차가 7인 등차수열이므로 제 n 항을 96이라 하면

$$12 + (n-1) \times 7 = 96$$

$$7(n-1) = 84 \quad \therefore n = 13$$

따라서 구하는 합은 첫째항이 12, 제13항이 96인 등차수열의 첫째항부터 제13항까지의 합이므로

$$\frac{13(12+96)}{2} = 702$$

- 34** 100 이상 300 이하의 자연수 중에서 3으로 나누어떨어지고 5로도 나누어떨어지는 수는 3과 5의 최소공배수인 15로 나누어떨어지는 수이다. 이 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$105, 120, 135, \dots, 300$$

이는 첫째항이 105, 공차가 15인 등차수열이므로 제 n 항을 300이라 하면

$$105 + (n-1) \times 15 = 300$$

$$15(n-1) = 195 \quad \therefore n = 14$$

따라서 구하는 합은 첫째항이 105, 제14항이 300인 등차수열의 첫째항부터 제14항까지의 합이므로

$$\frac{14(105+300)}{2} = 2835$$

- 35** 50 이상 100 이하의 자연수 중에서 3의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$51, 54, 57, \dots, 99$$

이는 첫째항이 51이고 공차가 3인 등차수열이므로 제 n 항을 99라 하면

$$51 + (n-1) \times 3 = 99$$

$$3(n-1) = 48 \quad \therefore n = 17$$

따라서 3의 배수의 합은 첫째항이 51, 제17항이 99인 등차수열의 첫째항부터 제17항까지의 합과 같으므로

$$\frac{17(51+99)}{2} = 1275$$

50 이상 100 이하의 자연수 중에서 7의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$56, 63, 70, \dots, 98$$

이는 첫째항이 56이고 공차가 7인 등차수열이므로 제 n 항을 98이라 하면

$$56 + (n-1) \times 7 = 98$$

$$7(n-1) = 42 \quad \therefore n = 7$$

따라서 7의 배수의 합은 첫째항이 56, 제7항이 98인 등차수열의 첫째항부터 제7항까지의 합과 같으므로

$$\frac{7(56+98)}{2} = 539$$

이때 50 이상 100 이하의 자연수 중에서 3과 7의 공배수인 21의 배수는 63과 84이므로 그 합은

$$63 + 84 = 147$$

따라서 구하는 합은

$$1275 + 539 - 147 = 1667$$

- 36** 3으로 나누어떨어지는 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$3, 6, \textcircled{9}, 12, 15, 18, \textcircled{21}, 24, 27, 30, \textcircled{33}, \dots$$

4로 나누었을 때의 나머지가 1인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$1, 5, \textcircled{9}, 13, 17, \textcircled{21}, 25, 29, \textcircled{33}, \dots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 9, 21, 33, ...이므로 첫째항이 9, 공차가 12인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{10\{2 \times 9 + (10-1) \times 12\}}{2} = 630$$

- 37** $S_n = 3n^2 - 5n + 7$ 에서

$$a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 - 5 \times 1 + 7 = 5$$

$$a_{10} = S_{10} - S_9$$

$$= (3 \times 10^2 - 5 \times 10 + 7) - (3 \times 9^2 - 5 \times 9 + 7)$$

$$= 257 - 205$$

$$= 52$$

$$\therefore a_1 + a_{10} = 5 + 52 = 57$$

- 38** 나머지정리에 의하여

$$S_n = (-n)^2 + 2(-n) = n^2 - 2n$$

$$a_3 = S_3 - S_2$$

$$= (3^2 - 2 \times 3) - (2^2 - 2 \times 2) = 3$$

$$a_7 = S_7 - S_6$$

$$= (7^2 - 2 \times 7) - (6^2 - 2 \times 6) = 11$$

$$\therefore a_3 + a_7 = 3 + 11 = 14$$

- 39** $S_n = n^2 - 12n$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n^2 - 12n - \{(n-1)^2 - 12(n-1)\}$$

$$= 2n - 13 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 12 \times 1 = -11 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 2n - 13$

$$a_n < 0 \text{에서 } 2n - 13 < 0, 2n < 13$$

$$\therefore n < 6.5$$

따라서 $a_n < 0$ 을 만족시키는 자연수 n 은 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

- 40** 수열 $\{S_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 S_1 , 공차가 -3 인 등차수열이므로

$$S_{2n-1} = S_1 + (n-1) \times (-3)$$

$$= S_1 - 3n + 3$$

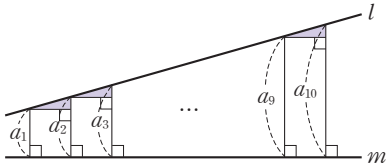
또 수열 $\{S_{2n}\}$ 은 첫째항이 S_2 , 공차가 2 인 등차수열이므로

$$S_{2n} = S_2 + (n-1) \times 2 = S_2 + 2n - 2$$

$$\begin{aligned}
 \therefore a_8 &= S_8 - S_7 \\
 &= (S_2 + 2 \times 4 - 2) - (S_1 - 3 \times 4 + 3) \\
 &= S_2 - S_1 + 15 \\
 &= a_2 + 15 \quad (\because S_2 - S_1 = a_2) \\
 &= 1 + 15 \quad (\because a_2 = 1) \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

- 41 다음 그림에서 색칠한 삼각형은 한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 같으므로 모두 합동이다.

$$\therefore a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_{10} - a_9$$



따라서 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = \frac{10(5+10)}{2} = 75$$

- 42 n 각형의 내각의 크기의 합은

$$180^\circ(n-2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

첫째항이 95° , 공차가 10° 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\frac{n\{2 \times 95^\circ + (n-1) \times 10^\circ\}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$180^\circ(n-2) = \frac{n\{2 \times 95^\circ + (n-1) \times 10^\circ\}}{2}$$

$$n^2 - 18n + 72 = 0, (n-6)(n-12) = 0$$

$$\therefore n=6 \text{ 또는 } n=12$$

이때 $n=12$ 이면 가장 큰 내각의 크기가

$$95^\circ + 11 \times 10^\circ = 205^\circ \text{이므로 } n=6$$

- 43 선분 13개를 각각 연장한 직선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 왼쪽부터 차례대로 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{13}$ 이라 하면

$$l_n = (x_n^2 + ax_n + b) - x_n^2 = ax_n + b \quad (n=1, 2, 3, \dots, 13)$$

이때 수열 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{13}$ 이 등차수열이므로

$$x_{n+1} - x_n = d \text{라 하면}$$

$$l_{n+1} - l_n = a(x_{n+1} - x_n) = ad$$

따라서 수열 $l_1, l_2, l_3, \dots, l_{13}$ 은 등차수열이므로

$$l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{13} = \frac{13(3+19)}{2} = 143$$

02 등비수열

70~74쪽

1 5	2 36	3 ②	4 14	5 ③
6 ④	7 8	8 ①	9 ③	10 7
11 1125	12 ④	13 ④	14 $-\frac{9}{2}$	15 12
16 ④	17 ④	18 33분	19 7번째	20 $\frac{3}{1024}$
21 ②	22 1023	23 9207	24 257	25 ④
26 ③	27 ⑤	28 ③	29 ①	30 5460
31 8	32 1875000원	33 2222000원		
34 ①				

- 1 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_k = \frac{1}{32} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{32}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{16}, \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^4$$

$$k-1=4 \quad \therefore k=5$$

- 2 모든 항이 양수이므로 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비는 양수이다. 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_{16}}{a_{14}} + \frac{a_8}{a_7} = 12 \text{에서 } \frac{ar^{15}}{ar^{13}} + \frac{ar^7}{ar^6} = 12$$

$$r^2 + r = 12, r^2 + r - 12 = 0$$

$$(r+4)(r-3) = 0 \quad \therefore r=3 \quad (\because r>0)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_6}{a_3} &= \frac{a \times 3^2}{a} + \frac{a \times 3^5}{a \times 3^2} \\
 &= 3^2 + 3^3 = 9 + 27 = 36
 \end{aligned}$$

- 3 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3 \text{에서}$$

$$a + ar + ar^2 = 3$$

$$a(1+r+r^2) = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_4 + a_5 + a_6 = -24 \text{에서}$$

$$ar^3 + ar^4 + ar^5 = -24$$

$$ar^3(1+r+r^2) = -24 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$3r^3 = -24, r^3 = -8 \quad \therefore r = -2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a\{1+(-2)+(-2)^2\} = 3$$

$$3a = 3 \quad \therefore a = 1$$

$$\begin{aligned}
 \therefore a_7 + a_8 + a_9 &= 1 \times (-2)^6 + 1 \times (-2)^7 + 1 \times (-2)^8 \\
 &= 192
 \end{aligned}$$

