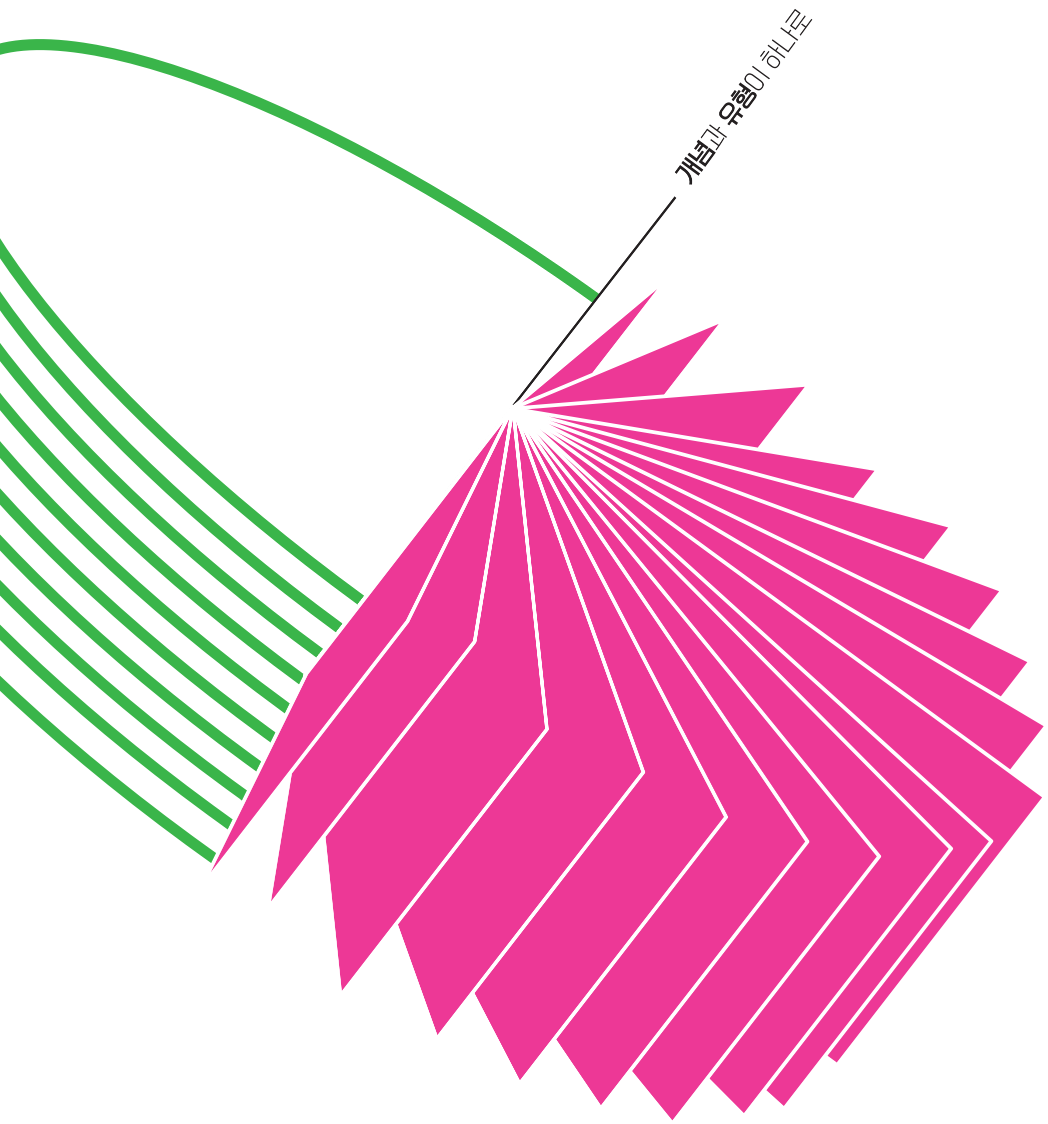
개념+유형

## 확률과 통계

# 정답과 해설



# 개념편
## 정답과 해설

## Ⅰ-1 01 여러 가지 순열과 중복조합

### 중복순열

**개념 Check** 8쪽

**1** 답 (1) **64** (2) **32** (3) **25** (4) **4**

(1) ${}_4\Pi_3=4^3=64$ (2) ${}_2\Pi_5=2^5=32$

(3) ${}_5\Pi_2=5^2=25$ (4) ${}_4\Pi_1=4^1=4$

**2** 답 (1) **20** (2) **3** (3) **6** (4) **4**

(1) ${}_n\Pi_2=400$에서

$n^2=20^2$ $\quad\therefore n=20$

(2) ${}_n\Pi_4=81$에서

$n^4=3^4$ $\quad\therefore n=3$

(3) ${}_2\Pi_r=64$에서

$2^r=2^6$ $\quad\therefore r=6$

(4) ${}_5\Pi_r=625$에서

$5^r=5^4$ $\quad\therefore r=4$

**문제** 9~11쪽

**01-1** 답 (1) **729** (2) **250** (3) **175**

(1) 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개의 우체통에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_6=3^6=729$

(2) A가 택할 수 있는 수업의 개수는 2

나머지 3명의 학생이 수업을 택하는 경우의 수는 5개의 수업에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times125=250$

(3) (i) 4개의 문자 $a$, $b$, $c$, $d$에서 4개를 택하는 중복순열의 수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

(ii) 문자 $a$를 포함하지 않는 경우의 수는 문자 $a$를 제외한 3개의 문자 $b$, $c$, $d$에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_4=3^4=81$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$256-81=175$

**01-2** 답 **62**

서로 다른 2개의 깃발 중에서

깃발을 1번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_1=2$

깃발을 2번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

깃발을 3번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

깃발을 4번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

깃발을 5번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 깃발을 1번 이상 5번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$2+4+8+16+32=62$

**02-1** 답 (1) **540** (2) **647**

(1) 짝수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 짝수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수는 3

| 천 | 백 | 십 | 일 |
|---|---|---|---|
| ↑ 5 | ${}_6\Pi_2$ | | ↑ 3 |

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수는 5

백의 자리, 십의 자리에 6개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 배열하는 경우의 수는

${}_6\Pi_2=6^2=36$

따라서 구하는 짝수의 개수는

$3\times5\times36=540$

(2) 3□□□, 4□□□, 5□□□ 꼴일 때, 각각의 경우에 대하여 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 6개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 배열하는 경우의 수는

$3\times{}_6\Pi_3=3\times6^3=648$

그런데 3000이 만들어지는 경우는 제외해야 하므로 구하는 자연수의 개수는

$648-1=647$

**02-2** 답 **81**

만의 자리와 일의 자리의 숫자의 합이 4인 다섯 자리의 자연수는 1□□□3, 2□□□2, 3□□□1 꼴이다.

각각의 경우에 대하여 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에 3개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 배열하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

$3\times{}_3\Pi_3=3\times3^3=81$

03-**1** 답 (1) **125** (2) **60** (3) **25**

(1) 집합 $Y$의 원소 $a$, $b$, $c$, $d$, $e$의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 $X$의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

(2) 집합 $Y$의 원소 $a$, $b$, $c$, $d$, $e$의 5개에서 서로 다른 3개를 택하여 집합 $X$의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 구하는 일대일함수의 개수는

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

(3) $f(3)=d$로 정해졌으므로 집합 $Y$의 원소 $a$, $b$, $c$, $d$, $e$의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 $X$의 나머지 원소 1, 2에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

03-**2** 답 **192**

$f(1)\neq1$이므로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4의 3가지

또 집합 $X$의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 $X$의 원소 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 구하는 함수의 개수는

$3\times64=192$

다른 풀이

$X$에서 $X$로의 함수 $f$의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

$f(1)=1$인 함수 $f$의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 $f(1)\neq1$인 함수의 개수는

$256-64=192$

03-**3** 답 **243**

$f(2)+f(4)=0$을 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(4))$는 $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, -1)$의 3가지

또 집합 $Y$의 원소 $-1$, 0, 1의 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 집합 $X$의 원소 1, 3, 5, 6에 대응시키는 경우의 수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

따라서 구하는 함수의 개수는 $3\times81=243$

## 2 같은 것이 있는 순열

**문제** 13~16쪽

04-**1** 답 (1) **1260** (2) **60** (3) **360** (4) **630**

(1) 7개의 문자 c, o, l, l, e, g, e를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!\times2!}=1260$

(2) 양 끝에 l을 고정시키고 그 사이에 c, o, e, g, e의 5개의 문자를 배열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!}=60$

(3) 2개의 e를 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자 c, o, l, l, g와 함께 일렬로 배열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!}=360$

(4) c, o를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, X, l, l, e, g, e의 7개의 문자를 일렬로 배열한 후 첫 번째 X는 c로, 두 번째 X는 o로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!\times2!\times2!}=630$

04-**2** 답 **7560**

모음 a, i, e를 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자 h, p, p, n, s, s와 함께 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!\times2!}=1260$

모음 a, i, e끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $1260\times6=7560$

04-**3** 답 **168**

자음 d, l, g, n, t를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, i, X, i, X, e, X, X의 8개의 문자를 일렬로 배열한 후 5개의 X를 앞에서부터 순서대로 d, g, l, n, t로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{8!}{5!\times2!}=168$

05-**1** 답 (1) **150** (2) **7**

(1) (i) 1□□□□□□ 꼴의 자연수

나머지 자리에 0, 0, 1, 2, 2, 2의 6개의 숫자를 배열하면 되므로 그 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!\times3!}=60$

(ii) 2□□□□□□ 꼴의 자연수

나머지 자리에 0, 0, 1, 1, 2, 2의 6개의 숫자를 배열하면 되므로 그 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!\times2!\times2!}=90$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는 $60+90=150$

(2) 2, 2, 2, 3, 3에서 3개의 숫자를 택하는 경우는

(2, 2, 2) 또는 (2, 2, 3) 또는 (2, 3, 3)

(i) 2, 2, 2를 일렬로 배열하여 만들 수 있는 자연수의 개수는 $\frac{3!}{3!}=1$

(ii) 2, 2, 3을 일렬로 배열하여 만들 수 있는 자연수의 개수는 $\frac{3!}{2!}=3$

(iii) 2, 3, 3을 일렬로 배열하여 만들 수 있는 자연수의 개수는 $\frac{3!}{2!}=3$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$1+3+3=7$

**05-2** 답 **78**

짝수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 짝수이어야 한다.

(i) □□□□□0 꼴의 자연수

나머지 자리에 1, 1, 2, 2, 3의 5개의 숫자를 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

(ii) □□□□□2 꼴의 자연수

나머지 자리에 0, 1, 1, 2, 3의 5개의 숫자를 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

맨 앞자리에 0이 오고 나머지 자리에 1, 1, 2, 3의 4개의 숫자를 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

$\therefore\ 60-12=48$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$30+48=78$

**06-1** 답 (1) **56** (2) **24** (3) **32**

(1) 오른쪽으로 5칸, 위쪽으로 3칸 가야 하므로 구하는 경우의 수는

$\frac{8!}{5!\times3!}=56$

(2) A 지점에서 P 지점까지는 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 2칸 가야 하므로 그 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

P 지점에서 B 지점까지는 오른쪽으로 3칸, 위쪽으로 1칸 가야 하므로 그 경우의 수는

$\frac{4!}{3!\times1!}=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times4=24$

(3) 구하는 경우의 수는 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

$56-24=32$

**06-2** 답 **102**

(i) A 지점에서 Y 지점까지는 오른쪽으로 4칸, 위쪽으로 4칸 가야 하므로 그 경우의 수는 $\frac{8!}{4!\times4!}=70$

A 지점에서 X 지점까지는 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 2칸 가야 하므로 그 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\times2!}=6$

X 지점에서 Y 지점까지는 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 2칸 가야 하므로 그 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\times2!}=6$

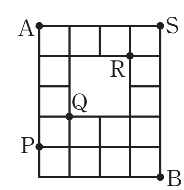
따라서 A 지점에서 X 지점을 거치지 않고 Y 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $70-6\times6=34$

(ii) Y 지점에서 B 지점까지는 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 1칸 가야 하므로 그 경우의 수는 $\frac{3!}{2!\times1!}=3$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$34\times3=102$

**07-1** 답 **66**




오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 P, Q, R, S 중에서 어느 한 지점은 반드시 거치지만 두 지점 이상을 동시에 거쳐 최단 거리로 가는 경우는 없으므로 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

A → P → B 또는 A → Q → B

또는 A → R → B 또는 A → S → B

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$1\times\frac{5!}{4!\times1!}=5$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{1!\times3!}\times\frac{5!}{3!\times2!}=4\times10=40$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!\times1!}\times\frac{5!}{1!\times4!}=4\times5=20$

(iv) A → S → B로 가는 경우의 수는

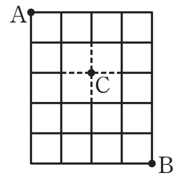
$1\times1=1$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$5+40+20+1=66$

다른 풀이

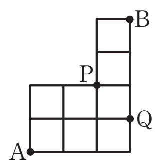
오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하여 그 교점을 C라 하면 구하는 경우의 수는 A → B로 가는 경우의 수에서 A → C → B로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로




$\frac{9!}{4!\times5!}-\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{5!}{2!\times3!}=126-6\times10=66$

**07-2** 답 **22**

오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 P, Q 중에서 어느 한 지점은 반드시 거치지만 P, Q를 동시에 거쳐 최단 거리로 가는 경우는 없으므로 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는




A → P → B 또는 A → Q → B

(ⅰ) A → P → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{3!}{1!\times2!}=6\times3=18$

(ⅱ) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!\times1!}\times1=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$18+4=22$

## 3 중복조합

### 개념 Check 18쪽

**1** 답 (1) **20** (2) **5** (3) **5** (4) **126**

(1) ${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

(2) ${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

(3) ${}_5H_1={}_{5+1-1}C_1={}_5C_1=5$

(4) ${}_5H_5={}_{5+5-1}C_5={}_9C_5={}_9C_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

**2** 답 (1) **9** (2) **6** (3) **3** (4) **6**

(1) ${}_7H_3={}_{7+3-1}C_3={}_9C_3$이므로

$n=9$

(2) ${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4$이므로

$n=6$

(3) ${}_6H_r={}_{6+r-1}C_r={}_{r+5}C_r$이므로 ${}_{r+5}C_r={}_8C_3$에서

$r+5=8 \qquad \therefore r=3$

(4) ${}_4H_r={}_{4+r-1}C_r={}_{r+3}C_r={}_{r+3}C_3$이므로 ${}_{r+3}C_3={}_9C_3$에서

$r+3=9 \qquad \therefore r=6$

**3** 답 (1) **24** (2) **64** (3) **4** (4) **20**

(1) ${}_4P_3=4\times3\times2=24$

(2) ${}_4\Pi_3=4^3=64$

(3) ${}_4C_3={}_4C_1=4$

(4) ${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

### 문제 19~22쪽

**08-1** 답 (1) **45** (2) **21**

(1) 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=\frac{10\times9}{2\times1}=45$

(2) 각 색깔의 장미를 한 송이씩 먼저 사고 나머지 5송이를 사면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

**08-2** 답 **220**

구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_9={}_{12}C_9={}_{12}C_3=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$

**08-3** 답 **165**

바둑통 A, B에 각각 3개, 2개의 바둑돌을 먼저 담고 나머지 8개의 바둑돌을 나누어 담으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$

**09-1** 답 **286**

$(x+y+z+w)^{10}$의 전개식에서 각 항은 4개의 문자 $x$, $y$, $z$, $w$에서 중복을 허용하여 10개를 택하여 곱한 것이므로 구하는 항의 개수는

${}_4H_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}=286$

09-2 답 84

$(x+y)^3(a+b+c)^5$의 전개식에서 각 항은 $(x+y)^3$의 항과 $(a+b+c)^5$의 항을 곱한 것이다.

$(x+y)^3$의 전개식에서 각 항은 2개의 문자 $x$, $y$에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 곱한 것이므로 항의 개수는

${}_2H_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

$(a+b+c)^5$의 전개식에서 각 항은 3개의 문자 $a$, $b$, $c$에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 곱한 것이므로 항의 개수는

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

따라서 구하는 항의 개수는 $4\times21=84$

09-3 답 15

$(x+y+z)^{14}$의 전개식에서 $x$를 포함하지 않는 항은 $x$를 제외한 2개의 문자 $y$, $z$에서 중복을 허용하여 14개를 택하여 곱한 것이므로 구하는 항의 개수는

${}_2H_{14}={}_{15}C_{14}={}_{15}C_1=15$

09-4 답 10

$(x+y+z)^n$의 전개식에서 각 항은 3개의 문자 $x$, $y$, $z$에서 중복을 허용하여 $n$개를 택하여 곱한 것이고, 항의 개수가 66이므로

${}_3H_n=66$, ${}_{n+2}C_n=66$

${}_{n+2}C_2=66$

$\dfrac{(n+2)(n+1)}{2\times1}=66$

$(n+2)(n+1)=132=12\times11$

$\therefore n=10$ ($\because n$은 자연수)

10-1 답 (1) 220 (2) 56

(1) 구하는 해의 개수는 4개의 문자 $x$, $y$, $z$, $w$에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_9={}_{12}C_9={}_{12}C_3=\dfrac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$

(2) $x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$, $w-1=d$라 하면

$x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$, $w=d+1$

이를 방정식 $x+y+z+w=9$에 대입하면

$(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1)=9$

$\therefore a+b+c+d=5$ (단, $a$, $b$, $c$, $d$는 음이 아닌 정수)

따라서 구하는 해의 개수는 방정식 $a+b+c+d=5$의 음이 아닌 정수인 해의 개수, 즉 4개의 문자 $a$, $b$, $c$, $d$에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

10-2 답 91

$x+1=a$, $y+1=b$, $z+1=c$라 하면

$x=a-1$, $y=b-1$, $z=c-1$

이를 방정식 $x+y+z=9$에 대입하면

$(a-1)+(b-1)+(c-1)=9$

$\therefore a+b+c=12$ (단, $a$, $b$, $c$는 음이 아닌 정수)

따라서 구하는 해의 개수는 방정식 $a+b+c=12$의 음이 아닌 정수인 해의 개수, 즉 3개의 문자 $a$, $b$, $c$에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{12}={}_{14}C_{12}={}_{14}C_2=\dfrac{14\times13}{2\times1}=91$

11-1 답 (1) 840 (2) 35 (3) 210

(1) 주어진 조건을 만족시키는 함수는 일대일함수이다.

따라서 집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7에서 서로 다른 4개를 택하여 집합 $X$의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

${}_7P_4=840$

(2) 주어진 조건에 의하여

$f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$

따라서 집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7에서 서로 다른 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 집합 $X$의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

${}_7C_4={}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

(3) 주어진 조건에 의하여

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$

따라서 집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례대로 집합 $X$의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

${}_7H_4={}_{10}C_4=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

11-2 답 63

주어진 조건에 의하여

$f(1)\le f(2)\le f(3)=6\le f(4)$

집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례대로 집합 $X$의 원소 1, 2에 대응시키는 경우의 수는

${}_6H_2={}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

또 집합 $Y$의 원소 6, 7, 8에서 1개를 택하여 집합 $X$의 원소 4에 대응시키는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

따라서 구하는 함수의 개수는

$21\times3=63$

## 연습문제

23~25쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 ⑤ | 2 8 | 3 ⑤ | 4 ③ | 5 30 |
| 6 192 | 7 ⑤ | 8 33 | 9 ⑤ | 10 45 |
| 11 3 | 12 ② | 13 25 | 14 ④ | 15 35 |
| 16 36 | 17 ④ | 18 42 | 19 ③ | 20 44 |

**1** A 지역의 중학생 2명에게 고등학교를 배정하는 경우의 수는 서로 다른 3개의 고등학교에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$

B 지역의 중학생 4명에게 고등학교를 배정하는 경우의 수는 서로 다른 2개의 고등학교에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_4=2^4=16$

따라서 구하는 경우의 수는

$9\times16=144$

**2** 두 기호 •와 −를 $n$개 사용하여 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는

${}_2\Pi_n=2^n$

만들 수 있는 서로 다른 신호가 200개 이상이므로

$2^n\ge200$ …… ㉠

이때 $2^7=128$, $2^8=256$이므로 ㉠을 만족시키는 $n$의 최솟값은 8이다.

**3** 서로 다른 공 6개 중에서 주머니 A에 넣을 공 3개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

남은 공 3개를 두 주머니 B, C에 나누어 넣는 경우의 수는 2개의 주머니에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\times8=160$

**4** 5의 배수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 5로 정해진다.

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에 5개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 배열하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

**5** (i) 맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로 0, 1, 2, 3으로 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$3\times{}_4\Pi_2=3\times4^2=48$

(ii) 숫자 1을 포함하지 않는 자연수, 즉 0, 2, 3으로 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$2\times{}_3\Pi_2=2\times3^2=18$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$48-18=30$

**6** $f(2)=0$으로 정해지고, $f(3)\ne0$이므로 $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3가지

또 집합 $Y$의 원소 0, 1, 2, 3의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 $X$의 원소 1, 4, 5에 대응시키는 경우의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 구하는 함수의 개수는

$3\times64=192$

**7** w, n, s, y를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, e, d, X, e, X, d, a, X의 9개의 문자를 일렬로 배열한 후 4개의 X를 앞에서부터 순서대로 w, n, s, y로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{9!}{4!\times2!\times2!}=3780$

**8** (i) 문자 $a$가 두 번 나오는 경우

$a$를 2개 택하고 $b$, $c$에서 2개를 택하는 경우는

$(a, a, b, b)$ 또는 $(a, a, b, c)$ 또는 $(a, a, c, c)$

ⓘ $a$, $a$, $b$, $b$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

ⓘⓘ $a$, $a$, $b$, $c$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

ⓘⓘⓘ $a$, $a$, $c$, $c$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

ⓘ, ⓘⓘ, ⓘⓘⓘ에서 문자 $a$가 두 번 나오는 경우의 수는

$6+12+6=24$

(ii) 문자 $a$가 세 번 나오는 경우

$a$를 3개 택하고 $b$, $c$에서 1개를 택하는 경우는

$(a, a, a, b)$ 또는 $(a, a, a, c)$

ⓘ $a$, $a$, $a$, $b$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

ⓘⓘ $a$, $a$, $a$, $c$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

ⓘ, ⓘⓘ에서 문자 $a$가 세 번 나오는 경우의 수는

$4+4=8$

(iii) 문자 $a$가 네 번 나오는 경우

$a$를 4개 택하는 경우는 $(a, a, a, a)$

$a, a, a, a$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{4!}=1$

따라서 문자 $a$가 네 번 나오는 경우의 수는 1

(i), (ii), (iii)에서 문자 $a$가 두 번 이상 나오는 경우의 수는

$24+8+1=33$

**9** 3의 배수의 각 자리의 숫자의 합은 3의 배수이다.

1, 1, 2, 2, 2, 3, 3에서 합이 3의 배수가 되도록 4개의 숫자를 택하는 경우는

(1, 1, 2, 2) 또는 (1, 2, 3, 3) 또는 (2, 2, 2, 3)

(i) 1, 1, 2, 2를 일렬로 배열하여 만들 수 있는 자연수의 개수는 $\frac{4!}{2!\times2!}=6$

(ii) 1, 2, 3, 3을 일렬로 배열하여 만들 수 있는 자연수의 개수는 $\frac{4!}{2!}=12$

(iii) 2, 2, 2, 3을 일렬로 배열하여 만들 수 있는 자연수의 개수는 $\frac{4!}{3!}=4$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$6+12+4=22$

**10** A 지점에서 P 지점까지는 오른쪽으로 4칸, 위쪽으로 2칸 가야 하므로 그 경우의 수는 $\frac{6!}{4!\times2!}=15$

P 지점에서 B 지점까지는 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 1칸 가야 하므로 그 경우의 수는 $\frac{3!}{2!\times1!}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times3=45$

**11** ${}_{10-r}\mathrm{H}_{r+1}={}_{10-r+r+1-1}\mathrm{C}_{r+1}={}_{10}\mathrm{C}_{r+1}$

${}_{11-2r}\mathrm{H}_{2r}={}_{11-2r+2r-1}\mathrm{C}_{2r}={}_{10}\mathrm{C}_{2r}$

이때 ${}_{10-r}\mathrm{H}_{r+1}={}_{11-2r}\mathrm{H}_{2r}$에서

${}_{10}\mathrm{C}_{r+1}={}_{10}\mathrm{C}_{2r}$

즉, $r+1=2r$ 또는 $10-(r+1)=2r$이므로

$r=1$ 또는 $r=3$

그런데 $r>1$이므로 $r=3$

**12** 구하는 자연수의 개수는 서로 다른 4개에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{4}\mathrm{H}_{12}={}_{15}\mathrm{C}_{12}={}_{15}\mathrm{C}_{3}=455$

**13** 파란색 카드가 1장이므로 파란색 카드를 택하지 않는 경우와 택하는 경우로 나누어 생각한다.

(i) 파란색 카드를 택하지 않는 경우

빨간색, 노란색, 초록색 카드의 3종류의 카드에서 중복을 허용하여 4장을 택하면 되므로 그 경우의 수는

${}_{3}\mathrm{H}_{4}={}_{6}\mathrm{C}_{4}={}_{6}\mathrm{C}_{2}=15$

(ii) 파란색 카드를 1장 택하는 경우

빨간색, 노란색, 초록색 카드의 3종류의 카드에서 중복을 허용하여 나머지 3장을 택하면 되므로 그 경우의 수는

${}_{3}\mathrm{H}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$15+10=25$

**14** $a$를 포함하는 항의 개수는 모든 항의 개수에서 $a$를 포함하지 않는 항의 개수를 뺀 것과 같다.

(i) $(a+b+c+d)^8$의 전개식에서 각 항은 4개의 문자 $a$, $b$, $c$, $d$에서 중복을 허용하여 8개를 택하여 곱한 것이므로 모든 항의 개수는

${}_{4}\mathrm{H}_{8}={}_{11}\mathrm{C}_{8}={}_{11}\mathrm{C}_{3}=165$

(ii) $(a+b+c+d)^8$의 전개식에서 $a$를 포함하지 않는 항은 $a$를 제외한 3개의 문자 $b$, $c$, $d$에서 중복을 허용하여 8개를 택하여 곱한 것이므로 항의 개수는

${}_{3}\mathrm{H}_{8}={}_{10}\mathrm{C}_{8}={}_{10}\mathrm{C}_{2}=45$

(i), (ii)에서 $a$를 포함하는 항의 개수는

$165-45=120$

다른 풀이

$(a+b+c+d)^8$의 전개식에서 $a$를 포함하는 항은 $a$를 먼저 하나 택하고 남은 7개의 문자를 택하여 곱하면 된다.

따라서 구하는 항의 개수는 서로 다른 4개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{4}\mathrm{H}_{7}={}_{10}\mathrm{C}_{7}={}_{10}\mathrm{C}_{3}=120$

**15** $x$, $y$, $z$, $w$가 음이 아닌 정수이므로

$x+y+z+w=0$ 또는 $x+y+z+w=1$

또는 $x+y+z+w=2$ 또는 $x+y+z+w=3$

(i) $x+y+z+w=0$을 만족시키는 순서쌍은

(0, 0, 0, 0)의 1개

(ii) $x+y+z+w=1$을 만족시키는 순서쌍의 개수는

${}_{4}\mathrm{H}_{1}={}_{4}\mathrm{C}_{1}=4$

(iii) $x+y+z+w=2$를 만족시키는 순서쌍의 개수는

${}_{4}\mathrm{H}_{2}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$

(iv) $x+y+z+w=3$을 만족시키는 순서쌍의 개수는

${}_{4}\mathrm{H}_{3}={}_{6}\mathrm{C}_{3}=20$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+4+10+20=35$

**16** 치역과 공역이 같은 함수의 개수는 모든 함수의 개수에서 치역과 공역이 같지 않은 함수의 개수를 뺀 것과 같다.

(ⅰ) $X$에서 $Y$로의 함수의 개수는

${}_{3}\Pi_{4}=3^4=81$

(ⅱ) 치역의 원소가 1개인 함수

치역이 $\{a\}$ 또는 $\{b\}$ 또는 $\{c\}$인 함수의 개수는 3

(ⅲ) 치역의 원소가 2개인 함수

치역이 $\{a, b\}$인 함수의 개수는 공역이 $\{a, b\}$인 함수의 개수에서 치역이 $\{a\}$ 또는 $\{b\}$인 함수의 개수를 뺀 것과 같으므로

${}_{2}\Pi_{4}-2=2^4-2=14$

같은 방법으로 치역이 $\{a, c\}$, $\{b, c\}$인 함수의 개수도 각각 14이므로 치역의 원소가 2개인 함수의 개수는

$14\times3=42$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 함수의 개수는

$81-(3+42)=36$

**17** ㈏에서 B가 받는 사탕의 개수는 0 또는 1 또는 2

(ⅰ) B가 받는 사탕의 개수가 0인 경우

두 명의 학생 A, C에게 5개의 사탕을 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{2}\Pi_{5}=2^5=32$

이때 A가 사탕을 받지 못하는 경우의 수는 1

따라서 ㈎를 만족시키고 B가 받는 사탕의 개수가 0인 경우의 수는

$32-1=31$

(ⅱ) B가 받는 사탕의 개수가 1인 경우

B가 받는 사탕을 정하는 경우의 수는

${}_{5}C_{1}=5$

두 명의 학생 A, C에게 남은 4개의 사탕을 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{2}\Pi_{4}=2^4=16$

이때 A가 사탕을 받지 못하는 경우의 수는 1

따라서 ㈎를 만족시키고 B가 받는 사탕의 개수가 1인 경우의 수는

$5\times(16-1)=75$

(ⅲ) B가 받는 사탕의 개수가 2인 경우

B가 받는 사탕을 정하는 경우의 수는

${}_{5}C_{2}=10$

두 명의 학생 A, C에게 남은 3개의 사탕을 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{2}\Pi_{3}=2^3=8$

이때 A가 사탕을 받지 못하는 경우의 수는 1

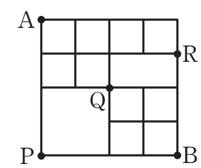
따라서 ㈎를 만족시키고 B가 받는 사탕의 개수가 2인 경우의 수는

$10\times(8-1)=70$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$31+75+70=176$

**18** 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 P, Q, R 중에서 어느 한 지점은 반드시 거치지만 두 지점 이상을 동시에 거쳐 최단 거리로 가는 경우는 없으므로 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는




A → P → B 또는 A → Q → B 또는 A → R → B

(ⅰ) A → P → B로 가는 경우의 수는

$1\times1=1$

(ⅱ) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\times2!}\times\dfrac{4!}{2!\times2!}=6\times6=36$

(ⅲ) A → R → B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{4!\times1!}\times1=5$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$1+36+5=42$

**19** ㈎에서 $a+b+c=9+d$ ······ ㉠

㈏에서 $d\le4$이고 $d$는 음이 아닌 정수이므로

(ⅰ) $d=0$인 경우

㈏에서 $c\ge d=0$이므로 ㉠에서

$a+b+c=9$ (단, $a$, $b$, $c$는 음이 아닌 정수)

이 방정식을 만족시키는 순서쌍의 개수는

${}_{3}H_{9}={}_{11}C_{9}={}_{11}C_{2}=55$

(ⅱ) $d=1$인 경우

㈏에서 $c\ge d=1$이므로 $c-1=x$라 하면 ㉠에서

$a+b+(x+1)=9+1$

$\therefore a+b+x=9$ (단, $a$, $b$, $x$는 음이 아닌 정수)

이 방정식을 만족시키는 순서쌍의 개수는

${}_{3}H_{9}={}_{11}C_{9}={}_{11}C_{2}=55$

(ⅲ) $d=2$인 경우

㈏에서 $c\ge d=2$이므로 $c-2=y$라 하면 ㉠에서

$a+b+(y+2)=9+2$

$\therefore a+b+y=9$ (단, $a$, $b$, $y$는 음이 아닌 정수)
이 방정식을 만족시키는 순서쌍의 개수는
${}_{3}H_{9}={}_{11}C_{9}={}_{11}C_{2}=55$

(iv) $d=3$인 경우
(나)에서 $c \geq d=3$이므로 $c-3=z$라 하면 ㉠에서
$a+b+(z+3)=9+3$
$\therefore a+b+z=9$ (단, $a$, $b$, $z$는 음이 아닌 정수)
이 방정식을 만족시키는 순서쌍의 개수는
${}_{3}H_{9}={}_{11}C_{9}={}_{11}C_{2}=55$

(v) $d=4$인 경우
(나)에서 $c \geq d=4$이므로 $c-4=w$라 하면 ㉠에서
$a+b+(w+4)=9+4$
$\therefore a+b+w=9$ (단, $a$, $b$, $w$는 음이 아닌 정수)
이 방정식을 만족시키는 순서쌍의 개수는
${}_{3}H_{9}={}_{11}C_{9}={}_{11}C_{2}=55$

(i)~(v)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$55+55+55+55+55=275$

**20** $f(1)+f(3)=5$이고
$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$이므로
$f(1)=1$, $f(3)=4$ 또는 $f(1)=2$, $f(3)=3$

(i) $f(1)=1$, $f(3)=4$인 경우
$1 \leq f(2) \leq 4 \leq f(4) \leq f(5)$
$1 \leq f(2) \leq 4$에서 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4가지
$4 \leq f(4) \leq f(5)$에서 $f(4)$, $f(5)$의 값은 집합 $Y$의 원소 4, 5, 6에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례대로 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 ${}_{3}H_{2}={}_{4}C_{2}=6$
따라서 $f(1)=1$, $f(3)=4$인 함수의 개수는
$4 \times 6=24$

(ii) $f(1)=2$, $f(3)=3$인 경우
$2 \leq f(2) \leq 3 \leq f(4) \leq f(5)$
$2 \leq f(2) \leq 3$에서 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3의 2가지
$3 \leq f(4) \leq f(5)$에서 $f(4)$, $f(5)$의 값은 집합 $Y$의 원소 3, 4, 5, 6에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례대로 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 ${}_{4}H_{2}={}_{5}C_{2}=10$
따라서 $f(1)=2$, $f(3)=3$인 함수의 개수는
$2 \times 10=20$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는
$24+20=44$

# Ⅰ-1 02 이항정리

## 1 이항정리

### 개념 Check 26쪽

**1** 답 (1) $\boldsymbol{8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3}$
(2) $\boldsymbol{x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1}$

(1) $(2x+y)^3={}_{3}C_{0}(2x)^3+{}_{3}C_{1}(2x)^2y+{}_{3}C_{2}(2x)y^2+{}_{3}C_{3}y^3$
$=8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$

(2) $(x-1)^5={}_{5}C_{0}x^5+{}_{5}C_{1}x^4\times(-1)+{}_{5}C_{2}x^3\times(-1)^2$
$+{}_{5}C_{3}x^2\times(-1)^3+{}_{5}C_{4}x\times(-1)^4$
$+{}_{5}C_{5}\times(-1)^5$
$=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$

### 문제 27~28쪽

**01-1** 답 (1) **60** (2) **250**

(1) $(2x-y)^6$의 전개식의 일반항은
${}_{6}C_{r}(2x)^{6-r}(-y)^r={}_{6}C_{r}2^{6-r}(-1)^r x^{6-r}y^r$
$x^2y^4$항은 $6-r=2$, $r=4$일 때이다.
따라서 구하는 $x^2y^4$의 계수는
${}_{6}C_{4}2^2(-1)^4=15\times4\times1=60$

(2) $\left(x^2+\dfrac{5}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은
${}_{5}C_{r}(x^2)^{5-r}\left(\dfrac{5}{x}\right)^r={}_{5}C_{r}5^r\dfrac{x^{10-2r}}{x^r}$
$x^4$항은 $10-2r-r=4$일 때이므로
$r=2$
따라서 구하는 $x^4$의 계수는
${}_{5}C_{2}5^2=10\times25=250$

**01-2** 답 **2**

$(2x+a)^6$의 전개식의 일반항은
${}_{6}C_{r}(2x)^{6-r}a^r={}_{6}C_{r}2^{6-r}a^r x^{6-r}$
$x^2$항은 $6-r=2$일 때이므로
$r=4$
따라서 $x^2$의 계수는
${}_{6}C_{4}2^2a^4=15\times4\times a^4=60a^4$
한편 $x^4$항은 $6-r=4$일 때이므로
$r=2$
따라서 $x^4$의 계수는
${}_{6}C_{2}2^4a^2=15\times16\times a^2=240a^2$
이때 $x^2$의 계수와 $x^4$의 계수가 같으므로
$60a^4=240a^2$, $a^4-4a^2=0$
$a^2(a+2)(a-2)=0 \qquad \therefore a=2 \ (\because a>0)$

01-**3** 답 $-2$

$\left(ax-\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(ax)^{4-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r a^{4-r}(-1)^r\frac{x^{4-r}}{x^r}$

$x^2$항은 $4-r-r=2$일 때이므로

$r=1$

이때 $x^2$의 계수가 32이므로

${}_4C_1 a^3(-1)=32$

$-4a^3=32$, $a^3=-8$

$\therefore a=-2$ ($\because$ $a$는 실수)

02-**1** 답 (1) **16** (2) $\mathbf{-10}$

(1) $(x+1)^3$의 전개식의 일반항은 ${}_3C_r x^{3-r}$

$(x-2)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_s x^{4-s}(-2)^s={}_4C_s(-2)^s x^{4-s}$

따라서 $(x+1)^3(x-2)^4$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r x^{3-r}\times{}_4C_s(-2)^s x^{4-s}={}_3C_r\times{}_4C_s(-2)^s x^{7-r-s}$ …… ㉠

$x$항은 $7-r-s=1$ ($r$, $s$는 $0\le r\le 3$, $0\le s\le 4$인 정수)일 때이므로 $r+s=6$에서

$r=2$, $s=4$ 또는 $r=3$, $s=3$

(i) $r=2$, $s=4$일 때, ㉠에서

${}_3C_2\times{}_4C_4(-2)^4x=48x$

(ii) $r=3$, $s=3$일 때, ㉠에서

${}_3C_3\times{}_4C_3(-2)^3x=-32x$

(i), (ii)에서 구하는 $x$의 계수는

$48+(-32)=16$

(2) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r x^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_5C_r(-1)^r\frac{x^{5-r}}{x^r}$ …… ㉠

이때 $(x^2-x)\left(x-\frac{1}{x}\right)^5=x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^5-x\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$이므로 전개식에서 $x^2$항은

(i) $x^2$과 ㉠의 상수항의 곱

(ii) $-x$와 ㉠의 $x$항의 곱

일 때 나타난다.