다른 풀이

㉠을 ㉡에 대입하면

$$3r^3 = -24, r^3 = -8$$

$$\begin{aligned} \therefore a_7 + a_8 + a_9 &= ar^6 + ar^7 + ar^8 \\ &= ar^6(1+r+r^2) \\ &= 3r^6 \quad (\because \text{㉠}) \\ &= 3 \times (-8)^2 \\ &= 192 \end{aligned}$$

4 첫째항을 a 라 하면

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 \text{에서 } ar = 1 \quad \dots\dots \text{㉠} \\ \log_r(a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_7) \\ &= \log_r(a \times ar \times ar^2 \times \dots \times ar^6) \\ &= \log_r(a^7 \times r^{1+2+3+\dots+6}) \\ &= \log_r(a^7 \times r^{21}) \\ &= \log_r\{(ar)^7 \times r^{14}\} = \log_r r^{14} \quad (\because \text{㉠}) \\ &= 14 \end{aligned}$$

5 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_2=6$, $a_5=48$ 이므로

$$ar = 6 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$ar^4 = 48 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉡ $\div$ ㉠을 하면

$$\frac{ar^4}{ar} = \frac{48}{6}, r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$$

이를 ㉠에 대입하면 $2a = 6 \quad \therefore a = 3$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

$$600 < a_n < 1200 \text{에서}$$

$$600 < 3 \times 2^{n-1} < 1200 \quad \therefore 200 < 2^{n-1} < 400$$

그런데 n 은 자연수이고 $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$ 이므로

$$n-1=8 \quad \therefore n=9$$

6 공비를 r 라 하면 첫째항이 4, 제5항이 $\frac{1}{4}$ 이므로

$$4r^4 = \frac{1}{4}, r^4 = \frac{1}{16}$$

$$\therefore r = \frac{1}{2} \quad (\because r > 0)$$

주어진 등비수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

이때 제 n 항에서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작아진다고 하면

$$a_n < \frac{1}{1000} \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} < \frac{1}{1000}$$

그런데 n 은 자연수이고 $\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$ 이므로

$$n-3 \geq 10 \quad \therefore n \geq 13$$

따라서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작아지는 항은 제13항이다.

7 첫째항이 2, 공비가 $\sqrt{3}$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 \times (\sqrt{3})^{n-1}$$

$$\therefore a_n^2 = 4 \times 3^{n-1}$$

$$a_n^2 > 4000 \text{에서 } 4 \times 3^{n-1} > 4000$$

$$3^{n-1} > 1000$$

그런데 n 은 자연수이고

$$3^6 = 729, 3^7 = 2187 \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 7 \quad \therefore n \geq 8$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

8 공비를 r 라 하면 첫째항이 4, 제6항이 128이므로

$$4r^5 = 128, r^5 = 32$$

$$\therefore r = 2$$

따라서 $x_1 = 4 \times 2 = 8$, $x_2 = 4 \times 2^2 = 16$, $x_3 = 4 \times 2^3 = 32$,

$$x_4 = 4 \times 2^4 = 64 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 8 + 16 + 32 + 64 \\ &= 120 \end{aligned}$$

9 공비를 r ($r > 0$)라 하면 첫째항이 3, 제13항이 48이므로

$$3r^{12} = 48, r^{12} = 16$$

$$\therefore r^3 = 2 \quad (\because r > 0)$$

$$\therefore \frac{x_{10}}{x_7} = \frac{3r^{10}}{3r^7} = r^3 = 2$$

10 첫째항이 $\frac{64}{81}$, 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열의 제 $(m+2)$ 항이

$$\frac{81}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{64}{81} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{m+1} = \frac{81}{4}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{m+1} = \frac{81^2}{64 \times 4} = \left(\frac{3}{2}\right)^8$$

따라서 $m+1=8$ 이므로

$$m=7$$

11 $3^4 \times 5^6$ 은 a^n 과 b^n 의 등비중항이므로

$$(3^4 \times 5^6)^2 = a^n \times b^n$$

$$3^8 \times 5^{12} = (ab)^n \quad \therefore (ab)^n = (3^2 \times 5^3)^4$$

자연수 n 이 최대일 때, ab 의 값이 최소이므로

$$n=4 \text{일 때, } ab \text{의 최솟값은}$$

$$3^2 \times 5^3 = 1125$$

- 12 b 는 a 와 c 의 등비중항이므로 $b^2=ac$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_c b} &= \log_b a + \log_b c \\ &= \log_b ac = \log_b b^2 = 2\end{aligned}$$

- 13 a_5 는 a_2 와 a_{14} 의 등비중항이므로

$$a_5^2 = a_2 a_{14}$$

이때 a_2, a_5, a_{14} 는 등차수열 $\{a_n\}$ 의 세 항이므로 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$\begin{aligned}(a+4d)^2 &= (a+d)(a+13d) \\ a^2+8ad+16d^2 &= a^2+14ad+13d^2 \\ 3d^2-6ad &= 0, \quad 3d(d-2a)=0\end{aligned}$$

이때 $d \neq 0$ 이므로 $d=2a$ ㉠

$$\begin{aligned}\therefore \frac{a_{23}}{a_3} &= \frac{a+22d}{a+2d} = \frac{45a}{5a} \quad (\because \text{㉠}) \\ &= 9\end{aligned}$$

- 14 (가)에서 b 는 a 와 c 의 등차중항이므로

$$b = \frac{a+c}{2} \quad \therefore 2b = a+c \quad \dots\dots \text{㉠}$$

(나)에서 a 는 c 와 b 의 등비중항이므로

$$a^2 = bc \quad \dots\dots \text{㉡}$$

(다)에서 $abc=27$ 이므로 이 식에 ㉡을 대입하면

$$a^3 = 27 \quad \therefore a = 3$$

이를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$$2b = 3+c, \quad bc = 9$$

두 식을 연립하여 풀면

$$b = -\frac{3}{2}, \quad c = -6 \quad (\because a > b > c)$$

$$\therefore a+b+c = 3 + \left(-\frac{3}{2}\right) + (-6) = -\frac{9}{2}$$

- 15 세 수를 a, ar, ar^2 이라 하면

$$a+ar+ar^2=21 \text{에서}$$

$$a(1+r+r^2)=21 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a \times ar \times ar^2 = 216 \text{에서}$$

$$(ar)^3 = 216 \quad \therefore ar = 6 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉡에서 $a = \frac{6}{r}$ 을 ㉠에 대입하면

$$\frac{6}{r}(1+r+r^2) = 21, \quad 2r^2 - 5r + 2 = 0$$

$$(2r-1)(r-2) = 0$$

$$\therefore r = \frac{1}{2} \text{ 또는 } r = 2$$

이를 ㉡에 대입하여 풀면

$$r = \frac{1}{2} \text{일 때 } a = 12, \quad r = 2 \text{일 때 } a = 3$$

따라서 세 수는 3, 6, 12이므로 가장 큰 수는 12이다.

- 16 세 실근을 a, ar, ar^2 이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+ar+ar^2=p$$

$$\therefore a(1+r+r^2)=p \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + a \times ar^2 = -84$$

$$\therefore a^2 r(1+r+r^2) = -84 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$a \times ar \times ar^2 = -216$$

$$(ar)^3 = -216 \quad \therefore ar = -6$$

이를 ㉡에 대입하면

$$-6a(1+r+r^2) = -84 \quad \therefore a(1+r+r^2) = 14$$

이를 ㉠에 대입하면 $p=14$

- 17 가로, 세로, 높이를 각각 a, ar, ar^2 이라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 76이므로

$$4(a+ar+ar^2)=76$$

$$\therefore a(1+r+r^2)=19 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또 겹넓이가 228이므로

$$2(a \times ar + ar \times ar^2 + a \times ar^2) = 228$$

$$\therefore a^2 r(1+r+r^2) = 114 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉡÷㉠을 하면

$$\frac{a^2 r(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)} = \frac{114}{19} \quad \therefore ar = 6$$

따라서 직육면체의 부피는

$$a \times ar \times ar^2 = (ar)^3 = 6^3 = 216$$

- 18 일정하게 증가하는 비율을 $r(r>0)$ 라 하면

$$50 \times (1+r)^{10} = 70$$

$$\therefore (1+r)^{10} = 1.4 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

n 분 후의 세균의 수가 처음 세균의 수의 3배가 된다고 하면

$$50 \times (1+r)^n = 150, \quad (1+r)^n = 3$$

이때 $1.4^{3.3} = 3$ 이므로

$$(1+r)^n = 1.4^{3.3}$$

이 식에 ㉠을 대입하면

$$(1+r)^n = \{(1+r)^{10}\}^{3.3} = (1+r)^{33}$$

$$\therefore n = 33$$

따라서 세균의 수가 3배가 되는 것은 33분 후이다.