(i) ㉠의 상수항은 $5-r=r$일 때이므로 $r=\frac{5}{2}$

그런데 $r$는 $0\le r\le 5$인 정수이므로 ㉠의 상수항은 존재하지 않는다.

(ii) ㉠의 $x$항은 $5-r-r=1$일 때이므로 $r=2$

㉠에서 ${}_5C_2(-1)^2x=10x$

(i), (ii)에서 구하는 $x^2$의 계수는

$-1\times 10=-10$

02-**2** 답 $-3$

$(1+x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r x^r$

$(x^3+a)^2$의 전개식의 일반항은

${}_2C_s(x^3)^{2-s}a^s={}_2C_s a^s x^{6-3s}$

따라서 $(1+x)^4(x^3+a)^2$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r x^r\times{}_2C_s a^s x^{6-3s}={}_4C_r\times{}_2C_s a^s x^{r-3s+6}$ …… ㉠

$x^6$항은 $r-3s+6=6$ ($r$, $s$는 $0\le r\le 4$, $0\le s\le 2$인 정수)일 때이므로 $r-3s=0$에서

$r=0$, $s=0$ 또는 $r=3$, $s=1$

(i) $r=0$, $s=0$일 때, ㉠에서

${}_4C_0\times{}_2C_0 a^0x^6=x^6$

(ii) $r=3$, $s=1$일 때, ㉠에서

${}_4C_3\times{}_2C_1 a^1x^6=8ax^6$

(i), (ii)에서 $x^6$의 계수는 $1+8a$이므로

$1+8a=-23$

$\therefore a=-3$

## 2 이항계수의 성질

**개념 Check** 30쪽

**1** 답 **2, 3, 6, 10, 10**

(1) $\boldsymbol{x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4}$

(2) $\boldsymbol{a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5}$

파스칼의 삼각형의 각 행에서 이웃하는 두 수의 합은 그 다음 행에서 두 수의 중앙에 있는 수와 같으므로 파스칼의 삼각형을 완성하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \boxed{2} & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \boxed{3} & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & \boxed{10} & & \boxed{10} & & 5 & & 1
\end{array}
$$

(1) 파스칼의 삼각형에서 4행의 수는 1, 4, 6, 4, 1이므로

$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

(2) 파스칼의 삼각형에서 5행의 수는 1, 5, 10, 10, 5, 1이므로

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

## 문제 31~34쪽

**03-1** 답 ④

$${}_{2}C_2+{}_{3}C_2+{}_{4}C_2+\cdots+{}_{10}C_2$$
$$={}_{3}C_3+{}_{3}C_2+{}_{4}C_2+\cdots+{}_{10}C_2$$
$$={}_{4}C_3+{}_{4}C_2+\cdots+{}_{10}C_2$$
$$={}_{5}C_3+\cdots+{}_{10}C_2$$
$$\vdots$$
$$={}_{10}C_3+{}_{10}C_2={}_{11}C_3$$

${}_{2}C_2={}_{3}C_3$

${}_{3}C_2+{}_{3}C_3={}_{4}C_3$

${}_{4}C_2+{}_{4}C_3={}_{5}C_3$

**03-2** 답 (1) **35** (2) **70**

(1) ${}_{2}C_0+{}_{3}C_1+{}_{4}C_2+{}_{5}C_3+{}_{6}C_4$
$$={}_{3}C_0+{}_{3}C_1+{}_{4}C_2+{}_{5}C_3+{}_{6}C_4$$
$$={}_{4}C_1+{}_{4}C_2+{}_{5}C_3+{}_{6}C_4$$
$$={}_{5}C_2+{}_{5}C_3+{}_{6}C_4$$
$$={}_{6}C_3+{}_{6}C_4$$
$$={}_{7}C_4={}_{7}C_3=35$$

${}_{2}C_0={}_{3}C_0$

${}_{3}C_0+{}_{3}C_1={}_{4}C_1$

${}_{4}C_1+{}_{4}C_2={}_{5}C_2$

${}_{5}C_2+{}_{5}C_3={}_{6}C_3$

(2) ${}_{3}C_3+{}_{4}C_3+{}_{5}C_3+{}_{6}C_3+{}_{7}C_3$
$$={}_{4}C_4+{}_{4}C_3+{}_{5}C_3+{}_{6}C_3+{}_{7}C_3$$
$$={}_{5}C_4+{}_{5}C_3+{}_{6}C_3+{}_{7}C_3$$
$$={}_{6}C_4+{}_{6}C_3+{}_{7}C_3$$
$$={}_{7}C_4+{}_{7}C_3$$
$$={}_{8}C_4=70$$

${}_{3}C_3={}_{4}C_4$

${}_{4}C_3+{}_{4}C_4={}_{5}C_4$

${}_{5}C_3+{}_{5}C_4={}_{6}C_4$

${}_{6}C_3+{}_{6}C_4={}_{7}C_4$

**04-1** 답 ④

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_{n}C_r x^r$

$x^2$항은 $(1+x)^2$의 전개식에서부터 나오므로

$(1+x)^2$의 전개식에서 $x^2$의 계수는 ${}_{2}C_2$

$(1+x)^3$의 전개식에서 $x^2$의 계수는 ${}_{3}C_2$

$\vdots$

$(1+x)^7$의 전개식에서 $x^2$의 계수는 ${}_{7}C_2$

따라서 구하는 $x^2$의 계수는

$${}_{2}C_2+{}_{3}C_2+{}_{4}C_2+{}_{5}C_2+{}_{6}C_2+{}_{7}C_2$$
$$={}_{3}C_3+{}_{3}C_2+{}_{4}C_2+{}_{5}C_2+{}_{6}C_2+{}_{7}C_2$$
$$={}_{4}C_3+{}_{4}C_2+{}_{5}C_2+{}_{6}C_2+{}_{7}C_2$$
$$={}_{5}C_3+{}_{5}C_2+{}_{6}C_2+{}_{7}C_2$$
$$={}_{6}C_3+{}_{6}C_2+{}_{7}C_2$$
$$={}_{7}C_3+{}_{7}C_2={}_{8}C_3$$

**다른 풀이** 대수를 학습한 학생은 등비수열의 합을 이용하여 다음과 같이 풀 수 있습니다.

$$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^7$$
$$=\frac{(1+x)\{(1+x)^7-1\}}{(1+x)-1}$$
$$=\frac{(1+x)^8-(1+x)}{x}$$

전개식에서 $x^2$의 계수는 $(1+x)^8$의 전개식에서 $x^3$의 계수와 같다.

$(1+x)^8$의 전개식의 일반항은 ${}_{8}C_r x^r$

따라서 $(1+x)^8$의 전개식에서 $x^3$의 계수는 ${}_{8}C_3$이므로 구하는 $x^2$의 계수도 ${}_{8}C_3$이다.

**04-2** 답 **210**

주어진 다항식의 전개식에서 $x^7$항은 $x$와 $(1+x^2)^n$의 $x^6$항의 곱일 때 나타나므로 $x^7$의 계수는 $(1+x^2)^n$의 전개식에서 $x^6$의 계수와 같다.

$(1+x^2)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_{n}C_r x^{2r}$

$x^6$항은 $(1+x^2)^3$의 전개식에서부터 나오므로

$(1+x^2)^3$의 전개식에서 $x^6$의 계수는 ${}_{3}C_3$

$(1+x^2)^4$의 전개식에서 $x^6$의 계수는 ${}_{4}C_3$

$\vdots$

$(1+x^2)^9$의 전개식에서 $x^6$의 계수는 ${}_{9}C_3$

따라서 구하는 계수는

$${}_{3}C_3+{}_{4}C_3+{}_{5}C_3+\cdots+{}_{9}C_3$$
$$={}_{4}C_4+{}_{4}C_3+{}_{5}C_3+\cdots+{}_{9}C_3$$
$$={}_{5}C_4+{}_{5}C_3+\cdots+{}_{9}C_3$$
$$={}_{6}C_4+\cdots+{}_{9}C_3$$
$$\vdots$$
$$={}_{9}C_4+{}_{9}C_3$$
$$={}_{10}C_4=210$$

**05-1** 답 (1) **8** (2) **1**

(1) ${}_{n}C_0+{}_{n}C_1+{}_{n}C_2+\cdots+{}_{n}C_n=2^n$이므로

$${}_{n}C_1+{}_{n}C_2+\cdots+{}_{n}C_n=2^n-{}_{n}C_0$$
$$=2^n-1$$

$200<{}_{n}C_1+{}_{n}C_2+\cdots+{}_{n}C_n<300$에서

$200<2^n-1<300$

$\therefore\ 201<2^n<301$

이때 $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$이므로

$n=8$

(2) ${}_{n}C_0-{}_{n}C_1+{}_{n}C_2-\cdots+(-1)^n{}_{n}C_n=0$이므로

$${}_{30}C_0-{}_{30}C_1+{}_{30}C_2-\cdots-{}_{30}C_{29}+{}_{30}C_{30}=0$$
$${}_{30}C_0-({}_{30}C_1-{}_{30}C_2+\cdots+{}_{30}C_{29}-{}_{30}C_{30})=0$$
$$\therefore\ {}_{30}C_1-{}_{30}C_2+\cdots+{}_{30}C_{29}-{}_{30}C_{30}={}_{30}C_0=1$$

**05-2** 답 **9**

${}_{n}C_0+{}_{n}C_1+{}_{n}C_2+{}_{n}C_3+\cdots+{}_{n}C_n=2^n$이므로

$${}_{n}C_1+{}_{n}C_2+{}_{n}C_3+\cdots+{}_{n}C_{n-1}=2^n-({}_{n}C_0+{}_{n}C_n)$$
$$=2^n-2$$

즉, $2^n-2=510$이므로

$2^n=512=2^9$ $\quad\therefore\ n=9$

**05-3** 답 **7**

${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots=2^{n-1}$이므로

${}_{16}C_0+{}_{16}C_2+{}_{16}C_4+\cdots+{}_{16}C_{16}=2^{16-1}=2^{15}$

또 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+\cdots+{}_9C_9=2^9$

이때 ${}_9C_0={}_9C_9,\ {}_9C_1={}_9C_8,\ \cdots,\ {}_9C_4={}_9C_5$이므로

$({}_9C_0+{}_9C_1+\cdots+{}_9C_4)+({}_9C_5+{}_9C_6+\cdots+{}_9C_9)=2^9$에서

$2({}_9C_0+{}_9C_1+\cdots+{}_9C_4)=2^9$

$\therefore\ {}_9C_0+{}_9C_1+\cdots+{}_9C_4=2^8$

따라서 $\dfrac{{}_{16}C_0+{}_{16}C_2+{}_{16}C_4+\cdots+{}_{16}C_{16}}{{}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4}=\dfrac{2^{15}}{2^8}=2^7$이므로

$n=7$

다른 풀이

${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots=2^{n-1}$이므로

${}_{16}C_0+{}_{16}C_2+{}_{16}C_4+\cdots+{}_{16}C_{16}=2^{16-1}=2^{15}$

${}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots=2^{n-1}$이므로

${}_9C_1+{}_9C_3+{}_9C_5+{}_9C_7+{}_9C_9=2^{9-1}=2^8$

이때 ${}_9C_0={}_9C_9,\ {}_9C_2={}_9C_7,\ {}_9C_4={}_9C_5$이므로

${}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4={}_9C_9+{}_9C_1+{}_9C_7+{}_9C_3+{}_9C_5$

$\therefore\ {}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4=2^8$

따라서 $\dfrac{{}_{16}C_0+{}_{16}C_2+{}_{16}C_4+\cdots+{}_{16}C_{16}}{{}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4}=\dfrac{2^{15}}{2^8}=2^7$이므로

$n=7$

**06-1** 답 (1) $\mathbf{4^{10}}$ (2) **21**

(1) $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=3,\ n=10$을 대입하면

$(1+3)^{10}={}_{10}C_0+3\,{}_{10}C_1+3^2\,{}_{10}C_2+\cdots+3^{10}\,{}_{10}C_{10}$

$\therefore\ {}_{10}C_0+3\,{}_{10}C_1+3^2\,{}_{10}C_2+\cdots+3^{10}\,{}_{10}C_{10}=4^{10}$

(2) $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=20,\ n=21$을 대입하면

$21^{21}={}_{21}C_0+20\,{}_{21}C_1+20^2\,{}_{21}C_2+20^3\,{}_{21}C_3+\cdots+20^{21}\,{}_{21}C_{21}$

$=1+20\times21+20^2({}_{21}C_2+20\,{}_{21}C_3+\cdots+20^{19}\,{}_{21}C_{21})$

$=21+400+400({}_{21}C_2+20\,{}_{21}C_3+\cdots+20^{19}\,{}_{21}C_{21})$

$=21+400(1+{}_{21}C_2+20\,{}_{21}C_3+\cdots+20^{19}\,{}_{21}C_{21})$

따라서 $21^{21}$을 400으로 나누었을 때의 나머지는 21이다.

**06-2** 답 ⑤

$f(1)+f(2)+\cdots+f(10)$

$={}_{10}C_1\,4^9+{}_{10}C_2\,4^8+\cdots+{}_{10}C_{10}\,4^0$ …… ㉠

$(x+1)^n={}_nC_0x^n+{}_nC_1x^{n-1}+{}_nC_2x^{n-2}+\cdots+{}_nC_nx^0$의 양변에 $x=4,\ n=10$을 대입하면

$5^{10}={}_{10}C_0\,4^{10}+{}_{10}C_1\,4^9+{}_{10}C_2\,4^8+\cdots+{}_{10}C_{10}\,4^0$

따라서 ㉠에서

$f(1)+f(2)+\cdots+f(10)=5^{10}-{}_{10}C_0\,4^{10}$

$=5^{10}-4^{10}$

## 연습문제

35~36쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** 15 | **2** 80 | **3** ② | **4** ㄴ, ㄷ | **5** ② |
| **6** 81 | **7** ④ | **8** 126 | **9** ㄴ | **10** ⑤ |
| **11** 0 | **12** 69 | **13** ② | **14** ① | |

**1** $\left(x+\dfrac{3}{x^2}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r\,x^{5-r}\left(\dfrac{3}{x^2}\right)^r={}_5C_r\,3^r\dfrac{x^{5-r}}{x^{2r}}$

$x^2$항은 $5-r-2r=2$일 때이므로 $r=1$

따라서 $x^2$의 계수는

${}_5C_1\,3^1=5\times3=15$

**2** $(1+2x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r\,(2x)^r={}_nC_r\,2^rx^r$

$x^4$항은 $r=4$일 때이고, $x^4$의 계수가 80이므로

${}_nC_4\,2^4=80$

${}_nC_4=5$ $\quad\therefore\ n=5$

따라서 $x^3$의 계수는

${}_5C_3\,2^3=10\times8=80$

**3** $(1+5x)^2$의 전개식의 일반항은

${}_2C_r\,(5x)^r={}_2C_r\,5^rx^r$

$(1-x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_s\,(-x)^s={}_5C_s\,(-1)^sx^s$

따라서 $(1+5x)^2(1-x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_2C_r\,5^rx^r\times{}_5C_s\,(-1)^sx^s={}_2C_r\times{}_5C_s\,5^r(-1)^sx^{r+s}$ …… ㉠

$x^2$항은 $r+s=2$ ($r,\ s$는 $0\le r\le2,\ 0\le s\le5$인 정수)일 때이므로

$r=0,\ s=2$ 또는 $r=1,\ s=1$ 또는 $r=2,\ s=0$

(i) $r=0,\ s=2$일 때, ㉠에서

${}_2C_0\times{}_5C_2\,5^0(-1)^2x^2=10x^2$

(ii) $r=1,\ s=1$일 때, ㉠에서

${}_2C_1\times{}_5C_1\,5^1(-1)^1x^2=-50x^2$

(iii) $r=2,\ s=0$일 때, ㉠에서

${}_2C_2\times{}_5C_0\,5^2(-1)^0x^2=25x^2$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 $x^2$의 계수는

$10+(-50)+25=-15$

**4** ㄱ. $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은

${}_{10}C_r\,x^{10-r}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^r={}_{10}C_r\dfrac{x^{10-r}}{x^{2r}}$

이때 상수항은 $10-r=2r$일 때이므로

$r=\dfrac{10}{3}$

그런데 $r$는 $0\le r\le 10$인 정수이므로 상수항은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\left(x^2+\frac{4}{x}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은

$${}_{10}\mathrm{C}_r(x^2)^{10-r}\left(\frac{4}{x}\right)^r={}_{10}\mathrm{C}_r4^r\frac{x^{20-2r}}{x^r} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(1+x)\left(x^2+\frac{4}{x}\right)^{10}=\left(x^2+\frac{4}{x}\right)^{10}+x\left(x^2+\frac{4}{x}\right)^{10}$

이므로 전개식에서 상수항은

(i) 1과 ㉠의 상수항의 곱

(ii) $x$와 ㉠의 $\frac{1}{x}$항의 곱

일 때 나타난다.

(i) ㉠의 상수항은 $20-2r=r$일 때이므로

$r=\frac{20}{3}$

그런데 $r$는 $0\le r\le 10$인 정수이므로 ㉠에서 상수항은 존재하지 않는다.

(ii) ㉠의 $\frac{1}{x}$항은 $r-(20-2r)=1$일 때이므로

$r=7$

즉, $\frac{1}{x}$항이 존재한다.

따라서 주어진 식의 전개식에서 상수항이 존재한다.

ㄷ. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^8$의 전개식의 일반항은

$${}_8\mathrm{C}_r(x^2)^{8-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_8\mathrm{C}_r(-1)^r\frac{x^{16-2r}}{x^r} \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때 $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^8=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^8+\frac{1}{x}\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^8$

이므로 전개식에서 상수항은

(i) 1과 ㉡의 상수항의 곱

(ii) $\frac{1}{x}$과 ㉡의 $x$항의 곱

일 때 나타난다.

(i) ㉡의 상수항은 $16-2r=r$일 때이므로

$r=\frac{16}{3}$

그런데 $r$는 $0\le r\le 8$인 정수이므로 ㉡에서 상수항은 존재하지 않는다.

(ii) ㉡의 $x$항은 $16-2r-r=1$일 때이므로

$r=5$

즉, $x$항이 존재한다.

따라서 주어진 식의 전개식에서 상수항이 존재한다.

따라서 보기에서 상수항이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**5** $\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4\mathrm{C}_rx^{4-r}\left(\frac{a}{x^2}\right)^r={}_4\mathrm{C}_ra^r\frac{x^{4-r}}{x^{2r}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4=x^2\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4-\frac{1}{x}\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4$

이므로 전개식에서 $x^3$항은

(i) $x^2$과 ㉠의 $x$항의 곱

(ii) $-\frac{1}{x}$과 ㉠의 $x^4$항의 곱

일 때 나타난다.

(i) ㉠의 $x$항은 $4-r-2r=1$일 때이므로 $r=1$

㉠에서 ${}_4\mathrm{C}_1a^1x=4ax$

(ii) ㉠의 $x^4$항은 $4-r-2r=4$일 때이므로 $r=0$

㉠에서 ${}_4\mathrm{C}_0a^0x^4=x^4$

(i), (ii)에서 $x^3$항은

$x^2\times 4ax+\left(-\frac{1}{x}\right)\times x^4=4ax^3-x^3=(4a-1)x^3$

이때 $x^3$의 계수가 7이므로

$4a-1=7$

$\therefore a=2$

**6** 
$$\begin{aligned}{}_1\mathrm{C}_0+{}_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2+\cdots+{}_7\mathrm{C}_6&={}_2\mathrm{C}_0+{}_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2+\cdots+{}_7\mathrm{C}_6\\&={}_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2+\cdots+{}_7\mathrm{C}_6\\&={}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_7\mathrm{C}_6\\&\ \ \vdots\\&={}_7\mathrm{C}_5+{}_7\mathrm{C}_6\\&={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_7\mathrm{C}_2&={}_3\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_7\mathrm{C}_2\\&={}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_7\mathrm{C}_2\\&={}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_7\mathrm{C}_2\\&\ \ \vdots\\&={}_7\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_2\\&={}_8\mathrm{C}_3\end{aligned}$$

따라서 색칠한 부분에 있는 모든 수의 합은

$$\begin{aligned}&({}_1\mathrm{C}_0+{}_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2+\cdots+{}_7\mathrm{C}_6)\\&\qquad+({}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_7\mathrm{C}_2)\underbrace{-{}_3\mathrm{C}_2}_{\text{중복이므로 1번 빼 준다.}}\\&={}_8\mathrm{C}_2+{}_8\mathrm{C}_3-{}_3\mathrm{C}_2\\&={}_9\mathrm{C}_3-{}_3\mathrm{C}_2\\&=84-3=81\end{aligned}$$

**7** 
$$\begin{aligned}&{}_{100}\mathrm{C}_{40}+{}_{99}\mathrm{C}_{39}+{}_{98}\mathrm{C}_{38}+{}_{97}\mathrm{C}_{37}+{}_{96}\mathrm{C}_{36}+{}_{96}\mathrm{C}_{35}\\&={}_{100}\mathrm{C}_{40}+{}_{99}\mathrm{C}_{39}+{}_{98}\mathrm{C}_{38}+{}_{97}\mathrm{C}_{37}+{}_{97}\mathrm{C}_{36}\\&={}_{100}\mathrm{C}_{40}+{}_{99}\mathrm{C}_{39}+{}_{98}\mathrm{C}_{38}+{}_{98}\mathrm{C}_{37}\\&={}_{100}\mathrm{C}_{40}+{}_{99}\mathrm{C}_{39}+{}_{99}\mathrm{C}_{38}\\&={}_{100}\mathrm{C}_{40}+{}_{100}\mathrm{C}_{39}\\&={}_{101}\mathrm{C}_{40}\end{aligned}$$

**8** $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_n\mathrm{C}_r x^r$

$x^4$항은 $(1+x)^4$의 전개식에서부터 나오므로

$(1+x)^4$의 전개식에서 $x^4$의 계수는 ${}_4\mathrm{C}_4$

$(1+x)^5$의 전개식에서 $x^4$의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_4$

⋮

$(1+x)^8$의 전개식에서 $x^4$의 계수는 ${}_8\mathrm{C}_4$

따라서 구하는 $x^4$의 계수는

$$\begin{aligned}{}_4\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_4+{}_6\mathrm{C}_4+{}_7\mathrm{C}_4+{}_8\mathrm{C}_4&={}_5\mathrm{C}_5+{}_5\mathrm{C}_4+{}_6\mathrm{C}_4+{}_7\mathrm{C}_4+{}_8\mathrm{C}_4\\&={}_6\mathrm{C}_5+{}_6\mathrm{C}_4+{}_7\mathrm{C}_4+{}_8\mathrm{C}_4\\&={}_7\mathrm{C}_5+{}_7\mathrm{C}_4+{}_8\mathrm{C}_4\\&={}_8\mathrm{C}_5+{}_8\mathrm{C}_4\\&={}_9\mathrm{C}_5=126\end{aligned}$$

**9** ㄱ. ${}_{50}\mathrm{C}_0-{}_{50}\mathrm{C}_1+{}_{50}\mathrm{C}_2-\cdots-{}_{50}\mathrm{C}_{49}+{}_{50}\mathrm{C}_{50}=0$이므로

${}_{50}\mathrm{C}_0-({}_{50}\mathrm{C}_1-{}_{50}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{50}\mathrm{C}_{49}-{}_{50}\mathrm{C}_{50})=0$

$\therefore\ {}_{50}\mathrm{C}_1-{}_{50}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{50}\mathrm{C}_{49}-{}_{50}\mathrm{C}_{50}={}_{50}\mathrm{C}_0=1$

ㄴ. ${}_{13}\mathrm{C}_1+{}_{13}\mathrm{C}_3+{}_{13}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{13}=2^{13-1}=2^{12}$

ㄷ. ${}_{30}\mathrm{C}_0+{}_{30}\mathrm{C}_2+{}_{30}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{30}\mathrm{C}_{30}=2^{30-1}=2^{29}$이므로

${}_{30}\mathrm{C}_2+{}_{30}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{30}\mathrm{C}_{30}=2^{29}-{}_{30}\mathrm{C}_0=2^{29}-1$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

**10** 집합 $A$의 부분집합 중 두 원소 1, 2를 모두 포함하고 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는 집합 $\{3, 4, 5, \cdots, 25\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 홀수인 것의 개수와 같다.

집합 $\{3, 4, 5, \cdots, 25\}$에 대하여

원소가 1개인 부분집합의 개수는 ${}_{23}\mathrm{C}_1$

원소가 3개인 부분집합의 개수는 ${}_{23}\mathrm{C}_3$

⋮

원소가 23개인 부분집합의 개수는 ${}_{23}\mathrm{C}_{23}$

따라서 구하는 부분집합의 개수는

${}_{23}\mathrm{C}_1+{}_{23}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{23}\mathrm{C}_{23}=2^{23-1}=2^{22}$

**11** $(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=4$, $n=10$을 대입하면

$5^{10}={}_{10}\mathrm{C}_0+4\,{}_{10}\mathrm{C}_1+4^2\,{}_{10}\mathrm{C}_2+\cdots+4^{10}\,{}_{10}\mathrm{C}_{10}$

$\therefore A=5^{10}$

㉠의 양변에 $x=-6$, $n=10$을 대입하면

$(-5)^{10}={}_{10}\mathrm{C}_0+(-6)\,{}_{10}\mathrm{C}_1+(-6)^2\,{}_{10}\mathrm{C}_2+\cdots+(-6)^{10}\,{}_{10}\mathrm{C}_{10}$

즉, $5^{10}={}_{10}\mathrm{C}_0-6\,{}_{10}\mathrm{C}_1+6^2\,{}_{10}\mathrm{C}_2-\cdots+6^{10}\,{}_{10}\mathrm{C}_{10}$이므로

$B=5^{10}$

$\therefore A-B=5^{10}-5^{10}=0$

**12** $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_n\mathrm{C}_r x^r$

$(1+x)^4$의 전개식에서 $x$의 계수는 ${}_4\mathrm{C}_1$

5 이상의 자연수 $n$에 대하여

$\dfrac{(1+x)^n}{x^{n-4}}$의 전개식에서 $x$의 계수는 $(1+x)^n$의 전개식에서 $x^{n-3}$의 계수와 같다.

$(1+x)^5$의 전개식에서 $x^2$의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_2$

$(1+x)^6$의 전개식에서 $x^3$의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_3$

$(1+x)^7$의 전개식에서 $x^4$의 계수는 ${}_7\mathrm{C}_4$

따라서 구하는 $x$의 계수는

$$\begin{aligned}{}_4\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_4&={}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_4-1 \quad \blacktriangleleft\ {}_4\mathrm{C}_1={}_5\mathrm{C}_1-1\\&={}_6\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_4-1\\&={}_7\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_4-1\\&={}_8\mathrm{C}_4-1=70-1=69\end{aligned}$$

**13** $(-1+x)^n=(-1)^n\,{}_n\mathrm{C}_0+(-1)^{n-1}\,{}_n\mathrm{C}_1x+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$의 양변에 $x=15$, $n=20$을 대입하면

$14^{20}={}_{20}\mathrm{C}_0-15\,{}_{20}\mathrm{C}_1+15^2\,{}_{20}\mathrm{C}_2-15^3\,{}_{20}\mathrm{C}_3+\cdots+15^{20}\,{}_{20}\mathrm{C}_{20}$ ...... ㉠

$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$의 양변에 $x=15$, $n=20$을 대입하면

$16^{20}={}_{20}\mathrm{C}_0+15\,{}_{20}\mathrm{C}_1+15^2\,{}_{20}\mathrm{C}_2+15^3\,{}_{20}\mathrm{C}_3+\cdots+15^{20}\,{}_{20}\mathrm{C}_{20}$ ...... ㉡

㉠+㉡을 한 후 우변을 정리하면

$14^{20}+16^{20}$

$=2\times({}_{20}\mathrm{C}_0+15^2\,{}_{20}\mathrm{C}_2+\cdots+15^{20}\,{}_{20}\mathrm{C}_{20})$

$=2+2\times(15^2\,{}_{20}\mathrm{C}_2+15^4\,{}_{20}\mathrm{C}_4+\cdots+15^{20}\,{}_{20}\mathrm{C}_{20})$

$=2+2\times15^2({}_{20}\mathrm{C}_2+15^2\,{}_{20}\mathrm{C}_4+\cdots+15^{18}\,{}_{20}\mathrm{C}_{20})$

$=2+2\times225({}_{20}\mathrm{C}_2+15^2\,{}_{20}\mathrm{C}_4+\cdots+15^{18}\,{}_{20}\mathrm{C}_{20})$

따라서 $14^{20}+16^{20}$을 225로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

**14** $(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$의 양변에 $x=10$, $n=11$을 대입하면

$$\begin{aligned}11^{11}&={}_{11}\mathrm{C}_0+10\,{}_{11}\mathrm{C}_1+10^2\,{}_{11}\mathrm{C}_2+10^3\,{}_{11}\mathrm{C}_3+\cdots+10^{11}\,{}_{11}\mathrm{C}_{11}\\&=1+10\times11+100\times55\\&\qquad+10^3({}_{11}\mathrm{C}_3+10\,{}_{11}\mathrm{C}_4+\cdots+10^8\,{}_{11}\mathrm{C}_{11})\\&=611+5000+1000({}_{11}\mathrm{C}_3+10\,{}_{11}\mathrm{C}_4+\cdots+10^8\,{}_{11}\mathrm{C}_{11})\\&=611+\underbrace{1000(5+{}_{11}\mathrm{C}_3+10\,{}_{11}\mathrm{C}_4+\cdots+10^8\,{}_{11}\mathrm{C}_{11})}_{㉠}\end{aligned}$$

이때 ㉠은 1000의 배수이므로 $11^{11}$의 백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자, 일의 자리의 숫자는 각각 6, 1, 1이다.

따라서 $a=6$, $b=1$, $c=1$이므로

$a+b+c=8$

# Ⅱ-1 01 확률의 개념과 활용

## 1 시행과 사건

### 개념 Check 38쪽

**1** 답 (1) $\boldsymbol{S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}}$
(2) $\boldsymbol{A=\{1,\ 3\}}$

### 문제 39쪽

**01-1** 답 ㄱ, ㄴ

세 사건 $A$, $B$, $C$에 대하여

$A=\{8,\ 16\}$

$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\}$

$C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$

ㄱ. $A\cap B=\varnothing$이므로 $A$와 $B$는 서로 배반사건이다.

ㄴ. $A\cap C=\varnothing$이므로 $A$와 $C$는 서로 배반사건이다.

ㄷ. $B\cap C=\{1,\ 3,\ 9\}$이므로 $B$와 $C$는 서로 배반사건이 아니다.

따라서 보기에서 서로 배반사건인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

**01-2** 답 **4**

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 한 개의 동전을 2번 던질 때, 표본공간을 $S$라 하면

$S=\{\mathrm{HH},\ \mathrm{HT},\ \mathrm{TH},\ \mathrm{TT}\}$

2번 모두 같은 면이 나오는 사건 $A$는

$A=\{\mathrm{HH},\ \mathrm{TT}\}$

사건 $A$의 여사건 $A^C$은

$A^C=\{\mathrm{HT},\ \mathrm{TH}\}$

사건 $A$와 서로 배반인 사건은 $A^C$의 부분집합이고, $A^C$의 원소가 2개이므로 구하는 사건의 개수는

$2^2=4$

**01-3** 답 **8**

사건 $A$와 서로 배반인 사건은 $A^C$의 부분집합이고, 사건 $B$와 서로 배반인 사건은 $B^C$의 부분집합이므로 두 사건 $A$, $B$와 모두 배반인 사건은 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다.

이때 $A^C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10\}$, $B^C=\{2,\ 5,\ 8,\ 9,\ 10\}$이므로

$A^C\cap B^C=\{5,\ 9,\ 10\}$

따라서 $A^C\cap B^C$의 원소가 3개이므로 구하는 사건의 개수는

$2^3=8$

## 2 확률의 개념과 기본 성질

### 개념 Check 41쪽

**1** 답 (1) $\boldsymbol{\frac{1}{6}}$ (2) $\boldsymbol{\frac{1}{200}}$

(1) 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

서로 같은 수의 눈이 나오는 경우는 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 4)$, $(5,\ 5)$, $(6,\ 6)$의 6가지이다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(2) 1000개당 5개꼴로 불량품이 있으므로 구하는 확률은

$\frac{5}{1000}=\frac{1}{200}$

**2** 답 (1) $\boldsymbol{\frac{3}{8}}$ (2) **1** (3) **0**

### 문제 42~45쪽

**02-1** 답 (1) $\boldsymbol{\frac{1}{6}}$ (2) $\boldsymbol{\frac{11}{36}}$

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

(1) 나오는 두 눈의 수의 차가 3인 경우는 $(1,\ 4)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 1)$, $(5,\ 2)$, $(6,\ 3)$의 6가지이다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(2) 나오는 두 눈의 수의 곱이 5의 배수인 경우는 $(1,\ 5)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 5)$, $(5,\ 1)$, $(5,\ 2)$, $(5,\ 3)$, $(5,\ 4)$, $(5,\ 5)$, $(5,\ 6)$, $(6,\ 5)$의 11가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{11}{36}$

**02-2** 답 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

집합 $A$의 원소가 4개이므로 집합 $A$의 모든 부분집합의 개수는

$2^4=16$

원소 3이 포함되어 있는 집합 $A$의 부분집합의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

따라서 구하는 확률은

$\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

02-**3** 답 $\frac{1}{4}$

서로 다른 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

이차방정식 $x^2-ax+2b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식을 $D$라 할 때, $D>0$이어야 하므로

$D=a^2-8b>0$ $\therefore a^2>8b$

$a^2>8b$를 만족시키는 순서쌍 $(a, b)$는

$(3, 1), (4, 1), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4)$의 9개이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

03-**1** 답 (1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{8}{25}$ (3) $\frac{1}{28}$

(1) 6명이 일렬로 서는 경우의 수는 $6!$

A, B, C를 한 묶음으로 생각하여 나머지 3명과 함께 일렬로 서는 경우의 수는 $4!$

A, B, C의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4!\times3!}{6!}=\frac{1}{5}$

(2) 맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로 다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4로 중복을 허용하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$4\times{}_5\Pi_4=4\times5^4$

4의 배수는 끝의 두 자리의 수가 00이거나 4의 배수이므로 □□□00, □□□04, □□□12, □□□20, □□□24, □□□32, □□□40, □□□44의 꼴이다. 각각의 경우에 맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로 4의 배수의 개수는

$8\times(4\times{}_5\Pi_2)=32\times5^2$

따라서 구하는 확률은

$\frac{32\times5^2}{4\times5^4}=\frac{8}{25}$

(3) a, m, b, i, t, i, o, n을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{8!}{2!}$

양 끝에 a, o를 고정시키고 그 사이에 나머지 문자 m, b, i, t, i, n을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!}$

a와 o의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 확률은

$\frac{\frac{6!}{2!}\times2}{\frac{8!}{2!}}=\frac{1}{28}$

04-**1** 답 (1) $\frac{1}{70}$ (2) $\frac{2}{7}$

(1) 10개의 사탕 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_4=210$

포도맛 사탕 3개 중에서 2개를 꺼내고, 딸기맛 사탕 2개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_2C_2=3\times1=3$

따라서 구하는 확률은

$\frac{3}{210}=\frac{1}{70}$

(2) 네 종류의 볼펜에서 중복을 허용하여 4개의 볼펜을 고르는 경우의 수는

${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35$

볼펜 A, B가 적어도 1개씩 포함되어야 하므로 볼펜 A, B를 각각 1개씩 고른 후, 네 종류의 볼펜에서 중복을 허용하여 나머지 2개의 볼펜을 고르는 경우의 수는

${}_4H_2={}_5C_2=10$

따라서 구하는 확률은

$\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$

04-**2** 답 $\frac{3}{22}$

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 순서쌍의 개수는

${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$

$x=2$이면 $x+y+z=10$에서

$y+z=8$

이 방정식을 만족시키는 순서쌍의 개수는

${}_2H_8={}_9C_8={}_9C_1=9$

따라서 구하는 확률은

$\frac{9}{66}=\frac{3}{22}$

04-**3** 답 4

6개의 구슬 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

주머니에 들어 있는 빨간 구슬의 개수를 $n$이라 하면 $n$개의 빨간 구슬 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_nC_2$

모두 빨간 구슬이 나올 확률이 $\frac{2}{5}$이므로

$\frac{{}_nC_2}{15}=\frac{2}{5}$

$\frac{n(n-1)}{30}=\frac{2}{5}$

$n(n-1)=12=4\times3$

$\therefore n=4$ ($\because$ $n$은 자연수)

따라서 빨간 구슬의 개수는 4이다.

05-1 답 $\frac{21}{80}$

전체 학생 400명 중에서 B 통신사를 이용하고 있는 학생 수는 105

따라서 구하는 확률은

$\frac{105}{400}=\frac{21}{80}$

05-2 답 $\frac{11}{50}$

수면 시간이 7시간 이상 9시간 미만인 학생 수는

$24+20=44$

따라서 구하는 확률은

$\frac{44}{200}=\frac{11}{50}$

05-3 답 6개

주머니에 들어 있는 당첨 제비의 개수를 $n$이라 하면 10개의 제비 중에서 2개를 꺼낼 때, 모두 당첨 제비일 확률은

$\frac{{}_nC_2}{{}_{10}C_2}=\frac{n(n-1)}{90}$ …… ㉠

이 시행에서 3번에 1번꼴로 모두 당첨 제비를 꺼냈으므로

통계적 확률은 $\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{n(n-1)}{90}=\frac{1}{3}$

$n(n-1)=30=6\times5$

$\therefore n=6$ ($\because$ $n$은 자연수)

따라서 주머니에 당첨 제비는 6개가 들어 있다고 볼 수 있다.