- 19 첫 번째 시행 후 남은 조각의 수는 3

두 번째 시행 후 남은 조각의 수는 $3 \times 3 = 3^2$

세 번째 시행 후 남은 조각의 수는 $3^2 \times 3 = 3^3$

⋮

n 번째 시행 후 남은 조각의 수는 3^n

따라서 남은 조각의 수가 1000개를 넘는 것은
 $3^n > 1000$
 이때 $3^6 = 729$, $3^7 = 2187$ 이므로 $n \geq 7$
 따라서 남은 조각의 수가 처음으로 1000개를 넘는 것은
 7번째 시행 후이다.

20 삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 한 변의 길이는 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$l_1 = 3 \times \frac{1}{2}$$

삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 한 변의 길이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 이므로

$$l_2 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

삼각형 $A_3B_3C_3$ 의 한 변의 길이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ 이므로

$$l_3 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

⋮

삼각형 $A_nB_nC_n$ 의 한 변의 길이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이므로

$$l_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore l_{10} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{3}{1024}$$

21 $S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} = 3(2^n - 1)$

$S_k = 189$ 에서

$$3(2^k - 1) = 189, \quad 2^k - 1 = 63$$

$$2^k = 64 \quad \therefore k = 6$$

22 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_4 = 9 \text{에서}$$

$$a + ar^3 = 9$$

$$\therefore a(1 + r^3) = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $a_4 + a_7 = 72$ 에서

$$ar^3 + ar^6 = 72$$

$$\therefore ar^3(1 + r^3) = 72 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$\frac{ar^3(1+r^3)}{a(1+r^3)} = \frac{72}{9}$$

$$r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$9a = 9 \quad \therefore a = 1$$

따라서 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{1 \times (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 1023$$

23 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_3 = 6$, $a_7 = 24$ 이므로

$$ar^2 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^6 = 24 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$\frac{ar^6}{ar^2} = \frac{24}{6}, \quad r^4 = 4$$

$$\therefore r = \sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2a = 6 \quad \therefore a = 3$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 \times (\sqrt{2})^{n-1} \quad \therefore a_n^2 = 9 \times 2^{n-1}$$

즉, 수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이 9, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2 = \frac{9(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 9207$$

24 (i) $x \neq 1$ 일 때,

$$f(x) = (1 + x^4 + x^8 + x^{12})(1 + x + x^2 + x^3)$$

$$= \frac{(x^4)^4 - 1}{x^4 - 1} \times \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{x^{16} - 1}{x - 1}$$

(ii) $x = 1$ 일 때, $f(1) = 4 \times 4 = 16$

(i), (ii)에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{f(2)}{\{f(1) - 1\}\{f(1) + 1\}} &= \frac{\frac{2^{16} - 1}{2 - 1}}{(16 - 1)(16 + 1)} \\ &= \frac{(2^8 - 1)(2^8 + 1)}{(2^4 - 1)(2^4 + 1)} \\ &= \frac{(2^8 - 1)(2^8 + 1)}{2^8 - 1} \\ &= 2^8 + 1 = 257 \end{aligned}$$

25 첫째항을 a 라 하면 $S_5 = 22$ 이므로

$$\frac{a\{1 - (-2)^5\}}{1 - (-2)} = 22$$

$$11a = 22 \quad \therefore a = 2$$

따라서 구하는 합은

$$\begin{aligned} S_{11} - S_5 &= \frac{2\{1 - (-2)^{11}\}}{1 - (-2)} - 22 \\ &= 1366 - 22 = 1344 \end{aligned}$$

26 첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$)라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 7 \text{에서}$$

$$\frac{a(1 - r^{10})}{1 - r} = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{20} = 21 \text{에서}$$

$$a_{11} = ar^{10} \text{이므로 } \frac{ar^{10}(1 - r^{10})}{1 - r} = 21 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $7r^{10} = 21$

$$\therefore r^{10} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{30} &= \frac{a(1-r^{30})}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^{10})(1+r^{10}+r^{20})}{1-r} \\ &= 7(1+3+3^2) \quad (\because \textcircled{A}, \textcircled{B}) \\ &= 91\end{aligned}$$

- 27** 항의 개수가 짝수이므로 항의 개수를 $2n$ 이라 하고 첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$)라 하면 홀수 번째의 항의 합은

$$\begin{aligned}a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{2n-2} &= \frac{a(1-r^{2n})}{1-r^2} \\ &= 119 \quad \cdots \textcircled{A}\end{aligned}$$

또 짝수 번째의 항의 합은

$$\begin{aligned}ar + ar^3 + ar^5 + \cdots + ar^{2n-1} &= \frac{ar(1-r^{2n})}{1-r^2} \\ &= 119r \quad (\because \textcircled{A}) \\ &= 357\end{aligned}$$

$$\therefore r=3$$

- 28** $S_n = 3^n - 1$ 에서

$$\begin{aligned}a_1 &= S_1 = 3^1 - 1 = 2 \\ a_3 &= S_3 - S_2 = (3^3 - 1) - (3^2 - 1) = 18 \\ a_5 &= S_5 - S_4 = (3^5 - 1) - (3^4 - 1) = 162 \\ \therefore a_1 + a_3 + a_5 &= 2 + 18 + 162 = 182\end{aligned}$$

- 29** $S_n = 2 \times 3^{n+1} + 2k$ 에서

$$\begin{aligned}\text{(i) } n \geq 2 \text{ 일 때,} \\ a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2 \times 3^{n+1} + 2k - (2 \times 3^n + 2k) \\ &= 2 \times 3^n \times (3 - 1) \\ &= 4 \times 3^n \quad \cdots \textcircled{A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(ii) } n=1 \text{ 일 때,} \\ a_1 &= S_1 = 2 \times 3^2 + 2k = 18 + 2k \quad \cdots \textcircled{B}\end{aligned}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{A}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값이 $\textcircled{B}$ 과 같아야 하므로
 $4 \times 3 = 18 + 2k$, $12 = 18 + 2k$
 $\therefore k = -3$

- 30** $\log_2 S_n = n + 1$ 에서 $S_n = 2^{n+1}$

$$\begin{aligned}n \geq 2 \text{ 일 때,} \\ a_n &= S_n - S_{n-1} = 2^{n+1} - 2^n = 2^n \\ \therefore a_{2n} &= 2^{2n} = 4^n \quad (n \geq 1)\end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 4, 공비가 4인 등비수열이므로

$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{12} = \frac{4(4^6 - 1)}{4 - 1} = 5460$$

- 31** $S_n = a^{n+1} + b$ 에서

$$\begin{aligned}\text{(i) } n \geq 2 \text{ 일 때,} \\ a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= a^{n+1} + b - (a^n + b) \\ &= (a-1)a^n \quad \cdots \textcircled{A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(ii) } n=1 \text{ 일 때,} \\ a_1 &= S_1 = a^2 + b \quad \cdots \textcircled{B}\end{aligned}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이므로 $a=2$

또 $\textcircled{B}$ 은 $\textcircled{A}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같아야 하므로 $(a-1)a = a^2 + b$

$$\begin{aligned}a &= 2 \text{ 이므로} \\ (2-1) \times 2 &= 2^2 + b \quad \therefore b = -2 \\ \therefore a^2 + b^2 &= 2^2 + (-2)^2 = 8\end{aligned}$$

- 32** 구하는 원리합계는

$$\begin{aligned}&5 + 5(1+0.004) + 5(1+0.004)^2 + \cdots + 5(1+0.004)^{35} \\ &= \frac{5\{(1+0.004)^{36} - 1\}}{(1+0.004) - 1} \\ &= \frac{5(1.15 - 1)}{0.004} \\ &= 187.5 \text{ (만 원)}\end{aligned}$$

따라서 3년 말의 적립금의 원리합계는 1875000원이다.

- 33** 구하는 원리합계는

$$\begin{aligned}&10(1+0.01) + 10(1+0.01)^2 + \cdots + 10(1+0.01)^{20} \\ &= \frac{10(1+0.01)\{(1+0.01)^{20} - 1\}}{(1+0.01) - 1} \\ &= \frac{10.1(1.22 - 1)}{0.01} \\ &= 222.2 \text{ (만 원)}\end{aligned}$$

따라서 20년 말의 적립금의 원리합계는 2222000원이다.