## 3 확률의 덧셈 정리

**문제** 48~51쪽

06-1 답 $\frac{1}{4}$

두 사건 $A$, $B$가 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈 정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$\frac{3}{4}=2\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(B)$

$3\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

06-2 답 $\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(B^C)=\frac{7}{10}$에서 여사건의 확률에 의하여

$1-\mathrm{P}(B)=\frac{7}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}$

따라서 확률의 덧셈 정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\frac{9}{20}=\mathrm{P}(A)+\frac{3}{10}-\frac{1}{20}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}$

06-3 답 $\frac{5}{6}$

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2}$에서 여사건의 확률에 의하여

$1-\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

확률의 덧셈 정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{5}{12}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$A\cap B=(A^C\cup B^C)^C$이므로

$\mathrm{P}((A^C\cup B^C)^C)=\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

이때 여사건의 확률에 의하여

$1-\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\frac{5}{6}$

07-1 답 $\frac{11}{12}$

요리 강좌를 듣는 사람인 사건을 $A$, 미술 강좌를 듣는 사람인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$

07-2 답 $\frac{5}{6}$

6의 약수의 눈이 나오는 사건을 $A$, 짝수의 눈이 나오는 사건을 $B$라 하면

$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 4, 6\}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}$

이때 $A\cap B=\{2, 6\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{4}{6}+\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

07-3 답 $\frac{7}{9}$

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 네 개의 숫자 0, 1, 4, 5를 모두 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$3\times3!=18$

네 자리의 자연수가 홀수인 사건을 $A$, 5의 배수인 사건을 $B$라 하자.

이때 홀수는 일의 자리의 숫자가 1 또는 5이고, 5의 배수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이다.

(i) □□□1 꼴의 자연수

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 자연수의 개수는

$2\times2!=4$

(ii) □□□5 꼴의 자연수

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 자연수의 개수는

$2\times2!=4$

(iii) □□□0 꼴의 자연수의 개수는

$3!=6$

(i), (ii)에서 홀수의 개수는 $4+4=8$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{8}{18}$

(ii), (iii)에서 5의 배수의 개수는 $4+6=10$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{10}{18}$

$A\cap B$는 홀수이고 5의 배수인 수, 즉 일의 자리의 숫자가 5인 수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{18}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{8}{18}+\frac{10}{18}-\frac{4}{18}=\frac{7}{9}$$

08-1 답 $\frac{4}{9}$

두 수의 합이 짝수이려면 두 수가 모두 짝수 또는 모두 홀수이어야 한다.

공에 적힌 두 수가 모두 짝수인 사건을 $A$, 모두 홀수인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{10}{45}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{10}{45}$

두 사건 $A$, $B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{10}{45}+\frac{10}{45}=\frac{4}{9}$$

08-2 답 $\frac{3}{7}$

t, e, n, s, i, o, n을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!}$

맨 앞에 t가 오는 사건을 $A$, 맨 앞에 n이 오는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{\frac{6!}{2!}}{\frac{7!}{2!}}=\frac{1}{7}$

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{6!}{\frac{7!}{2!}}=\frac{2}{7}$

두 사건 $A$, $B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$$

08-3 답 $\frac{13}{66}$

1학년 학생이 2학년 학생보다 많이 뽑히려면 뽑은 4명 중에서 1학년 학생이 3명 또는 4명이어야 한다.

1학년 학생 3명, 2학년 학생 1명을 뽑는 사건을 $A$, 1학년 학생 4명을 뽑는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{11}\mathrm{C}_4}=\frac{60}{330}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_{11}\mathrm{C}_4}=\frac{5}{330}$

두 사건 $A$, $B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{60}{330}+\frac{5}{330}=\frac{13}{66}$$

09-**1** 답 (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{8}{15}$

(1) 나오는 두 눈의 수의 곱이 10의 배수가 아닌 사건을 $A$라 하면 $A^C$은 두 눈의 수의 곱이 10의 배수인 사건이다.

서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나오는 두 눈의 수의 곱이 10의 배수인 경우는 (2, 5), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 5)의 6가지이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

(2) 적어도 한 개가 당첨 제비인 사건을 $A$라 하면 $A^C$은 모두 당첨 제비가 아닌 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$

09-**2** 답 $\frac{19}{20}$

네 자리의 자연수가 1300 이상인 사건을 $A$라 하면 $A^C$은 1300 미만인 사건이다.

5개의 숫자 중에서 서로 다른 4개를 택하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

${}_5\mathrm{P}_4=120$

1300 미만인 네 자리의 자연수는 12□□ 꼴의 자연수이므로 그 개수는

${}_3\mathrm{P}_2=6$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$

09-**3** 답 6

여학생이 1명 이하인 사건을 $A$라 하면 $A^C$은 여학생이 2명인 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_{10}\mathrm{C}_2}{{}_{n+10}\mathrm{C}_2}$

$=\frac{90}{(n+10)(n+9)}$

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{5}{8}$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$

$\frac{90}{(n+10)(n+9)}=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

$(n+10)(n+9)=240=16\times15$

$\therefore n=6$ ($\because$ $n$은 자연수)

## 연습문제

52~54쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ④ | **2** $\frac{1}{9}$ | **3** ④ | **4** $\frac{15}{64}$ | **5** ④ |
| **6** ⑤ | **7** $\frac{2}{5}$ | **8** $\frac{59}{256}$ | **9** ③ | **10** ① |
| **11** $\frac{1}{5}$ | **12** ② | **13** $\frac{8}{15}$ | **14** $\frac{5}{12}$ | **15** $\frac{9}{14}$ |
| **16** $\frac{34}{55}$ | **17** ⑤ | **18** $\frac{1}{3}$ | **19** $\frac{7}{15}$ | **20** $\frac{5}{12}$ |
| **21** $\frac{43}{100}$ | | | | |

**1** 사건 $A$와 서로 배반인 사건은 $A^C$의 부분집합이고 $A^C$은 두 눈의 수의 합이 10 이상인 사건이므로

$A^C=\{\underbrace{(4, 6), (5, 5), (6, 4)}_{\text{합이 10}}, \underbrace{(5, 6), (6, 5)}_{\text{합이 11}}, \underbrace{(6, 6)}_{\text{합이 12}}\}$

따라서 $A^C$의 원소가 6개이므로 구하는 사건의 개수는

$2^6=64$

**2** 한 개의 주사위를 2번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

두 직선 $ax+6y-1=0$, $x+by-3=0$이 서로 평행하기 위한 조건은

$\frac{1}{a}=\frac{b}{6}\neq\frac{-3}{-1}$

$\therefore ab=6$

$ab=6$을 만족시키는 순서쌍 $(a, b)$는 (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)의 4개이다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

**3** 9장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는 9!

문자 A가 적혀 있는 카드의 양옆에 숫자가 적혀 있는 2장의 카드를 배열하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_2=12$

문자 A가 적혀 있는 카드와 그 양옆에 놓이는 카드를 한 묶음으로 생각하여 나머지 6장의 카드와 함께 일렬로 배열하는 경우의 수는 $7!$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{12\times7!}{9!}=\dfrac{1}{6}$

**4** 2개의 문자에서 중복을 허용하여 6개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_2\Pi_6=2^6=64$

$a$가 2번 나오면 $b$는 4번 나오므로 $a$, $a$, $b$, $b$, $b$, $b$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\times4!}=15$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{15}{64}$

**5** 6개의 과목을 복습할 순서를 정하는 경우의 수는

$6!=720$

국어, 수학, 영어를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, X, X, 한국사, 사회, 과학을 일렬로 배열한 후 3개의 X를 앞에서부터 순서대로 수학, 국어, 영어 또는 수학, 영어, 국어로 바꾸면 되므로 그 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!}\times2=240$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{240}{720}=\dfrac{1}{3}$

**6** 9개의 공 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는

${}_9C_4=126$

꺼낸 공에 적힌 수 중 가장 작은 수가 3, 가장 큰 수가 8이려면 3이 적힌 공과 8이 적힌 공은 반드시 꺼내고, 4, 5, 6, 7이 적힌 4개의 공 중에서 나머지 2개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는

${}_4C_2=6$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{6}{126}=\dfrac{1}{21}$

**7** 남자 6명 중에서 3명, 여자 4명 중에서 2명을 뽑아서 일렬로 세우는 경우의 수는

${}_6C_3\times{}_4C_2\times5!$

이때 여자끼리 이웃하는 경우의 수는

${}_6C_3\times{}_4C_2\times4!\times2!$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{{}_6C_3\times{}_4C_2\times4!\times2!}{{}_6C_3\times{}_4C_2\times5!}=\dfrac{2}{5}$

**8** $X$에서 $Y$로의 함수의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

이때 $i\neq j$이면 $f(i)\neq f(j)$인 함수의 개수는

${}_4P_4=4!=24$

$\therefore\ a=\dfrac{24}{256}$

또 $i<j$이면 $f(i)\leq f(j)$인 함수의 개수는

${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35$

$\therefore\ b=\dfrac{35}{256}$

$\therefore\ a+b=\dfrac{24}{256}+\dfrac{35}{256}=\dfrac{59}{256}$

**9** 상자에 들어 있는 흰 바둑돌의 개수를 $n$이라 하면 8개의 바둑돌 중에서 3개를 꺼낼 때, 모두 흰 바둑돌이 나올 확률은

$\dfrac{{}_nC_3}{{}_8C_3}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{336}$ ...... ㉠

이 시행에서 14번에 1번꼴로 모두 흰 바둑돌이 나왔으므로 통계적 확률은 $\dfrac{1}{14}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{336}=\dfrac{1}{14}$

$n(n-1)(n-2)=24=4\times3\times2$

$\therefore\ n=4$ ($\because$ $n$은 자연수)

따라서 상자에 흰 바둑돌은 4개가 들어 있다고 볼 수 있다.

**10** ㄱ. $\varnothing\subset(A\cup B)\subset S$이므로

$\mathrm{P}(\varnothing)\leq\mathrm{P}(A\cup B)\leq\mathrm{P}(S)$

$\therefore\ 0\leq\mathrm{P}(A\cup B)\leq1$

ㄴ. [반례] $S=\{1, 2, 3\}$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$이면 $A\cup B=S$이지만

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$

ㄷ. [반례] $S=\{1, 2, 3, 4\}$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$이면 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$이지만

$A\cap B=\{2\}\neq\varnothing$이므로 두 사건 $A$, $B$는 서로 배반사건이 아니다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

**11** $A^C\cup B=(A\cap B^C)^C$이므로 $\mathrm{P}(A^C\cup B)=\dfrac{13}{15}$에서

$1-\mathrm{P}(A\cap B^C)=\dfrac{13}{15}$ $\qquad\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=\dfrac{2}{15}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{15}=\dfrac{1}{5}$

**12** $A^C\cap B=(A\cup B^C)^C$이므로 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{6}$에서

$1-\mathrm{P}(A\cup B^C)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B^C)=\frac{5}{6}$

이때 두 사건 $A$, $B^C$이 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)$

$\frac{5}{6}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B^C)$

$\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{2}$

$1-\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

다른 풀이

두 사건 $A$, $B^C$이 서로 배반사건이므로

$A\cap B^C=\varnothing$

즉, $A\subset B$이므로

$B=A\cup(A^C\cap B)$

이때 $A\cap(A^C\cap B)=\varnothing$, 즉 $A$와 $A^C\cap B$는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

**13** m, e, m, b, e, r를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times 2!}=180$

m끼리 서로 이웃하는 사건을 $A$, e끼리 서로 이웃하는 사건을 $B$라 하자.

(i) 2개의 m을 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자 e, b, e, r와 함께 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{60}{180}$

(ii) 2개의 e를 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자 m, m, b, r와 함께 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{60}{180}$

(iii) 2개의 m을 한 묶음으로, 2개의 e를 다른 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자 b, r와 함께 일렬로 배열하는 경우의 수는

$4!=24$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{24}{180}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{60}{180}+\frac{60}{180}-\frac{24}{180}=\frac{8}{15}$

**14** 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times 6=36$

두 눈의 수의 합이 6인 사건을 $A$, 차가 1인 사건을 $B$라 하자.

(i) 두 눈의 수의 합이 6인 경우는 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{36}$

(ii) 두 눈의 수의 차가 1인 경우는 (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)의 10가지이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{10}{36}$

두 사건 $A$, $B$는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{5}{36}+\frac{10}{36}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

**15** A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{9!}{5!\times 4!}=126$

A 지점에서 P 지점을 거치지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 사건을 $A$라 하면 $A^C$은 A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 사건이다.

A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!\times 2!}\times\frac{3!}{2!}=45$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{45}{126}=\frac{5}{14}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$

**16** 적어도 한 개의 검정 볼펜을 꺼내는 사건을 $A$라 하면 $A^C$은 모두 검정이 아닌 색의 볼펜을 꺼내는 사건, 즉 검정이 아닌 색의 볼펜 9개 중에서 3개를 꺼내는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_9\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\frac{21}{55}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)$

$=1-\frac{21}{55}=\frac{34}{55}$

**17** ㈎, ㈏를 만족시키는 점 $(a, b)$의 개수는 $4\times3=12$이므로 12개의 점 중에서 서로 다른 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{12}C_2=66$

서로 다른 두 점 사이의 거리가 1보다 큰 사건을 $A$라 하면 $A^C$은 두 점 사이의 거리가 1인 사건이다.

두 점 사이의 거리가 1이려면 두 점의 $x$좌표가 같고 $y$좌표가 연속하는 두 자연수이거나 $y$좌표가 같고 $x$좌표가 연속하는 두 자연수이어야 한다.

두 점의 $x$좌표가 같고 $y$좌표가 연속하는 두 자연수인 경우의 수는 ${}_4C_1\times2=8$

두 점의 $y$좌표가 같고 $x$좌표가 연속하는 두 자연수인 경우의 수는 ${}_3C_1\times3=9$

$\therefore P(A^C)=\frac{8+9}{66}=\frac{17}{66}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)$

$=1-\frac{17}{66}=\frac{49}{66}$

**18** 방정식 $x+y+z=8$을 만족시키는 순서쌍의 개수는

${}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

$(x-y)(y-z)(z-x)=0$에서

$x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$

이때 $x=y$를 만족시키는 순서쌍 $(x, y, z)$는

$(0, 0, 8)$, $(1, 1, 6)$, $(2, 2, 4)$, $(3, 3, 2)$, $(4, 4, 0)$

의 5개이다.

$y=z$와 $z=x$를 만족시키는 순서쌍도 각각 5개이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 순서쌍의 개수는 $5\times3=15$

따라서 구하는 확률은 $\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$

**19** $15x^2-8nx+n^2=0$에서

$(5x-n)(3x-n)=0$

$\therefore x=\frac{n}{5}$ 또는 $x=\frac{n}{3}$

이때 이차방정식이 정수인 해를 가지려면 자연수 $n$이 5의 배수 또는 3의 배수이어야 한다.

$n$이 5의 배수인 사건을 $A$, 3의 배수인 사건을 $B$라 하면 $A\cap B$는 $n$이 5와 3의 공배수, 즉 15의 배수인 사건이므로

$P(A)=\frac{6}{30}$, $P(B)=\frac{10}{30}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{30}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{6}{30}+\frac{10}{30}-\frac{2}{30}$

$=\frac{7}{15}$

**20** $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-P(A\cup B)$

$=\frac{13}{12}-P(A\cup B)$

즉, $P(A\cup B)$가 최소일 때 $P(A\cap B)$가 최대이고 $P(A\cup B)$가 최대일 때 $P(A\cap B)$가 최소이다.

$P(A\cup B)\ge P(A)$이므로 $P(A\cup B)\ge\frac{3}{4}$ ...... ㉠

$P(A\cup B)\ge P(B)$이므로 $P(A\cup B)\ge\frac{1}{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $P(A\cup B)\ge\frac{3}{4}$

이때 $0\le P(A\cup B)\le1$이므로

$\frac{3}{4}\le P(A\cup B)\le1$

$\frac{1}{12}\le\frac{13}{12}-P(A\cup B)\le\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{1}{12}\le P(A\cap B)\le\frac{1}{3}$

따라서 $M=\frac{1}{3}$, $m=\frac{1}{12}$이므로

$M+m=\frac{5}{12}$

**21** $14=2\times7$이므로 14와 서로소이려면 2의 배수도 아니고 7의 배수도 아니어야 한다.

카드에 적힌 수가 2의 배수인 사건을 $A$, 7의 배수인 사건을 $B$라 하면 2의 배수도 아니고 7의 배수도 아닌 사건은 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이다.

이때 $P(A)=\frac{50}{100}$, $P(B)=\frac{14}{100}$이고, $A\cap B$는 카드에 적힌 수가 2와 7의 공배수, 즉 14의 배수인 사건이므로

$P(A\cap B)=\frac{7}{100}$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{50}{100}+\frac{14}{100}-\frac{7}{100}=\frac{57}{100}$

따라서 구하는 확률은

$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)$

$=1-P(A\cup B)$

$=1-\frac{57}{100}=\frac{43}{100}$

## Ⅱ-2 01 조건부확률

### 조건부확률

**개념 Check** 57쪽

**1** 답 (1) **0.75** (2) **0.6**

(1) $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0.3}{0.4}=0.75$

(2) $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{0.3}{0.5}=0.6$

**2** 답 (1) $\dfrac{1}{6}$ (2) $\dfrac{2}{3}$

(1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

(2) $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{2}{3}$

**문제** 58～62쪽

**01-1** 답 (1) $\dfrac{3}{4}$ (2) **0.5**

(1) $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$이므로 $\mathrm{P}(A^c\cap B^c)=\dfrac{1}{5}$에서

$\mathrm{P}((A\cup B)^c)=\dfrac{1}{5}$

$1-\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{4}{5}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\dfrac{4}{5}=\dfrac{7}{10}+\dfrac{2}{5}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{3}{4}$

(2) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$0.7=0.5+\mathrm{P}(B)-0.2$

$\therefore \mathrm{P}(B)=0.4$

$\mathrm{P}(B^c)=1-\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(B^c)=1-0.4=0.6$

또 $A\cap B^c=A-(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=0.5-0.2=0.3$

$\therefore \mathrm{P}(A|B^c)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B^c)}{\mathrm{P}(B^c)}=\dfrac{0.3}{0.6}=0.5$

**01-2** 답 $\dfrac{1}{5}$

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{1}{4}$에서 $\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=4\mathrm{P}(A\cap B)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\dfrac{4}{5}=4\mathrm{P}(A\cap B)+\dfrac{1}{2}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{5}$

**02-1** 답 **0.3**

혈액형이 A형인 학생인 사건을 $A$, 여학생인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.4$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.12$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0.12}{0.4}=0.3$

다른 풀이

전체 학생 수가 $a$일 때, 구하는 확률은

$\dfrac{(\text{A형인 여학생의 수})}{(\text{A형인 학생의 수})}=\dfrac{0.12a}{0.4a}=0.3$

**02-2** 답 $\dfrac{4}{7}$

2학년 학생인 사건을 $A$, B 책을 선택한 학생인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{14}{30}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{8}{30}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{8}{30}}{\frac{14}{30}}=\dfrac{4}{7}$

**02-3** 답 $\dfrac{2}{5}$

두 눈의 수의 합이 8인 사건을 $A$, 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건을 $B$라 하면

$A=\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$

$A\cap B=\{(3, 5), (5, 3)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{36}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{36}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}}=\dfrac{2}{5}$

03-**1** 답 $\mathbf{\frac{21}{55}}$

첫 번째에 정상 제품을 꺼내는 사건을 $A$, 두 번째에 정상 제품을 꺼내는 사건을 $B$라 하자.

첫 번째에 정상 제품을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{7}{11}$

첫 번째에 꺼낸 제품이 정상 제품이었을 때, 두 번째에도 정상 제품을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{7}{11}\times\frac{3}{5}=\frac{21}{55}$

03-**2** 답 $\mathbf{\frac{24}{95}}$

대표로 여자 회원을 뽑는 사건을 $A$, 부대표로 남자 회원을 뽑는 사건을 $B$라 하자.

대표로 여자 회원을 뽑을 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

대표로 뽑은 회원이 여자 회원이었을 때, 부대표로 남자 회원을 뽑을 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{8}{19}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{8}{19}=\frac{24}{95}$

03-**3** 답 **10**

첫 번째에 파란 구슬을 꺼내는 사건을 $A$, 두 번째에 빨간 구슬을 꺼내는 사건을 $B$라 하자.

첫 번째에 파란 구슬을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{n}{n+6}$

첫 번째에 꺼낸 구슬이 파란 구슬이었을 때, 두 번째에 빨간 구슬을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{6}{n+5}$

첫 번째는 파란 구슬, 두 번째는 빨간 구슬을 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{n}{n+6}\times\frac{6}{n+5}\\&=\frac{6n}{(n+6)(n+5)}\end{aligned}$$

즉, $\frac{6n}{(n+6)(n+5)}=\frac{1}{4}$이므로

$n^2-13n+30=0$, $(n-3)(n-10)=0$

$\therefore n=10$ ($\because n>6$)

04-**1** 답 **0.54**

토요일에 비가 오는 사건을 $A$, 경기에서 이기는 사건을 $B$라 하자.

(i) 토요일에 비가 오고 경기에서 이길 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=0.3\times0.4=0.12\end{aligned}$$

(ii) 토요일에 비가 오지 않고 경기에서 이길 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=(1-0.3)\times0.6=0.42\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=0.12+0.42=0.54\end{aligned}$$

04-**2** 답 $\mathbf{\frac{3}{10}}$

A, B가 당첨 제비를 뽑는 사건을 각각 $A$, $B$라 하자.

(i) A가 당첨 제비를 뽑고 B도 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}\end{aligned}$$

(ii) A가 당첨 제비를 뽑지 않고 B가 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{7}{30}\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\frac{1}{15}+\frac{7}{30}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

04-**3** 답 $\mathbf{\frac{9}{28}}$

A 주머니를 택하는 사건을 $A$, 2개 모두 파란 공을 꺼내는 사건을 $B$라 하자.

(i) A 주머니를 택하고 A 주머니에서 2개의 파란 공을 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{14}=\frac{5}{28}\end{aligned}$$

(ii) B 주머니를 택하고 B 주머니에서 2개의 파란 공을 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{7}\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\frac{5}{28}+\frac{1}{7}=\frac{9}{28}\end{aligned}$$

05-1 답 $\frac{7}{19}$

A 구장에서 경기를 치르는 사건을 $A$, 경기에서 승리하는 사건을 $B$라 하자.

(i) A 구장에서 승리할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.2\times0.7=0.14$

(ii) 타 구장에서 승리할 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$=(1-0.2)\times0.3=0.24$

(i), (ii)에서 이 팀이 승리할 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=0.14+0.24=0.38$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{0.14}{0.38}=\dfrac{7}{19}$

05-2 답 $\frac{6}{13}$

꽃무늬 상자를 택하는 사건을 $A$, 2개 모두 흰 공을 꺼내는 사건을 $B$라 하자.

(i) 꽃무늬 상자를 택하고 꽃무늬 상자에서 2개의 흰 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$

(ii) 별무늬 상자를 택하고 별무늬 상자에서 2개의 흰 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{14}$

(i), (ii)에서 2개 모두 흰 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{14}=\dfrac{13}{84}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{14}}{\frac{13}{84}}=\dfrac{6}{13}$

## 2 사건의 독립과 종속

**개념 Check** 64쪽

**1** 답 (1) 종속 (2) 독립

(1) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.2\times0.5=0.1$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 종속이다.

(2) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.4\times0.6=0.24$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이다.

**2** 답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{6}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

(1) $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}$

(2) $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$

(3) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

**문제** 65~67쪽

06-1 답 ㄴ, ㄷ

표본공간 $S$는 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 29, 30\}$이므로

$A=\{1, 3, 5, \cdots, 27, 29\}$

$B=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

$C=\{11, 12, 13, \cdots, 19, 20\}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3},\ \mathrm{P}(C)=\dfrac{1}{3}$

ㄱ. $A\cap B=\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{10}$

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 $A$와 $B$는 서로 종속이다.

ㄴ. $A\cap C=\{11, 13, 15, 17, 19\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\dfrac{1}{6}$

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 $A$와 $C$는 서로 독립이다.

ㄷ. $A^C\cap C^C=\{2, 4, 6, 8, 10, 22, 24, 26, 28, 30\}$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap C^C)=\dfrac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(C^C)=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap C^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(C^C)$

따라서 $A^C$과 $C^C$은 서로 독립이다.

ㄹ. $B^C\cap C=\{12, 14, 15, 16, 18, 20\}$이므로

$\mathrm{P}(B^C\cap C)=\dfrac{1}{5}$

$\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C)=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$이므로

$\mathrm{P}(B^C\cap C)\neq\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C)$

따라서 $B^C$과 $C$는 서로 종속이다.

따라서 보기에서 서로 독립인 사건은 ㄴ, ㄷ이다.

**06-2** 답 ㄴ

표본공간 $S$는 $S=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로

$A=\{1, 2, 3, 4\}$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$

ㄱ. $B=\{1, 4\}$라 하면 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

$A\cap B=\{1, 4\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 종속이다.

ㄴ. $C=\{3, 4, 12\}$라 하면 $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$A\cap C=\{3, 4\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 $A$, $C$는 서로 독립이다.

ㄷ. $D=\{1, 3, 6, 12\}$라 하면 $\mathrm{P}(D)=\frac{2}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(D)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

$A\cap D=\{1, 3\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap D)=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap D)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(D)$

따라서 두 사건 $A$, $D$는 서로 종속이다.

ㄹ. $E=\{1, 2, 3, 4, 6\}$이라 하면 $\mathrm{P}(E)=\frac{5}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E)=\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{9}$

$A\cap E=\{1, 2, 3, 4\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\frac{2}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap E)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E)$

따라서 두 사건 $A$, $E$는 서로 종속이다.

따라서 보기에서 사건 $\{1, 2, 3, 4\}$와 서로 독립인 사건은 ㄴ이다.

**07-1** 답 $\frac{1}{2}$

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{5}{8}=\frac{1}{4}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)$

$\frac{3}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{3}{8}\qquad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

**07-2** 답 $\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{2}$에서 $\mathrm{P}((A\cup B)^C)=\frac{1}{2}$

$1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}\qquad\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{4}$에서

$\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}-\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\qquad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{2}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\mathrm{P}(A)$, $\frac{3}{4}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

**07-3** 답 $\frac{1}{16}$

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{7}{16}=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(A)$

이때 $\mathrm{P}(A)=k$라 하면

$\frac{7}{16}=k+k-k^2$

$16k^2-32k+7=0$, $(4k-1)(4k-7)=0$

$\therefore k=\frac{1}{4}$ 또는 $k=\frac{7}{4}$

그런데 $0\leq\mathrm{P}(A)\leq1$이므로

$k=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(A)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

**08-1** 답 (1) **0.35** (2) **0.5** (3) **0.85**

A, B가 10점에 명중시키는 사건을 각각 $A$, $B$라 하면 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이다.

(1) 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.7\times0.5=0.35$

(2) A만 10점에 명중시키는 사건은 $A\cap B^C$이고 두 사건 $A$, $B^C$은 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=0.7\times(1-0.5)=0.35$

B만 10점에 명중시키는 사건은 $A^C\cap B$이고 두 사건 $A^C$, $B$는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=(1-0.7)\times0.5=0.15$

따라서 구하는 확률은 $0.35+0.15=0.5$

(3) 적어도 한 선수는 10점에 명중시킬 확률은

$1-$(모두 10점에 명중시키지 못할 확률)

A, B 모두 10점에 명중시키지 못하는 사건은 $A^C\cap B^C$이고 두 사건 $A^C$, $B^C$은 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$

$=(1-0.7)\times(1-0.5)=0.15$

따라서 구하는 확률은

$1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-0.15=0.85$

**08-2** 답 $\mathbf{\frac{2}{3}}$

A, B가 승부차기를 성공하는 사건을 각각 $A$, $B$라 하면 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이다.

이때 A만 성공할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{4}\times(1-p)$

즉, $\frac{3}{4}(1-p)=\frac{1}{4}$이므로 $1-p=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore p=\frac{2}{3}$

## 3 독립시행의 확률

**개념 Check** 68쪽

**1** 답 (1) $\mathbf{\frac{7}{32}}$ (2) $\mathbf{\frac{40}{243}}$

(1) 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 구하는 확률은

${}_8\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{7}{32}$

(2) 한 개의 주사위를 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 구하는 확률은

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}$

**문제** 69~71쪽

**09-1** 답 (1) **0.972** (2) **0.999**

(1) (i) 2번 성공할 확률은 ${}_3\mathrm{C}_2 0.9^2 0.1^1=0.243$

(ii) 3번 성공할 확률은 ${}_3\mathrm{C}_3 0.9^3 0.1^0=0.729$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$0.243+0.729=0.972$

(2) 적어도 1번 성공할 확률은

$1-$(모두 성공하지 못할 확률)

모두 성공하지 못할 확률은

${}_3\mathrm{C}_0 0.9^0 0.1^3=0.001$

따라서 구하는 확률은

$1-0.001=0.999$

**09-2** 답 $\mathbf{\frac{112}{243}}$

(i) 4문제를 맞힐 확률은 ${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{80}{243}$

(ii) 5문제를 맞힐 확률은 ${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{32}{243}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{80}{243}+\frac{32}{243}=\frac{112}{243}$

**09-3** 답 $\mathbf{\frac{1}{8}}$

A 팀이 5번째 경기에서 우승하려면 4번째 경기까지 3번 이기고, 5번째 경기에서 이겨야 하므로 구하는 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

**10-1** 답 $\mathbf{\frac{7}{144}}$

한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 한 개의 주사위를 던져서 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이다.

(i) 동전의 앞면이 나오고 한 개의 주사위를 2번 던져서 1의 눈이 2번 나올 확률은

$\frac{1}{2}\times{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{2}\times\frac{1}{36}=\frac{1}{72}$

(ii) 동전의 뒷면이 나오고 한 개의 주사위를 3번 던져서 1의 눈이 2번 나올 확률은

$\frac{1}{2}\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{1}{2}\times\frac{5}{72}=\frac{5}{144}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{72}+\frac{5}{144}=\frac{7}{144}$

10-**2** 답 $\frac{61}{224}$

상자에서 2개의 공을 꺼낼 때, 흰 공이 나오지 않는 경우는 2개 모두 검은 공이 나오는 경우이므로 흰 공이 나오지 않을 확률은 $\frac{{}_5C_2}{{}_8C_2}=\frac{5}{14}$

흰 공이 적어도 한 개 나올 확률은

1−(모두 검은 공이 나올 확률)$=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$

한 개의 주사위를 던져서 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

(i) 흰 공이 적어도 한 개 나오고 한 개의 주사위를 4번 던져서 짝수의 눈이 3번 나올 확률은

$\frac{9}{14}\times{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{9}{14}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{56}$

(ii) 흰 공이 나오지 않고 한 개의 주사위를 5번 던져서 짝수의 눈이 3번 나올 확률은

$\frac{5}{14}\times{}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{14}\times\frac{5}{16}=\frac{25}{224}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{9}{56}+\frac{25}{224}=\frac{61}{224}$

11-**1** 답 $\frac{3}{8}$

한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

동전을 3번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 $x$, 뒷면이 나오는 횟수를 $y$라 하면

$x+y=3$ ······ ㉠

또 정사각형의 네 변의 길이의 합이 4이므로 점 P가 점 A로 돌아오려면 4의 배수만큼 움직여야 한다. 이때 동전을 3번만 던지므로 점 P의 이동 거리의 최댓값은 6이다.

∴ $2x+y=4$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=2$

따라서 구하는 확률은 동전을 3번 던져서 앞면이 1번, 뒷면이 2번 나올 확률과 같으므로 ${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

11-**2** 답 $\frac{5}{16}$

한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

동전을 5번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 $x$, 뒷면이 나오는 횟수를 $y$라 하자. 점 P가 원점에서 점 (4, 3)까지 이동하려면 $x$축의 방향으로 4칸, $y$축의 방향으로 3칸 이동해야 하므로

$2x=4$, $y=3$ ∴ $x=2$, $y=3$

따라서 구하는 확률은 동전을 5번 던져서 앞면이 2번, 뒷면이 3번 나올 확률과 같으므로

${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

## 연습문제

72~74쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 ③ | 2 $\frac{3}{4}$ | 3 ② | 4 158 | 5 ⑤ |
| 6 $\frac{5}{16}$ | 7 ④ | 8 6 | 9 8 | 10 ㄴ, ㄷ |
| 11 ④ | 12 $\frac{24}{625}$ | 13 $\frac{13}{125}$ | 14 137 | 15 $\frac{19}{45}$ |
| 16 $\frac{12}{37}$ | 17 ⑤ | 18 $\frac{25}{81}$ | | |

**1** $P(A|B)=P(B|A)$에서

$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ ∴ $P(A)=P(B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$1=P(A)+P(A)-\frac{1}{4}$

$2P(A)=\frac{5}{4}$ ∴ $P(A)=\frac{5}{8}$

**2** $P(A\cap B)=P(B)P(A|B)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$

$P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$

∴ $P(A|B^C)=\frac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)}=\frac{P(A\cap B^C)}{1-P(B)}$

$=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{3}{5}}=\frac{3}{4}$

**3** 진로활동 B를 선택한 학생인 사건을 $A$, 1학년 학생인 사건을 $B$라 하면

$P(A)=\frac{9}{20}$, $P(A\cap B)=\frac{5}{20}$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{20}}{\frac{9}{20}}=\frac{5}{9}$

**4** 안경을 쓰지 않은 여학생 수를 $a$라 하고 안경을 쓴 학생과 쓰지 않은 학생 수를 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

| | 남학생 | 여학생 | 합계 |
|---|---|---|---|
| 안경 씀 | 50 | 70 | 120 |
| 안경 쓰지 않음 | $180-a$ | $a$ | 180 |
| 합계 | $230-a$ | $a+70$ | 300 |

임의로 택한 한 명이 안경을 쓰지 않은 학생인 사건을 $A$, 여학생인 사건을 $B$라 하면

$P(A)=\frac{180}{300}$, $P(A\cap B)=\frac{a}{300}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{a}{300}}{\frac{180}{300}}=\dfrac{a}{180}$

즉, $\dfrac{a}{180}=\dfrac{2}{5}$이므로

$5a=360$ $\quad\therefore a=72$

따라서 3학년 남학생 수는

$230-a=230-72=158$

**5** A가 당첨 제비를 뽑는 사건을 $A$, B가 당첨 제비를 뽑는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$

**6** 첫 번째에 검사한 마우스가 불량품인 사건을 $A$, 두 번째에 검사한 마우스가 불량품인 사건을 $B$라 하자.

(i) 첫 번째에 검사한 마우스가 불량품이고, 두 번째에 검사한 마우스도 불량품일 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{5}{16}\times\dfrac{4}{15}=\dfrac{1}{12}$

(ii) 첫 번째에 검사한 마우스가 정상품이고, 두 번째에 검사한 마우스가 불량품일 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$=\dfrac{11}{16}\times\dfrac{5}{15}=\dfrac{11}{48}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\dfrac{1}{12}+\dfrac{11}{48}=\dfrac{5}{16}$

**7** 어떤 사람이 참말을 하는 사건을 $A$, 거짓말 탐지기가 거짓으로 판정하는 사건을 $B$라 하자.

(i) 참말을 하고, 그 말을 거짓말 탐지기가 거짓으로 판정할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=(1-0.2)\times(1-0.85)=0.12$

(ii) 거짓말을 하고, 그 말을 거짓말 탐지기가 거짓으로 판정할 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$=0.2\times0.85=0.17$

(i), (ii)에서 거짓말 탐지기가 거짓으로 판정할 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=0.12+0.17=0.29$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{0.12}{0.29}=\dfrac{12}{29}$

**8** A 회사의 제품을 택하는 사건을 $A$, USB 메모리에서 오류가 발생하는 사건을 $B$라 하자.

(i) A 회사 제품을 택하고, 그 USB 메모리에서 오류가 발생할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\dfrac{20}{50}\times\dfrac{5}{100}=\dfrac{1}{50}$

(ii) B 회사 제품을 택하고, 그 USB 메모리에서 오류가 발생할 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$=\dfrac{30}{50}\times\dfrac{x}{100}=\dfrac{3x}{500}$

(i), (ii)에서 USB 메모리에서 오류가 발생할 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\dfrac{1}{50}+\dfrac{3x}{500}=\dfrac{10+3x}{500}$

따라서 USB 메모리에서 오류가 발생하였을 때, 그것이 A 회사의 제품일 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{50}}{\frac{10+3x}{500}}=\dfrac{10}{10+3x}$

즉, $\dfrac{10}{10+3x}=\dfrac{5}{14}$이므로

$50+15x=140$

$\therefore x=6$

**9** 표본공간 $S$는 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A=\{1, 3, 5\}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$

(i) $m=1$이면 $B=\{1\}$, $A\cap B=\{1\}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq\mathrm{P}(A\cap B)$

(ii) $m=2$이면 $B=\{1, 2\}$, $A\cap B=\{1\}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$

(iii) $m=3$이면 $B=\{1, 3\}$, $A\cap B=\{1, 3\}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq\mathrm{P}(A\cap B)$

(iv) $m=4$이면 $B=\{1, 2, 4\}$, $A\cap B=\{1\}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq\mathrm{P}(A\cap B)$

(v) $m=5$이면 $B=\{1, 5\}$, $A\cap B=\{1, 5\}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq\mathrm{P}(A\cap B)$

(vi) $m=6$이면 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $A\cap B=\{1,\ 3\}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$

(i)~(vi)에서 두 사건 $A$와 $B$가 서로 독립이 되도록 하는 $m$의 값은 2, 6이므로 그 합은

$2+6=8$

**10** ㄱ. $A$, $B$가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

이때 $\mathrm{P}(A)\neq 0$, $\mathrm{P}(B)\neq 0$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq 0$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)\neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 종속이다.