- 34** 매년 초에 적립하는 금액을 a 만 원이라 하면 10년 말의 원리합계는

$$\begin{aligned}&a(1+0.05) + a(1+0.05)^2 + a(1+0.05)^3 \\ &\quad + \cdots + a(1+0.05)^{10} \\ &= \frac{a(1+0.05)\{(1+0.05)^{10} - 1\}}{(1+0.05) - 1} \\ &= \frac{a \times 1.05 \times (1.6 - 1)}{0.05} \\ &= 12.6a \text{ (만 원)}\end{aligned}$$

이때 $12.6a = 1260$ 이어야 하므로 $a = 100$

따라서 매년 초에 100만 원씩 적립해야 한다.

III-2. 수열의 합과 수학적 귀납법

01 수열의 합

76~80쪽

1 ③	2 19	3 ②	4 4	5 1097
6 95	7 9	8 ⑤	9 10	10 429
11 105	12 ①	13 ④	14 3765	15 111
16 ②	17 415	18 ③	19 ④	20 ②
21 300	22 ④	23 ①	24 1524	25 ①
26 ④	27 20	28 74	29 4	30 $9\sqrt{2}$
31 24	32 ⑤	33 155	34 ②	35 16

$$\begin{aligned}
 1. & \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} a_{k+10} \\
 &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) + (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{20}) \\
 &= \sum_{k=1}^{20} a_k \\
 2. & \sum_{k=1}^9 a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1} \\
 &= (a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_9) \\
 &= a_{10} - a_1 \\
 3. & \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{10} a_{2k} \\
 &= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{19}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{20}) \\
 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{19} + a_{20} \\
 &= \sum_{k=1}^{20} a_k \\
 4. & \sum_{k=1}^{20} a_k - \sum_{k=1}^{19} a_{k+1} \\
 &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) - (a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}) \\
 &= a_1
 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

$$\begin{aligned}
 2. & \sum_{k=1}^{19} ka_{k+1} = 247 \text{에서} \\
 & a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \cdots + 19a_{20} = 247 \quad \cdots \text{㉑} \\
 & \sum_{k=1}^{20} (k+1)a_k = 285 \text{에서} \\
 & 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + \cdots + 21a_{20} = 285 \quad \cdots \text{㉒} \\
 & \text{㉑} - \text{㉒} \text{을 하면 } 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + \cdots + 2a_{20} = 38 \\
 & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20} = 19 \\
 & \therefore \sum_{k=1}^{20} a_k = 19
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. & \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \\
 &= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) \\
 &= a_1 - a_{n+1} = -n^2 + n
 \end{aligned}$$

이때 $a_1 = 1$ 이므로

$$1 - a_{n+1} = -n^2 + n$$

따라서 $a_{n+1} = n^2 - n + 1$ 이므로

$$a_{11} = 10^2 - 10 + 1 = 91$$

$$\begin{aligned}
 4. & \sum_{k=1}^5 (a_k + 2)(a_k - 1) = \sum_{k=1}^5 (a_k^2 + a_k - 2) \\
 &= \sum_{k=1}^5 a_k^2 + \sum_{k=1}^5 a_k - \sum_{k=1}^5 2 \\
 &= 10 + 4 - 10 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. & \sum_{k=1}^6 (a_k + 3^k) = \sum_{k=1}^6 a_k + \sum_{k=1}^6 3^k \\
 &= 5 + \frac{3(3^6 - 1)}{3 - 1} = 1097
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. & \sum_{k=11}^{15} a_k = \sum_{k=1}^{15} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_k \\
 &= (-4) \times 15 - (-4) \times 10 = -20 \\
 & \sum_{k=11}^{15} b_k = \sum_{k=1}^{15} b_k - \sum_{k=1}^{10} b_k \\
 &= (15^2 + 2 \times 15) - (10^2 + 2 \times 10) = 135 \\
 \therefore & \sum_{k=11}^{15} (2a_k + b_k) = 2 \sum_{k=11}^{15} a_k + \sum_{k=11}^{15} b_k \\
 &= 2 \times (-20) + 135 \\
 &= 95
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. & \sum_{k=1}^{10} a_k = \alpha, \sum_{k=1}^{10} b_k = \beta \text{라 하면} \\
 & \sum_{k=1}^{10} (3a_k - 2b_k + 1) = 7 \text{에서} \\
 & 3 \sum_{k=1}^{10} a_k - 2 \sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=1}^{10} 1 = 7 \\
 & 3\alpha - 2\beta + 10 = 7 \\
 \therefore & 3\alpha - 2\beta = -3 \quad \cdots \text{㉑} \\
 & \text{또 } \sum_{k=1}^{10} (a_k + 3b_k) = 21 \text{에서} \\
 & \sum_{k=1}^{10} a_k + 3 \sum_{k=1}^{10} b_k = 21 \\
 \therefore & \alpha + 3\beta = 21 \quad \cdots \text{㉒} \\
 & \text{㉑, ㉒을 연립하여 풀면 } \alpha = 3, \beta = 6 \\
 \therefore & \sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k \\
 &= \alpha + \beta = 3 + 6 = 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. & \sum_{k=1}^{10} k^2(k+1) - \sum_{k=1}^{10} k(k-1) \\
 &= \sum_{k=1}^{10} \{(k^3 + k^2) - (k^2 - k)\} = \sum_{k=1}^{10} (k^3 + k) \\
 &= \left(\frac{10 \times 11}{2}\right)^2 + \frac{10 \times 11}{2} = 3080
 \end{aligned}$$

- 9 $\sum_{k=1}^n (4k-3) = 4 \times \frac{n(n+1)}{2} - 3n = 2n^2 - n$
 이때 $2n^2 - n = 190$ 에서
 $2n^2 - n - 190 = 0, (2n+19)(n-10) = 0$
 그런데 n 은 자연수이므로 $n = 10$

- 10 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{11} (\alpha - k)(\beta - k)$$

$$= \sum_{k=1}^{11} \{\alpha\beta - (\alpha + \beta)k + k^2\}$$

$$= \sum_{k=1}^{11} (k^2 - k - 1)$$

$$= \frac{11 \times 12 \times 23}{6} - \frac{11 \times 12}{2} - 11$$

$$= 506 - 66 - 11 = 429$$

- 11 $\sum_{k=1}^5 2^{k-1} < \sum_{k=1}^n (2k-1) < \sum_{k=1}^5 (2 \times 3^{k-1})$ 에서

$$\sum_{k=1}^5 2^{k-1} = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 31,$$

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2,$$

$$\sum_{k=1}^5 (2 \times 3^{k-1}) = \frac{2(3^5 - 1)}{3 - 1} = 242$$

$$\text{이므로 } 31 < n^2 < 242$$

이때 $5^2 = 25, 6^2 = 36, 15^2 = 225, 16^2 = 256$ 이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 n 의 값은 6, 7, 8, ..., 15이다.

따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$6 + 7 + 8 + \dots + 15 = 105$$

- 12 $\sum_{k=1}^{10} (k+p)(k-2p)$

$$= \sum_{k=1}^{10} (k^2 - pk - 2p^2)$$

$$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - p \times \frac{10 \times 11}{2} - 2p^2 \times 10$$

$$= -20p^2 - 55p + 385$$

$$\text{즉, } -20p^2 - 55p + 385 = 370 \text{이므로}$$

$$4p^2 + 11p - 3 = 0, (4p-1)(p+3) = 0$$

$$\therefore p = \frac{1}{4} (\because p > 0)$$

- 13 $S^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 8^2) + (2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 8^2)$

$$+ (3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 8^2) + \dots + (7^2 + 8^2) + 8^2$$

$$= 1^2 \times 1 + 2^2 \times 2 + 3^2 \times 3 + \dots + 7^2 \times 7 + 8^2 \times 8$$

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 7^3 + 8^3$$

$$= \sum_{k=1}^8 k^3 = \left(\frac{8 \times 9}{2}\right)^2 = 36^2$$

그런데 $S > 0$ 이므로 $S = 36$

- 14 수열 $1 \times 1, 4 \times 3, 9 \times 5, 16 \times 7, \dots, 81 \times 17$ 의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n^2(2n-1) = 2n^3 - n^2$$

$$\therefore 1 \times 1 + 4 \times 3 + 9 \times 5 + 16 \times 7 + \dots + 81 \times 17$$

$$= \sum_{k=1}^9 a_k = \sum_{k=1}^9 (2k^3 - k^2)$$

$$= 2 \times \left(\frac{9 \times 10}{2}\right)^2 - \frac{9 \times 10 \times 19}{6}$$

$$= 4050 - 285 = 3765$$

- 15 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 9 = 10 - 1$$

$$a_2 = 99 = 10^2 - 1$$

$$a_3 = 999 = 10^3 - 1$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = 10^n - 1$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (10^k - 1) = \frac{10(10^{10} - 1)}{10 - 1} - 10$$

$$= \frac{10}{9}(10^{10} - 1) - 10 = \frac{10^{11} - 100}{9}$$

따라서 $p = 11, q = 100$ 이므로 $p + q = 111$

- 16 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제16항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{16} a_k = \sum_{k=1}^{16} \frac{k+1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{16 \times 17}{2} + 16 \right) = 76$$