ㄴ. $A$, $B$가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=0$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=0$

$\therefore\ \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B|A)$

ㄷ. $A$, $B$가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$

$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\}$

$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**11** $\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$에서

$1-\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(A)\qquad \therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

**12** A가 이긴 경기를 ○, 진 경기를 ×로 나타내면 4번째 경기에서 A가 우승하는 경우는 ○×○○이다.

이때 한 경기에서 A가 B를 이길 확률이 $\frac{2}{5}$이므로 구하는 확률은

$\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{24}{625}$

**13** (i) 3경기 중 1경기도 이기지 못할 확률은

${}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{4}{5}\right)^0\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$

(ii) 3경기 중 1경기만 이길 확률은

${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{4}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{12}{125}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{125}+\frac{12}{125}=\frac{13}{125}$

**14** $0\le a\le 5$, $0\le b\le 4$에 대하여 $a-b=3$이므로

$a=3$, $b=0$ 또는 $a=4$, $b=1$ 또는 $a=5$, $b=2$

한 개의 주사위를 던져서 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(i) $a=3$, $b=0$인 경우

$a=3$일 확률은 주사위를 5번 던져서 홀수의 눈이 3번 나올 확률이므로 ${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$

$b=0$일 확률은 동전을 4번 던져서 앞면이 나오지 않을 확률이므로 ${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

따라서 $a=3$, $b=0$일 확률은 $\frac{5}{16}\times\frac{1}{16}=\frac{5}{256}$

(ii) $a=4$, $b=1$인 경우

$a=4$일 확률은 주사위를 5번 던져서 홀수의 눈이 4번 나올 확률이므로 ${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{32}$

$b=1$일 확률은 동전을 4번 던져서 앞면이 1번 나올 확률이므로 ${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$

따라서 $a=4$, $b=1$일 확률은 $\frac{5}{32}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{128}$

(iii) $a=5$, $b=2$인 경우

$a=5$일 확률은 주사위를 5번 던져서 홀수의 눈이 5번 나올 확률이므로 ${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{32}$

$b=2$일 확률은 동전을 4번 던져서 앞면이 2번 나올 확률이므로 ${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

따라서 $a=5$, $b=2$일 확률은 $\frac{1}{32}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{256}$

(i), (ii), (iii)에서 $a-b=3$일 확률은

$\frac{5}{256}+\frac{5}{128}+\frac{3}{256}=\frac{9}{128}$

따라서 $p=128$, $q=9$이므로

$p+q=137$

**15** A 주머니에서 흰 구슬 2개를 꺼내는 사건을 $A_1$, A 주머니에서 흰 구슬 1개와 검은 구슬 1개를 꺼내는 사건을 $A_2$, A 주머니에서 검은 구슬 2개를 꺼내는 사건을 $A_3$, B 주머니에서 흰 구슬 1개를 꺼내는 사건을 $B$라 하자.

(i) A 주머니에서 흰 구슬 2개를 꺼낸 경우

흰 구슬 2개를 B 주머니에 더 넣었으므로 B 주머니에는 흰 구슬 5개와 검은 구슬 4개가 들어 있다.

A 주머니에서 흰 구슬 2개를 꺼내고 B 주머니에서 흰 구슬 1개를 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A_1\cap B)=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B|A_1)$$
$$=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{18}$$

(ii) A 주머니에서 흰 구슬 1개, 검은 구슬 1개를 꺼낸 경우

흰 구슬 1개와 검은 구슬 1개를 B 주머니에 더 넣었으므로 B 주머니에는 흰 구슬 4개와 검은 구슬 5개가 들어 있다.

A 주머니에서 흰 구슬 1개와 검은 구슬 1개를 꺼내고 B 주머니에서 흰 구슬 1개를 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A_2\cap B)=\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B|A_2)$$
$$=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{4}{9}=\frac{3}{5}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$$

(iii) A 주머니에서 검은 구슬 2개를 꺼낸 경우

검은 구슬 2개를 B 주머니에 더 넣었으므로 B 주머니에는 흰 구슬 3개와 검은 구슬 6개가 들어 있다.

A 주머니에서 검은 구슬 2개를 꺼내고 B 주머니에서 흰 구슬 1개를 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A_3\cap B)=\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(B|A_3)$$
$$=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{3}{9}=\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A_1\cap B)+\mathrm{P}(A_2\cap B)+\mathrm{P}(A_3\cap B)$$
$$=\frac{1}{18}+\frac{4}{15}+\frac{1}{10}=\frac{19}{45}$$

**16** 학교를 방문하는 사건을 $A$, 도서관을 방문하는 사건을 $B$, 편의점을 방문하는 사건을 $C$, 우산을 잃어버리는 사건을 $D$라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap D)=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(B\cap D)=\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$ ◀ 학교에서 잃어버리지 않고 도서관에서 잃어버릴 확률

$$\mathrm{P}(C\cap D)=\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$$ ◀ 학교와 도서관에서 잃어버리지 않고 편의점에서 잃어버릴 확률

즉, 우산을 잃어버릴 확률은

$$\mathrm{P}(D)=\mathrm{P}(A\cap D)+\mathrm{P}(B\cap D)+\mathrm{P}(C\cap D)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}=\frac{37}{64}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|D)=\frac{\mathrm{P}(B\cap D)}{\mathrm{P}(D)}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{37}{64}}=\frac{12}{37}$$

**17** 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자의 합이 소수인 사건을 $A$, 동전의 앞면이 2번 나오는 사건을 $B$라 하자.

2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자의 합이 소수인 경우는 (1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4)의 4가지이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2}{3}$$

한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

(i) 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자의 합이 소수이고, 동전을 2번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$$
$$=\frac{2}{3}\times{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$

(ii) 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자의 합이 소수가 아니고, 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$$
$$=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$$

(i), (ii)에서 동전의 앞면이 2번 나올 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{7}{24}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{24}}=\frac{4}{7}$$

**18** 정육면체를 던져서 1, 3이 나올 확률은 각각 $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$

정육면체를 6번 던져서 1, 3이 나오는 횟수를 각각 $a$, $b$라 하면 $a+b=6$

$a$, $b$는 6 이하의 음이 아닌 정수이고 점 P가 처음 출발한 위치로 다시 돌아오려면 움직인 거리가 6의 배수이어야 하므로 $a+3b=6$ 또는 $a+3b=12$ 또는 $a+3b=18$

(i) $a+b=6$, $a+3b=6$을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=0$

따라서 정육면체를 6번 던져서 1이 6번 나올 확률은

$${}_6\mathrm{C}_6\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{64}{729}$$

(ii) $a+b=6$, $a+3b=12$를 연립하여 풀면 $a=3$, $b=3$

따라서 정육면체를 6번 던져서 1이 3번 나올 확률은

$${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{160}{729}$$

(iii) $a+b=6$, $a+3b=18$을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=6$

따라서 정육면체를 6번 던져서 1이 나오지 않을 확률은

$${}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{1}{729}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{64}{729}+\frac{160}{729}+\frac{1}{729}=\frac{25}{81}$$

# Ⅲ-1 01 이산확률변수와 이항분포

## 1 이산확률변수와 확률질량함수

**개념 Check** 77쪽

**1** 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

**2** 답 (1) **0, 1, 2** (2) **풀이 참조** (3) **풀이 참조**

(1) 한 개의 주사위를 2번 던지므로 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

(2) 한 개의 주사위를 던져서 소수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 그 외의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(3)

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

**3** 답 (1) $\mathbf{\frac{1}{8}}$ (2) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (3) $\mathbf{\frac{5}{8}}$

(1) 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{8}$

(2) $\mathrm{P}(X=1 \text{ 또는 } X=3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$

(3) $\mathrm{P}(X\geq 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

**문제** 78~79쪽

01-**1** 답 (1) **10** (2) $\mathbf{\frac{3}{10}}$

(1) 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{k}$ | $\frac{2}{k}$ | $\frac{3}{k}$ | $\frac{4}{k}$ | 1 |

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}+\frac{4}{k}=1 \qquad \therefore k=10$

(2) $\mathrm{P}(X\leq 2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}=\frac{3}{10}$

01-**2** 답 $\mathbf{\frac{5}{8}}$

확률은 0에서 1까지의 값을 가지므로

$0\leq a^2\leq 1,\ 0\leq \frac{a}{2}\leq 1$

$\therefore 0\leq a\leq 1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+a^2+\frac{a}{2}=1,\ 2a^2+a-1=0$

$(a+1)(2a-1)=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}\ (\because ㉠)$

$X^2-X-2<0$에서

$(X+1)(X-2)<0 \qquad \therefore -1<X<2$

$\therefore \mathrm{P}(X^2-X-2<0)=\mathrm{P}(-1<X<2)$

$=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$

01-**3** 답 $\mathbf{\frac{9}{8}}$

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\cdots+\mathrm{P}(X=9)=1$

$\frac{k}{2\times 1}+\frac{k}{3\times 2}+\frac{k}{4\times 3}+\cdots+\frac{k}{9\times 8}=1$

$k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)\right\}=1$

$k\left(1-\frac{1}{9}\right)=1,\ \frac{8}{9}k=1$

$\therefore k=\frac{9}{8}$

02-**1** 답 (1) $\mathbf{P(X=x)=\frac{{}_3C_x\times{}_4C_{3-x}}{{}_7C_3}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)}$

(2) **풀이 참조** (3) $\mathbf{\frac{16}{35}}$

(1) 3명의 대표를 뽑으므로 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

이때 7명 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_3$이고, 뽑힌 여학생이 $x$명인 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{3-x}$이다.

따라서 $X$의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_3\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{3-x}}{{}_7\mathrm{C}_3}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

(2) 확률변수 $X$가 가질 수 있는 각 값에 대한 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{18}{35}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{12}{35}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1}{35}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{4}{35}$ | $\frac{18}{35}$ | $\frac{12}{35}$ | $\frac{1}{35}$ | 1 |

(3) 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X=0 \text{ 또는 } X=2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)$$
$$=\frac{4}{35}+\frac{12}{35}=\frac{16}{35}$$

02-**2** 답 $\mathbf{\frac{7}{36}}$

$X^2-10X+24=0$에서 $(X-4)(X-6)=0$

$\therefore X=4$ 또는 $X=6$

$\therefore \mathrm{P}(X^2-10X+24=0)$

$=\mathrm{P}(X=4 \text{ 또는 } X=6)$

$=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=6)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

서로 다른 두 개의 주사위를 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

(i) $X=4$인 경우

(1, 4), (2, 2), (4, 1)의 3가지이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{36}$

(ii) $X=6$인 경우

(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)의 4가지이므로

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{4}{36}$

따라서 ㉠에서

$\mathrm{P}(X^2-10X+24=0)=\frac{3}{36}+\frac{4}{36}=\frac{7}{36}$

## 2 이산확률변수의 기댓값과 표준편차

### 개념 Check 81쪽

**1** 답 (1) **9** (2) **3**

(1) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=13-2^2=9$

(2) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{9}=3$

**2** 답 (1) **2** (2) **5** (3) **1** (4) **1**

(1) $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{8}=2$

(2) $\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}+4^2\times\frac{1}{8}=5$

(3) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=5-2^2=1$

(4) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{1}=1$

### 문제 82~83쪽

03-**1** 답 (1) $\mathbf{a=2,\ b=\frac{1}{4}}$ (2) $\mathbf{\frac{\sqrt{11}}{2}}$

(1) 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{2}+b+\frac{1}{4}=1 \qquad \therefore b=\frac{1}{4}$

$\mathrm{E}(X)=-\frac{1}{2}$이므로

$-a\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+a\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{2} \qquad \therefore a=2$

(2) $\mathrm{E}(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{2}+0^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}=3$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=3-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{11}{4}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{11}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$

03-**2** 답 **1**

확률의 총합은 1이므로

$\frac{4}{a}+\frac{3}{a}+\frac{2}{a}+\frac{1}{a}=1 \qquad \therefore a=10$

확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | 1 |

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{10}=1$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{10}=2$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=2-1^2=1$

04-**1** 답 $\mathbf{\frac{28}{75}}$

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{7}{15}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{7}{15}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | 1 |

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{7}{15}+1^2\times\frac{7}{15}+2^2\times\frac{1}{15}=\frac{11}{15}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{11}{15}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{28}{75}$

04-**2** 답 $\frac{2}{3}$

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 각각의 확률은

$P(X=0)={}_2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

$P(X=1)={}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{4}{9}$

$P(X=2)={}_2C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{9}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | 1 |

$E(X)=0\times\frac{4}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{4}{9}+1^2\times\frac{4}{9}+2^2\times\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{8}{9}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

## 3 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

**개념 Check** 84쪽

**1** 답 (1) **평균: 10, 분산: 36, 표준편차: 6**

(2) **평균: 11, 분산: 81, 표준편차: 9**

$E(X)=5$, $V(X)=9$, $\sigma(X)=\sqrt{9}=3$이므로

(1) $E(2X)=2E(X)=2\times5=10$

$V(2X)=2^2V(X)=4\times9=36$

$\sigma(2X)=|2|\sigma(X)=2\times3=6$

(2) $E(3X-4)=3E(X)-4=3\times5-4=11$

$V(3X-4)=3^2V(X)=9\times9=81$

$\sigma(3X-4)=|3|\sigma(X)=3\times3=9$

**문제** 85~87쪽

05-**1** 답 **32**

$E(X)=5$, $E(X^2)=27$에서

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=27-5^2=2$

$\therefore V(-4X+5)=(-4)^2V(X)$

$=16\times2=32$

05-**2** 답 **1**

$E(Y)=-2$에서 $E(5X+3)=-2$

$5E(X)+3=-2$ $\quad\therefore E(X)=-1$

$V(Y)=100$에서 $V(5X+3)=100$

$5^2V(X)=100$ $\quad\therefore V(X)=4$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{4}=2$

$\therefore E(X)+\sigma(X)=-1+2=1$

05-**3** 답 **70**

$E(Y)=30$에서 $E(aX+b)=30$

$aE(X)+b=30$

이때 $E(X)=1$이므로 $a+b=30$ ······ ㉠

또 $V(Y)=1600$에서 $V(aX+b)=1600$

$a^2V(X)=1600$

이때 $V(X)=4$이므로

$4a^2=1600$, $a^2=400$ $\quad\therefore a=-20$ ($\because a<0$)

이를 ㉠에 대입하면

$-20+b=30$ $\quad\therefore b=50$

$\therefore b-a=50-(-20)=70$

06-**1** 답 **평균: 2, 분산: 13, 표준편차: $\sqrt{13}$**

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{8}+2a+\frac{1}{8}=1$, $3a=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$

확률변수 $X$의 확률분포를 나타낸 표를 완성하면

| $X$ | $-2$ | 0 | 1 | 4 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=-2\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

$E(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{8}=\frac{7}{2}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{7}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{13}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

따라서 $Y=2X+1$의 평균, 분산, 표준편차는

$E(Y)=E(2X+1)=2E(X)+1$

$=2\times\frac{1}{2}+1=2$

$V(Y)=V(2X+1)=2^2V(X)$

$=4\times\frac{13}{4}=13$

$\sigma(Y)=\sigma(2X+1)=|2|\sigma(X)$

$=2\times\frac{\sqrt{13}}{2}=\sqrt{13}$

06-2 답 $-13$

확률의 총합은 1이므로

$k+2k+3k+4k=1$, $10k=1$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{10}$

확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{2}{5}$ | 1 |

$\mathrm{E}(X)=2\times\dfrac{1}{10}+3\times\dfrac{1}{5}+4\times\dfrac{3}{10}+5\times\dfrac{2}{5}=4$

$\therefore \mathrm{E}(-5X+7)=-5\mathrm{E}(X)+7$

$=-5\times4+7=-13$

07-1 답 **평균: 8, 분산: 3**

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{6}$

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{3}$

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_0}{{}_4\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{6}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{2}{3}+2\times\dfrac{1}{6}=1$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\dfrac{1}{6}+1^2\times\dfrac{2}{3}+2^2\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{3}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\dfrac{4}{3}-1^2=\dfrac{1}{3}$

따라서 $Y=3X+5$의 평균 $\mathrm{E}(Y)$와 분산 $\mathrm{V}(Y)$는

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X+5)=3\mathrm{E}(X)+5=3\times1+5=8$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(3X+5)=3^2\mathrm{V}(X)=9\times\dfrac{1}{3}=3$

07-2 답 $\dfrac{11}{3}$

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{1}{6}$, $\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{1}{6}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

$\mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{3}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\dfrac{1}{6}+1^2\times\dfrac{1}{3}+2^2\times\dfrac{1}{3}+3^2\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{19}{6}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\dfrac{19}{6}-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{11}{12}$

$\therefore \mathrm{V}(-2X+4)=(-2)^2\mathrm{V}(X)$

$=4\times\dfrac{11}{12}=\dfrac{11}{3}$

## 4 이항분포

**개념 Check** 90쪽

**1** 답 (1) $\mathbf{B(10,\ 0.4)}$ (2) **이항분포를 따르지 않는다.**

**2** 답 (1) $\mathbf{P(X=x)={}_6C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)}$

(2) $\mathbf{\dfrac{20}{243}}$

(2) $\mathrm{P}(X=4)={}_6\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{20}{243}$

**3** 답 (1) **평균: 180, 분산: 90, 표준편차: $3\sqrt{10}$**

(2) **평균: 12, 분산: 9, 표준편차: 3**

(1) $\mathrm{E}(X)=360\times\dfrac{1}{2}=180$

$\mathrm{V}(X)=360\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=90$

$\sigma(X)=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

(2) $\mathrm{E}(X)=48\times\dfrac{1}{4}=12$

$\mathrm{V}(X)=48\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=9$

$\sigma(X)=\sqrt{9}=3$

**문제** 91~93쪽

08-1 답 (1) $\mathbf{B\left(10,\ \frac{1}{10}\right)}$

(2) $\mathbf{P(X=x)={}_{10}C_x\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{10-x}}$

$\mathbf{(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)}$

(3) **91**

(1) 10개의 제품을 조사하므로 10회의 독립시행이다. 또 한 개의 제품이 불량품일 확률은 $\dfrac{1}{10}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \dfrac{1}{10}\right)$을 따른다.

(3) 불량품이 9개 이상일 확률은

$$P(X\ge 9)=P(X=9)+P(X=10)$$
$$={}_{10}C_9\left(\frac{1}{10}\right)^9\left(\frac{9}{10}\right)^1+{}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{10}\left(\frac{9}{10}\right)^0$$
$$=\frac{90}{10^{10}}+\frac{1}{10^{10}}=\frac{91}{10^{10}}$$

$\therefore a=91$

**08-2** 답 $\frac{113}{625}$

타석에 4번 서므로 4회의 독립시행이다. 또 한 번의 타석에서 안타를 칠 확률은 $\frac{1}{5}$이므로 안타를 치는 횟수를 $X$라 하면 확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(4, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

이때 $X$의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{4-x}\ (x=0, 1, 2, 3, 4)$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X\ge 2)=1-P(X<2)$$
$$=1-\{P(X=0)+P(X=1)\}$$
$$=1-\left\{{}_4C_0\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^4+{}_4C_1\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^3\right\}$$
$$=1-\left(\frac{256}{625}+\frac{256}{625}\right)$$
$$=\frac{113}{625}$$

**09-1** 답 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{16}{3}$

(1) $E(X)=2$에서

$n\times\frac{1}{3}=2 \qquad \therefore n=6$

따라서 확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(6, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 $X$의 분산은

$$V(X)=6\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

(2) $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{4}{3}+2^2=\frac{16}{3}$$

**09-2** 답 **평균: 20, 표준편차: 2**

확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(25, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로 $X$의 평균과 표준편차는

$$E(X)=25\times\frac{4}{5}=20$$
$$\sigma(X)=\sqrt{25\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}=2$$

**09-3** 답 $n=64$, $p=\frac{3}{4}$

$E(X)=48$, $V(X)=12$이므로

$E(X)=np=48 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$V(X)=np(1-p)=12 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$48(1-p)=12$

$\therefore p=\frac{3}{4}$

$p=\frac{3}{4}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{4}n=48 \qquad \therefore n=64$

**09-4** 답 $\frac{143}{2048}$

$V(X)=3$에서 $n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=3 \qquad \therefore n=12$

따라서 확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(12, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로 $X$의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{12}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{12-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 12)$$

$X^2-5X+4<0$에서 $(X-1)(X-4)<0$

$\therefore 1<X<4$

$$\therefore P(X^2-5X+4<0)$$
$$=P(1<X<4)$$
$$=P(X=2)+P(X=3)$$
$$={}_{12}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{12}C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^9$$
$$=\frac{33}{2048}+\frac{55}{1024}=\frac{143}{2048}$$

**10-1** 답 (1) **평균: 6, 표준편차: 2**
(2) **평균: 1000, 표준편차: 30**

(1) 18번 전화를 거므로 18회의 독립시행이다. 또 한 번 전화를 걸 때 통화가 연결되지 않을 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(18, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

따라서 $X$의 평균과 표준편차는

$$E(X)=18\times\frac{1}{3}=6$$
$$\sigma(X)=\sqrt{18\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=2$$

(2) 씨앗 10000개를 뿌리므로 10000회의 독립시행이다. 또 한 개의 씨앗이 발아할 확률은 $\frac{1}{10}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(10000, \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

따라서 $X$의 평균과 표준편차는

$\mathrm{E}(X)=10000\times\frac{1}{10}=1000$

$\sigma(X)=\sqrt{10000\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}=30$

**10-2** 답 **154**

주사위를 $n$번 던지므로 $n$회의 독립시행이다. 또 주사위를 한 번 던져서 2의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

이때 $\mathrm{E}(X)=12$에서

$n\times\frac{1}{6}=12 \qquad \therefore n=72$

$\therefore \mathrm{V}(X)=72\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=10$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=10+12^2=154$

**10-3** 답 **평균: 59, 분산: 108**

한 개의 전구를 꺼내어 확인한 후 다시 넣는 시행을 50회 반복하므로 50회의 독립시행이다. 또 두 개의 전구를 꺼낼 때 모두 불량인 전구가 나올 확률은 $\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(50,\ \frac{2}{5}\right)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=50\times\frac{2}{5}=20,\ \mathrm{V}(X)=50\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=12$

따라서 $Y=3X-1$의 평균 $\mathrm{E}(Y)$와 분산 $\mathrm{V}(Y)$는

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X-1)=3\mathrm{E}(X)-1=3\times20-1=59$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(3X-1)=3^2\mathrm{V}(X)=9\times12=108$

## 연습문제

94~96쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** $\frac{1}{11}$ | **2** $\frac{3}{5}$ | **3** 6 | **4** 3 | **5** $\frac{5}{12}$ |
| **6** ① | **7** 6 | **8** 150원 | **9** 25 | |
| **10** 평균: 50점, 표준편차: 10점 | | | **11** ③ | **12** 10 |
| **13** $3\sqrt{5}$ | **14** ② | **15** $\frac{1013}{1024}$ | **16** 153 | **17** 17 |
| **18** $\frac{3}{5}$ | **19** 28 | **20** ③ | **21** 18 | **22** 135 |

**1** 확률의 총합은 1이므로

$2a+4a+3a+2a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{11}$

**2** 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{10}+a+\frac{1}{5}+b+\frac{3}{10}=1$

$\therefore a+b=\frac{2}{5}$

$X^2-1\le0$에서

$(X+1)(X-1)\le0$

$\therefore -1\le X\le1$

$\therefore \mathrm{P}(X^2-1\le0)$

$=\mathrm{P}(-1\le X\le1)$

$=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=a+\frac{1}{5}+b=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

다른 풀이

$\mathrm{P}(X^2-1\le0)=1-\mathrm{P}(X^2-1>0)$

$=1-\mathrm{P}(X<-1$ 또는 $X>1)$

$=1-\{\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=2)\}$

$=1-\left(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\right)=\frac{3}{5}$

**3** 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이다.

정사면체를 2번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$4\times4=16$

$X=2$인 경우는 (1, 1)의 1가지이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{16}$

$X=3$인 경우는 (1, 2), (2, 1)의 2가지이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

$X=4$인 경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{16}$

$X=5$인 경우는 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지이므로

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

$X=6$인 경우는 (2, 4), (3, 3), (4, 2)의 3가지이므로

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{3}{16}$

$X=7$인 경우는 (3, 4), (4, 3)의 2가지이므로

$\mathrm{P}(X=7)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

$X=8$인 경우는 (4, 4)의 1가지이므로

$\mathrm{P}(X=8)=\frac{1}{16}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | 1 |

이때 $P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=\frac{3}{8}$이므로

$P(X\geq 6)=\frac{3}{8}$ $\therefore a=6$

**4** $P(3\leq X\leq 7)=\frac{3}{5}$에서

$P(X=3)+P(X=5)+P(X=7)=\frac{3}{5}$

$\frac{3}{10}+\frac{a+1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$ $\therefore a=1$

$\therefore E(X)=1\times\frac{2}{5}+3\times\frac{3}{10}+5\times\frac{1}{5}+7\times\frac{1}{10}=3$

**5** 확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{3}+b=1$

$\therefore a=\frac{2}{3}-b$ ...... ㉠

$E(X)=0\times a+3\times\frac{1}{3}+4\times b=1+4b$

$E(X^2)=0^2\times a+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times b=3+16b$

$$\begin{aligned}\therefore V(X)&=E(X^2)-\{E(X)\}^2\\&=3+16b-(1+4b)^2\\&=-16b^2+8b+2\\&=-16\left(b-\frac{1}{4}\right)^2+3\end{aligned}$$

따라서 분산 $V(X)$는 $b=\frac{1}{4}$일 때 최대이므로 이를 ㉠에 대입하면

$a=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

**6** 홀수가 적힌 공은 3개, 짝수가 적힌 공은 2개이므로 3개의 공을 꺼낼 때, 홀수가 적힌 공은 적어도 1개 나온다.
즉, 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고 각각의 확률은

$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_2C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_2C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{5}$

$P(X=3)=\frac{{}_3C_3\times{}_2C_0}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | 1 |

$E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{3}{5}+3^2\times\frac{1}{10}=\frac{18}{5}$

$$\begin{aligned}\therefore V(X)&=E(X^2)-\{E(X)\}^2\\&=\frac{18}{5}-\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{9}{25}\end{aligned}$$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

**7** 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이다.
8장의 카드 중에서 2장을 택하는 경우의 수는

${}_8C_2=28$

$X=1$인 경우는 (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8)의 7가지이므로

$P(X=1)=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$

$X=2$인 경우는 (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7), (6, 8)의 6가지이므로

$P(X=2)=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$

$X=3$인 경우는 (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8)의 5가지이므로

$P(X=3)=\frac{5}{28}$

$X=4$인 경우는 (1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8)의 4가지이므로

$P(X=4)=\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$

$X=5$인 경우는 (1, 6), (2, 7), (3, 8)의 3가지이므로

$P(X=5)=\frac{3}{28}$

$X=6$인 경우는 (1, 7), (2, 8)의 2가지이므로

$P(X=6)=\frac{2}{28}=\frac{1}{14}$

$X=7$인 경우는 (1, 8)의 1가지이므로

$P(X=7)=\frac{1}{28}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{14}$ | $\frac{5}{28}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{3}{28}$ | $\frac{1}{14}$ | $\frac{1}{28}$ | 1 |

$$\begin{aligned}E(X)&=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{3}{14}+3\times\frac{5}{28}+4\times\frac{1}{7}+5\times\frac{3}{28}\\&\quad+6\times\frac{1}{14}+7\times\frac{1}{28}\\&=3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X^2)&=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{3}{14}+3^2\times\frac{5}{28}+4^2\times\frac{1}{7}\\&\quad+5^2\times\frac{3}{28}+6^2\times\frac{1}{14}+7^2\times\frac{1}{28}\\&=12\end{aligned}$$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=12-3^2=3$

$\therefore E(X)+V(X)=3+3=6$

**8** 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 서로 다른 3개의 동전을 동시에 던져서 나오는 각 경우에 따라 받을 수 있는 상금은

HHH ➡ 300원
HHT, HTH, THH ➡ 200원
HTT, THT, TTH ➡ 100원
TTT ➡ 0원

받을 수 있는 상금을 $X$원이라 하면 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 100, 200, 300이고 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(X=100)=\frac{3}{8}$,

$\mathrm{P}(X=200)=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(X=300)=\frac{1}{8}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 100 | 200 | 300 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 1 |

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+100\times\frac{3}{8}+200\times\frac{3}{8}+300\times\frac{1}{8}$

$=150$

따라서 구하는 기댓값은 150원이다.

**9** $\mathrm{E}(2X-1)=7$에서

$2\mathrm{E}(X)-1=7$ $\quad\therefore \mathrm{E}(X)=4$

$\sigma(-2X+4)=6$에서

$|-2|\sigma(X)=6$

$\therefore \sigma(X)=3$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\{\sigma(X)\}^2=9$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=9+4^2=25$

**10** $\mathrm{E}(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$이므로 표준점수 $T$의 평균, 표준편차는

$$\mathrm{E}(T)=\mathrm{E}\left(10\times\frac{X-m}{\sigma}+50\right)$$
$$=\frac{10}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{10m}{\sigma}+50$$
$$=\frac{10m}{\sigma}-\frac{10m}{\sigma}+50$$
$$=50(\text{점})$$

$$\sigma(T)=\sigma\left(10\times\frac{X-m}{\sigma}+50\right)$$
$$=\left|\frac{10}{\sigma}\right|\sigma(X)$$
$$=\frac{10}{\sigma}\times\sigma$$
$$=10(\text{점})$$

**11** $\mathrm{E}(X)=-1$에서 $-3\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+a\times\frac{1}{4}=-1$

$\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}=-1$ $\quad\therefore a=2$

$\mathrm{E}(X^2)=(-3)^2\times\frac{1}{2}+0^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{11}{2}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{11}{2}-(-1)^2=\frac{9}{2}$

$\therefore \mathrm{V}(aX)=\mathrm{V}(2X)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times\frac{9}{2}=18$

**12** 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{2}{5}$ | 1 |

$\mathrm{E}(X)=-2\times\frac{1}{10}+(-1)\times\frac{1}{5}+0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{2}{5}=0$

$\mathrm{E}(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{10}+(-1)^2\times\frac{1}{5}+0^2\times\frac{3}{10}+1^2\times\frac{2}{5}$

$=1$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=1-0^2=1$

$\mathrm{E}(Y)=2$에서 $\mathrm{E}(aX+b)=2$

$a\mathrm{E}(X)+b=2$ $\quad\therefore b=2$

$\mathrm{V}(Y)=6$에서 $\mathrm{V}(aX+b)=6$

$a^2\mathrm{V}(X)=6$ $\quad\therefore a^2=6$

$\therefore a^2+b^2=6+2^2=10$

**13** 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이다.

$X=1$인 경우는 1이 적힌 카드는 반드시 뽑고 2, 3, 4, 5가 적힌 카드 중에서 2장을 뽑으면 되므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{5}$

$X=2$인 경우는 2가 적힌 카드는 반드시 뽑고 3, 4, 5가 적힌 카드 중에서 2장을 뽑으면 되므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$

$X=3$인 경우는 3이 적힌 카드는 반드시 뽑고 4, 5가 적힌 카드 중에서 2장을 뽑으면 되므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{1}{10}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | 1 |

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{3}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{10}=\frac{27}{10}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{27}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{20}$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{9}{20}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$이므로

$\sigma(-10X+3)=|-10|\sigma(X)$

$=10\times\frac{3\sqrt{5}}{10}=3\sqrt{5}$

**14** 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(8, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로 $X$의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_8\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{8-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 8)$

$X^2-8X+7>0$에서 $(X-1)(X-7)>0$

$\therefore X<1$ 또는 $X>7$

$\therefore \mathrm{P}(X^2-8X+7>0)=\mathrm{P}(X<1)+\mathrm{P}(X>7)$

$=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=8)$

$={}_8\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^8+{}_8\mathrm{C}_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^0$

$=\frac{1}{256}+\frac{1}{256}=\frac{1}{128}$

**15** 10개의 문제에 답하므로 10회의 독립시행이다. 또 한 개의 문제를 맞힐 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 맞힌 문제의 개수를 $X$라 하면 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

이때 $X$의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 10)$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\geq 2)=1-\mathrm{P}(X<2)$

$=1-\{\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)\}$

$=1-\left\{{}_{10}\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^9\right\}$

$=1-\frac{11}{1024}=\frac{1013}{1024}$

**16** 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(48, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로 $X$의 평균과 분산은

$\mathrm{E}(X)=48\times\frac{1}{4}=12$, $\mathrm{V}(X)=48\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=9$

$\therefore \mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=9+12^2=153$

**17** 주사위를 30번 던지므로 30회의 독립시행이다. 또 주사위를 한 번 던져서 6의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(30, \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{V}(X)=30\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{6}$

동전을 $n$번 던지므로 $n$회의 독립시행이다. 또 동전을 한 번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 $Y$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{V}(Y)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$

$X$의 분산이 $Y$의 분산보다 작으므로

$\frac{25}{6}<\frac{n}{4}$ $\quad\therefore n>\frac{50}{3}=16.6\cdots$

따라서 자연수 $n$의 최솟값은 17이다.

**18** 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6이므로

$\mathrm{P}(X>4)=\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)$

(i) $X=5$일 때

4번째 시행까지 새 건전지 1개와 폐건전지 3개를 꺼내고 5번째 시행에서 새 건전지를 꺼내야 하므로

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_4}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{15}$

(ii) $X=6$일 때

5번째 시행까지 새 건전지 1개와 폐건전지 4개를 꺼내고 6번째 시행에서 새 건전지를 꺼내야 하므로

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_4}{{}_6\mathrm{C}_5}\times 1=\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(X>4)=\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)$

$=\frac{4}{15}+\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$

다른 풀이

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6이다.

새 건전지를 꺼내는 것을 ○, 폐건전지를 꺼내는 것을 ×로 나타내면

(i) $X=5$인 경우

○×××○의 순서로 꺼낼 확률은

$\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{15}$

×○××○의 순서로 꺼낼 확률은

$\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{15}$

××○×○의 순서로 꺼낼 확률은

$\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{15}$

×××○○의 순서로 꺼낼 확률은

$\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(X=5)=\frac{4}{15}$

(ii) $X=6$인 경우

○××××○의 순서로 꺼낼 확률은

$\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{15}$

같은 방법으로 ×○×××○, ××○××○, ×××○×○, ××××○○의 순서로 꺼낼 확률도 각각 $\frac{1}{15}$이므로

$\mathrm{P}(X=6)=5\times\frac{1}{15}=\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(X>4)=\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)$

$=\frac{4}{15}+\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$

**19** 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다고 하자.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | 1 |

$\mathrm{E}(X)=4$에서

$p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5=4$ …… ㉠

$\mathrm{P}(Y=k)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}$ $(k=1, 2, 3, 4, 5)$이므로 확률변수 $Y$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(Y=y)$ | $\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{2}p_3+\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{2}p_4+\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{2}p_5+\frac{1}{10}$ | 1 |

$\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{10}+2\left(\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{10}\right)+3\left(\frac{1}{2}p_3+\frac{1}{10}\right)$

$+4\left(\frac{1}{2}p_4+\frac{1}{10}\right)+5\left(\frac{1}{2}p_5+\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{1}{2}(p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5)$

$+\frac{1}{10}\times(1+2+3+4+5)$

$=\frac{1}{2}\times4+\frac{3}{2}$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{7}{2}$

따라서 $a=\frac{7}{2}$이므로 $8a=28$

**20** 40명이 예약하였으므로 40회의 독립시행이다. 또 예약 취소율은 0.1이므로 예약한 사람이 유람선에 탑승할 확률은 0.9이다.

즉, 탑승하는 사람 수를 $X$라 하면 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}(40, 0.9)$를 따른다.

이때 $X$의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{40}\mathrm{C}_x\,0.9^x\,0.1^{40-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 40)$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X>38)=\mathrm{P}(X=39)+\mathrm{P}(X=40)$

$={}_{40}\mathrm{C}_{39}\,0.9^{39}\,0.1^1+{}_{40}\mathrm{C}_{40}\,0.9^{40}\,0.1^0$

$=40\times0.0164\times0.1+0.0148$

$=0.0656+0.0148$

$=0.0804$

**21** $\mathrm{E}(3X)=18$에서

$3\mathrm{E}(X)=18$, $\mathrm{E}(X)=6$

$\therefore np=6$ …… ㉠

$\mathrm{E}(3X^2)=120$에서

$3\mathrm{E}(X^2)=120$

$\therefore \mathrm{E}(X^2)=40$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=40-6^2=4$

$\therefore np(1-p)=4$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$6(1-p)=4$

$\therefore p=\frac{1}{3}$

$p=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{3}n=6$

$\therefore n=18$

**22** 주사위를 한 번 던져서 소수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 A가 주사위를 60번 던져서 소수의 눈이 나오는 횟수를 $A$라 하면 확률변수 $A$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(60, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{V}(A)=60\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=15$

이때 A의 점수가 확률변수 $X$이므로

$X=3A+2(60-A)=A+120$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(A+120)=\mathrm{V}(A)=15$

주사위를 한 번 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 B가 주사위를 60번 던져서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 $B$라 하면 확률변수 $B$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(60, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{V}(B)=60\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{40}{3}$

이때 B의 점수가 확률변수 $Y$이므로

$Y=4B+(60-B)=3B+60$

$\therefore \mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(3B+60)=3^2\mathrm{V}(B)$

$=9\times\frac{40}{3}=120$

$\therefore \mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)=15+120=135$

# Ⅲ-1 02 연속확률변수와 정규분포

## 연속확률변수와 확률밀도함수

**개념 Check** 98쪽

**1** 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

**2** 답 ㄴ, ㄹ

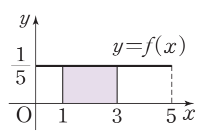
ㄱ. $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이 아니다.

ㄷ. $0\le x<1$에서 $f(x)<0$이다.

따라서 보기에서 확률밀도함수가 될 수 있는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

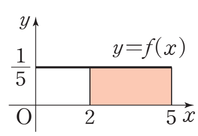
**3** 답 (1) $\dfrac{2}{5}$ (2) $\dfrac{3}{5}$

(1) 구하는 확률은 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로




$P(1\le X\le 3)=2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

(2) 구하는 확률은 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=2$, $x=5$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



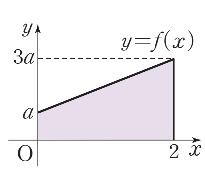

$P(X\ge 2)=3\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

**문제** 99쪽

**01-1** 답 (1) $\dfrac{1}{4}$ (2) $\dfrac{5}{8}$

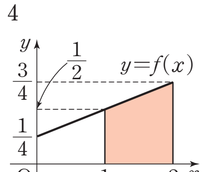
(1) $f(x)\ge 0$이어야 하므로 $a\ge 0$

$y=f(x)$의 그래프와 $x$축, $y$축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로




$\frac{1}{2}\times(a+3a)\times 2=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

(2) 구하는 확률은 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로




$P(X\ge 1)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\times 1$

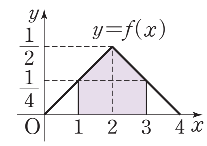
$=\frac{5}{8}$

**01-2** 답 $\dfrac{3}{4}$

$y=f(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times 4\times a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$0\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(0,\ 0)$, $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나는 직선이므로 이 직선의 방정식은




$y=\dfrac{\frac{1}{2}}{2}x \qquad \therefore y=\frac{1}{4}x$

즉, $f(x)=\frac{1}{4}x\ (0\le x\le 2)$이므로

$f(1)=\frac{1}{4}$

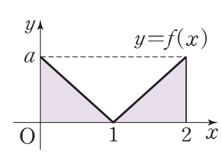
구하는 확률은 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같고, $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned}P(1\le X\le 3)&=1-P(0\le X\le 1)-P(3\le X\le 4)\\&=1-2P(0\le X\le 1)\\&=1-2\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

**01-3** 답 $\dfrac{13}{72}$

$f(x)\ge 0$이어야 하므로 $a\ge 0$

$y=f(x)$의 그래프와 $x$축, $y$축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로




$2\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times a\right)=1$

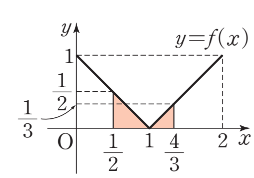
$\therefore a=1$

즉, $f(x)=|x-1|\ (0\le x\le 2)$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left|\frac{1}{2}-1\right|=\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{4}{3}\right)=\left|\frac{4}{3}-1\right|=\frac{1}{3}$

구하는 확률은 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{4}{3}$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로




$$\begin{aligned}P\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{4}{3}\right)&=P\left(\frac{1}{2}\le X\le 1\right)+P\left(1\le X\le\frac{4}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\\&=\frac{13}{72}\end{aligned}$$

## 2 정규분포

### 개념 Check 103쪽

**1** 답 (1) $\mathbf{N(8,\ 2^2)}$ (2) $\mathbf{N(-10,\ 5^2)}$

**2** 답 (1) $\boldsymbol{a}$ (2) $\mathbf{0.5}-\boldsymbol{a}$ (3) $\boldsymbol{b-a}$ (4) $\mathbf{0.5}-\boldsymbol{b}$

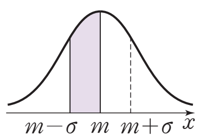
정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 $X$의 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(X\geq m)=\mathrm{P}(X\leq m)=0.5$

(1) $\mathrm{P}(m-\sigma\leq X\leq m)$

$=\mathrm{P}(m\leq X\leq m+\sigma)$

$=a$

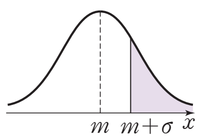



(2) $\mathrm{P}(X\geq m+\sigma)$

$=\mathrm{P}(X\geq m)$

$\quad-\mathrm{P}(m\leq X\leq m+\sigma)$

$=0.5-a$

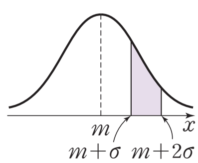



(3) $\mathrm{P}(m+\sigma\leq X\leq m+2\sigma)$

$=\mathrm{P}(m\leq X\leq m+2\sigma)$

$\quad-\mathrm{P}(m\leq X\leq m+\sigma)$

$=b-a$



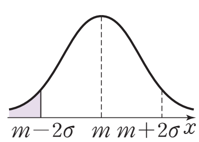

(4) $\mathrm{P}(X\leq m-2\sigma)$

$=\mathrm{P}(X\geq m+2\sigma)$

$=\mathrm{P}(X\geq m)$

$\quad-\mathrm{P}(m\leq X\leq m+2\sigma)$

$=0.5-b$




**3** 답 (1) **0.0668** (2) **0.9987** (3) **0.0228** (4) **0.2857** (5) **0.1525** (6) **0.1574** (7) **0.8664** (8) **0.9759**

(1) $\mathrm{P}(Z\geq 1.5)=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

(2) $\mathrm{P}(Z\leq 3)=\mathrm{P}(Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 3)$

$=0.5+0.4987=0.9987$

(3) $\mathrm{P}(Z\leq -2)=\mathrm{P}(Z\geq 2)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

(4) $\mathrm{P}(0.5\leq Z\leq 2)=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.5)$

$=0.4772-0.1915=0.2857$

(5) $\mathrm{P}(1\leq Z\leq 2.5)=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$

$=0.4938-0.3413=0.1525$

(6) $\mathrm{P}(-3\leq Z\leq -1)=\mathrm{P}(1\leq Z\leq 3)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 3)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$

$=0.4987-0.3413=0.1574$

(7) $\mathrm{P}(-1.5\leq Z\leq 1.5)$

$=\mathrm{P}(-1.5\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$=2\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)=2\times 0.4332=0.8664$

(8) $\mathrm{P}(-2\leq Z\leq 3)=\mathrm{P}(-2\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 3)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 3)$

$=0.4772+0.4987=0.9759$

**4** 답 (1) $\boldsymbol{Z=\dfrac{X-5}{3}}$ (2) $\boldsymbol{Z=\dfrac{X+12}{4}}$

### 문제 104~108쪽

**02-1** 답 ③

①, ② 확률변수 $X_1$의 정규분포 곡선의 대칭축 $x=x_1$보다 확률변수 $X_2$의 정규분포 곡선의 대칭축 $x=x_2$가 오른쪽에 있으므로 $\mathrm{E}(X_1)<\mathrm{E}(X_2)$

③, ④ 확률변수 $X_1$의 정규분포 곡선보다 확률변수 $X_2$의 정규분포 곡선이 가운데 부분의 높이가 낮고 양쪽으로 넓게 퍼진 모양이므로 $\sigma(X_1)<\sigma(X_2)$

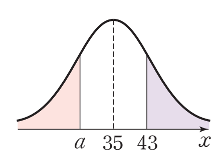
⑤ $\mathrm{E}(X_1)=x_1$, $\mathrm{E}(X_2)=x_2$이므로

$\mathrm{P}(X_1\leq x_1)=\mathrm{P}(X_2\geq x_2)=0.5$

따라서 옳은 것은 ③이다.

**02-2** 답 **27**

정규분포 $\mathrm{N}(35,\ 4^2)$을 따르는 확률변수 $X$의 정규분포 곡선은 직선 $x=35$에 대하여 대칭이다.




따라서 $\mathrm{P}(X\leq a)=\mathrm{P}(X\geq 43)$을 만족시키려면

$\dfrac{a+43}{2}=35$

$a+43=70 \qquad \therefore a=27$

**03-1** 답 (1) **0.3085** (2) **0.9332** (3) **0.1359** (4) **0.6247**

$Z=\dfrac{X-3}{4}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(X\leq 1)=\mathrm{P}\left(Z\leq\dfrac{1-3}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\leq -0.5)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 0.5)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.5)$

$=0.5-0.1915=0.3085$

(2) $P(X \geq -3)=P\left(Z \geq \frac{-3-3}{4}\right)$
$=P(Z \geq -1.5)$
$=P(Z \leq 1.5)$
$=P(Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 1.5)$
$=0.5+0.4332=0.9332$

(3) $P(7 \leq X \leq 11)=P\left(\frac{7-3}{4} \leq Z \leq \frac{11-3}{4}\right)$
$=P(1 \leq Z \leq 2)$
$=P(0 \leq Z \leq 2)-P(0 \leq Z \leq 1)$
$=0.4772-0.3413=0.1359$

(4) $P(1 \leq X \leq 9)=P\left(\frac{1-3}{4} \leq Z \leq \frac{9-3}{4}\right)$
$=P(-0.5 \leq Z \leq 1.5)$
$=P(-0.5 \leq Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 1.5)$
$=P(0 \leq Z \leq 0.5)+P(0 \leq Z \leq 1.5)$
$=0.1915+0.4332=0.6247$

**04-1** 답 **29**

$Z=\frac{X-20}{3}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(17 \leq X \leq k)=0.84$에서

$P\left(\frac{17-20}{3} \leq Z \leq \frac{k-20}{3}\right)=0.84$

$P\left(-1 \leq Z \leq \frac{k-20}{3}\right)=0.84$

$P(-1 \leq Z \leq 0)+P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-20}{3}\right)=0.84$

$P(0 \leq Z \leq 1)+P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-20}{3}\right)=0.84$

$0.3413+P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-20}{3}\right)=0.84$

$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-20}{3}\right)=0.4987$

이때 $P(0 \leq Z \leq 3)=0.4987$이므로

$\frac{k-20}{3}=3$

$k-20=9 \qquad \therefore k=29$

**04-2** 답 **15**

$Z=\frac{X-m}{6}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(X \leq 6)=0.0668$에서

$P\left(Z \leq \frac{6-m}{6}\right)=0.0668$, $P\left(Z \geq \frac{m-6}{6}\right)=0.0668$

$P(Z \geq 0)-P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-6}{6}\right)=0.0668$

$0.5-P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-6}{6}\right)=0.0668$

$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-6}{6}\right)=0.4332$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{m-6}{6}=1.5$

$m-6=9 \qquad \therefore m=15$

**05-1** 답 **0.927**

생산된 파이프의 지름의 길이를 $X$ mm라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $N(150, 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-150}{2}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
이때 출고 합격을 받는 파이프의 지름의 길이는 $147 \leq X \leq 155$이므로 구하는 확률은

$P(147 \leq X \leq 155)$
$=P\left(\frac{147-150}{2} \leq Z \leq \frac{155-150}{2}\right)$
$=P(-1.5 \leq Z \leq 2.5)$
$=P(-1.5 \leq Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 2.5)$
$=P(0 \leq Z \leq 1.5)+P(0 \leq Z \leq 2.5)$
$=0.4332+0.4938=0.927$

**05-2** 답 (1) **24.17 %** (2) **8413명**

학생의 키를 $X$ cm라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $N(165, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-165}{4}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

(1) 키가 159 cm 이상 163 cm 이하일 확률은
$P(159 \leq X \leq 163)$
$=P\left(\frac{159-165}{4} \leq Z \leq \frac{163-165}{4}\right)$
$=P(-1.5 \leq Z \leq -0.5)$
$=P(0.5 \leq Z \leq 1.5)$
$=P(0 \leq Z \leq 1.5)-P(0 \leq Z \leq 0.5)$
$=0.4332-0.1915=0.2417$
따라서 구하는 학생은 전체의 24.17 %이다.

(2) 키가 169 cm 이하일 확률은
$P(X \leq 169)=P\left(Z \leq \frac{169-165}{4}\right)$
$=P(Z \leq 1)$
$=P(Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 1)$
$=0.5+0.3413=0.8413$
따라서 구하는 학생 수는
$10000 \times 0.8413=8413$(명)

**06-1** 답 **209점**

지원자의 면접 점수를 $X$점이라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $N(160, 25^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-160}{25}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

이때 전체 지원자 1000명에 대하여 합격자 25명이 차지하는 비율은 $\frac{25}{1000}=0.025$이므로 합격자의 최저 점수를 $a$점이라 하면 $P(X \geq a)=0.025$에서

$P\left(Z \geq \frac{a-160}{25}\right)=0.025$

$P(Z \geq 0)-P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-160}{25}\right)=0.025$

$0.5-P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-160}{25}\right)=0.025$

$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-160}{25}\right)=0.475$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.96)=0.475$이므로

$\frac{a-160}{25}=1.96$, $a-160=49$ $\quad \therefore a=209$

따라서 구하는 최저 점수는 209점이다.

**06-2** 답 **156 cm**

남학생의 키를 $X$ cm라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $N(170,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-170}{10}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

키가 작은 쪽에서 80번째인 학생의 키를 $a$ cm라 하면

$P(X \leq a)=\frac{80}{1000}=0.08$에서

$P\left(Z \leq \frac{a-170}{10}\right)=0.08$, $P\left(Z \geq \frac{170-a}{10}\right)=0.08$

$P(Z \geq 0)-P\left(0 \leq Z \leq \frac{170-a}{10}\right)=0.08$

$0.5-P\left(0 \leq Z \leq \frac{170-a}{10}\right)=0.08$

$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{170-a}{10}\right)=0.42$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.4)=0.42$이므로

$\frac{170-a}{10}=1.4$, $170-a=14$ $\quad \therefore a=156$

따라서 구하는 학생의 키는 156 cm이다.

## 3 이항분포와 정규분포 사이의 관계

### 개념 Check 109쪽

**1** 답 (1) $\mathbf{N(50,\ 5^2)}$ (2) $\mathbf{N(150,\ 10^2)}$

(1) $E(X)=100 \times 0.5=50$

$V(X)=100 \times 0.5 \times 0.5=25=5^2$

이때 시행 횟수 $n=100$은 충분히 크므로 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 5^2)$을 따른다.

(2) $E(X)=450 \times \frac{1}{3}=150$

$V(X)=450 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}=100=10^2$

이때 시행 횟수 $n=450$은 충분히 크므로 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(150,\ 10^2)$을 따른다.

### 문제 110～111쪽

**07-1** 답 **0.2857**

확률변수 $X$가 이항분포 $B\left(432,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=432 \times \frac{1}{4}=108$

$V(X)=432 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}=81=9^2$

이때 시행 횟수 $n=432$는 충분히 크므로 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(108,\ 9^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-108}{9}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(90 \leq X \leq 103.5)&=P\left(\frac{90-108}{9} \leq Z \leq \frac{103.5-108}{9}\right)\\&=P(-2 \leq Z \leq -0.5)\\&=P(0.5 \leq Z \leq 2)\\&=P(0 \leq Z \leq 2)-P(0 \leq Z \leq 0.5)\\&=0.4772-0.1915\\&=0.2857\end{aligned}$$

**07-2** 답 **0.7745**

확률변수 $X$가 이항분포 $B\left(169,\ \frac{4}{13}\right)$를 따르므로

$E(X)=169 \times \frac{4}{13}=52$

$V(X)=169 \times \frac{4}{13} \times \frac{9}{13}=36=6^2$

이때 시행 횟수 $n=169$는 충분히 크므로 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(52,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-52}{6}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(46 \leq X \leq 61)&=P\left(\frac{46-52}{6} \leq Z \leq \frac{61-52}{6}\right)\\&=P(-1 \leq Z \leq 1.5)\\&=P(-1 \leq Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 1.5)\\&=P(0 \leq Z \leq 1)+P(0 \leq Z \leq 1.5)\\&=0.3413+0.4332\\&=0.7745\end{aligned}$$

**08-1** 답 **0.0668**

150명의 환자 중 치유되는 환자의 수를 $X$라 하면 환자마다 치유될 확률이 $\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(150,\ \frac{3}{5}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=150\times\frac{3}{5}=90,$

$\quad \mathrm{V}(X)=150\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=36=6^2$

이때 시행 횟수 $n=150$은 충분히 크므로 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-90}{6}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 99)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{99-90}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

**08-2** 답 **31**

관람객 400명 중 초대권으로 입장하는 관람객의 수를 $X$라 하면 각 관람객이 초대권으로 입장할 확률이 $\frac{1}{10}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=400\times\frac{1}{10}=40,$

$\quad \mathrm{V}(X)=400\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=36=6^2$

이때 시행 횟수 $n=400$은 충분히 크므로 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-40}{6}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\le a)=0.07$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-40}{6}\right)=0.07$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{40-a}{6}\right)=0.07$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{40-a}{6}\right)=0.07$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{40-a}{6}\right)=0.07$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{40-a}{6}\right)=0.43$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.43$이므로

$\frac{40-a}{6}=1.5$

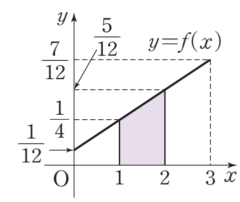
$40-a=9\qquad\therefore\ a=31$

## 연습문제

112~114쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** $\frac{1}{3}$ | **2** ④ | **3** ① | **4** 8 | **5** ⑤ |
| **6** 3 | **7** ② | **8** ② | **9** 16370 | **10** 360점 |
| **11** 영어 | **12** 0.1587 | **13** 0.1359 | **14** 16 | **15** $\frac{1}{9}$ |
| **16** 155 | **17** ⑤ | **18** 14 | **19** 0.16 | **20** 0.9772 |

**1** 구하는 확률은 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로




$\mathrm{P}(1\le X\le 2)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{12}\right)\times(2-1)$

$=\frac{1}{3}$

**2** 주어진 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

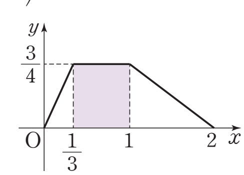
$\frac{1}{2}\times\left\{\left(a-\frac{1}{3}\right)+2\right\}\times\frac{3}{4}=1$

$\frac{3}{8}\left(a+\frac{5}{3}\right)=1$

$a+\frac{5}{3}=\frac{8}{3}\qquad\therefore\ a=1$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\le X\le a\right)=\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\le X\le 1\right)$

따라서 구하는 확률은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로




$\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\le X\le 1\right)$

$=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$

**3** ㄱ. $\mathrm{E}(X_1)=\mathrm{E}(X_2)=m_1$, $\mathrm{E}(X_3)=m_2$이므로
$\mathrm{E}(X_1)=\mathrm{E}(X_2)<\mathrm{E}(X_3)$

ㄴ. 표준편차가 클수록 곡선은 가운데 부분의 높이는 낮아지고 양쪽으로 넓게 퍼진 모양이므로
$\sigma(X_1)>\sigma(X_2)$

ㄷ. $\mathrm{P}(X_1>m_1)=0.5$, $\mathrm{P}(X_3>m_2)=0.5$이므로
$\mathrm{P}(X_1>m_1)=\mathrm{P}(X_3>m_2)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

**4** 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4)$를 따르는 확률변수 $X$의 확률밀도함수는 $x=m$에서 최댓값을 갖고, 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

따라서 $g(k)=\mathrm{P}(k-8\le X\le k)$가 최대가 되려면

$\dfrac{(k-8)+k}{2}=m$

$k=12$일 때 최댓값을 가지므로

$m=\dfrac{4+12}{2}=8$

**5** $\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+\sigma)$

$=\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$

$=\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)+\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)$

$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+2\sigma)$

즉, $\mathrm{P}(m-2\sigma\le \mathrm{X}\le m+\sigma)=a$에서

$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+2\sigma)=a$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\le m-\sigma)$

$=1-\mathrm{P}(X\ge m-\sigma)$

$=1-\{\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+2\sigma)+\mathrm{P}(X\ge m+2\sigma)\}$

$=1-(a+b)$

$=1-a-b$

**6** $Z_X=\dfrac{X-72}{6}$로 놓으면 확률변수 $Z_X$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\le 78)=\mathrm{P}\left(Z_X\le\dfrac{78-72}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_X\le 1)$ …… ㉠

$Z_Y=\dfrac{Y-80}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 $Z_Y$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(Y\le 83)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le\dfrac{83-80}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z_Y\le\dfrac{3}{\sigma}\right)$ …… ㉡

$\mathrm{P}(X\le 78)=\mathrm{P}(Y\le 83)$이므로 ㉠, ㉡에서

$\mathrm{P}(Z_X\le 1)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le\dfrac{3}{\sigma}\right)$

따라서 $1=\dfrac{3}{\sigma}$이므로 $\sigma=3$

**7** 확률변수 $X$가 정규분포 $\mathrm{N}(74,\ 6^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-74}{6}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(68\le X\le 77)=\mathrm{P}\left(\dfrac{68-74}{6}\le Z\le\dfrac{77-74}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0.5)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=0.3413+0.1915=0.5328$

**8** 시험 점수를 $X$점이라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(68,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-68}{10}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(55\le X\le 78)=\mathrm{P}\left(\dfrac{55-68}{10}\le Z\le\dfrac{78-68}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.3\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(-1.3\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.3)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4032+0.3413$

$=0.7445$

**9** 제품의 무게를 $X$ g이라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(170,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-170}{5}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 합격품일 확률은

$\mathrm{P}(165\le X\le 180)=\mathrm{P}\left(\dfrac{165-170}{5}\le Z\le\dfrac{180-170}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.3413+0.4772$

$=0.8185$

따라서 구하는 합격품의 개수는

$20000\times 0.8185=16370$

**10** 지원자의 점수를 $X$점이라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(278,\ 41^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-278}{41}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 전체 1000명의 지원자 중에서 선발되는 23명이 차지하는 비율은 $\dfrac{23}{1000}=0.023$이므로 선별된 학생의 최저 점수를 $a$점이라 하면 $\mathrm{P}(X\ge a)=0.023$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{a-278}{41}\right)=0.023$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-278}{41}\right)=0.023$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-278}{41}\right)=0.023$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-278}{41}\right)=0.477$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.477$이므로

$\dfrac{a-278}{41}=2$

$a-278=82 \qquad \therefore\ a=360$

따라서 구하는 최저 점수는 360점이다.

**11** 학생들의 영어, 수학, 과학 성적을 각각 $X_1$점, $X_2$점, $X_3$점이라 하면 확률변수 $X_1$, $X_2$, $X_3$은 각각 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 20^2)$, $\mathrm{N}(70,\ 20^2)$, $\mathrm{N}(63,\ 16^2)$을 따르므로

$Z_1=\dfrac{X_1-60}{20}$, $Z_2=\dfrac{X_2-70}{20}$, $Z_3=\dfrac{X_3-63}{16}$으로 놓으면 확률변수 $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$은 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

A보다 영어, 수학, 과학 성적이 낮을 확률은 각각

$\mathrm{P}(X_1<82)=\mathrm{P}\left(Z_1<\dfrac{82-60}{20}\right)=\mathrm{P}(Z_1<1.1)$

$\mathrm{P}(X_2<90)=\mathrm{P}\left(Z_2<\dfrac{90-70}{20}\right)=\mathrm{P}(Z_2<1)$

$\mathrm{P}(X_3<75)=\mathrm{P}\left(Z_3<\dfrac{75-63}{16}\right)=\mathrm{P}(Z_3<0.75)$

이때 $\mathrm{P}(Z_1<1.1)>\mathrm{P}(Z_2<1)>\mathrm{P}(Z_3<0.75)$이므로

$\mathrm{P}(X_1<82)>\mathrm{P}(X_2<90)>\mathrm{P}(X_3<75)$

따라서 A의 성적이 상대적으로 가장 높은 과목은 영어이다.

**12** 확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{9}{10}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times\dfrac{9}{10}=90$

$\mathrm{V}(X)=100\times\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{10}=9$

이때 시행 횟수 $n=100$은 충분히 크므로 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-90}{3}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 87)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{87-90}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

**13** 한 개의 주사위를 720번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수를 $X$라 하면 주사위를 한 번 던질 때 1의 눈이 나올 확률이 $\dfrac{1}{6}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \dfrac{1}{6}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=720\times\dfrac{1}{6}=120$,

$\quad \mathrm{V}(X)=720\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}=100$

이때 시행 횟수 $n=720$은 충분히 크므로 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-120}{10}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(130\le X\le 140)&=\mathrm{P}\left(\frac{130-120}{10}\le Z\le\frac{140-120}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4772-0.3413=0.1359\end{aligned}$$

**14** 100번의 슛 블록을 시도하여 성공하는 횟수를 $X$라 하면 한 번의 시도에서 슛 블록을 성공할 확률이 $\dfrac{20}{100}=\dfrac{1}{5}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{1}{5}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=100\times\dfrac{1}{5}=20$,

$\quad \mathrm{V}(X)=100\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=16$

이때 시행 횟수 $n=100$은 충분히 크므로 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\le k)=0.1587$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{k-20}{4}\right)=0.1587$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{20-k}{4}\right)=0.1587$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{20-k}{4}\right)=0.1587$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{20-k}{4}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\dfrac{20-k}{4}=1$

$20-k=4 \qquad \therefore\ k=16$

**15** 연속확률변수 $X$가 갖는 값의 범위가 $0\le X\le 3$이고 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=1$

$\mathrm{P}(x\le X\le 3)=a(3-x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=3a$

즉, $1=3a$이므로 $a=\dfrac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(x\le X\le 3)=\dfrac{1}{3}(3-x)\ (0\le x\le 3)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(0\le X\le a)&=\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(0\le X\le 3)-\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\le X\le 3\right)\\&=1-\frac{1}{3}\times\left(3-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

**16** 확률변수 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\le 3)=0.3$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{3-m}{\sigma}\right)=0.3,\ \mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{m-3}{\sigma}\right)=0.3$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{m-3}{\sigma}\right)=0.3$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{m-3}{\sigma}\right)=0.3$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{m-3}{\sigma}\right)=0.2$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.52)=0.2$이므로

$\dfrac{m-3}{\sigma}=0.52\qquad\therefore\ m-3=0.52\sigma\qquad\cdots\cdots$ ㉠

한편 $\mathrm{P}(X\le 3)+\mathrm{P}(3\le X\le 80)=\mathrm{P}(X\le 80)$이므로

$\mathrm{P}(X\le 80)=0.3+0.3=0.6$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{80-m}{\sigma}\right)=0.6$

$\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{80-m}{\sigma}\right)=0.6$

$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{80-m}{\sigma}\right)=0.6$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{80-m}{\sigma}\right)=0.1$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.25)=0.1$이므로

$\dfrac{80-m}{\sigma}=0.25\qquad\therefore\ 80-m=0.25\sigma\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=55,\ \sigma=100$

$\therefore\ m+\sigma=155$

**17** 직원들의 출근 시간을 $X$분이라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(66.4,\ 15^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-66.4}{15}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

출근 시간이 73분 이상인 직원일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 73)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{73-66.4}{15}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0.44)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.44)\\&=0.5-0.17=0.33\end{aligned}$$

임의로 선택한 1명이 출근 시간이 73분 이상인 직원인 사건을 $A$, 지하철을 이용하는 직원인 사건을 $B$라 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\quad ◀\ \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(X\ge 73)\\&=0.33\times 0.4=0.132\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=(1-0.33)\times 0.2=0.134\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=0.132+0.134\\&=0.266\end{aligned}$$

**18** 확률변수 $X$의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$이므로 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{1}{5}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=n\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{n}{5},\ \mathrm{V}(X)=n\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{25}n$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{4}{25}n+\left(\frac{n}{5}\right)^2=\frac{1}{25}n^2+\frac{4}{25}n\end{aligned}$$

$\mathrm{E}\left(\dfrac{X^2}{8}\right)=52$에서 $\dfrac{1}{8}\mathrm{E}(X^2)=52$

$\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{25}n^2+\dfrac{4}{25}n\right)=52$

$n^2+4n-10400=0$

$(n+104)(n-100)=0$

$\therefore\ n=100\ (\because\ n$은 자연수$)$

이때 시행 횟수 $n=100$은 충분히 크므로 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\le k)=0.0668$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{k-20}{4}\right)=0.0668$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{20-k}{4}\right)=0.0668$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{20-k}{4}\right)=0.0668$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{20-k}{4}\right)=0.0668$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{20-k}{4}\right)=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{20-k}{4}=1.5$

$20-k=6$

$\therefore\ k=14$

**19** 휴대폰 케이스의 무게를 $X$g이라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 5^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-30}{5}$으로 놓으면 확률변수 $Z_X$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 불량품일 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge40)&=P\left(Z_X\ge\frac{40-30}{5}\right)\\&=P(Z_X\ge2)\\&=P(Z_X\ge0)-P(0\le Z_X\le2)\\&=0.5-0.48=0.02\end{aligned}$$

생산된 휴대폰 케이스 2500개 중에서 불량품의 개수를 $Y$라 하면 불량품일 확률이 0.02이므로 확률변수 $Y$는 이항분포 B(2500, 0.02)를 따른다.

$\therefore$ $E(Y)=2500\times0.02=50$,

$V(Y)=2500\times0.02\times0.98=49$

이때 시행 횟수 $n=2500$은 충분히 크므로 확률변수 $Y$는 근사적으로 정규분포 $N(50, 7^2)$을 따른다.

따라서 $Z_Y=\frac{Y-50}{7}$으로 놓으면 확률변수 $Z_Y$는 표준정규분포 N(0, 1)을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(Y\ge57)&=P\left(Z_Y\ge\frac{57-50}{7}\right)\\&=P(Z_Y\ge1)\\&=P(Z_Y\ge0)-P(0\le Z_Y\le1)\\&=0.5-0.34=0.16\end{aligned}$$

**20** 1600회의 게임에서 흰 바둑돌이 나오는 횟수를 $X$라 하면 1회의 게임에서 흰 바둑돌이 나올 확률이 $\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(1600, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$\therefore$ $E(X)=1600\times\frac{1}{5}=320$,

$V(X)=1600\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=256$

이때 시행 횟수 $n=1600$은 충분히 크므로 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(320, 16^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-320}{16}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 N(0, 1)을 따른다.

한편 검은 바둑돌이 나오는 횟수는 $1600-X$이므로 점수가 1024점 이하이려면

$10\times X+(-2)\times(1600-X)\le1024$

$12X-3200\le1024$

$\therefore$ $X\le352$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\le352)&=P\left(Z\le\frac{352-320}{16}\right)\\&=P(Z\le2)\\&=P(Z\le0)+P(0\le Z\le2)\\&=0.5+0.4772=0.9772\end{aligned}$$

# Ⅲ-2 01 통계적 추정

## 1 모평균과 표본평균

**개념 Check** 119쪽

**1** 답 ㄷ

**2** 답 (1) **216** (2) **120** (3) **20**

(1) 한 개씩 복원추출하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_6\Pi_3=6^3=216$

(2) 한 개씩 비복원추출하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 서로 다른 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_6P_3=120$

(3) 동시에 추출하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 서로 다른 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_6C_3=20$

**3** 답 (1) **0, 1, 2, 3, 4**

(2) **풀이 참조**

(3) **평균: 2, 분산: $\frac{4}{3}$, 표준편차: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$**

(1) 모집단 {0, 2, 4}에서 크기가 2인 표본 $X_1$, $X_2$를 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$는 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$이므로 추출한 표본에 따른 표본평균 $\overline{X}$는 다음 표와 같다.

| $X_2$ \ $X_1$ | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 2 | 3 | 4 |

따라서 $\overline{X}$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이다.

(2) 표본평균 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $\overline{X}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\overline{X}=\overline{x})$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | 1 |

(3) $E(\overline{X})=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{9}=2$

$V(\overline{X})=0^2\times\frac{1}{9}+1^2\times\frac{2}{9}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{2}{9}+4^2\times\frac{1}{9}-2^2$

$=\frac{4}{3}$

$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

**4** 답 (1) **평균: 30, 분산: 25, 표준편차: 5**
(2) **평균: 30, 분산: 4, 표준편차: 2**
(3) **평균: 30, 분산: 1, 표준편차: 1**

모평균 $m=30$, 모표준편차 $\sigma=10$이므로

(1) $E(\overline{X})=m=30$

$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{10^2}{4}=25$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{10}{\sqrt{4}}=5$

(2) $E(\overline{X})=m=30$

$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{10^2}{25}=4$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{10}{\sqrt{25}}=2$

(3) $E(\overline{X})=m=30$

$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{10^2}{100}=1$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{10}{\sqrt{100}}=1$

**5** 답 (1) $\mathbf{E(\overline{X})=7,\ V(\overline{X})=4,\ \sigma(\overline{X})=2}$
(2) $\mathbf{N(7,\ 2^2)}$

(1) 모평균 $m=7$, 모표준편차 $\sigma=12$, 표본의 크기 $n=36$이므로

$E(\overline{X})=m=7$

$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{12^2}{36}=4$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{12}{\sqrt{36}}=2$

## 문제 120～123쪽

**01-1** 답 **12**

모평균 $m=15$, 모표준편차 $\sigma=4$, 표본의 크기 $n=25$이므로

$E(\overline{X})=m=15$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{4}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$

$\therefore E(\overline{X})\sigma(\overline{X})=15\times\frac{4}{5}=12$

**01-2** 답 **110**

모평균 $m=10$, 모표준편차 $\sigma=8$이므로

$E(\overline{X})=m=10$

$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{64}{n}$

즉, $\frac{64}{n}=\frac{16}{25}$이므로 $n=100$

$\therefore E(\overline{X})+n=10+100=110$

**01-3** 답 **400**

모표준편차 $\sigma=10$이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{10}{\sqrt{n}}$

즉, $\frac{10}{\sqrt{n}}\le 0.5$이므로

$\sqrt{n}\ge 20 \qquad \therefore n\ge 400$

따라서 $n$의 최솟값은 400이다.