- 17 각 행에 나열된 모든 수의 합을 구해 보면

$$a_1 = 1 = 1^2$$

$$a_2 = 2 + 4 = 6 = 2 \times 3$$

$$a_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$a_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 4 \times 5$$

$$a_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

$\vdots$

$$\therefore a_{2n-1} = (2n-1)^2, a_{2n} = 2n(2n+1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^5 a_{2k-1} + \sum_{k=1}^5 a_{2k}$$

$$= \sum_{k=1}^5 (2k-1)^2 + \sum_{k=1}^5 2k(2k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^5 \{(2k-1)^2 + 2k(2k+1)\}$$

$$= \sum_{k=1}^5 (8k^2 - 2k + 1)$$

$$= 8 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} - 2 \times \frac{5 \times 6}{2} + 5$$

$$= 440 - 30 + 5 = 415$$

$$\begin{aligned}
 18 \quad \sum_{k=1}^{10} \left\{ \sum_{l=1}^5 (k+2l) \right\} &= \sum_{k=1}^{10} \left(\sum_{l=1}^5 k + 2 \sum_{l=1}^5 l \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{10} \left(5k + 2 \times \frac{5 \times 6}{2} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{10} (5k + 30) \\
 &= 5 \times \frac{10 \times 11}{2} + 300 \\
 &= 275 + 300 = 575
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19 \quad \sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=1}^k km \right) &= \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{m=1}^k m \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left\{ k \times \frac{k(k+1)}{2} \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{k^3 + k^2}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 + \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1) \\
 \text{따라서 } a=24, b=2, c=1 \text{ 이므로} \\
 a+b+c &= 27
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20 \quad \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{l=1}^k \left(\sum_{m=1}^l 12 \right) \right\} &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^k 12l \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left\{ 12 \times \frac{k(k+1)}{2} \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^n (6k^2 + 6k) \\
 &= 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6 \times \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= 2n(n+1)(n+2) \\
 \text{즉, } 2n(n+1)(n+2) &= 420 \text{ 이므로} \\
 2n(n+1)(n+2) &= 2 \times 5 \times 6 \times 7 \\
 \therefore n &= 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21 \quad \sum_{p=1}^m \left\{ \sum_{q=1}^n (p+q) \right\} &= \sum_{p=1}^m \left\{ np + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\
 &= n \times \frac{m(m+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \times m \\
 &= \frac{mn(m+1)}{2} + \frac{mn(n+1)}{2} \\
 &= \frac{mn}{2} (m+n+2) \\
 \text{이때 } m+n &= 13, mn=40 \text{ 이므로} \\
 \sum_{p=1}^m \left\{ \sum_{q=1}^n (p+q) \right\} &= \frac{40}{2} (13+2) = 300
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 22 \quad S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n \\
 \text{(i) } n \geq 2 \text{ 일 때,} \\
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\
 &= 2n \quad \dots\dots \textcircled{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii) } n=1 \text{ 일 때,} \\
 a_1 &= S_1 = 1^2 + 1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{8}
 \end{aligned}$$

이때 ⑧은 ⑦에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 2n$

따라서 $a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k-2$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{20} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{20} (4k-2) \\
 &= 4 \times \frac{20 \times 21}{2} - 40 \\
 &= 840 - 40 = 800
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 23 \quad S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = 3(3^n - 1) \\
 \text{(i) } n \geq 2 \text{ 일 때,} \\
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= 3(3^n - 1) - 3(3^{n-1} - 1) \\
 &= 3^n(3 - 1) \\
 &= 2 \times 3^n \quad \dots\dots \textcircled{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii) } n=1 \text{ 일 때,} \\
 a_1 &= S_1 = 3(3 - 1) = 6 \quad \dots\dots \textcircled{8}
 \end{aligned}$$

이때 ⑧은 ⑦에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 2 \times 3^n$

즉, $a_{2k-1} = 2 \times 3^{2k-1} = \frac{2}{3} \times 9^k$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{2}{3} \times 9^k \right) \\
 &= \frac{2}{3} \times \frac{9(9^{10} - 1)}{9 - 1} \\
 &= \frac{3^{21} - 3}{4}
 \end{aligned}$$

따라서 $p=21, q=4$ 이므로

$$p+q=25$$

$$\begin{aligned}
 24 \quad S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = n^2 - 11n \\
 \text{(i) } n \geq 2 \text{ 일 때,} \\
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= n^2 - 11n - \{(n-1)^2 - 11(n-1)\} \\
 &= 2n - 12 \quad \dots\dots \textcircled{7} \\
 \text{(ii) } n=1 \text{ 일 때,} \\
 a_1 &= S_1 = 1^2 - 11 \times 1 = -10 \quad \dots\dots \textcircled{8}
 \end{aligned}$$

이때 ㉔은 ㉑에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n=2n-12$

따라서 $a_{2k}=2 \times 2k-12=4k-12$ 이므로 $a_{2k} \geq 0$ 을 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$4k-12 \geq 0$$

$$\therefore k \geq 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{30} |a_{2k}| &= -\sum_{k=1}^2 a_{2k} + \sum_{k=3}^{30} a_{2k} \\ &= -\sum_{k=1}^2 a_{2k} + \sum_{k=1}^{30} a_{2k} - \sum_{k=1}^2 a_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{30} a_{2k} - 2 \sum_{k=1}^2 a_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{30} (4k-12) - 2(a_2 + a_4) \\ &= 4 \times \frac{30 \times 31}{2} - 360 - 2\left\{ \underset{k=1}{-8} + \underset{k=2}{(-4)} \right\} \\ &= 1860 - 360 + 24 \\ &= 1524 \end{aligned}$$

25 수열 $\frac{1}{2^2-1}, \frac{1}{4^2-1}, \frac{1}{6^2-1}, \dots, \frac{1}{20^2-1}$ 의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{(2n)^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ \therefore \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \dots + \frac{1}{20^2-1} \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21} \right) \\ &= \frac{10}{21} \end{aligned}$$

26 나머지정리에 의하여

$$\begin{aligned} a_n &= n^3 + (1-n)n^2 + n = n(n+1) \\ \therefore \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{27 } a_n &= \frac{2n+1}{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2} \\ &= \frac{2n+1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \\ &= \frac{6}{n(n+1)} \\ \therefore \sum_{k=1}^m a_k &= \sum_{k=1}^m \frac{6}{k(k+1)} \\ &= 6 \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 6 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) \right\} \\ &= 6 \left(1 - \frac{1}{m+1} \right) = \frac{6m}{m+1} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \frac{6m}{m+1} = \frac{40}{7} \text{에서}$$

$$42m = 40m + 40 \quad \therefore m = 20$$

$$\text{28 } S_n = \frac{n\{2 \times 3 + (n-1) \times 2\}}{2} = n(n+2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^8 \frac{1}{S_k} &= \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k(k+2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) = \frac{29}{45} \end{aligned}$$

따라서 $p=45, q=29$ 이므로

$$p+q=74$$

29 수열 $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$ 의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ \therefore \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}} \\ &= \sum_{k=1}^{23} a_k = \sum_{k=1}^{23} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^{23} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2})} \\ &= \sum_{k=1}^{23} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) \\ &\quad + \dots + (\sqrt{25} - \sqrt{24}) \\ &= -\sqrt{2} + 5 \end{aligned}$$

따라서 $a=5, b=-1$ 이므로 $a+b=4$

30 $a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{99} \frac{2}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} &= \sum_{k=1}^{99} \frac{2}{\sqrt{2k+2} + \sqrt{2k}} \\ &= \sum_{k=1}^{99} \frac{2(\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k})}{(\sqrt{2k+2} + \sqrt{2k})(\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k})} \\ &= \sum_{k=1}^{99} (\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k}) \\ &= (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{4}) + (\sqrt{8} - \sqrt{6}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{200} - \sqrt{198}) \\ &= -\sqrt{2} + 10\sqrt{2} \\ &= 9\sqrt{2} \end{aligned}$$

31 $\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^m \frac{\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{2m+1} - \sqrt{2m-1}) \} \\ &= \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{2m+1}) \end{aligned}$$