**01-4** 답 **964**

모평균 $m=30$, 모표준편차 $\sigma=16$, 표본의 크기 $n=4$이므로

$E(\overline{X})=m=30$

$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{16^2}{4}=64$

$V(\overline{X})=E(\overline{X}^2)-\{E(\overline{X})\}^2$이므로

$E(\overline{X}^2)=V(\overline{X})+\{E(\overline{X})\}^2=64+30^2=964$

**02-1** 답 **평균: 1, 분산:** $\mathbf{\frac{1}{12}}$

모평균 $m$과 모분산 $\sigma^2$을 구하면

$m=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$

$\sigma^2=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}-1^2=\frac{1}{2}$

이때 표본의 크기 $n=6$이므로

$E(\overline{X})=m=1$

$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\frac{1}{2}}{6}=\frac{1}{12}$

**02-2** 답 **4**

상자에서 한 장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 숫자를 확률변수 $X$라 하고, $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | 1 |

모평균 $m$과 모분산 $\sigma^2$을 구하면

$m=2\times\frac{2}{5}+4\times\frac{3}{10}+6\times\frac{1}{5}+8\times\frac{1}{10}=4$

$\sigma^2=2^2\times\frac{2}{5}+4^2\times\frac{3}{10}+6^2\times\frac{1}{5}+8^2\times\frac{1}{10}-4^2=4$

이때 표본의 크기 $n=4$이므로

$E(\overline{X})=m=4$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{4}}=1$

$\therefore E(\overline{X})\sigma(\overline{X})=4\times 1=4$

03-**1** 답 **0.8413**

모집단이 정규분포 $N(84,\ 14^2)$을 따르고 표본의 크기 $n=4$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(84,\ \frac{14^2}{4}\right)$, 즉 $N(84,\ 7^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-84}{7}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\le 91)&=P\left(Z\le\frac{91-84}{7}\right)\\&=P(Z\le 1)\\&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)\\&=0.5+0.3413=0.8413\end{aligned}$$

03-**2** 답 **0.2857**

모집단이 정규분포 $N(71,\ 16^2)$을 따르고 표본의 크기 $n=64$이므로 64명의 하루 TV 시청 시간의 평균을 $\overline{X}$분이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(71,\ \frac{16^2}{64}\right)$, 즉 $N(71,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-71}{2}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(72\le\overline{X}\le 75)&=P\left(\frac{72-71}{2}\le Z\le\frac{75-71}{2}\right)\\&=P(0.5\le Z\le 2)\\&=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 0.5)\\&=0.4772-0.1915=0.2857\end{aligned}$$

04-**1** 답 **81**

모집단이 정규분포 $N(80,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 $n$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(80,\ \frac{12^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(80,\ \left(\frac{12}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-80}{\frac{12}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\ge 82)=0.0668$에서

$P\left(Z\ge\frac{82-80}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right)=0.0668$, $P\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.0668$

$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.0668$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.0668$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.4332$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{6}=1.5$, $\sqrt{n}=9$ $\quad\therefore n=81$

04-**2** 답 **296**

모집단이 정규분포 $N(300,\ 40^2)$을 따르고 표본의 크기 $n=100$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(300,\ \frac{40^2}{100}\right)$, 즉 $N(300,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-300}{4}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\ge a)=0.8413$에서

$P\left(Z\ge\frac{a-300}{4}\right)=0.8413$, $P\left(Z\le\frac{300-a}{4}\right)=0.8413$

$P(Z\le 0)+P\left(0\le Z\le\frac{300-a}{4}\right)=0.8413$

$0.5+P\left(0\le Z\le\frac{300-a}{4}\right)=0.8413$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{300-a}{4}\right)=0.3413$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{300-a}{4}=1$ $\quad\therefore a=296$

## 2 표본비율

**개념 Check** 125쪽

**1** 답 (1) $\mathbf{\frac{1}{5}}$ (2) $\mathbf{\frac{5}{24}}$

(1) $p=\frac{200}{1000}=\frac{1}{5}$

(2) $\hat{p}=\frac{50}{240}=\frac{5}{24}$

**2** 답 (1) $\mathbf{\frac{1}{4}}$ (2) $\mathbf{\frac{3}{400}}$ (3) $\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{20}}$

모비율 $p=\frac{1}{4}$, 표본의 크기 $n=25$이므로

(1) $E(\hat{p})=p=\frac{1}{4}$

(2) $V(\hat{p})=\frac{pq}{n}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}{25}=\frac{3}{400}$ ◀ $q=1-p$

(3) $\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{pq}{n}}=\sqrt{\frac{3}{400}}=\frac{\sqrt{3}}{20}$

**3** 답 (1) $\mathbf{E(\hat{p})=0.1,\ V(\hat{p})=0.0009,\ \sigma(\hat{p})=0.03}$
(2) $\mathbf{N(0.1,\ 0.03^2)}$ (3) **0.9772**

모비율 $p=0.1$, 표본의 크기 $n=100$이므로

(1) $E(\hat{p})=p=0.1$

$V(\hat{p})=\frac{pq}{n}=\frac{0.1\times 0.9}{100}=0.0009$ ◀ $q=1-p$

$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{pq}{n}}=\sqrt{0.0009}=0.03$

(3) $\mathrm{P}(\hat{p}\geq 0.04)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{0.04-0.1}{0.03}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq -2)$

$=\mathrm{P}(Z\leq 2)$

$=\mathrm{P}(Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=0.5+0.4772=0.9772$

**문제** 126쪽

05-**1** 답 **0.8185**

임의추출한 학생 50명 중 방과 후 학교를 하는 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율 $p=\frac{2}{3}$, 표본의 크기 $n=50$이므로

$\mathrm{E}(\hat{p})=\frac{2}{3}$

$\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}{50}=\frac{1}{225}=\left(\frac{1}{15}\right)^2$

표본의 크기 $n=50$은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{2}{3}, \left(\frac{1}{15}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-\frac{2}{3}}{\frac{1}{15}}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}\left(\frac{60}{100}\leq\hat{p}\leq\frac{80}{100}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{3}{5}\leq\hat{p}\leq\frac{4}{5}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{\frac{3}{5}-\frac{2}{3}}{\frac{1}{15}}\leq Z\leq\frac{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}{\frac{1}{15}}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 2)$

$=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=0.3413+0.4772=0.8185$

05-**2** 답 **0.106**

임의추출한 직원 100명 중 인터넷 중독 판정을 받지 않은 직원의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율 $p=0.8$, 표본의 크기 $n=100$이므로

$\mathrm{E}(\hat{p})=0.8$

$\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{0.8\times 0.2}{100}=0.0016=0.04^2$

표본의 크기 $n=100$은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0.8, 0.04^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.8}{0.04}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}\left(\hat{p}\leq\frac{75}{100}\right)=\mathrm{P}(\hat{p}\leq 0.75)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{0.75-0.8}{0.04}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\leq -1.25)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 1.25)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.25)$

$=0.5-0.394=0.106$

## 3 모평균의 추정

**개념 Check** 128쪽

**1** 답 (1) $\mathbf{7.02\leq m\leq 8.98}$ (2) $\mathbf{6.71\leq m\leq 9.29}$

표본의 크기 $n=16$, 표본평균 $\overline{x}=8$, 모표준편차 $\sigma=2$이므로

(1) 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$8-1.96\times\frac{2}{\sqrt{16}}\leq m\leq 8+1.96\times\frac{2}{\sqrt{16}}$

$\therefore 7.02\leq m\leq 8.98$

(2) 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$8-2.58\times\frac{2}{\sqrt{16}}\leq m\leq 8+2.58\times\frac{2}{\sqrt{16}}$

$\therefore 6.71\leq m\leq 9.29$

**2** 답 (1) **1.47** (2) **1.935**

표본의 크기 $n=64$, 모표준편차 $\sigma=3$이므로

(1) 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times 1.96\times\frac{3}{\sqrt{64}}=1.47$

(2) 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times 2.58\times\frac{3}{\sqrt{64}}=1.935$

**문제** 129~131쪽

06-**1** 답 (1) $\mathbf{492.16\leq m\leq 507.84}$
(2) $\mathbf{489.68\leq m\leq 510.32}$

표본의 크기 $n=100$, 표본평균 $\overline{x}=500$이고, $n$은 충분히 크므로 모표준편차 $\sigma$ 대신 표본표준편차 40을 이용하면

(1) 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$500-1.96\times\frac{40}{\sqrt{100}}\leq m\leq 500+1.96\times\frac{40}{\sqrt{100}}$

$\therefore 492.16\leq m\leq 507.84$

(2) 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$500-2.58\times\frac{40}{\sqrt{100}}\le m\le 500+2.58\times\frac{40}{\sqrt{100}}$$

$\therefore\ 489.68\le m\le 510.32$

**06-2** 답 $\mathbf{3.51\le m\le 4.49}$

표본의 크기 $n=64$, 표본평균 $\overline{x}=4$, 모표준편차 $\sigma=2$이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$4-1.96\times\frac{2}{\sqrt{64}}\le m\le 4+1.96\times\frac{2}{\sqrt{64}}$$

$\therefore\ 3.51\le m\le 4.49$

**07-1** 답 **64**

표본평균 $\overline{x}=167$, 모표준편차 $\sigma=16$이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$167-1.96\times\frac{16}{\sqrt{n}}\le m\le 167+1.96\times\frac{16}{\sqrt{n}}$$

이 신뢰구간이 $163.08\le m\le 170.92$와 일치하므로

$1.96\times\frac{16}{\sqrt{n}}=3.92$, $\sqrt{n}=8$ $\quad\therefore\ n=64$

**07-2** 답 **74.71**

표본평균 $\overline{x}=12$, 모표준편차 $\sigma=4$이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$12-2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le m\le 12+2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}$$

이 신뢰구간이 $a\le m\le 13.29$와 일치하므로

$2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}=1.29$, $\sqrt{n}=8$ $\quad\therefore\ n=64$

$a=12-2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}=12-1.29=10.71$이므로

$n+a=64+10.71=74.71$

**08-1** 답 **12.4**

표본의 크기 $n=25$, 모표준편차 $\sigma=50$이므로 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$a=2\times1.96\times\frac{50}{\sqrt{25}}=39.2$

신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$b=2\times2.58\times\frac{50}{\sqrt{25}}=51.6$

$\therefore\ b-a=51.6-39.2=12.4$

**08-2** 답 **4**

표본의 크기를 $n$이라 할 때, 모표준편차 $\sigma=2$이므로 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times2.58\times\frac{2}{\sqrt{n}}$

신뢰구간의 길이가 5.16이 되어야 하므로

$2\times2.58\times\frac{2}{\sqrt{n}}=5.16$, $\sqrt{n}=2$ $\quad\therefore\ n=4$

**08-3** 답 **16**

모표준편차 $\sigma=5$이므로 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}$

이때 신뢰구간의 길이가 4.9 mg 이하가 되어야 하므로

$2\times1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le4.9$, $\sqrt{n}\ge4$ $\quad\therefore\ n\ge16$

따라서 $n$의 최솟값은 16이다.

## 4 모비율의 추정

### 개념 Check 133쪽

**1** 답 (1) $\mathbf{0.451\le p\le 0.549}$ (2) $\mathbf{0.4355\le p\le 0.5645}$

표본의 크기 $n=400$, 표본비율 $\hat{p}=0.5$이고, $n$은 충분히 크므로

(1) 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.5-1.96\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{400}}\le p\le 0.5+1.96\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{400}}$$

$\therefore\ 0.451\le p\le 0.549$

(2) 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$0.5-2.58\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{400}}\le p\le 0.5+2.58\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{400}}$$

$\therefore\ 0.4355\le p\le 0.5645$

**2** 답 (1) **0.098** (2) **0.129**

표본의 크기 $n=300$, 표본비율 $\hat{p}=0.25$이고, $n$은 충분히 크므로

(1) 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times1.96\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{300}}=0.098$$

(2) 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times2.58\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{300}}=0.129$$

### 문제 134~136쪽

**09-1** 답 (1) $\mathbf{0.1608\le p\le 0.2392}$
(2) $\mathbf{0.1484\le p\le 0.2516}$

표본의 크기 $n=400$, 표본비율 $\hat{p}=\frac{80}{400}=0.2$이고, $n$은 충분히 크므로

(1) 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.2-1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{400}}\le p\le 0.2+1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{400}}$$

$\therefore\ 0.1608\le p\le 0.2392$

(2) 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$0.2-2.58\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{400}}\le p\le0.2+2.58\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{400}}$$

$\therefore\ 0.1484\le p\le0.2516$

**09-2** 답 **0.0084**

표본의 크기 $n=4900$, 표본비율 $\hat{p}=0.9$이고, $n$은 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.9-1.96\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{4900}}\le p\le0.9+1.96\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{4900}}$$

이 신뢰구간이 $0.9-k\le p\le0.9+k$와 일치하므로

$$k=1.96\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{4900}}=0.0084$$

**10-1** 답 **100**

표본비율 $\hat{p}=0.8$이므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.8-1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}\le p\le0.8+1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}$$

이 신뢰구간이 $0.7216\le p\le0.8784$와 일치하므로

$$1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}=0.0784$$

$\sqrt{n}=10\qquad\therefore\ n=100$

**10-2** 답 **300**

표본비율 $\hat{p}=0.75$이므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$0.75-2.58\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{n}}\le p\le0.75+2.58\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{n}}$$

이 신뢰구간이 $0.6855\le p\le0.8145$와 일치하므로

$$2.58\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{n}}=0.0645$$

$\sqrt{n}=10\sqrt{3}\qquad\therefore\ n=300$

**11-1** 답 **0.0774**

표본의 크기 $n=400$, 표본비율 $\hat{p}=0.1$이고, $n$은 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times2.58\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{400}}=0.0774$$

**11-2** 답 **600**

표본비율 $\hat{p}=0.4$이고, $n$은 충분히 크므로 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 0.0784 이하가 되려면

$$2\times1.96\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{n}}\le0.0784$$

$\sqrt{n}\ge10\sqrt{6}$

$\therefore\ n\ge600$

따라서 $n$의 최솟값은 600이다.

## 연습문제

137~140쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ① | **2** 81 | **3** ④ | **4** $\frac{1}{3}$ | **5** ② |
| **6** 0.0062 | **7** ③ | **8** 252 | **9** 0.0401 | **10** ② |
| **11** ① | **12** 400 | **13** ④ | **14** 10 | **15** ⑤ |
| **16** ⑤ | **17** $0.2968\le p\le0.5032$ | **18** 1200 | **19** ③ | |
| **20** 157 | **21** 98 | **22** 12 | | |

**1** 크기가 3인 표본 $X_1$, $X_2$, $X_3$을 추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$가 $\overline{X}=1$이려면

$$\frac{X_1+X_2+X_3}{3}=1\qquad\therefore\ X_1+X_2+X_3=3$$

이를 만족시키려면 $X_1=1$, $X_2=1$, $X_3=1$을 추출해야 하므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$$

**2** 모표준편차가 3이므로

$$\sigma(\overline{X})=\frac{3}{\sqrt{n}}=\frac{1}{3},\ \sqrt{n}=9\qquad\therefore\ n=81$$

**3** 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{6}+a+b=1\qquad\therefore\ a+b=\frac{5}{6}\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

$\mathrm{E}(X^2)=\frac{16}{3}$에서 $0^2\times\frac{1}{6}+2^2\times a+4^2\times b=\frac{16}{3}$

$$\therefore\ a+4b=\frac{4}{3}\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+2\times\frac{2}{3}+4\times\frac{1}{6}=2$이므로 모분산 $\sigma^2$을 구하면

$$\sigma^2=\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{16}{3}-2^2=\frac{4}{3}$$

표본의 크기 $n=20$이므로 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\frac{4}{3}}{20}=\frac{1}{15}$

**4** 주머니에서 한 장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 숫자를 확률변수 $X$라 하고 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

모평균 $m$과 모분산 $\sigma^2$을 구하면

$$m=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}=2$$

$$\sigma^2=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{4}-2^2=\frac{1}{2}$$

이때 표본의 크기 $n=3$이므로

$E(\overline{X})=m=2$

$V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{\frac{1}{2}}{3}=\dfrac{1}{6}$

$\therefore\ E(\overline{X})V(\overline{X})=2\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$

**5** 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 $X$라 하고 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | $a$ | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{10}$ | 1 |

$E(X)=E(\overline{X})=3$이므로

$1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{1}{2}+a\times\dfrac{3}{10}=3,\ \dfrac{3}{10}a=\dfrac{9}{5}\qquad\therefore\ a=6$

따라서 모분산을 구하면

$\sigma^2=1^2\times\dfrac{1}{5}+2^2\times\dfrac{1}{2}+6^2\times\dfrac{3}{10}-3^2=4$

표본의 크기 $n=4$이므로

$V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{4}{4}=1$

$\therefore\ a+V(\overline{X})=6+1=7$

**6** 모집단이 정규분포 $N(320,\ 32^2)$을 따르고 표본의 크기 $n=64$이므로 64명의 한 달 급여의 평균을 $\overline{X}$만 원이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(320,\ \dfrac{32^2}{64}\right)$, 즉 $N(320,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-320}{4}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(\overline{X}\le310)=P\left(Z\le\dfrac{310-320}{4}\right)$

$=P(Z\le-2.5)=P(Z\ge2.5)$

$=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le2.5)$

$=0.5-0.4938=0.0062$

**7** 정규분포 $N(0,\ 4^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 9인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(0,\ \dfrac{4^2}{9}\right)$, 즉 $N\left(0,\ \left(\dfrac{4}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z_{\overline{X}}=\dfrac{\overline{X}}{\frac{4}{3}}$로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\ge1)=P\left(Z_{\overline{X}}\ge\dfrac{3}{4}\right)\qquad\cdots\cdots$ ㉠

한편 정규분포 $N(3,\ 2^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 16인 표본의 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(3,\ \dfrac{2^2}{16}\right)$, 즉 $N\left(3,\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z_{\overline{Y}}=\dfrac{\overline{Y}-3}{\frac{1}{2}}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{Y}}$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{Y}\le a)=P\left(Z_{\overline{Y}}\le\dfrac{a-3}{\frac{1}{2}}\right)$

$=P(Z_{\overline{Y}}\le2a-6)$

$=P(Z_{\overline{Y}}\ge6-2a)\qquad\cdots\cdots$ ㉡

$P(\overline{X}\ge1)=P(\overline{Y}\le a)$이므로 ㉠, ㉡에서

$P\left(Z_{\overline{X}}\ge\dfrac{3}{4}\right)=P(Z_{\overline{Y}}\ge6-2a)$

따라서 $\dfrac{3}{4}=6-2a$이므로

$a=\dfrac{21}{8}$

**8** 모집단이 정규분포 $N(m,\ 40^2)$을 따르고 표본의 크기 $n=100$이므로 100병의 소스의 용량의 평균을 $\overline{X}$ mL라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \dfrac{40^2}{100}\right)$, 즉 $N(m,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{4}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\ge246)=0.9332$에서

$P\left(Z\ge\dfrac{246-m}{4}\right)=0.9332$

$P\left(Z\le\dfrac{m-246}{4}\right)=0.9332$

$P(Z\le0)+P\left(0\le Z\le\dfrac{m-246}{4}\right)=0.9332$

$0.5+P\left(0\le Z\le\dfrac{m-246}{4}\right)=0.9332$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le\dfrac{m-246}{4}\right)=0.4332$

이때 $P(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{m-246}{4}=1.5$

$\therefore\ m=252$

**9** 임의추출한 400명 중 상담원과 바로 연결되지 않은 고객의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율 $p=0.2$, 표본의 크기 $n=400$이므로

$E(\hat{p})=0.2,\ V(\hat{p})=\dfrac{0.2\times0.8}{400}=0.0004=0.02^2$

표본의 크기 $n=400$은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.2,\ 0.02^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\hat{p}-0.2}{0.02}$라 놓으면 확률변수 $Z$는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\hat{p}\le\frac{66}{400}\right)&=\mathrm{P}(\hat{p}\le0.165)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{0.165-0.2}{0.02}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le-1.75)=\mathrm{P}(Z\ge1.75)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1.75)\\&=0.5-0.4599=0.0401\end{aligned}$$

**10** 이 고등학교의 학생 300명 중 자전거를 타고 등교하는 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율 $p=0.25$, 표본의 크기 $n=300$이므로

$\mathrm{E}(\hat{p})=0.25$, $\mathrm{V}(\hat{p})=\dfrac{0.25\times0.75}{300}=0.025^2$

표본의 크기 $n=300$은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0.25,\ 0.025^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\hat{p}-0.25}{0.025}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}\left(\hat{p}\ge\dfrac{a}{100}\right)=0.0228$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\frac{a}{100}-0.25}{0.025}\right)=0.0228$$

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{2a-50}{5}\right)=0.0228$$

$$\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{2a-50}{5}\right)=0.0228$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{2a-50}{5}\right)=0.0228$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{2a-50}{5}\right)=0.4772$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\dfrac{2a-50}{5}=2\qquad\therefore\ a=30$

**11** 표본의 크기 $n=100$, 표본평균 $\overline{x}=2570$이고, $n$은 충분히 크므로 모표준편차 $\sigma$ 대신 표본표준편차 50을 이용하면 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$2570-1.96\times\frac{50}{\sqrt{100}}\le m\le2570+1.96\times\frac{50}{\sqrt{100}}$$

$\therefore\ 2560.2\le m\le2579.8$

**12** 표본의 크기가 $n$, 표본평균 $\overline{x}=50$, 모표준편차 $\sigma=10$이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$50-2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le m\le50+2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}$$

이 신뢰구간이 $48.71\le m\le51.29$와 일치하므로

$2.58\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}=1.29$, $\sqrt{n}=20\qquad\therefore\ n=400$

**13** 표본평균을 $\overline{x}$라 할 때, 표본의 크기 $n=36$, 모표준편차 $\sigma=12$이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\times\frac{12}{\sqrt{36}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{12}{\sqrt{36}}$$

$\overline{x}-5.16\le m\le\overline{x}+5.16$

$-5.16\le m-\overline{x}\le5.16\qquad\therefore\ |m-\overline{x}|\le5.16$

따라서 모평균 $m$과 표본평균 $\overline{x}$의 차의 최댓값은 5.16이다.

**14** 표본의 크기 $n=64$, 모표준편차가 $\sigma$이고, 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 4.9이므로

$2\times1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}=4.9\qquad\therefore\ \sigma=10$

**15** 모표준편차 $\sigma=4$이고, 표본의 크기가 각각 $n_1$, $n_2$인 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이의 비가 $2:3$이므로

$$\left(2\times2.58\times\frac{4}{\sqrt{n_1}}\right):\left(2\times2.58\times\frac{4}{\sqrt{n_2}}\right)=2:3$$

$$\frac{1}{\sqrt{n_1}}:\frac{1}{\sqrt{n_2}}=2:3$$

$\dfrac{2}{\sqrt{n_2}}=\dfrac{3}{\sqrt{n_1}}$, $\dfrac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2}}=\dfrac{3}{2}\qquad\therefore\ \dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{9}{4}$

**16** 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 $n$인 표본을 임의추출하여 신뢰도 $\alpha$ %로 추정한 모평균 $m$에 대한 신뢰구간의 길이는

$2k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, }\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}\right)$

ㄱ. 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기를 크게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 $2k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값은 작아진다. 즉, 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

ㄴ. 신뢰도를 높이면 $k$의 값이 커지고 표본의 크기를 작게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 작아지므로 $2k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값은 커진다. 즉, 신뢰구간의 길이는 길어진다.

ㄷ. 신뢰도를 낮추면 $k$의 값이 작아지고 표본의 크기를 크게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 $2k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값은 작아진다. 즉, 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

**17** 표본의 크기 $n=150$, 표본비율 $\hat{p}=\dfrac{60}{150}=0.4$이고, $n$은 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$0.4-2.58\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{150}}\le p\le0.4+2.58\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{150}}$$

$\therefore\ 0.2968\le p\le0.5032$

**18** 표본비율 $\hat{p}=\frac{1}{4}=0.25$이므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.25-1.96\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{n}}\le p\le 0.25+1.96\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{n}}$

이 신뢰구간이 $0.2255\le p\le 0.2745$와 일치하므로

$1.96\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{n}}=0.0245$

$\sqrt{n}=20\sqrt{3}$ $\quad\therefore n=1200$

**19** 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(64,\ 2^2)$을 따르고 표본의 크기 $n=4$이므로 4개의 딸기의 무게의 평균을 $\overline{X}$g이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(64,\ \frac{2^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(64,\ 1)$을 따른다. 따라서 $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-64}{1}$로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

4개의 딸기의 무게의 합이 248 g 미만이면 판매하지 못하므로 딸기 한 묶음을 판매하지 못하려면 $4\overline{X}<248$, 즉 $\overline{X}<62$이어야 한다.

$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}<62)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}<\frac{62-64}{1}\right)$
$=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}<-2)=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}>2)$
$=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le2)$
$=0.5-0.48=0.02$

하루에 만들어지는 딸기 묶음 상품의 개수는 $\frac{40000}{4}=10000$이므로 판매하지 못하는 묶음 개수를 $Y$라 하면 확률변수 $Y$는 이항분포 $\mathrm{B}(10000,\ 0.02)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(Y)=10000\times0.02=200,$
$\mathrm{V}(Y)=10000\times0.02\times0.98=196=14^2$

이때 시행 횟수 $n=10000$은 충분히 크므로 확률변수 $Y$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 14^2)$을 따른다.

따라서 $Z_Y=\frac{Y-200}{14}$으로 놓으면 확률변수 $Z_Y$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y\ge221)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{221-200}{14}\right)$
$=\mathrm{P}(Z_Y\ge1.5)$
$=\mathrm{P}(Z_Y\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z_Y\le1.5)$
$=0.5-0.43=0.07$

**20** 표본의 크기 $n$이 충분히 크면 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}\right)$을 따르므로

$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$|\hat{p}-p|\le0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$에서

$\left|\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}\right|\le0.16,\ -0.16\le\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}\le0.16$

$\therefore -0.16\sqrt{n}\le\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}\le0.16\sqrt{n}$

즉, $\mathrm{P}(-0.16\sqrt{n}\le Z\le0.16\sqrt{n})\ge0.9544$이므로

$\mathrm{P}(|Z|\le0.16\sqrt{n})\ge0.9544$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\mathrm{P}(|Z|\le2)=2\mathrm{P}(0\le Z\le2)$
$=2\times0.4772=0.9544$

㉠에서 $\mathrm{P}(|Z|\le0.16\sqrt{n})\ge\mathrm{P}(|Z|\le2)$

$0.16\sqrt{n}\ge2,\ \sqrt{n}\ge12.5$ $\quad\therefore n\ge156.25$

따라서 자연수 $n$의 최솟값은 157이다.

**21** 표본의 크기 $n=64$, 표본평균 $\overline{x}=5$이고 $n$이 충분히 크므로 모표준편차 $\sigma$ 대신 표본표준편차 1을 이용한다.

$\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 $m$에 대한 신뢰도 $\alpha$ %의 신뢰구간은

$5-k\times\frac{1}{\sqrt{64}}\le m\le5+k\times\frac{1}{\sqrt{64}}$

$\therefore 5-\frac{k}{8}\le m\le5+\frac{k}{8}$

이 신뢰구간이 $4.7\le m\le5.3$과 일치하므로

$\frac{k}{8}=0.3$ $\quad\therefore k=2.4$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2.4)=0.49$이므로

$\mathrm{P}(-2.4\le Z\le2.4)=2\mathrm{P}(0\le Z\le2.4)$
$=2\times0.49=0.98$

따라서 $\frac{\alpha}{100}=0.98$이므로 $\alpha=98$

**22** 표본의 크기 $n=16$, 표본평균 $\overline{x_1}=75$, 모표준편차가 $\sigma$일 때, 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$75-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le75+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$

$\therefore 75-0.49\sigma\le m\le75+0.49\sigma$

이 신뢰구간이 $a\le m\le b$와 일치하므로 $b=75+0.49\sigma$

표본의 크기 $n=16$, 표본평균 $\overline{x_2}=77$, 모표준편차가 $\sigma$일 때, 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$77-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le77+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$

$\therefore 77-0.645\sigma\le m\le77+0.645\sigma$

이 신뢰구간이 $c\le m\le d$와 일치하므로 $d=77+0.645\sigma$

이때 $d-b=3.86$에서

$(77+0.645\sigma)-(75+0.49\sigma)=3.86$

$0.155\sigma=1.86$ $\quad\therefore \sigma=12$

# 유형편

## 정답과 해설

## Ⅰ-1. 순열과 조합

### 01 여러 가지 순열과 중복조합 4~11쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ③ | **2** 81 | **3** ③ | **4** ② | **5** ⑤ |
| **6** ④ | **7** 234 | **8** ④ | **9** ③ | **10** 6 |
| **11** ② | **12** ② | **13** 192 | **14** 162 | **15** ③ |
| **16** ⑤ | **17** ② | **18** ① | **19** 232 | **20** ① |
| **21** 60 | **22** 120 | **23** ③ | **24** ② | **25** ① |
| **26** 105 | **27** 144 | **28** ③ | **29** 360 | **30** ② |
| **31** ② | **32** 10 | **33** ① | **34** ⑤ | **35** 44 |
| **36** ② | **37** 53 | **38** 50 | **39** 120 | **40** ① |
| **41** 18 | **42** ① | **43** 420 | **44** ⑤ | **45** 6 |
| **46** ② | **47** 105 | **48** ② | **49** 8 | **50** 94 |
| **51** ⑤ | **52** ② | **53** 45 | **54** 126 | **55** 36 |
| **56** ③ | | | | |

**1** ${}_n\Pi_2+{}_nC_2=51$에서 $n^2+\frac{n(n-1)}{2}=51$
$(3n+17)(n-6)=0$
$\therefore n=6$ ($\because$ $n$은 자연수)

**2** 구하는 경우의 수는
${}_3\Pi_4=3^4=81$

**3** 맨 앞자리에 올 수 있는 문자는 $b$, $c$, $d$, $f$의 4가지
나머지 두 자리에 문자를 배열하는 경우의 수는
${}_6\Pi_2=6^2=36$
따라서 구하는 경우의 수는
$4\times36=144$

**4** 볼펜 5개를 택하는 경우의 수는
${}_6C_5={}_6C_1=6$
택한 볼펜을 2개의 필통에 나누어 담는 경우의 수는
${}_2\Pi_5=2^5=32$
따라서 구하는 경우의 수는 $6\times32=192$

**5** 두 꽃병 A, B에 꽂을 꽃을 택하는 경우의 수는
${}_5P_2=20$
나머지 꽃을 꽂는 경우의 수는
${}_2\Pi_3=2^3=8$
따라서 구하는 경우의 수는 $20\times8=160$

**6** 기명으로 투표하는 모든 경우의 수는
${}_4\Pi_4=4^4=256$
모두 다른 후보에게 투표하는 경우의 수는
${}_4P_4=24$
따라서 구하는 경우의 수는 $256-24=232$

**7** 공을 상자에 넣는 모든 경우의 수는
${}_3\Pi_5=3^5=243$
한 상자에 넣은 공에 적힌 수의 합이 13보다 큰 경우는
$(1, 2, 3, 4, 5)$ 또는 $(2, 3, 4, 5)$
(i) $(1, 2, 3, 4, 5)$인 경우
3개의 상자에서 1개를 택하여 모든 공을 넣으면 되므로 그 경우의 수는 ${}_3C_1=3$
(ii) $(2, 3, 4, 5)$인 경우
3개의 상자에서 1개를 택하여 2, 3, 4, 5가 적힌 공을 넣고, 나머지 2개의 상자에서 1개를 택하여 1이 적힌 공을 넣으면 되므로 그 경우의 수는
${}_3C_1\times{}_2C_1=3\times2=6$
(i), (ii)에서 한 상자에 넣은 공에 적힌 수의 합이 13보다 큰 경우의 수는
$3+6=9$
따라서 구하는 경우의 수는 $243-9=234$

**8** 5개의 전구를 각각 켜거나 끄는 경우의 수는
${}_2\Pi_5=2^5=32$
그런데 전구가 모두 꺼진 경우는 제외해야 하므로 구하는 신호의 개수는 $32-1=31$

**9** 기호 2개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_4\Pi_2=4^2=16$
기호 3개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_4\Pi_3=4^3=64$
기호 4개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_4\Pi_4=4^4=256$
따라서 구하는 신호의 개수는
$16+64+256=336$

**10** 깃발을 1번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_3\Pi_1=3$

깃발을 2번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$

깃발을 3번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

같은 방법으로 깃발을 4번, 5번, 6번, ⋯ 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 ${}_3\Pi_4$, ${}_3\Pi_5$, ${}_3\Pi_6$, ⋯이다.

깃발을 합해서 5번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_1+{}_3\Pi_2+{}_3\Pi_3+{}_3\Pi_4+{}_3\Pi_5$

$=3+9+27+81+243=363<1000$

깃발을 합해서 6번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_1+{}_3\Pi_2+{}_3\Pi_3+{}_3\Pi_4+{}_3\Pi_5+{}_3\Pi_6$

$=3+9+27+81+243+729=1092>1000$

따라서 $n$의 최솟값은 6이다.

**11** 맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로 구하는 자연수의 개수는

$5\times{}_6\Pi_2=5\times6^2=180$

**12** 2가 오는 자리를 택하는 경우의 수는 ${}_4P_1=4$이므로 구하는 자연수의 개수는

$4\times{}_4\Pi_3=4\times4^3=256$

**13** 백의 자리, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3의 2가지이므로 이 두 자리의 숫자를 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

만의 자리에 0이 올 수 없으므로 만의 자리의 숫자를 정하는 경우의 수는 3

나머지 자리에 4개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 배열하는 경우의 수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4\times3\times16=192$

**14** 4의 배수는 끝의 두 자리의 수가 00이거나 4의 배수이어야 하므로 □□□□00, □□□□12, □□□□20 꼴이다.

각각의 경우에 맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로 구하는 4의 배수의 개수는

$3\times(2\times{}_3\Pi_3)=3\times2\times3^3=162$

**15** 맨 앞자리에는 0이 올 수 없다.

(ⅰ) 한 자리의 자연수의 개수는 4

(ⅱ) 두 자리의 자연수의 개수는 $4\times{}_5\Pi_1=4\times5=20$

(ⅲ) 세 자리의 자연수의 개수는 $4\times{}_5\Pi_2=4\times5^2=100$

(ⅳ) 네 자리의 자연수의 개수는 $4\times{}_5\Pi_3=4\times5^3=500$

(ⅴ) 다섯 자리의 자연수 중에서 만의 자리의 숫자가 1 또는 2인 자연수의 개수는

$2\times{}_5\Pi_4=2\times5^4=1250$

(ⅰ)~(ⅴ)에서 30000보다 작은 자연수의 개수는

$4+20+100+500+1250=1874$

따라서 30000은 1875번째 수이다.

**16** (ⅰ) 천의 자리의 숫자가 1인 자연수의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

(ⅱ) 천의 자리의 숫자가 2인 자연수 중 각 자리의 숫자의 합이 7보다 큰 2222의 경우를 제외해야 하므로 그 개수는

${}_3\Pi_3-1=3^3-1=26$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수의 개수는 $27+26=53$

**17** 서로 다른 2개의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

2개의 숫자로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

이 16개의 자연수 중에는 1개의 숫자로만 이루어진 네 자리의 자연수 2개가 포함되어 있으므로 서로 다른 2개의 숫자로 이루어진 자연수의 개수는

$16-2=14$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6\times14=84$

**18** $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4가지이므로 구하는 함수의 개수는

$4\times{}_5\Pi_2=4\times5^2=100$

다른 풀이

$X$에서 $Y$로의 함수의 개수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

$X$에서 $Y$로의 함수 중에서 $f(1)=5$인 함수의 개수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 함수의 개수는

$125-25=100$

**19** $f(x_1)=f(x_2)$인 서로 다른 $x_1$, $x_2$가 존재하면 함수 $f$는 일대일함수가 아니다.

$X$에서 $X$로의 함수의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4=256$

$X$에서 $X$로의 일대일함수의 개수는 ${}_4P_4=24$

따라서 구하는 함수의 개수는

$256-24=232$

**20** (가), (나)에서 치역이 될 수 있는 집합은

$\{1, 3\}$ 또는 $\{1, 5\}$ 또는 $\{3, 5\}$

치역이 $\{1, 3\}$인 함수의 개수는 공역이 $\{1, 3\}$인 함수의 개수에서 치역이 $\{1\}$ 또는 $\{3\}$인 함수의 개수를 뺀 것과 같으므로

${}_2\Pi_5-2=2^5-2=30$

같은 방법으로 치역이 $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$인 함수의 개수도 각각 30이므로 구하는 함수의 개수는

$3\times30=90$

**21** 가운데를 기준으로 한쪽에 빨간 공 1개, 파란 공 2개, 흰 공 3개를 일렬로 배열하면 반대쪽은 좌우 대칭이 되어야 하므로 공의 순서가 정해진다.

따라서 구하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!\times3!}=60$

**22** 양 끝에 p와 i를 고정시키고 그 사이에 a, s, s, o, n을 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{2!}=60$

p와 i의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $60\times2=120$

**23** $a$, $a$, $b$, $b$, $c$, $c$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\times2!\times2!}=90$

2개의 $a$를 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자와 함께 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{2!\times2!}=30$

따라서 구하는 경우의 수는 $90-30=60$

다른 풀이

$b$, $b$, $c$, $c$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

배열된 네 문자의 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중에서 2개를 택하여 $a$를 배열하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times10=60$

**24** 집합 $X$의 원소 중에서 중복을 허용하여 5개를 택할 때 그 곱이 9인 경우는

$(1, 1, 1, 1, 9)$ 또는 $(1, 1, 1, 3, 3)$

(i) 함숫값이 1, 1, 1, 1, 9인 함수의 개수는

$\dfrac{5!}{4!}=5$

(ii) 함숫값이 1, 1, 1, 3, 3인 함수의 개수는

$\dfrac{5!}{3!\times2!}=10$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는 $5+10=15$

**25** $a$, $b$를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, X, $c$, $d$, $e$를 일렬로 배열한 후 첫 번째 X는 $a$로, 두 번째 X는 $b$로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!}=60$

**26** 4, 6을 모두 X로, 1, 3, 5, 7을 모두 Y로 바꾸어 생각하여 Y, 2, Y, X, Y, X, Y를 일렬로 배열한 후 첫 번째 X는 4로, 두 번째 X는 6으로, 4개의 Y는 앞에서부터 순서대로 1, 3, 5, 7로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!\times4!}=105$

**27** 모음을 한 묶음, 자음을 다른 한 묶음으로 생각하면 모음이 자음보다 앞에 오게 배열하는 경우는 1가지이다.

모음 a, i, o, a끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

자음 n, t, n, l끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

따라서 구하는 경우의 수는 $1\times12\times12=144$

**28** A, B를 제외한 6가지 업무 중에서 오늘 할 업무 2가지를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$

이때 택한 업무를 A, B, C, D라 하면 A와 B는 순서가 정해져 있으므로 X로 바꾸어 생각하여 X, X, C, D를 일렬로 배열한 후 첫 번째 X는 A로, 두 번째 X는 B로 바꾸면 되므로 택한 업무의 순서를 정하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

따라서 구하는 경우의 수는 $15\times12=180$

**29** 0, 1, 2, 2, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{3!\times2!}=420$

이때 맨 앞자리에 0이 오고 나머지 자리에 1, 2, 2, 2, 3, 3을 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!\times2!}=60$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $420-60=360$

**30** (i) 일의 자리의 숫자가 1인 자연수의 개수는

$\dfrac{5!}{3!}=20$

(ii) 일의 자리의 숫자가 3인 자연수의 개수는

$\dfrac{5!}{2!\times3!}=10$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는 $20+10=30$

**31** 십의 자리와 일의 자리의 숫자의 합이 4인 일곱 자리의 자연수는

□□□□□13 또는 □□□□□22 또는 □□□□□31

(i) □□□□□13 꼴의 자연수

나머지 자리에 0, 1, 1, 2, 2를 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$

맨 앞자리에 0이 오고 나머지 자리에 1, 1, 2, 2를 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

따라서 □□□□□13 꼴의 자연수의 개수는

$30-6=24$

(ii) □□□□□22 꼴의 자연수

나머지 자리에 0, 1, 1, 1, 3을 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

맨 앞자리에 0이 오고 나머지 자리에 1, 1, 1, 3을 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

따라서 □□□□□22 꼴의 자연수의 개수는

$20-4=16$

(iii) □□□□□31 꼴의 자연수

(i)과 같은 방법으로 하면 자연수의 개수는 24

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$24+16+24=64$

**32** 3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이다.

4, 4, 4, 5, 5, 6에서 4개의 숫자를 택하여 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

(4, 4, 4, 6) 또는 (4, 4, 5, 5)

(i) (4, 4, 4, 6)을 일렬로 배열하여 만들 수 있는 자연수의 개수는 $\frac{4!}{3!}=4$

(ii) (4, 4, 5, 5)를 일렬로 배열하여 만들 수 있는 자연수의 개수는 $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는 $4+6=10$

**33** A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times 3!}=10$

P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times 3!}=20$

따라서 구하는 경우의 수는 $10\times 20=200$

**34** 꼭짓점 A에서 점 C까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{1!\times 2!}=3$

모서리 CD를 지나는 경우의 수는 1

점 D에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{1!\times 3!\times 1!}=20$

따라서 구하는 경우의 수는 $3\times 1\times 20=60$

**35** (i) A 지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times 3!}=20$

A 지점에서 P 지점을 거쳐 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!\times 1!}\times\frac{3!}{1!\times 2!}=9$

따라서 A 지점에서 P 지점을 거치지 않고 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

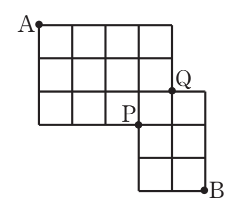
$20-9=11$

(ii) Q 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{1!\times 3!}=4$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $11\times 4=44$

**36** 오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면




(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

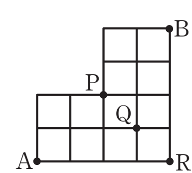
$\frac{6!}{3!\times 3!}\times\frac{4!}{2!\times 2!}=120$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!\times 2!}\times\frac{4!}{1!\times 3!}=60$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $120+60=180$

**37** 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면




(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times 2!}\times\frac{4!}{2!\times 2!}=36$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!\times 1!}\times\frac{4!}{1!\times 3!}=16$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

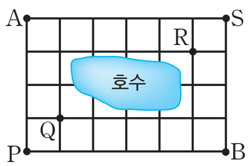
$1\times 1=1$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$36+16+1=53$

유형편

**38** 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면




(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$1\times1=1$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{1!\times3!}\times\dfrac{6!}{5!\times1!}=24$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{5!\times1!}\times\dfrac{4!}{1!\times3!}=24$

(iv) A → S → B로 가는 경우의 수는

$1\times1=1$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$1+24+24+1=50$

**39** 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120$

**40** 빨간색 볼펜 5자루를 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

${}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=56$

파란색 볼펜 2자루를 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

${}_4H_2={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$56\times10=560$

**41** 서로 다른 4개의 숫자에서 3개를 택하는 중복조합의 수는

${}_4H_3={}_6C_3=20$

이때 세 수의 곱이 200보다 큰 경우는

$(8,\ 8,\ 8)$, $(8,\ 8,\ 4)$의 2가지

따라서 구하는 경우의 수는

$20-2=18$

**42** $2\le a\le b\le5$에서 $a$, $b$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_2={}_5C_2=10$

$c$는 6 이하의 자연수이므로 $5\le c$에서 $c$의 값이 될 수 있는 경우는 5, 6의 2가지

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times2=20$

**43** 공을 넣지 않을 빈 상자를 택하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

나머지 상자에 공을 1개씩 먼저 넣고 남은 6개의 공을 공이 든 4개의 상자에 넣는 경우의 수는

${}_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times84=420$

**44** 서로 다른 종류의 사탕 3개를 각각 1개씩 주머니에 넣으면 주머니는 서로 구별된다.

구슬이 1개 이상씩 들어가려면 서로 다른 3개의 주머니에 구슬을 1개씩 먼저 넣고 남은 4개의 구슬을 나누어 넣으면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

**45** 3종류의 공에서 $k$개를 사는 경우의 수가 21이므로

${}_3H_k=21$

${}_{k+2}C_k=21$

${}_{k+2}C_2=21$

$\dfrac{(k+2)(k+1)}{2\times1}=21$

$(k+2)(k+1)=42=7\times6$

$\therefore k=5$ ($\because$ $k$는 자연수)

3종류의 공을 적어도 1개씩 포함하여 5개의 공을 사려면 3종류의 공을 각각 1개씩 먼저 사고 남은 2개의 공을 사면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_3H_2={}_4C_2=6$

**46** 구하는 항의 개수는 5개의 문자 $a$, $b$, $c$, $d$, $e$에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_6={}_{10}C_6={}_{10}C_4=210$

**47** 2개의 문자 $x$, $y$에서 2개를 택하는 중복조합의 수는

${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

4개의 문자 $a$, $b$, $c$, $d$에서 4개를 택하는 중복조합의 수는

${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35$

따라서 구하는 항의 개수는

$3\times35=105$

**48** $x$를 먼저 하나 택하고 3개의 문자 $x$, $y$, $z$에서 나머지 2개를 택하는 중복조합의 수는

${}_3H_2={}_4C_2=6$

$a$를 제외한 2개의 문자 $b$, $c$에서 4개를 택하는 중복조합의 수는

${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 항의 개수는

$6\times5=30$

**49** 3개의 문자 $x$, $y$, $z$에서 $n$개를 택하는 중복조합의 수가 45이므로

${}_{3}\mathrm{H}_{n}=45$

${}_{n+2}\mathrm{C}_{n}=45$

${}_{n+2}\mathrm{C}_{2}=45$

$\frac{(n+2)(n+1)}{2\times1}=45$

$(n+2)(n+1)=90=10\times9$

$\therefore n=8$ ($\because$ $n$은 자연수)

**50** $x$, $y$, $z$, $w$가 모두 음이 아닌 정수일 때,

$m={}_{4}\mathrm{H}_{6}={}_{9}\mathrm{C}_{6}={}_{9}\mathrm{C}_{3}=84$

한편 $x$, $y$, $z$, $w$가 모두 자연수일 때,

$x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$, $w-1=d$라 하면

$x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$, $w=d+1$

이를 방정식 $x+y+z+w=6$에 대입하면

$(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1)=6$

$\therefore a+b+c+d=2$ (단, $a$, $b$, $c$, $d$는 음이 아닌 정수)

이 방정식을 만족시키는 순서쌍 $(a, b, c, d)$의 개수는

$n={}_{4}\mathrm{H}_{2}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$

$\therefore m+n=84+10=94$

**51** 부등식 $x+y+z<4$에서 $x$, $y$, $z$가 음이 아닌 정수이므로

$x+y+z=0$ 또는 $x+y+z=1$

또는 $x+y+z=2$ 또는 $x+y+z=3$

(i) $x+y+z=0$을 만족시키는 순서쌍은

$(0, 0, 0)$의 1개

(ii) $x+y+z=1$을 만족시키는 순서쌍의 개수는

${}_{3}\mathrm{H}_{1}={}_{3}\mathrm{C}_{1}=3$

(iii) $x+y+z=2$를 만족시키는 순서쌍의 개수는

${}_{3}\mathrm{H}_{2}={}_{4}\mathrm{C}_{2}=6$

(iv) $x+y+z=3$을 만족시키는 순서쌍의 개수는

${}_{3}\mathrm{H}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+3+6+10=20$

**52** $3x+y+z+w=11$에서 $x$는 자연수이므로

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(i) $x=1$인 경우

$3x+y+z+w=11$에서 $y+z+w=8$ …… ㉠

한편 $y$, $z$, $w$가 모두 자연수일 때

$y-1=a$, $z-1=b$, $w-1=c$라 하면

$y=a+1$, $z=b+1$, $w=c+1$

이를 방정식 ㉠에 대입하면

$(a+1)+(b+1)+(c+1)=8$

$\therefore a+b+c=5$ (단, $a$, $b$, $c$는 음이 아닌 정수)

이 방정식을 만족시키는 순서쌍 $(a, b, c)$의 개수는

${}_{3}\mathrm{H}_{5}={}_{7}\mathrm{C}_{5}={}_{7}\mathrm{C}_{2}=21$

(ii) $x=2$인 경우

(i)과 같은 방법으로 하면

$a+b+c=2$ (단, $a$, $b$, $c$는 음이 아닌 정수)

이 방정식을 만족시키는 순서쌍 $(a, b, c)$의 개수는

${}_{3}\mathrm{H}_{2}={}_{4}\mathrm{C}_{2}=6$

(iii) $x=3$인 경우

$3x+y+z+w=11$에서 $y+z+w=2$

이 방정식을 만족시키는 자연수 $y$, $z$, $w$는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$21+6=27$

**53** $x$, $y$, $z$가 모두 홀수이므로 음이 아닌 정수 $a$, $b$, $c$에 대하여

$x=2a+1$, $y=2b+1$, $z=2c+1$

이라 하고 이를 방정식 $x+y+z=19$에 대입하면

$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)=19$

$\therefore a+b+c=8$ (단, $a$, $b$, $c$는 음이 아닌 정수)

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

${}_{3}\mathrm{H}_{8}={}_{10}\mathrm{C}_{8}={}_{10}\mathrm{C}_{2}=45$

**54** 주어진 조건에 의하여

$f(1)\geq f(2)\geq f(3)\geq f(4)$

즉, 집합 $Y$의 원소 6개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 크거나 같은 수부터 차례대로 집합 $X$의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

${}_{6}\mathrm{H}_{4}={}_{9}\mathrm{C}_{4}=126$

**55** (가), (나)에서

$f(1)\leq2\leq f(5)\leq4\leq f(9)\leq f(11)$

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2의 2가지

$f(5)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4의 3가지

$f(9)$, $f(11)$의 값은 집합 $Y$의 원소 4, 5, 6에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례대로 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 ${}_{3}\mathrm{H}_{2}={}_{4}\mathrm{C}_{2}=6$

따라서 구하는 함수의 개수는 $2\times3\times6=36$

**56** $f(1)\leq f(3)\leq f(5)\leq f(7)$을 만족시키는 함수의 개수는

${}_{6}\mathrm{H}_{4}={}_{9}\mathrm{C}_{4}=126$

$f(1)\leq f(3)=f(5)\leq f(7)$을 만족시키는 함수의 개수는

${}_{6}\mathrm{H}_{3}={}_{8}\mathrm{C}_{3}=56$

따라서 구하는 함수의 개수는 $126-56=70$

유형편

## 02 이항정리 12~14쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 135 | 2 ② | 3 3 | 4 176 | 5 ② |
| 6 ③ | 7 ② | 8 ④ | 9 ③ | 10 216 |
| 11 ⑤ | 12 462 | 13 ④ | 14 ③ | 15 ④ |
| 16 7 | 17 1024 | 18 ③ | 19 ⑤ | 20 화요일 |
| 21 ④ | | | | |

**1** $(x+3y^2)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r x^{6-r}(3y^2)^r={}_6C_r 3^r x^{6-r}y^{2r}$
$x^4y^4$항은 $6-r=4$, $2r=4$일 때이므로 $r=2$
따라서 $x^4y^4$의 계수는
${}_6C_2 3^2=135$

**2** $\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r(x^2)^{5-r}\left(\dfrac{a}{x}\right)^r={}_5C_r a^r\dfrac{x^{10-2r}}{x^r}$
$\dfrac{1}{x^2}$항은 $r-(10-2r)=2$일 때이므로 $r=4$
즉, $\dfrac{1}{x^2}$의 계수는 ${}_5C_4a^4={}_5C_1a^4=5a^4$
$x$항은 $(10-2r)-r=1$일 때이므로 $r=3$
즉, $x$의 계수는 ${}_5C_3a^3={}_5C_2a^3=10a^3$
이때 $\dfrac{1}{x^2}$의 계수와 $x$의 계수가 같으므로
$5a^4=10a^3$, $5a^4-10a^3=0$
$5a^3(a-2)=0$
$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

**3** $\left(x-\dfrac{3}{x^n}\right)^8$의 전개식의 일반항은
${}_8C_r x^{8-r}\left(-\dfrac{3}{x^n}\right)^r={}_8C_r(-3)^r\dfrac{x^{8-r}}{x^{nr}}$
상수항은 $8-r=nr$일 때이므로
$r(n+1)=8$
이때 $r$는 $0\le r\le 8$인 정수이고, $n$은 자연수이므로
$r=1$, $n=7$ 또는 $r=2$, $n=3$ 또는 $r=4$, $n=1$
따라서 구하는 자연수 $n$의 개수는 3이다.

**4** $(\sqrt{5}+x)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r(\sqrt{5})^{5-r}x^r$
이때 $r$는 $0\le r\le 5$인 정수이므로 $x^r$의 계수 ${}_5C_r(\sqrt{5})^{5-r}$이 정수가 되려면
$5-r=0$ 또는 $5-r=2$ 또는 $5-r=4$
$\therefore r=5$ 또는 $r=3$ 또는 $r=1$
따라서 계수가 정수인 모든 항의 계수의 합은
${}_5C_1(\sqrt{5})^4+{}_5C_3(\sqrt{5})^2+{}_5C_5(\sqrt{5})^0=125+50+1=176$

**5** $(1-x)^3$의 전개식의 일반항은
${}_3C_r(-x)^r={}_3C_r(-1)^rx^r$
$(1+2x^2)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_s(2x^2)^s={}_5C_s2^sx^{2s}$
따라서 $(1-x)^3(1+2x^2)^5$의 전개식의 일반항은
${}_3C_r(-1)^rx^r\times{}_5C_s2^sx^{2s}={}_3C_r\times{}_5C_s(-1)^r2^sx^{r+2s}$
$x^3$항은 $r+2s=3$ ($r$, $s$는 $0\le r\le 3$, $0\le s\le 5$인 정수)일 때이므로 $r=1$, $s=1$ 또는 $r=3$, $s=0$
따라서 구하는 $x^3$의 계수는
${}_3C_1\times{}_5C_1(-1)^12^1+{}_3C_3\times{}_5C_0(-1)^32^0=-30-1=-31$

**6** $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은
${}_4C_rx^{4-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_4C_r\dfrac{x^{4-r}}{x^r}$ ...... ㉠
이때 $(ax^2+1)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4=ax^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$이므로 전개식에서 상수항은
(i) $ax^2$과 ㉠의 $\dfrac{1}{x^2}$항의 곱
(ii) 1과 ㉠의 상수항의 곱
일 때 나타난다.
(i) ㉠의 $\dfrac{1}{x^2}$항은 $r-(4-r)=2$일 때이므로 $r=3$
㉠에서 ${}_4C_3\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4}{x^2}$
(ii) ㉠의 상수항은 $4-r=r$일 때이므로 $r=2$
㉠에서 ${}_4C_2=6$
(i), (ii)에서 상수항은 $ax^2\times\dfrac{4}{x^2}+1\times 6=4a+6$
이때 상수항이 14이므로
$4a+6=14$ $\therefore a=2$

**7** $(x^2+1)^4$의 전개식의 일반항은
${}_4C_r(x^2)^r1^{4-r}={}_4C_rx^{2r}$
$(x^3+1)^n$의 전개식의 일반항은
${}_nC_s(x^3)^s1^{n-s}={}_nC_sx^{3s}$
따라서 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$의 전개식의 일반항은
${}_4C_rx^{2r}\times{}_nC_sx^{3s}={}_4C_r\times{}_nC_sx^{2r+3s}$
$x^5$항은 $2r+3s=5$ ($r$, $s$는 $0\le r\le 4$, $0\le s\le n$인 정수)일 때이므로 $r=1$, $s=1$
이때 $x^5$의 계수가 12이므로 ${}_4C_1\times{}_nC_1=12$에서
$4\times n=12$ $\therefore n=3$
${}_4C_r\times{}_3C_sx^{2r+3s}$에서 $x^6$항은 $2r+3s=6$일 때이므로
$r=0$, $s=2$ 또는 $r=3$, $s=0$
따라서 구하는 $x^6$의 계수는
${}_4C_0\times{}_3C_2+{}_4C_3\times{}_3C_0=3+4=7$

**8** $_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{12}C_2={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{12}C_2$
$={}_4C_3+{}_4C_2+\cdots+{}_{12}C_2$
$={}_5C_3+\cdots+{}_{12}C_2$
$\vdots$
$={}_{12}C_3+{}_{12}C_2={}_{13}C_3$

**9** $_{10}C_0+{}_{11}C_1+{}_{12}C_2+\cdots+{}_{30}C_{20}$
$={}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{12}C_2+\cdots+{}_{30}C_{20}$
$={}_{12}C_1+{}_{12}C_2+\cdots+{}_{30}C_{20}$
$={}_{13}C_2+\cdots+{}_{30}C_{20}$
$\vdots$
$={}_{30}C_{19}+{}_{30}C_{20}={}_{31}C_{20}$
$\therefore\ n=31$

**10** $_3C_1+{}_4C_1+\cdots+{}_{10}C_1$
$=({}_2C_2+{}_2C_1)+{}_3C_1+{}_4C_1+\cdots+{}_{10}C_1-({}_2C_2+{}_2C_1)$
$={}_3C_2+{}_3C_1+{}_4C_1+\cdots+{}_{10}C_1-(1+2)$
$={}_4C_2+{}_4C_1+\cdots+{}_{10}C_1-3$
$\vdots$
$={}_{10}C_2+{}_{10}C_1-3$
$={}_{11}C_2-3$
$_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2$
$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2-{}_3C_3$
$={}_4C_3+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2-1$
$={}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_2-1$
$\vdots$
$={}_{10}C_3+{}_{10}C_2-1$
$={}_{11}C_3-1$
따라서 색칠한 부분에 있는 모든 수의 합은
$_{11}C_2-3+{}_{11}C_3-1={}_{11}C_2+{}_{11}C_3-4$
$={}_{12}C_3-4$
$=220-4=216$

**11** $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 $_nC_rx^r$
$x^6$항은 $(1+x)^6$의 전개식에서부터 나오므로
$(1+x)^6$의 전개식에서 $x^6$의 계수는 $_6C_6$
$(1+x)^7$의 전개식에서 $x^6$의 계수는 $_7C_6$
$\vdots$
$(1+x)^{20}$의 전개식에서 $x^6$의 계수는 $_{20}C_6$
따라서 구하는 $x^6$의 계수는
$_6C_6+{}_7C_6+{}_8C_6+\cdots+{}_{20}C_6={}_7C_7+{}_7C_6+{}_8C_6+\cdots+{}_{20}C_6$
$={}_8C_7+{}_8C_6+\cdots+{}_{20}C_6$
$={}_9C_7+\cdots+{}_{20}C_6$
$\vdots$
$={}_{20}C_7+{}_{20}C_6={}_{21}C_7$

**12** 주어진 식의 $a_8$의 값은 $x^8$의 계수와 같다.
$(1+x^2)^n$의 전개식의 일반항은 $_nC_rx^{2r}$
$x^8$항은 $(1+x^2)^4$의 전개식에서부터 나오므로
$(1+x^2)^4$의 전개식에서 $x^8$의 계수는 $_4C_4$
$(1+x^2)^5$의 전개식에서 $x^8$의 계수는 $_5C_4$
$\vdots$
$(1+x^2)^{10}$의 전개식에서 $x^8$의 계수는 $_{10}C_4$
따라서 구하는 $x^8$의 계수는
$_4C_4+{}_5C_4+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_4={}_5C_5+{}_5C_4+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_4$
$={}_6C_5+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_4$
$={}_7C_5+\cdots+{}_{10}C_4$
$\vdots$
$={}_{10}C_5+{}_{10}C_4$
$={}_{11}C_5$
$=462$

**13** 주어진 다항식의 전개식에서 $x^5$항은 $x^3$과 $(1+x)^n$의 $x^2$항의 곱일 때 나타나므로 $x^5$의 계수는 $(1+x)^n$의 전개식에서 $x^2$의 계수와 같다.
$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 $_nC_rx^r$
$x^2$항은 $(1+x)^2$의 전개식에서부터 나오므로
$(1+x)^2$의 전개식에서 $x^2$의 계수는 $_2C_2$
$(1+x)^3$의 전개식에서 $x^2$의 계수는 $_3C_2$
$\vdots$
$(1+x)^6$의 전개식에서 $x^2$의 계수는 $_6C_2$
따라서 구하는 계수는
$_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2$
$={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2$
$={}_5C_3+{}_5C_2+{}_6C_2$
$={}_6C_3+{}_6C_2$
$={}_7C_3$
$=35$

**14** $_{22}C_0-{}_{22}C_1+{}_{22}C_2-\cdots-{}_{22}C_{21}+{}_{22}C_{22}=0$이므로
$_{22}C_0-({}_{22}C_1-{}_{22}C_2+\cdots+{}_{22}C_{21})+{}_{22}C_{22}=0$
$\therefore\ {}_{22}C_1-{}_{22}C_2+{}_{22}C_3-\cdots+{}_{22}C_{21}={}_{22}C_0+{}_{22}C_{22}$
$=1+1$
$=2$

**15** $_{17}C_0={}_{17}C_{17},\ {}_{17}C_1={}_{17}C_{16},\ \cdots,\ {}_{17}C_8={}_{17}C_9$이고
$_{17}C_0+{}_{17}C_1+{}_{17}C_2+\cdots+{}_{17}C_{17}=2^{17}$이므로
$({}_{17}C_0+{}_{17}C_1+{}_{17}C_2+\cdots+{}_{17}C_8)$
$+({}_{17}C_9+{}_{17}C_{10}+{}_{17}C_{11}+\cdots+{}_{17}C_{17})=2^{17}$
$2({}_{17}C_0+{}_{17}C_1+{}_{17}C_2+\cdots+{}_{17}C_8)=2^{17}$
$\therefore\ {}_{17}C_0+{}_{17}C_1+{}_{17}C_2+\cdots+{}_{17}C_8=2^{16}$

**16** ${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$
$=({}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n)-{}_nC_0$
$=2^n-1$
즉, $2^n-1=127$이므로
$2^n=128=2^7$
$\therefore\ n=7$

**17** 원소의 개수가 1인 부분집합의 개수는 ${}_{11}C_1$
원소의 개수가 3인 부분집합의 개수는 ${}_{11}C_3$
원소의 개수가 5인 부분집합의 개수는 ${}_{11}C_5$
$\vdots$
원소의 개수가 11인 부분집합의 개수는 ${}_{11}C_{11}$
따라서 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는
${}_{11}C_1+{}_{11}C_3+{}_{11}C_5+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{11-1}=2^{10}$
$=1024$

**18** $9\,{}_{30}C_0+9^2\,{}_{30}C_1+9^3\,{}_{30}C_2+\cdots+9^{31}\,{}_{30}C_{30}$
$=9({}_{30}C_0+9^1\,{}_{30}C_1+9^2\,{}_{30}C_2+\cdots+9^{30}\,{}_{30}C_{30})$
$=9\times(1+9)^{30}$
$=9\times10^{30}$

**19** $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에
$x=11$, $n=50$을 대입하면
$12^{50}={}_{50}C_0+11\,{}_{50}C_1+11^2\,{}_{50}C_2+\cdots+11^{50}\,{}_{50}C_{50}$
$=1+11\times50+11^2({}_{50}C_2+11\,{}_{50}C_3+\cdots+11^{48}\,{}_{50}C_{50})$
$=67+11^2(4+{}_{50}C_2+11\,{}_{50}C_3+\cdots+11^{48}\,{}_{50}C_{50})$
따라서 $12^{50}$을 121로 나누었을 때의 나머지는 67이다.

**20** $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에
$x=14$, $n=9$를 대입하면
$15^9={}_9C_0+14\,{}_9C_1+14^2\,{}_9C_2+\cdots+14^9\,{}_9C_9$
$=1+2\times7({}_9C_1+14\,{}_9C_2+\cdots+14^8\,{}_9C_9)$
즉, $15^9$을 7로 나누었을 때의 나머지는 1이다.
따라서 월요일로부터 $15^9$일째 되는 날은 화요일이다.

**21** $n(U)=10$이므로 원소의 개수가 $k\,(0\le k\le10)$인 집합 $B$를 정하는 경우의 수는 ${}_{10}C_k$
또 $A\subset B$이므로 원소의 개수가 $k$인 집합 $B$에 대하여 집합 $A$를 정하는 경우의 수는 $2^k$
즉, 집합 $B$의 원소의 개수가 $k$일 때, 두 집합 $A$, $B$를 정하는 경우의 수는
${}_{10}C_k\times2^k$
따라서 구하는 모든 경우의 수는
${}_{10}C_0\times2^0+{}_{10}C_1\times2^1+{}_{10}C_2\times2^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\times2^{10}$
$=(1+2)^{10}=3^{10}$

# Ⅱ-1. 확률의 개념과 활용

## 01 확률의 개념과 활용 16~24쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ③ | **2** ③ | **3** 16 | **4** $\frac{1}{4}$ | **5** $\frac{5}{18}$ |
| **6** $\frac{11}{49}$ | **7** ④ | **8** ③ | **9** $\frac{9}{25}$ | **10** ② |
| **11** ① | **12** $\frac{7}{20}$ | **13** $\frac{1}{7}$ | **14** ① | **15** $\frac{12}{25}$ |
| **16** ③ | **17** $\frac{21}{64}$ | **18** $\frac{1}{3}$ | **19** $\frac{1}{28}$ | **20** ② |
| **21** $\frac{1}{6}$ | **22** $\frac{5}{21}$ | **23** $\frac{4}{15}$ | **24** $\frac{1}{4}$ | **25** ② |
| **26** ③ | **27** 1 | **28** ① | **29** $\frac{3}{7}$ | **30** ③ |
| **31** $\frac{5}{12}$ | **32** ② | **33** $\frac{3}{25}$ | **34** C | **35** 6개 |
| **36** $\frac{5}{8}$ | **37** $1-\frac{\pi}{8}$ | **38** $\frac{7}{8}$ | **39** ④ | **40** ③ |
| **41** $\frac{5}{6}$ | **42** ③ | **43** ③ | **44** 0.8 | **45** $\frac{2}{3}$ |
| **46** $\frac{7}{16}$ | **47** ④ | **48** ④ | **49** $\frac{5}{84}$ | **50** $\frac{1}{3}$ |
| **51** $\frac{9}{14}$ | **52** $\frac{3}{4}$ | **53** $\frac{9}{10}$ | **54** $\frac{2}{5}$ | **55** $\frac{4}{7}$ |
| **56** $\frac{15}{16}$ | **57** ⑤ | **58** $\frac{4}{5}$ | **59** $\frac{223}{343}$ | **60** $\frac{11}{12}$ |
| **61** ③ | **62** $\frac{37}{42}$ | **63** $\frac{10}{21}$ | | |

**1** $A=\{1, 3, 5, 6, 8, 10\}$, $B=\{6, 8, 10\}$, $C=\{3, 5\}$, $D=\{3, 6\}$이므로
① $A\cap B=\{6, 8, 10\}$
② $A\cap C=\{3, 5\}$
③ $B\cap C=\varnothing$
④ $B\cap D=\{6\}$
⑤ $C\cap D=\{3\}$
따라서 서로 배반사건인 것은 ③이다.

**2** 표본공간을 $S$라 하면 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$이므로
$A=\{1, 2, 5, 10\}$
사건 $A$와 서로 배반인 사건은 $A^C$의 부분집합이고, $A^C$의 원소가 6개이므로 구하는 사건의 개수는 $2^6=64$

**3** $S=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$이므로
$A=\{3, 6, 9, 12\}$, $B=\{2, 3, 5, 7, 11\}$
사건 $A$와 서로 배반인 사건은 $A^C$의 부분집합이고, 사건 $B$와 서로 배반인 사건은 $B^C$의 부분집합이므로 두 사건 $A$, $B$와 모두 배반인 사건은 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다.

$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C = \{1,\ 4,\ 8,\ 10\}$이므로 $A^C \cap B^C$의 원소가 4개이다.
따라서 구하는 사건의 개수는 $2^4=16$

**4** 집합 $A$의 모든 부분집합의 개수는 $2^5=32$
원소 $b$, $e$를 모두 원소로 갖는 집합 $A$의 부분집합의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$
따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$

**5** 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$
나오는 두 눈의 수의 합이 5 이하인 경우는 $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 1)$의 10가지이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

**6** $x+y=50$을 만족시키는 자연수 $x$, $y$의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 ${}_2H_{48}={}_{49}C_{48}={}_{49}C_1=49$
이때 $y=50-x$이므로 $xy\ge600$에서
$x(50-x)\ge600$, $x^2-50x+600\le0$
$(x-20)(x-30)\le0$ $\quad\therefore 20\le x\le30$
즉, $xy\ge600$을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(20,\ 30)$, $(21,\ 29)$, $(22,\ 28)$, $\cdots$, $(30,\ 20)$의 11개이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{11}{49}$

**7** 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$
$f(a)f(b)<0$에서
$f(a)>0$, $f(b)<0$ 또는 $f(a)<0$, $f(b)>0$
(i) $f(a)>0$, $f(b)<0$인 경우
$a^2-7a+10>0$에서 $(a-2)(a-5)>0$
$\therefore a<2$ 또는 $a>5$
$b^2-7b+10<0$에서 $(b-2)(b-5)<0$
$\therefore 2<b<5$
즉, $a$는 1 또는 6이고, $b$는 3 또는 4이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $2\times2=4$
(ii) $f(a)<0$, $f(b)>0$인 경우
(i)과 같은 방법으로 하면 $a$는 3 또는 4이고, $b$는 1 또는 6이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $2\times2=4$
(i), (ii)에서 $f(a)f(b)<0$을 만족시키는 경우의 수는
$4+4=8$
따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

**8** 8명이 일렬로 서는 경우의 수는 $8!$
맨 앞과 맨 뒤에 남자 3명 중에서 2명이 서고 그 사이에 나머지 6명이 일렬로 서는 경우의 수는
${}_3P_2\times6!$
따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_3P_2\times6!}{8!}=\frac{3}{28}$

**9** 맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는
$5\times{}_5P_2=100$
5의 배수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이다.
□□0 꼴의 자연수의 개수는 ${}_5P_2=20$
□□5 꼴의 자연수의 개수는 $4\times4=16$
따라서 구하는 확률은 $\frac{20+16}{100}=\frac{9}{25}$

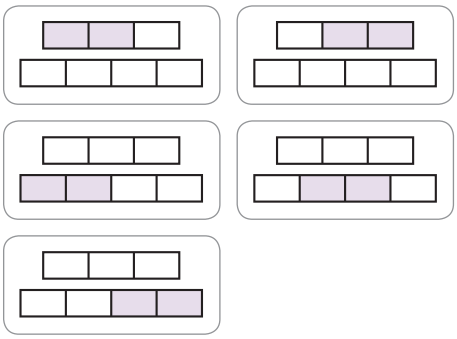
**10** 안내문 6장을 일렬로 붙이는 경우의 수는 $6!$
교내, 교외 대회의 순서로 번갈아 붙이는 경우의 수는
$3!\times3!=6\times6=36$
교외, 교내 대회의 순서로 번갈아 붙이는 경우의 수는
$3!\times3!=6\times6=36$
따라서 구하는 확률은 $\frac{36+36}{6!}=\frac{1}{10}$

**11** 10권의 책을 일렬로 꽂는 경우의 수는 $10!$
영어 책 6권을 일렬로 꽂는 경우의 수는 $6!$
어느 두 권의 수학 책도 서로 이웃하지 않으려면 영어 책의 사이사이와 양 끝의 7개의 자리 중 4개를 택하여 수학 책 4권을 꽂으면 되므로 그 경우의 수는 ${}_7P_4$
따라서 구하는 확률은 $\frac{6!\times{}_7P_4}{10!}=\frac{1}{6}$

**12** 3, 4, 5, 6, 7을 모두 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는 $5!=120$
64□□□, 65□□□, 67□□□ 꼴의 자연수의 개수는 각각 $3!$이므로 $3!\times3=18$
7□□□□ 꼴의 자연수의 개수는 $4!=24$
따라서 구하는 확률은 $\frac{18+24}{120}=\frac{7}{20}$

**13** 7개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $7!$
s와 t 사이에 나머지 5개의 문자 중에서 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는 ${}_5P_3=60$
배열된 s□□□t를 한 묶음으로 생각하여 남은 2개의 문자와 함께 일렬로 배열하는 경우의 수는 $3!=6$
s와 t의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 확률은 $\frac{60\times6\times2}{7!}=\frac{1}{7}$

**14** 7개의 좌석에 6명의 학생이 앉는 경우의 수는 ${}_7P_6$
A, B가 같은 열에 서로 이웃하게 앉는 경우는 다음 그림과 같이 5가지가 존재한다.



각 경우에 A, B끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
남은 5개의 좌석에 4명의 학생이 앉는 경우의 수는 ${}_5P_4$
따라서 구하는 확률은 $\frac{5\times2\times{}_5P_4}{{}_7P_6}=\frac{5}{21}$

**15** 5가지의 놀이기구 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_5\Pi_3=125$
5가지의 놀이기구 중에서 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_5P_3=60$
따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{125}=\frac{12}{25}$

**16** $X$에서 $Y$로의 함수의 개수는 ${}_4\Pi_4=256$
$X$에서 $Y$로의 일대일대응의 개수는 ${}_4P_4=24$
따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{256}=\frac{3}{32}$

**17** 맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는
$3\times{}_4\Pi_3=192$
2000보다 큰 짝수는 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 2 또는 3, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0 또는 2이고, 2000은 제외해야 하므로 그 개수는
$2\times{}_4\Pi_2\times2-1=64-1=63$
따라서 구하는 확률은 $\frac{63}{192}=\frac{21}{64}$

**18** 세 사람이 가위바위보를 한 번 할 때, 나오는 모든 경우의 수는 ${}_3\Pi_3=27$
이기는 한 명을 정하는 경우의 수는 3이고, 그 각각에 대하여 이기는 경우는 (가위, 보, 보), (바위, 가위, 가위), (보, 바위, 바위)의 3가지이므로 이긴 사람이 한 명인 경우의 수는 $3\times3=9$
따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$

**19** 검은 공 3개, 파란 공 3개, 노란 공 2개를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\frac{8!}{3!\times3!\times2!}=560$
양 끝에 노란 공을 고정시키고 그 사이에 검은 공 3개, 파란 공 3개를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{3!\times3!}=20$
따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{560}=\frac{1}{28}$

**20** 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6\times6$
6 이하의 세 자연수 중 곱하여 4가 되는 경우는
$(1,\ 1,\ 4)$ 또는 $(1,\ 2,\ 2)$
1, 1, 4와 1, 2, 2를 각각 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=3+3=6$
따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{6\times6\times6}=\frac{1}{36}$

**21** h, a, p, p, i, n, e, s, s를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\frac{9!}{2!\times2!}=\frac{9!}{4}$
모음을 알파벳 순서대로 배열하려면 a, i, e를 모두 X로 바꾸어 생각하여 h, X, p, p, X, n, X, s, s를 일렬로 배열한 후 3개의 X를 앞에서부터 순서대로 a, e, i로 바꾸면 되므로 그 경우의 수는
$\frac{9!}{3!\times2!\times2!}=\frac{9!}{24}$
따라서 구하는 확률은 $\frac{\frac{9!}{24}}{\frac{9!}{4}}=\frac{1}{6}$

**22** A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\frac{10!}{6!\times4!}=210$
A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!\times3!}\times\frac{5!}{4!\times1!}=50$
따라서 구하는 확률은 $\frac{50}{210}=\frac{5}{21}$

**23** 6장의 사진 중에서 2장을 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$
B는 반드시 택하고 D는 택하지 않으려면 B를 먼저 택하고, B와 D를 제외한 나머지 4장 중에서 1장을 택하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_4C_1=4$
따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{15}$

**24** 10개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{10}C_3=120$

모두 다른 색의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_5C_1=30$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{30}{120}=\dfrac{1}{4}$

**25** 10장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$

세 수의 곱이 홀수이려면 세 수가 모두 홀수이어야 하므로 1, 3, 5, 7, 9가 적힌 카드 5장에서 3장을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{10}{120}=\dfrac{1}{12}$

**26** 집합 $S$의 부분집합 중 원소의 개수가 3인 집합의 개수는

${}_7C_3=35$

가장 큰 원소가 5이려면 5를 원소로 택하고 1, 2, 3, 4 중에서 나머지 2개의 원소를 택하면 되므로 그 경우의 수는

${}_4C_2=6$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{6}{35}$

**27** 남학생의 수를 $n$이라 하면

$\dfrac{{}_nC_1\times{}_{9-n}C_1}{{}_9C_2}=\dfrac{5}{9}$, $\dfrac{n(9-n)}{36}=\dfrac{5}{9}$

$n^2-9n+20=0$, $(n-4)(n-5)=0$

$\therefore n=4$ 또는 $n=5$

따라서 남학생 4명, 여학생 5명 또는 남학생 5명, 여학생 4명이므로 남학생과 여학생 수의 차는 1이다.

**28** 주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던져서 나오는 모든 경우의 수는 $(6\times6)\times(2\times2\times2\times2)=6^2\times2^4$

(i) 주사위의 눈의 수의 곱이 1인 경우

두 주사위에서 나오는 눈의 수의 곱이 1인 경우는 (1, 1)의 1가지

앞면이 나오는 동전 1개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

따라서 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 1로 같은 경우의 수는 $1\times4=4$

(ii) 주사위의 눈의 수의 곱이 2인 경우

두 주사위에서 나오는 눈의 수의 곱이 2인 경우는 (1, 2), (2, 1)의 2가지

앞면이 나오는 동전 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

따라서 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 2로 같은 경우의 수는 $2\times6=12$

(iii) 주사위의 눈의 수의 곱이 3인 경우

두 주사위에서 나오는 눈의 수의 곱이 3인 경우는 (1, 3), (3, 1)의 2가지

앞면이 나오는 동전 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 3으로 같은 경우의 수는 $2\times4=8$

(iv) 주사위의 눈의 수의 곱이 4인 경우

두 주사위에서 나오는 눈의 수의 곱이 4인 경우는 (1, 4), (2, 2), (4, 1)의 3가지

앞면이 나오는 동전 4개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_4=1$

따라서 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 4로 같은 경우의 수는 $3\times1=3$

(v) 주사위의 눈의 수의 곱이 5 이상인 경우

앞면이 나오는 동전이 5개 이상일 수 없다.

(i)~(v)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$4+12+8+3=27$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{27}{6^2\times2^4}=\dfrac{3}{64}$

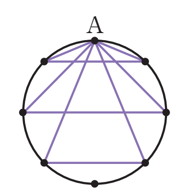
유형편

**29** 8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_3=56$

이때 오른쪽 그림과 같이 원 위의 한 점 A에 대하여 $\angle A$를 꼭지각으로 하는 이등변삼각형은 3개이고, 점은 모두 8개이므로 이등변삼각형의 개수는

$3\times8=24$




따라서 구하는 확률은 $\dfrac{24}{56}=\dfrac{3}{7}$

**30** 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

$a\ge b\ge c$에서 $a$, $b$, $c$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_6H_3={}_8C_3=56$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{56}{216}=\dfrac{7}{27}$

**31** 방정식 $x+y+z=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수는

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

한편 $x$, $y$, $z$가 모두 자연수일 때,

$x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$라 하면

$x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$

이를 방정식 $x+y+z=7$에 대입하면

$(a+1)+(b+1)+(c+1)=7$

$\therefore a+b+c=4$ (단, $a$, $b$, $c$는 음이 아닌 정수)

이를 만족시키는 순서쌍의 개수는

${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

따라서 구하는 확률은

$\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

**32** $X$에서 $X$로의 함수의 개수는 ${}_5\Pi_5=5^5$

(가), (나)에서 $f(3)\le f(5)$이고 $f(3)+f(5)=9$이므로

$f(3)=4$, $f(5)=5$

즉, (가)에서 $f(1)\le f(2)\le 4\le f(4)\le 5$

$f(1)\le f(2)\le 4$를 만족시키는 함수의 개수는

${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 4, 5의 2가지

주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수는 $10\times 2=20$

따라서 구하는 확률은

$\frac{20}{5^5}=\frac{4}{625}$

**33** 전체 100일 중에서 B가 가장 먼저 온 날은 12일이므로 구하는 확률은

$\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$

**34** 세 선수가 각각 자유투를 한 번씩 던질 때, 성공할 확률은 각각 다음과 같다.

A: $\frac{65}{120}=\frac{13}{24}$, B: $\frac{104}{200}=\frac{13}{25}$, C: $\frac{84}{150}=\frac{14}{25}$

$\frac{13}{25}<\frac{13}{24}<\frac{14}{25}$이므로 자유투에 성공할 확률이 가장 큰 선수는 C이다.