이때 $\sum_{k=1}^m a_k = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{2m+1}) &= 3 \\ \sqrt{2m+1} &= 7, \quad 2m+1 = 49 \\ \therefore m &= 24 \end{aligned}$$

32 원 $x^2 + y^2 = n$ 이 직선 $y = \sqrt{3}x$ 와 제1사분면에서 만나는 점의 좌표를 (x_n, y_n) 이라 하면

$$x_n^2 + y_n^2 = n, \quad y_n = \sqrt{3}x_n \text{에서}$$

$$x_n^2 + (\sqrt{3}x_n)^2 = n$$

$$4x_n^2 = n, \quad x_n^2 = \frac{n}{4}$$

$$\therefore x_n = \frac{\sqrt{n}}{2} \quad (\because x_n > 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{x_k + x_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\frac{\sqrt{k}}{2} + \frac{\sqrt{k+1}}{2}} \\ &= \sum_{k=1}^{80} \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{80} \frac{2(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= 2 \{ (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{81} - \sqrt{80}) \} \\ &= 2(-1 + 9) = 16 \end{aligned}$$

33 $a_n = 4 \times 8^{n-1} = 2^{3n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \log_2 a_k &= \sum_{k=1}^{10} \log_2 2^{3k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{10} (3k-1) \\ &= 3 \times \frac{10 \times 11}{2} - 10 = 155 \end{aligned}$$

34 $\sum_{k=1}^n \log_3 \left(1 + \frac{1}{k} \right)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n \log_3 \frac{k+1}{k} \\ &= \log_3 \frac{2}{1} + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \cdots + \log_3 \frac{n+1}{n} \\ &= \log_3 \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} \right) \\ &= \log_3 (n+1) \end{aligned}$$

이때 $\sum_{k=1}^n \log_3 \left(1 + \frac{1}{k} \right) = 4$ 이므로

$$\begin{aligned} \log_3 (n+1) &= 4 \\ n+1 &= 3^4 = 81 \\ \therefore n &= 80 \end{aligned}$$

35 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \log \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \log \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \log \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \log \left\{ \frac{(n+1)(n+2)}{2} \times \frac{2}{n(n+1)} \right\} \\ &= \log \frac{n+2}{n} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = \log \frac{2 \times 3}{2} = \log 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = \log \frac{n+2}{n}$$

$$\text{즉, } a_{2k} = \log \frac{2k+2}{2k} = \log \frac{k+1}{k} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} a_{2k} &= \sum_{k=1}^{15} \log \frac{k+1}{k} \\ &= \log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \cdots + \log \frac{16}{15} \\ &= \log \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{16}{15} \right) \\ &= \log 16 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \sum_{k=1}^{15} a_{2k} = p \text{이므로}$$

$$p = \log 16$$

$$\therefore 10^p = 10^{\log 16} = 16$$

02 수학적 귀납법

81~87쪽

1 ②	2 27	3 -3	4 ③	5 12
6 ②	7 ②	8 $\frac{1}{6}$	9 ③	10 $\frac{3}{19}$
11 1650	12 ①	13 ④	14 ②	15 5
16 ④	17 $\neg, \cup, \cap$	18 7	19 4	
20 ①	21 ②	22 ①	23 162	24 ②
25 41	26 $\frac{9}{4}$	27 ③	28 ⑤	29 ⑤
30 ⑤	31 ④	32 $\frac{7}{4}$	33 790	

- 1 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

이때 공차를 d 라 하면 $a_1=2, a_3=5$ 이므로

$$2+2d=5 \quad \therefore d=\frac{3}{2}$$

즉, 첫째항이 2, 공차가 $\frac{3}{2}$ 이므로

$$a_n=2+(n-1)\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}$$

$$\therefore a_{99}=\frac{3}{2}\times 99+\frac{1}{2}=149$$

- 2 $a_{n+1}+4=a_n$, 즉 $a_{n+1}-a_n=-4$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항

이 102, 공차가 -4인 등차수열이므로

$$a_n=102+(n-1)\times(-4)=-4n+106$$

이때 $a_n<0$ 에서

$$-4n+106<0, 4n>106 \quad \therefore n>26.5$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 27이다.

- 3 $(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+9$ 에서

$$a_{n+1}^2-2a_na_{n+1}+a_n^2=9, (a_{n+1}-a_n)^2=9$$

이때 $a_n>a_{n+1}$ 이므로 $a_{n+1}-a_n=-3$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 30, 공차가 -3인 등차수열이므로

$$a_n=30+(n-1)\times(-3)=-3n+33$$

$$\therefore a_{12}=-3\times 12+33=-3$$

- 4 $a_n=\frac{1}{3}a_{n+1}$, 즉 $a_{n+1}=3a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 3인

등비수열이다.

이때 첫째항을 a 라 하면 $a_2=1$ 에서

$$3a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{3}$$

즉, 수열은 $\{a_n\}$ 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 3인 등비수열이므로

$$a_n=\frac{1}{3}\times 3^{n-1}=3^{n-2}$$

$$\therefore a_{15}=3^{13}$$

- 5 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$, 즉 $a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항

이 $\frac{1}{4}$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n=\frac{1}{4}\times 2^{n-1}=2^{n-3}$$

이때 $a_k=512$ 에서 $2^{k-3}=512=2^9$

$$k-3=9 \quad \therefore k=12$$

- 6 $\log_2 \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$ 에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\sqrt{2}$ 인 등비수열이므로 첫째항을 a 라 하면

$$S_6=\sum_{k=1}^6 a_k=\frac{a\{(\sqrt{2})^6-1\}}{\sqrt{2}-1}=\frac{7a}{\sqrt{2}-1}$$

$$S_{12}=\sum_{k=1}^{12} a_k=\frac{a\{(\sqrt{2})^{12}-1\}}{\sqrt{2}-1}=\frac{63a}{\sqrt{2}-1}$$

$$\therefore \frac{S_{12}}{S_6}=\frac{\frac{63a}{\sqrt{2}-1}}{\frac{7a}{\sqrt{2}-1}}=9$$

- 7 $a_{n+1}=a_n+4n-1$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후 변끼리 모두 더하면

$$a_2=a_1+4\times 1-1$$

$$a_3=a_2+4\times 2-1$$

$$a_4=a_3+4\times 3-1$$

$\vdots$

$$+) a_n=a_{n-1}+4(n-1)-1$$

$$a_n=a_1+4\{1+2+3+\dots+(n-1)\}-(n-1)$$

$$\therefore a_n=a_1+4\sum_{k=1}^{n-1} k-(n-1)$$

$$=1+4\times\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)$$

$$=2n^2-3n+2$$

$$\therefore a_{10}=2\times 10^2-3\times 10+2=172$$

- 8 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n(n+1)}$, 즉 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후 변끼리 모두 더하면

$$a_2=a_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$a_3=a_2+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$a_4=a_3+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$$

$\vdots$

$$+) a_n=a_{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

$$a_n=a_1+\frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned}\therefore a_n &= a_1 + 1 - \frac{1}{n} = \frac{3n-1}{n} \\ \therefore a_{30} - a_5 &= \frac{3 \times 30 - 1}{30} - \frac{3 \times 5 - 1}{5} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

- 9 $a_{n+1} = a_n + 2^n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후 변끼리 모두 더하면

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1 + 2 \\ a_3 &= a_2 + 2^2 \\ a_4 &= a_3 + 2^3 \\ &\vdots \\ +) \quad a_n &= a_{n-1} + 2^{n-1} \\ \hline a_n &= a_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}) \\ \therefore a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^n \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} + a_{2k}) &= \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} 2^k \\ &= \frac{2(2^{20}-1)}{2-1} = 2^{21} - 2\end{aligned}$$

- 10 $a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n+1} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후 변끼리 모두 곱하면

$$\begin{aligned}a_2 &= \frac{1}{3} a_1 \\ a_3 &= \frac{3}{5} a_2 \\ a_4 &= \frac{5}{7} a_3 \\ &\vdots \\ \times) \quad a_n &= \frac{2n-3}{2n-1} a_{n-1} \\ \hline a_n &= a_1 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} \times \cdots \times \frac{2n-3}{2n-1} \right) \\ \therefore a_n &= a_1 \times \frac{1}{2n-1} = \frac{3}{2n-1} \\ \therefore a_{10} &= \frac{3}{19}\end{aligned}$$

- 11 $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후 변끼리 모두 곱하면

$$\begin{aligned}a_2 &= \frac{2}{1} \times a_1 \\ a_3 &= \frac{3}{2} \times a_2 \\ a_4 &= \frac{4}{3} \times a_3 \\ &\vdots \\ \times) \quad a_n &= \frac{n}{n-1} a_{n-1} \\ \hline a_n &= a_1 \times \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n-1} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore a_n &= a_1 \times n = 2n \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + a_k) &= \sum_{k=1}^{10} (4k^2 + 2k) \\ &= 4 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 2 \times \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 1540 + 110 = 1650\end{aligned}$$

- 12 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 즉 $a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후 변끼리 모두 곱하면

$$\begin{aligned}a_2 &= \frac{1}{2} a_1 \\ a_3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 a_2 \\ a_4 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 a_3 \\ &\vdots \\ \times) \quad a_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a_{n-1} \\ \hline a_n &= a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \\ \therefore a_n &= a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(n-1)n}{2}} = 2^{-\frac{n(n-1)}{2}} \\ \text{따라서 } a_{20} &= 2^{-190} \text{이므로} \\ \log_2 a_{20} &= \log_2 2^{-190} = -190\end{aligned}$$

- 13 $a_{n+1} = na_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 19를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned}a_2 &= 1 \times a_1 \\ a_3 &= 2 \times a_2 = 2 \times 1 \times a_1 \\ a_4 &= 3 \times a_3 = 3 \times 2 \times 1 \times a_1 \\ a_5 &= 4 \times a_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times a_1 \\ a_6 &= 5 \times a_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times a_1 \\ &\vdots \\ a_{20} &= 19 \times a_{19} = 19 \times 18 \times \cdots \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times a_1 \\ \text{이때 } 20 &= 4 \times 5 \text{이므로 } a_6, a_7, \dots, a_{20} \text{은 모두 } 20 \text{으로 나누어떨어진다.}\end{aligned}$$

즉, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}$ 을 20으로 나누었을 때의 나머지는 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ 를 20으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 1 + 2 + 6 + 24 = 34$$

이고, $34 = 20 \times 1 + 14$ 이므로 구하는 나머지는 14이다.

- 14 $a_{n+1} = 3a_n + 4$ 의 n 에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned}a_2 &= 3a_1 + 4 = 3 \times 1 + 4 = 7 \\ a_3 &= 3a_2 + 4 = 3 \times 7 + 4 = 25\end{aligned}$$

$$a_4 = 3a_3 + 4 = 3 \times 25 + 4 = 79$$

$$\therefore \sum_{k=1}^4 a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 7 + 25 + 79 = 112$$

- 15 $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+na_n}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2 = \frac{a_1}{1+a_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{1+2a_2} = \frac{\frac{1}{3}}{1+2 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{1+3a_3} = \frac{\frac{1}{5}}{1+3 \times \frac{1}{5}} = \frac{1}{8}$$

$$a_5 = \frac{a_4}{1+4a_4} = \frac{\frac{1}{8}}{1+4 \times \frac{1}{8}} = \frac{1}{12}$$

따라서 $a_k = \frac{1}{12}$ 을 만족시키는 자연수 k 의 값은 5이다.

- 16 $a_{n+1} + (-1)^n \times a_n = 2^n$ 에서

$$a_{n+1} = -(-1)^n \times a_n + 2^n = (-1)^{n+1} \times a_n + 2^n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_2 = (-1)^2 \times a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$a_3 = (-1)^3 \times a_2 + 2^2 = -3 + 4 = 1$$

$$a_4 = (-1)^4 \times a_3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$$

$$\therefore a_5 = (-1)^5 \times a_4 + 2^4 = -9 + 16 = 7$$

- 17 $\neg$, $a_5 = a_2 + 1 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$

$$\neg, n=2\text{일 때}, a_2 = a_1 = 1$$

$$n=2^2=4\text{일 때}, a_4 = a_2 = 1$$

$$n=2^3=8\text{일 때}, a_8 = a_4 = 1$$

$$n=2^4=16\text{일 때}, a_{16} = a_8 = 1$$

$\vdots$

$$n=2^k\text{일 때}, a_{2^k} = a_{2^{k-1}} = 1$$

따라서 $n=2^k$ (k 는 자연수)이면 $a_n = 1$

$$\neg, n=2-1=1\text{일 때}, a_1 = 1$$

$$n=2^2-1=3\text{일 때}, a_3 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$n=2^3-1=7\text{일 때}, a_7 = a_3 + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$n=2^4-1=15\text{일 때}, a_{15} = a_7 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$\vdots$

$$n=2^k-1\text{일 때}, a_{2^k-1} = a_{2^{k-1}-1} + 1 = (k-1) + 1 = k$$

따라서 $n=2^k-1$ (k 는 자연수)이면 $a_n = k$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

- 18 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1 & (a_n \geq 4) \\ a_n + 2 & (a_n < 4) \end{cases}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로

대입하면

$$a_1 = 2 < 4 \text{이므로}$$

$$a_2 = a_1 + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$a_2 = 4 \geq 4 \text{이므로}$$

$$a_3 = a_2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$a_3 = 3 < 4 \text{이므로}$$

$$a_4 = a_3 + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$a_4 = 5 \geq 4 \text{이므로}$$

$$a_5 = a_4 - 1 = 5 - 1 = 4$$

$\vdots$

$$\therefore a_1 = 2, a_n = \begin{cases} 4 & (n=3m-1) \\ 3 & (n=3m) \\ 5 & (n=3m+1) \end{cases} \quad (\text{단, } m \text{은 자연수})$$

따라서 $50 = 3 \times 17 - 1$, $51 = 3 \times 17$ 이므로

$$a_{50} + a_{51} = 4 + 3 = 7$$

- 19 $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_3 = \frac{a_2 + 1}{a_1} = \frac{2 + 1}{1} = 3, a_4 = \frac{a_3 + 1}{a_2} = \frac{3 + 1}{2} = 2,$$

$$a_5 = \frac{a_4 + 1}{a_3} = \frac{2 + 1}{3} = 1, a_6 = \frac{a_5 + 1}{a_4} = \frac{1 + 1}{2} = 1,$$

$$a_7 = \frac{a_6 + 1}{a_5} = \frac{1 + 1}{1} = 2, \dots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 2, 3, 2, 1이 이 순서대로 반복하여 나타나므로 $a_k = 3$ 을 만족시키는 20 이하의 자연수 k 는 3, 8, 13, 18의 4개이다.

- 20 $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2-3a_n} & (n \text{이 홀수인 경우}) \\ 1+a_n & (n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을

차례대로 대입하면

$$a_2 = \frac{a_1}{2-3a_1} = \frac{2}{2-3 \times 2} = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 = 1 + a_2 = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{2-3a_3} = \frac{\frac{1}{2}}{2-3 \times \frac{1}{2}} = 1$$

$$a_5 = 1 + a_4 = 1 + 1 = 2$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{40} a_n = 10 \sum_{n=1}^4 a_n = 10 \left\{ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + 1 \right\} = 10 \times 3 = 30$$

- 21 $S_n = -\frac{1}{4}a_n + \frac{5}{4}$ 의 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$S_{n+1} = -\frac{1}{4}a_{n+1} + \frac{5}{4}$$

$S_{n+1} - S_n$ 을 하면

$$S_{n+1} - S_n = -\frac{1}{4}a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n$$

이때 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} = -\frac{1}{4}a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{5}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad \therefore a_{15} = \frac{1}{5^{14}}$$

- 22 $S_n = n^2 a_n$ 의 n 에 $n+1$ 을 대입하면 $S_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1}$

$S_{n+1} - S_n$ 을 하면

$$S_{n+1} - S_n = (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n$$

이때 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n$$

$$(n^2 + 2n)a_{n+1} = n^2 a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, $\dots$, $n-1$ 을 차례대로 대입한 후 변끼리 모두 곱하면

$$a_2 = \frac{1}{3} a_1$$

$$a_3 = \frac{2}{4} a_2$$

$$a_4 = \frac{3}{5} a_3$$

$\vdots$

$$a_{n-1} = \frac{n-2}{n} a_{n-2}$$

$$\times \left) a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} \right. \\ a_n = a_1 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \dots \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n+1} \right)$$

$$\therefore a_n = a_1 \times \frac{1 \times 2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{20}} = 210$$

- 23 $a_1 = 2, a_2 = 4$ 이므로 $S_1 = a_1 = 2, S_2 = a_1 + a_2 = 2 + 4 = 6$

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} S_n = a_n S_{n+1} \text{에서}$$

$$(S_{n+1} - S_n) S_n = (S_n - S_{n-1}) S_{n+1} \quad (\because n \geq 2)$$

$$S_{n+1} S_n - S_n^2 = S_n S_{n+1} - S_{n-1} S_{n+1}$$

$$\therefore S_n^2 = S_{n-1} S_{n+1} \quad (n \geq 2)$$

즉, 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이므로 수열 $\{S_n\}$ 의 일반항 S_n 은

$$S_n = 2 \times 3^{n-1} \quad \therefore S_5 = 2 \times 3^4 = 162$$

다른 풀이

$$a_1 = 2, a_2 = 4 \text{이므로 } S_1 = a_1 = 2, S_2 = a_1 + a_2 = 2 + 4 = 6$$

이때 $S_{n+1} - S_n = a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$S_{n+1} = a_{n+1} + S_n$$

$$a_{n+1} S_n = a_n S_{n+1} \text{에서}$$

$$a_{n+1} S_n = a_n (a_{n+1} + S_n)$$

$$(S_n - a_n) a_{n+1} = a_n S_n$$

$$S_{n-1} a_{n+1} = a_n S_n$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{a_n S_n}{S_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

위의 식의 n 에 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_3 = \frac{a_2 S_2}{S_1} = \frac{4 \times 6}{2} = 12$$

$$\therefore S_3 = S_2 + a_3 = 6 + 12 = 18$$

$$a_4 = \frac{a_3 S_3}{S_2} = \frac{12 \times 18}{6} = 36$$

$$\therefore S_4 = S_3 + a_4 = 18 + 36 = 54$$

$$a_5 = \frac{a_4 S_4}{S_3} = \frac{36 \times 54}{18} = 108$$

$$\therefore S_5 = S_4 + a_5 = 54 + 108 = 162$$

- 24 n 일 후 가습기에 들어 있는 물의 양을 a_n L라 하면

$$a_1 = 12 \times \frac{1}{3} + 12 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = 6$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{3} a_n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 6이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_5 = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$$

따라서 5일 후 가습기에 들어 있는 물의 양은 $\frac{3}{8}$ L이다.

- 25 n 번째 도형을 만드는 데 필요한 정사각형의 개수는 a_n 이므로

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + 4 \times 1 = 1 + 4 = 5$$

$$a_3 = a_2 + 4 \times 2 = 5 + 8 = 13$$

$$a_4 = a_3 + 4 \times 3 = 13 + 12 = 25$$

$$\therefore a_5 = a_4 + 4 \times 4 = 25 + 16 = 41$$

- 26 6%의 소금물 50g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{6}{100} \times 50 = 3(\text{g})$$

$a_n\%$ 의 소금물 150g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{a_n}{100} \times 150 = \frac{3}{2}a_n(\text{g})$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{\frac{3}{2}a_n + 3}{200} \times 100 = \frac{3}{4}a_n + \frac{3}{2}$$

따라서 $p = \frac{3}{4}$, $q = \frac{3}{2}$ 이므로

$$p + q = \frac{9}{4}$$

- 27 $p(1)$ 이 참이므로 $p(3)$, $p(5)$ 도 참이다.

$p(3)$ 이 참이므로 $p(3 \times 3) = p(9)$, $p(3 \times 5) = p(15)$ 도 참이다.

$p(5)$ 가 참이므로 $p(5 \times 5) = p(25)$ 도 참이다.

같은 방법으로 하면 음이 아닌 정수 a , b 에 대하여

$p(3^a \times 5^b)$ 은 참이다.

① $p(30) = p(2 \times 3 \times 5)$

② $p(90) = p(2 \times 3^2 \times 5)$

③ $p(135) = p(3^3 \times 5)$

④ $p(175) = p(5^2 \times 7)$

⑤ $p(210) = p(2 \times 3 \times 5 \times 7)$

따라서 반드시 참인 것은 ③이다.

- 28 $\neg$. $p(1)$ 이 참이면 주어진 조건에 의하여 $p(4)$, $p(7)$,

$p(10)$, $\dots$, $p(3k+1)$ 이 참이다.

$\neg$. $p(3)$ 이 참이면 주어진 조건에 의하여 $p(6)$, $p(9)$,

$p(12)$, $\dots$, $p(3k)$ 가 참이다.

$\neg$. $p(2)$ 가 참이면 주어진 조건에 의하여 $p(5)$, $p(8)$,

$p(11)$, $\dots$, $p(3k+2)$ 가 참이다.

따라서 $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ 이 참이면 모든 자연수 k 에

대하여 $p(k)$ 가 참이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

- 29 (i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 \times 2 = 2, (\text{우변}) = \frac{1}{3} \times 1 \times 2 \times 3 = 2$$

따라서 $n=1$ 일 때 등식 ㉠이 성립한다.

- (ii) $n=k$ 일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)$ 를 더하면

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + k(k+1) + \frac{1}{3}(k+1)(k+2)$$

$$= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + \frac{1}{3}(k+1)(k+2)$$

$$= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(\frac{1}{3}k+3)$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

- (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

따라서 $f(k) = (k+1)(k+2)$, $g(k) = k+3$ 이므로

$$\frac{f(2)}{g(1)} = \frac{3 \times 4}{4} = 3$$

- 30 (i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1^3 = 1, (\text{우변}) = \left(\frac{1 \times 2}{2}\right)^2 = 1$$

따라서 $n=1$ 일 때 등식 ㉡이 성립한다.

- (ii) $n=k$ 일 때, 등식 ㉡이 성립한다고 가정하면

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left\{ \frac{k(k+1)}{2} \right\}^2$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{3}(k+1)^3$ 을 더하면

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + \frac{1}{3}(k+1)^3$$

$$= \left\{ \frac{k(k+1)}{2} \right\}^2 + \frac{1}{3}(k+1)^3$$

$$= \frac{(k+1)^2}{4} \{k^2 + 4(k+1)\}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{1}{3} \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right\}^2$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 등식 ㉡이 성립한다.

- (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 등식 ㉡이 성립한다.

따라서 $f(k) = (k+1)^3$, $g(k) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ 이므로

$$f(9) + g(8) = 1000 + 45 = 1045$$

- 31 (i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 2, (\text{우변}) = (2 \times 1 - 3) \times 2^2 + 6 = 2$$

이므로 주어진 등식 ㉢이 성립한다.

- (ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식 ㉢이 성립한다고 가정하면

$$1 \times 2 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \dots + (2k-1)2^k$$

$$= (2k-3)2^{k+1} + 6$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{3}(2k+1)2^{k+1}$ 을 더하면

$$1 \times 2 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \dots + (2k-1)2^k$$

$$+ \frac{1}{3}(2k+1)2^{k+1}$$

$$= (2k-3)2^{k+1} + 6 + \frac{1}{3}(2k+1)2^{k+1}$$

$$= \frac{1}{3}(2k-1)2^{k+2} + 6$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 등식 ㉢이 성립한다.

- (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식 ㉢이

성립한다.

32 (i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, (\text{우변}) = \frac{4}{2+1} = \frac{4}{3}$$

따라서 $n=2$ 일 때 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k (k \geq 2)$ 일 때, 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1}$$

위의 식의 양변에 $\boxed{\frac{1}{k+1}}$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \boxed{\frac{1}{k+1}} > \frac{2k}{k+1} + \boxed{\frac{1}{k+1}}$$

이때

$$\begin{aligned} & \frac{2k+1}{k+1} - \frac{2k+2}{k+2} \\ &= \frac{(2k+1)(k+2) - (2k+2)(k+1)}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{(k+1)(k+2)} > 0 \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{2k}{k+1} + \boxed{\frac{1}{k+1}} > \boxed{\frac{2k+2}{k+2}}$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \boxed{\frac{1}{k+1}} > \boxed{\frac{2k+2}{k+2}}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

$$\text{따라서 } f(k) = \frac{1}{k+1}, g(k) = \frac{2k+2}{k+2} \text{이므로}$$

$$f(3) + g(2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$$

33 $2^n > n^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

(i) $n=5$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 2^5 = 32, (\text{우변}) = 5^2 = 25$$

따라서 $n=5$ 일 때 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k (k \geq 5)$ 일 때,

부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$2^k > k^2$$

이 부등식의 양변에 2를 곱하면

$$2^{k+1} > 2k^2$$

이때 $k \geq 5$ 이면

$$k^2 - 2k - 1 = \boxed{(k-1)^2} - 2 > 0$$

이므로

$$k^2 > 2k + 1$$

$$\therefore 2^{k+1} > 2k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 = \boxed{(k+1)^2}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

따라서 $f(k) = (k-1)^2, g(k) = (k+1)^2$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10} \{f(k) + g(k)\} = \sum_{k=1}^{10} \{(k-1)^2 + (k+1)^2\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 2)$$

$$= 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 20$$

$$= 790$$

MEMO

MEMO