**35** 파란 구슬의 개수를 $n$이라 하면

$\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{15}$, $\frac{n(n-1)}{90}=\frac{2}{15}$

$n(n-1)=12=4\times 3$ $\quad\therefore n=4$ ($\because$ $n$은 자연수)

따라서 파란 구슬은 4개가 들어 있다고 볼 수 있으므로 노란 구슬은 6개가 들어 있다고 볼 수 있다.

**36** 반지름의 길이가 1, 2, 3, 4인 네 원의 넓이는 각각

$\pi$, $4\pi$, $9\pi$, $16\pi$

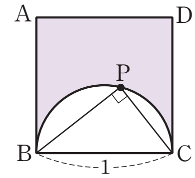
이때 색칠한 부분의 넓이는

$(16\pi-9\pi)+(4\pi-\pi)=10\pi$

따라서 구하는 확률은

$\frac{10\pi}{16\pi}=\frac{5}{8}$

**37** 점 P가 변 BC를 지름으로 하는 반원 위에 있을 때 삼각형 PBC는 직각삼각형, 반원의 내부에 있으면 둔각삼각형이 되므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 점 P를 잡으면 삼각형 PBC는 예각삼각형이 된다.




따라서 구하는 확률은

$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\text{ABCD의 넓이})}=\frac{1-\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1}=1-\frac{\pi}{8}$

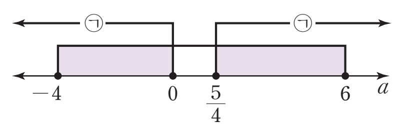
**38** 이차방정식 $x^2+4ax+5a=0$이 실근을 가지려면 판별식을 $D$라 할 때, $D\ge 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(2a)^2-5a\ge 0$

$4a^2-5a\ge 0$, $a(4a-5)\ge 0$

$\therefore a\le 0$ 또는 $a\ge\frac{5}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $-4\le a\le 6$과 ㉠을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.




$\therefore -4\le a\le 0$ 또는 $\frac{5}{4}\le a\le 6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

따라서 구하는 확률은

$\frac{(\text{㉡의 구간의 길이})}{(\text{전체 구간의 길이})}=\frac{\{0-(-4)\}+\left(6-\frac{5}{4}\right)}{6-(-4)}=\frac{7}{8}$

**39** 표본공간을 $S$라 하면 $S=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이므로

$A=\{2\}$, $B=\varnothing$, $C=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $D=\varnothing$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(B)=0$, $\mathrm{P}(C)=1$, $\mathrm{P}(D)=0$

따라서 보기에서 확률이 0인 사건은 ㄴ, ㄹ이다.

**40** ㄱ. $\mathrm{P}(\varnothing)=0$, $\mathrm{P}(S)=1$이므로

$\mathrm{P}(\varnothing)+\mathrm{P}(S)=1$

ㄴ. $0\le\mathrm{P}(A)\le 1$, $0\le\mathrm{P}(B)\le 1$이므로

$0\le\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\le 2$

ㄷ. [반례] $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$이면

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$이고 $\mathrm{P}(S)=1$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)<\mathrm{P}(S)$

ㄹ. $0\le\mathrm{P}(A)\le 1$, $0\le\mathrm{P}(B)\le 1$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=2$이면 $\mathrm{P}(A)=1$, $\mathrm{P}(B)=1$

$\therefore A=B=S$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

**41** $\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로 $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\frac{5}{6}$에서

$\mathrm{P}((A\cap B)^C)=\frac{5}{6}$, $1-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

**42** 두 사건 $A$, $B^C$이 서로 배반사건이므로

$A\cap B^C=\varnothing$ $\quad\therefore A\subset B$

즉, $A\cap B=A$이므로

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{7}{10}$에서

$\frac{1}{5}+\mathrm{P}(B)=\frac{7}{10}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$

**43** $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{12}-\mathrm{P}(A\cap B)$

즉, $\mathrm{P}(A\cap B)$가 최소일 때 $\mathrm{P}(A\cup B)$는 최대이고

$\mathrm{P}(A\cap B)$가 최대일 때 $\mathrm{P}(A\cup B)$는 최소이다.

$\mathrm{P}(A\cap B)\le\mathrm{P}(A)$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)\le\frac{1}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{P}(A\cap B)\le\mathrm{P}(B)$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)\le\frac{1}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\mathrm{P}(A\cap B)\le\frac{1}{4}$

이때 $0\le\mathrm{P}(A\cap B)\le 1$이므로

$0\le\mathrm{P}(A\cap B)\le\frac{1}{4}$

$\frac{1}{3}\le\frac{7}{12}-\mathrm{P}(A\cap B)\le\frac{7}{12}$

$\therefore \frac{1}{3}\le\mathrm{P}(A\cup B)\le\frac{7}{12}$

따라서 $M=\frac{7}{12}$, $m=\frac{1}{3}$이므로 $M+m=\frac{11}{12}$

**44** 게임을 좋아하는 학생인 사건을 $A$, 웹툰을 좋아하는 학생인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.6$, $\mathrm{P}(B)=0.5$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.3$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=0.6+0.5-0.3=0.8$

**45** A가 뽑히는 사건을 $A$, B가 뽑히는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_9\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_9\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{2}{15}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{2}{15}=\frac{2}{3}$

**46** $f(1)=2$인 사건을 $A$, $f(3)=1$인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\Pi_2}{{}_4\Pi_3}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\Pi_2}{{}_4\Pi_3}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{{}_4\Pi_3}=\frac{1}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$

**47** 5의 배수인 사건을 $A$, 3500 이상인 사건을 $B$라 하자.

5의 배수는 □□□5 꼴이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{P}_3}{{}_5\mathrm{P}_4}=\frac{1}{5}$

3500 이상인 수는 35□□, 4□□□, 5□□□ 꼴이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{P}_2+{}_4\mathrm{P}_3+{}_4\mathrm{P}_3}{{}_5\mathrm{P}_4}=\frac{6+24+24}{120}=\frac{9}{20}$

5의 배수이고 3500 이상인 수는 4□□5 꼴이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_3\mathrm{P}_2}{{}_5\mathrm{P}_4}=\frac{1}{20}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{5}+\frac{9}{20}-\frac{1}{20}=\frac{3}{5}$

**48** 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

두 눈의 수의 합이 3인 사건을 $A$, 차가 3인 사건을 $B$라 하면

$A=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$

$B=\{(1,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 1),\ (5,\ 2),\ (6,\ 3)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{2}{36}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{6}{36}$

$A$, $B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{2}{36}+\frac{6}{36}=\frac{2}{9}$

**49** 검정 테이프는 2개 들어 있으므로 3개 모두 검정 테이프를 꺼낼 수는 없다.

따라서 3개 모두 빨강 테이프를 꺼내는 사건을 $A$, 3개 모두 파랑 테이프를 꺼내는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{1}{21}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{1}{84}$

두 사건 $A$, $B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{21}+\frac{1}{84}=\frac{5}{84}$

**50** h, o, r, r, o, r를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times 3!}=60$

h가 맨 앞에 오는 사건을 $A$, h가 맨 뒤에 오는 사건을 $B$라 하자.

h를 맨 앞에 고정시키고 나머지 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!\times 3!}=10$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$

h를 맨 뒤에 고정시키고 나머지 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!\times 3!}=10$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$

두 사건 $A$, $B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

**51** 남학생이 여학생보다 많이 뽑히려면 뽑은 6명 중에서 남학생이 4명 또는 5명이어야 한다.

남학생 4명과 여학생 2명을 뽑는 사건을 $A$, 남학생 5명과 여학생 1명을 뽑는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_4\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_6}=\frac{15}{28}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_5\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_6}=\frac{3}{28}$

두 사건 $A$, $B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{15}{28}+\frac{3}{28}=\frac{9}{14}$

**52** 8개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{8!}{2!}=4\times 7!$

같은 문자가 서로 이웃하지 않게 배열하는 사건을 $A$라 하면 $A^C$은 같은 문자가 서로 이웃하게 배열하는 사건이다.

같은 문자인 o, o를 서로 이웃하게 배열할 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{7!}{4\times 7!}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

다른 풀이

8개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4\times 7!$

같은 문자인 o, o를 제외한 s, l, u, t, i, n을 일렬로 배열하고 그 사이사이와 양 끝의 7개의 자리 중에서 2개의 자리에 o, o를 배열하는 경우의 수는

$6!\times{}_7\mathrm{C}_2=21\times 6!$

따라서 구하는 확률은

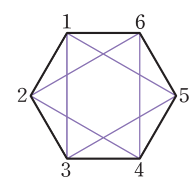
$\frac{21\times 6!}{4\times 7!}=\frac{3}{4}$

**53** 세 수를 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는

${}_6\mathrm{C}_3=20$

정삼각형이 아닌 사건을 $A$라 하면 $A^C$은 정삼각형인 사건이다.

정삼각형이 되는 경우는 (1, 3, 5) 또는 (2, 4, 6)을 붙인 꼭짓점을 연결하는 경우의 2가지이므로




$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

**54** 카드에 적힌 수가 2의 배수인 사건을 $A$, 5의 배수인 사건을 $B$라 하면 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 사건은 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이다.

카드에 적힌 수가 2의 배수일 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{25}{50}$

카드에 적힌 수가 5의 배수일 확률은

$\mathrm{P}(B)=\frac{10}{50}$

카드에 적힌 수가 10의 배수일 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{50}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{25}{50}+\frac{10}{50}-\frac{5}{50}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

**55** 같은 숫자가 적힌 카드는 3이 적힌 카드와 4가 적힌 카드이므로 3이 적힌 카드가 서로 이웃하는 사건을 $A$, 4가 적힌 카드가 서로 이웃하는 사건을 $B$라 하면 같은 숫자가 적힌 카드가 서로 이웃하지 않는 사건은 $A^C\cap B^C$이다.

8장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는 8!

3이 적힌 카드가 서로 이웃할 확률은

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{7!\times2!}{8!}=\dfrac{1}{4}$

4가 적힌 카드가 서로 이웃할 확률은

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{7!\times2!}{8!}=\dfrac{1}{4}$

3이 적힌 카드가 서로 이웃하고, 4가 적힌 카드도 서로 이웃할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{6!\times2!\times2!}{8!}=\dfrac{1}{14}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{14}=\dfrac{3}{7}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\dfrac{3}{7}=\dfrac{4}{7}$

**56** 적어도 하나가 홀수인 사건을 $A$라 하면 $A^C$은 모두 짝수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_3\Pi_4}{{}_6\Pi_4}=\dfrac{1}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{16}=\dfrac{15}{16}$

**57** 적어도 한 개가 흰색 마스크인 사건을 $A$라 하면 $A^C$은 3개 모두 검은색 마스크인 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_9C_3}{{}_{14}C_3}=\dfrac{3}{13}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{3}{13}=\dfrac{10}{13}$

**58** 적어도 한쪽 끝에 남학생이 서는 사건을 $A$라 하면 $A^C$은 양 끝에 모두 여학생이 서는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_3P_2\times4!}{6!}=\dfrac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$

**59** 적어도 2명이 같은 요일을 택하는 사건을 $A$라 하면 $A^C$은 모두 다른 요일을 택하는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_7P_4}{{}_7\Pi_4}=\dfrac{120}{343}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{120}{343}=\dfrac{223}{343}$

**60** 두 눈의 수의 합이 10 이하인 사건을 $A$라 하면 $A^C$은 두 눈의 수의 합이 11 이상인 사건이다.

$A^C=\{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{3}{6\times6}=\dfrac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{12}=\dfrac{11}{12}$

**61** 흰색 손수건이 2장 이상인 사건을 $A$라 하면 $A^C$은 흰색 손수건이 1장 이하인 사건이다.

(i) 흰색 손수건 0장, 검은색 손수건 4장을 꺼낼 확률은

$\dfrac{{}_5C_4}{{}_9C_4}=\dfrac{5}{126}$

(ii) 흰색 손수건 1장, 검은색 손수건 3장을 꺼낼 확률은

$\dfrac{{}_4C_1\times{}_5C_3}{{}_9C_4}=\dfrac{20}{63}$

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{5}{126}+\dfrac{20}{63}=\dfrac{5}{14}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{5}{14}=\dfrac{9}{14}$

**62** 꺼낸 동전의 금액의 합이 250원 미만인 사건을 $A$라 하면 $A^C$은 250원 이상인 사건이다.

(i) 50원짜리 동전 1개, 100원짜리 동전 2개를 꺼낼 확률은

$\dfrac{{}_3C_1\times{}_3C_2}{{}_9C_3}=\dfrac{9}{84}$

(ii) 100원짜리 동전 3개를 꺼낼 확률은

$\dfrac{{}_3C_3}{{}_9C_3}=\dfrac{1}{84}$

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{9}{84}+\dfrac{1}{84}=\dfrac{5}{42}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{5}{42}=\dfrac{37}{42}$

**63** m과 n 사이에 2개 이상의 문자가 오는 사건을 $A$라 하면 $A^C$은 m과 n 사이에 1개 이하의 문자가 오는 사건이다.

(i) m과 n이 서로 이웃할 확률은

$\dfrac{6!\times2!}{7!}=\dfrac{2}{7}$

(ii) m과 n 사이에 1개의 문자가 올 확률은

$\dfrac{{}_5P_1\times5!\times2!}{7!}=\dfrac{5}{21}$

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{2}{7}+\dfrac{5}{21}=\dfrac{11}{21}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{11}{21}=\dfrac{10}{21}$

유형편

# Ⅱ-2. 조건부확률

## 01 조건부확률 26~32쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ② | **2** ④ | **3** $\frac{5}{12}$ | **4** $\frac{3}{5}$ | **5** ① |
| **6** $\frac{2}{5}$ | **7** 10 | **8** ② | **9** $\frac{4}{11}$ | **10** $\frac{1}{3}$ |
| **11** $\frac{1}{3}$ | **12** ① | **13** 11 | **14** $\frac{14}{25}$ | **15** 4 |
| **16** ① | **17** $\frac{3}{7}$ | **18** $\frac{1}{5}$ | **19** $\frac{1}{34}$ | **20** 5 |
| **21** $\frac{8}{11}$ | **22** ① | **23** ⑤ | **24** ㄱ, ㄴ, ㄷ | |
| **25** 12 | **26** ② | **27** $\frac{1}{6}$ | **28** ③ | **29** ④ |
| **30** ⑤ | **31** $\frac{4}{15}$ | **32** $\frac{8}{15}$ | **33** ③ | **34** 25 |
| **35** $\frac{63}{64}$ | **36** 43 | **37** $\frac{11}{27}$ | **38** ① | **39** ④ |
| **40** $\frac{11}{72}$ | **41** ① | **42** $\frac{1}{32}$ | **43** $\frac{8}{81}$ | **44** $\frac{1}{2}$ |

**1** $\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(A^C)}=\dfrac{\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A)}{1-\mathrm{P}(A)}$

$=\dfrac{0.7-0.5}{1-0.5}=0.4$

**2** $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$에서

$\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=4\mathrm{P}(A\cap B)$

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$에서

$\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=3\mathrm{P}(A\cap B)$

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{7}{10}$에서

$4\mathrm{P}(A\cap B)+3\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{7}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{10}$

**3** 두 사건 $A$, $B$가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$A\subset B^C$ $\quad\therefore A\cap B^C=A$

$\therefore \mathrm{P}(A|B^C)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\dfrac{\mathrm{P}(A)}{1-\mathrm{P}(B)}$

$=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{12}$

**4** 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수인 사건을 $A$, 소수인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{10}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{10}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{5}{10}}=\dfrac{3}{5}$

**5** 생태연구를 선택한 학생인 사건을 $A$, 여학생인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{110}{200}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{50}{200}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{50}{200}}{\frac{110}{200}}=\dfrac{5}{11}$

**6** 여학생인 사건을 $A$, T 영화를 관람한 학생인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{3+5}=\dfrac{5}{8}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{25}{100}=\dfrac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}}=\dfrac{2}{5}$

**7** 여자 회원인 사건을 $A$, 프라하를 선호하는 회원인 사건을 $B$라 하면 전체 동호회 회원 수는 $x+20$이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{x+8}{x+20}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{x}{x+20}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{x}{x+20}}{\frac{x+8}{x+20}}=\dfrac{x}{x+8}$

즉, $\dfrac{x}{x+8}=\dfrac{5}{9}$이므로

$9x=5x+40$

$\therefore x=10$

**8** $a\times b$가 4의 배수인 사건을 $A$, $a+b\le 7$인 사건을 $B$라 하자.

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\times 6=36$

$a\times b$가 4의 배수인 경우는

(i) $ab=4$일 때, $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$의 3가지

(ii) $ab=8$일 때, $(2, 4)$, $(4, 2)$의 2가지

(iii) $ab=12$일 때, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$의 4가지

(iv) $ab=16$일 때, $(4, 4)$의 1가지

(v) $ab=20$일 때, $(4, 5)$, $(5, 4)$의 2가지

(vi) $ab=24$일 때, $(4, 6)$, $(6, 4)$의 2가지

(vii) $ab=36$일 때, $(6, 6)$의 1가지

(i)~(vii)에서 그 경우의 수는

$3+2+4+1+2+2+1=15$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{15}{36}$

$a\times b$가 4의 배수이고 $a+b\le 7$인 경우는

$(1, 4)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$

의 7가지이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{36}$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{7}{36}}{\frac{15}{36}}=\frac{7}{15}$$

**9** 영화를 본 학생인 사건을 $A$, 전시를 본 학생인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{22}{35}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{15}{35}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{6}{35}$

이때 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$에서

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$이므로

$\frac{6}{35}=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{29}{35}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{29}{35}=\frac{22}{35}+\frac{15}{35}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{8}{35}$

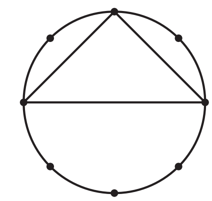
따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{8}{35}}{\frac{22}{35}}=\frac{4}{11}$$

**10** 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 직각삼각형이 되는 사건을 $A$, 삼각형의 넓이가 1이 되는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{4\times 6}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{3}{7}$

직각삼각형의 넓이가 1이 되려면 오른쪽 그림과 같이 직각이등변 삼각형이 되어야 하므로



$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4\times 2}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{1}{7}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{1}{3}$$

**11** B 상자를 택하는 사건을 $A$, 흰 공을 꺼내는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

**12** A가 당첨권을 뽑는 사건을 $A$, B가 당첨권을 뽑는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{25}$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{4}{25}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{50}\end{aligned}$$

**13** 첫 번째에 흰 바둑돌을 꺼내는 사건을 $A$, 두 번째에 검은 바둑돌을 꺼내는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{n}{n+6}$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{6}{n+5}$

첫 번째는 흰 바둑돌, 두 번째는 검은 바둑돌을 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{n}{n+6}\times\frac{6}{n+5}\\&=\frac{6n}{(n+6)(n+5)}\end{aligned}$$

즉, $\frac{6n}{(n+6)(n+5)}=\frac{3}{11}$이므로

$n^2-11n+30=0$, $(n-5)(n-6)=0$

$\therefore n=5$ 또는 $n=6$

따라서 모든 $n$의 값의 합은 $5+6=11$

유형편

**14** 첫 번째 자유투를 성공하였을 때, 두 번째 시도에서 자유투가 성공하는 사건을 $A$, 세 번째 시도에서 자유투가 성공하는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$

$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)=\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)$

$=\frac{9}{25}+\frac{1}{5}=\frac{14}{25}$

**15** 첫 번째에 정상 제품을 꺼내는 사건을 $A$, 두 번째에 정상 제품을 꺼내는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{15-n}{15}\times\frac{14-n}{14}$

$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)=\frac{n}{15}\times\frac{15-n}{14}$

즉, 두 번째에 꺼낸 제품이 정상 제품일 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)$

$=\frac{(15-n)(14-n)}{15\times14}+\frac{n(15-n)}{15\times14}$

$=\frac{(15-n)(14-n+n)}{15\times14}=\frac{15-n}{15}$

따라서 $\frac{15-n}{15}=\frac{11}{15}$이므로 $n=4$

**16** 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나오는 사건을 $A$, 주사위를 던져서 나오는 눈의 수의 합이 4인 사건을 $B$라 하자.

(i) 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수의 합이 4인 경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{6\times6}=\frac{1}{12}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{24}$

(ii) 동전을 던져서 뒷면이 나올 확률은 $\mathrm{P}(A^c)=\frac{1}{2}$

서로 다른 세 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수의 합이 4인 경우는 (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)의 3가지이므로

$\mathrm{P}(B|A^c)=\frac{3}{6\times6\times6}=\frac{1}{72}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{72}=\frac{1}{144}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)$

$=\frac{1}{24}+\frac{1}{144}=\frac{7}{144}$

**17** 물품이 항공편으로 배송되는 사건을 $A$, 일주일 이내에 배송되는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.3\times0.7=0.21$

$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)=(1-0.3)\times0.4=0.28$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)$

$=0.21+0.28=0.49$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.21}{0.49}=\frac{3}{7}$

**18** 버스로 등교한 학생인 사건을 $A$, 지각한 학생인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{30}$

$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)$

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)$

$=\frac{1}{30}+\frac{2}{15}=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{5}$

**19** 보석이 진품인 사건을 $A$, 감별사가 위조품으로 감별하는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=0.6\times0.02=0.012$

$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)$

$=0.4\times(1-0.01)=0.396$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)$

$=0.012+0.396=0.408$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.012}{0.408}=\frac{1}{34}$

**20** 독감에 걸린 사람인 사건을 $A$, 독감이라 진단받은 사람인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{1}{10}\times\frac{96}{100}=\frac{96}{1000}$

$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)$

$=\left(1-\frac{1}{10}\right)\times\frac{x}{100}=\frac{9x}{1000}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)$

$=\frac{96}{1000}+\frac{9x}{1000}=\frac{9x+96}{1000}$

따라서 독감이라 진단받은 사람이 실제로 독감에 걸린 사람일 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{96}{1000}}{\frac{9x+96}{1000}}=\frac{96}{9x+96}$$

즉, $\frac{96}{9x+96}=\frac{32}{47}$이므로

$9x+96=141 \qquad \therefore x=5$

**21** 동전을 던져서 앞면이 나오는 사건을 $A$, 꺼낸 공에 적힌 모든 수의 합이 4인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$ ◀ 숫자 1, 3이 적힌 공

$=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)$ ◀ 숫자 1, 1, 2가 적힌 공

$=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{20}=\frac{3}{40}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)=\frac{1}{5}+\frac{3}{40}=\frac{11}{40}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{11}{40}}=\frac{8}{11}$$

**22** 주사위의 눈의 수가 5 이상인 사건을 $A$, 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰색인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$ ◀ 주머니 A

$=\frac{2}{6}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{6}\times\frac{1}{15}=\frac{1}{45}$

$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)$ ◀ 주머니 B

$=\frac{4}{6}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{6}\times\frac{3}{15}=\frac{2}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)=\frac{1}{45}+\frac{2}{15}=\frac{7}{45}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{45}}{\frac{7}{45}}=\frac{1}{7}$$

**23** 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T, 표본공간을 $S$라 하면

$S=\{\mathrm{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}\}$

$A=\{\mathrm{HHH, HHT, HTH, HTT}\}$

$B=\{\mathrm{HHH, HHT, HTH, THH}\}$

$C=\{\mathrm{HHH, TTT}\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(C)=\frac{1}{4}$

ㄱ. $A\cap B=\{\mathrm{HHH, HHT, HTH}\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 $A$와 $B$는 서로 종속이다.

ㄴ. $A\cap C=\{\mathrm{HHH}\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 $A$와 $C$는 서로 독립이다.

ㄷ. $B\cap C=\{\mathrm{HHH}\}$이므로 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

따라서 $B$와 $C$는 서로 독립이다.

따라서 보기에서 서로 독립인 사건은 ㄴ, ㄷ이다.

**24** 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

ㄱ. $\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)$

$=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 $A^c$, $B$는 서로 독립이다.

ㄴ. $A$, $B$가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$

ㄱ에서 $A^c$, $B$도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^c|B)=\mathrm{P}(A^c)$

$\therefore 1-\mathrm{P}(A^c|B)=1-\mathrm{P}(A^c)=\mathrm{P}(A)$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=1-\mathrm{P}(A^c|B)$

ㄷ. $1-\mathrm{P}(A\cup B)=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$

$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$

$=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

**25** $A=\{1, 2, 4\}$, $B_n=\{n-1, n\}$ ($n$은 $2\le n\le 6$인 자연수)이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B_n)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

두 사건 $A$, $B_n$이 서로 독립이려면

$\mathrm{P}(A\cap B_n)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B_n)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\therefore n(A\cap B_n)=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $B_2=\{1, 2\}$, $B_3=\{2, 3\}$, $B_4=\{3, 4\}$, $B_5=\{4, 5\}$, $B_6=\{5, 6\}$이므로

$A\cap B_2=\{1, 2\}$, $A\cap B_3=\{2\}$, $A\cap B_4=\{4\}$, $A\cap B_5=\{4\}$, $A\cap B_6=\varnothing$

따라서 ㉠을 만족시키는 $n$의 값은 3, 4, 5이므로 그 합은

$3+4+5=12$

**26** 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$
즉, $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B)$에서
$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{9}$에서
$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{9}$
$\{\mathrm{P}(A)\}^2=\frac{1}{9}$
$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$ $(\because \mathrm{P}(A)>0)$

**27** 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$
$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$
두 사건 $B$, $C$가 서로 배반사건이므로
$\mathrm{P}(B\cup C)=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$
$\frac{11}{12}=\frac{3}{4}+\mathrm{P}(C)$
$\therefore \mathrm{P}(C)=\frac{1}{6}$

**28** 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이면 두 사건 $A^C$, $B$도 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$
$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)$
$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\times\frac{1}{4}\mathrm{P}(A)$
$\{1-\mathrm{P}(A)\}\times\frac{1}{4}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{16}$이므로 $\mathrm{P}(A)=x$라 하면
$(1-x)\times\frac{1}{4}x=\frac{1}{16}$
$4x^2-4x+1=0$
$(2x-1)^2=0 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}$
$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

**29** 두 식물 A, B가 1년 동안 죽지 않는 사건을 각각 $A$, $B$라 하면 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.8\times0.6=0.48$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=0.8+0.6-0.48=0.92$

다른 풀이
적어도 한 식물이 죽지 않을 확률은
$1-$(두 식물 모두 죽을 확률)
식물 A가 죽을 확률은 $1-0.8=0.2$
식물 B가 죽을 확률은 $1-0.6=0.4$
따라서 구하는 확률은
$1-0.2\times0.4=0.92$

**30** 지율이와 재호가 이번 달에 독서록을 제출하는 사건을 각각 $A$, $B$라 하면 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이다.
(i) 지율이만 독서록을 제출할 확률은
$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$
$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{8}$
(ii) 재호만 독서록을 제출할 확률은
$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$
$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$
(i), (ii)에서 구하는 확률은
$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$

**31** 민아와 현서가 영어 단어 시험에 통과하는 사건을 각각 $A$, $B$라 하면 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이다.
이때 두 사람 모두 시험에 통과하지 못할 확률은
$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$
$=\left(1-\frac{3}{5}\right)(1-p)=\frac{2}{5}(1-p)$
즉, $\frac{2}{5}(1-p)=\frac{2}{15}$이므로
$1-p=\frac{1}{3} \qquad \therefore p=\frac{2}{3}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$
$=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$

**32** 두 수의 합이 짝수이려면 두 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.
두 주머니 A, B에서 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수인 사건을 각각 $A$, $B$라 하면 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이다.
(i) A, B에서 모두 짝수가 적힌 공을 꺼낼 확률은
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$
(ii) A, B에서 모두 홀수가 적힌 공을 꺼낼 확률은
$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{2}{15}+\frac{2}{5}=\frac{8}{15}$

**33** 세 스위치 A, B, C가 닫히는 사건을 각각 $A$, $B$, $C$라 하면 전구에 불이 켜지는 사건은 $A\cap(B\cup C)$이다.

두 사건 $B$, $C$는 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B\cup C)&=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B\cap C)\\&=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

또 두 사건 $A$, $B\cup C$는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap(B\cup C))&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\cup C)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

**34** 두 동아리 A, B에서 택한 학생이 보육원에서 봉사활동을 한 사건을 각각 $A$, $B$라 하면 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이다.

(ⅰ) 두 학생이 보육원에서 봉사활동을 하였을 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{a}{100}\times\frac{100-2a}{100}\end{aligned}$$

(ⅱ) 두 학생이 요양원에서 봉사활동을 하였을 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\\&=\frac{100-a}{100}\times\frac{2a}{100}\end{aligned}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 학생이 같은 장소에서 봉사활동을 하였을 확률은

$\frac{a}{100}\times\frac{100-2a}{100}+\frac{100-a}{100}\times\frac{2a}{100}$

즉, $\frac{a(100-2a)+2a(100-a)}{10000}=\frac{1}{2}$이므로

$a^2-75a+1250=0$

$(a-25)(a-50)=0$

$\therefore$ $a=25$ 또는 $a=50$

그런데 $a<50$이므로 $a=25$

**35** 서브를 한 번 이상 성공할 확률은

1$-$(모두 성공하지 못할 확률)

따라서 구하는 확률은

$1-{}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^3=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$

**36** 한 개의 동전을 한 번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

(ⅰ) 앞면이 6번, 뒷면이 0번 나올 확률은

${}_6\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{64}$

(ⅱ) 앞면이 5번, 뒷면이 1번 나올 확률은

${}_6\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{32}$

(ⅲ) 앞면이 4번, 뒷면이 2번 나올 확률은

${}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{64}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 앞면이 나오는 횟수가 뒷면이 나오는 횟수보다 클 확률은

$\frac{1}{64}+\frac{3}{32}+\frac{15}{64}=\frac{11}{32}$

따라서 $p=32$, $q=11$이므로

$p+q=43$

**37** 4명의 학생 중에서 적어도 2명의 학생이 A 대학을 택하는 사건을 $A$라 하면 $A^C$은 모두 A 대학을 택하지 않거나 한 명만 A 대학을 택하는 사건이다.

(ⅰ) 모두 A 대학을 택하지 않을 확률은

${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$

(ⅱ) 한 명만 A 대학을 택할 확률은

${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{16}{81}+\frac{32}{81}=\frac{16}{27}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{16}{27}=\frac{11}{27}$

**38** 한 개의 주사위를 네 번 던져서 나오는 네 눈의 수의 곱이 27의 배수인 경우는 3의 배수의 눈이 3번 또는 4번 나오는 경우이다.

한 개의 주사위를 한 번 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(ⅰ) 3의 배수의 눈이 3번 나올 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$

(ⅱ) 3의 배수의 눈이 4번 나올 확률은

${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{81}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{8}{81}+\frac{1}{81}=\frac{1}{9}$

**39** 한 개의 주사위를 던져서 6의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$

(ⅰ) 빨간 구슬이 나오고 주사위를 3번 던져서 6의 눈이 1번 나올 확률은

$\frac{1}{4}\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{288}$

유형편

(ii) 파란 구슬이 나오고 주사위를 2번 던져서 6의 눈이 1번 나올 확률은

$\frac{3}{4}\times{}_2C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{5}{24}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{25}{288}+\frac{5}{24}=\frac{85}{288}$

**40** 1이 적힌 공을 꺼내면 동전을 2번 던지므로 뒷면이 3번 나올 수 없다.

한 개의 동전을 던져서 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

(i) 2가 적힌 공을 꺼내고 동전을 3번 던져서 뒷면이 3번 나올 확률은

$\frac{1}{3}\times{}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{24}$

(ii) 3이 적힌 공을 꺼내고 동전을 4번 던져서 뒷면이 3번 나올 확률은

$\frac{4}{9}\times{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{9}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{24}+\frac{1}{9}=\frac{11}{72}$

**41** 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수가 서로 같을 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

한 개의 동전을 한 번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

(i) 주사위의 두 눈의 수가 서로 같고 동전을 4번 던져서 앞면이 2번, 뒷면이 2번 나올 확률은

$\frac{1}{6}\times{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{16}$

(ii) 주사위의 두 눈의 수가 서로 다르고 동전을 2번 던져서 앞면이 1번, 뒷면이 1번 나올 확률은

$\frac{5}{6}\times{}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$

(i), (ii)에서 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 확률은 $\frac{1}{16}+\frac{5}{12}=\frac{23}{48}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{\frac{1}{16}}{\frac{23}{48}}=\frac{3}{23}$

**42** 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

동전을 8번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 $x$, 뒷면이 나오는 횟수를 $y$라 하면

$x+y=8$ …… ㉠

앞면이 나오면 30점, 뒷면이 나오면 20점을 얻으므로

$30x+20y=170$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=7$

따라서 구하는 확률은

${}_8C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{32}$

**43** 한 개의 주사위를 던져서 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$

주사위를 4번 던져서 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 $x$, 6의 약수가 아닌 눈이 나오는 횟수를 $y$라 하면

$x+y=4$ …… ㉠

시계 반대 방향을 양의 방향으로 생각하면 점 P가 움직이는 거리는 $3x-y$이고 주사위를 4번 던지므로

$-4\le3x-y\le12$

이때 점 P가 꼭짓점 A로 돌아오려면 $3x-y$의 값이 0 또는 5의 배수이어야 하므로

$3x-y=0$ 또는 $3x-y=5$ 또는 $3x-y=10$

이를 각각 ㉠과 연립하여 풀면

$x=1$, $y=3$ 또는 $x=\frac{9}{4}$, $y=\frac{7}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{2}$, $y=\frac{1}{2}$

그런데 $x$, $y$는 4 이하의 음이 아닌 정수이므로

$x=1$, $y=3$

따라서 구하는 확률은

${}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$

**44** 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던져서 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$

서로 다른 두 개의 동전을 4번 던져서 모두 앞면이 나오는 횟수를 $x$, 적어도 하나는 뒷면이 나오는 횟수를 $y$라 하면 점 P의 좌표는 $(x, 2y)$이다.

점 P가 점 $(2, 4)$에 도착하려면

$x=2$, $2y=4$ $\therefore x=2$, $y=2$

즉, 점 P가 점 $(2, 4)$에 도착할 확률은

${}_4C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$

점 P가 점 $(1, 0)$을 지나려면 첫 번째로 동전을 던져서 모두 앞면이 나와야 하고, 점 $(1, 0)$에서 출발하여 점 $(2, 4)$에 도착하려면 $x=1$, $y=2$이어야 하므로 점 P가 점 $(1, 0)$을 지나서 점 $(2, 4)$에 도착할 확률은

$\frac{1}{4}\times{}_3C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{256}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{\frac{27}{256}}{\frac{27}{128}}=\frac{1}{2}$

# Ⅲ-1. 확률분포

## 01 이산확률변수와 이항분포 34~39쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** $\frac{1}{10}$ | **2** ⑤ | **3** ④ | **4** ② | **5** $\frac{11}{5}$ |
| **6** ④ | **7** $\frac{13}{35}$ | **8** $\frac{5}{16}$ | **9** ㄱ | **10** 3 |
| **11** $\frac{7}{24}$ | **12** $\frac{\sqrt{11}}{4}$ | **13** ① | **14** $\frac{4}{3}$ | **15** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| **16** ④ | **17** 3 | **18** 2600원 | | **19** ② |
| **20** 10000원 | | **21** ④ | **22** 3 | **23** 52 |
| **24** ① | **25** ③ | **26** 32 | **27** 121 | **28** 2 |
| **29** $\frac{28}{3}$ | **30** $3\sqrt{3}$ | **31** ② | **32** 224 | **33** ① |
| **34** $\frac{21}{2}$ | **35** ② | **36** 3 | **37** 15 | **38** $\frac{6}{7}$ |
| **39** 40 | **40** $\frac{75}{8}$ | **41** 215 | **42** 10 | |

**1** 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$$

$$\left(k+\frac{2}{12}\right)+\left(k+\frac{1}{12}\right)+k+\left(k+\frac{1}{12}\right)+\left(k+\frac{2}{12}\right)=1$$

$$5k+\frac{1}{2}=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{10}$$

**2** 확률의 총합은 1이므로

$$a+\left(a+\frac{1}{4}\right)+\left(a+\frac{1}{2}\right)=1$$

$$3a+\frac{3}{4}=1$$

$$3a=\frac{1}{4} \qquad \therefore a=\frac{1}{12}$$

$$\therefore P(X\le 2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$$

**3** 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=1$$

$$\frac{k}{30}+\frac{2k}{30}+\frac{3k}{30}+\frac{4k}{30}+\frac{5k}{30}=1$$

$$\frac{15k}{30}=1 \qquad \therefore k=2$$

$X^2-6X+5\ge 0$에서 $(X-1)(X-5)\ge 0$

$\therefore X\le 1$ 또는 $X\ge 5$

$\therefore P(X^2-6X+5\ge 0)=P(X\le 1$ 또는 $X\ge 5)$

$=P(X=1)+P(X=5)$

$=\frac{1}{15}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$

**4** 확률의 총합은 1이므로 $\frac{1}{4}+a+\frac{3}{8}+b=1$

$\therefore a+b=\frac{3}{8}$ …… ㉠

$P(1\le X\le 2)=\frac{5}{8}$에서

$P(X=1)+P(X=2)=\frac{5}{8}$

$a+\frac{3}{8}=\frac{5}{8} \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=\frac{1}{8}$

$\therefore P(X=3)=\frac{1}{8}$

**5** 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=1$$

$$\frac{k}{1\times3}+\frac{k}{3\times5}+\frac{k}{5\times7}+\frac{k}{7\times9}+\frac{k}{9\times11}=1$$

$$\frac{k}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\}=1$$

$$\frac{k}{2}\left(1-\frac{1}{11}\right)=1,\ \frac{5}{11}k=1 \qquad \therefore k=\frac{11}{5}$$

**6** 확률의 총합은 1이므로 $p_1+p_2+p_3=1$ …… ㉠

$\frac{p_1+p_2}{3}=p_3$에서 $p_1+p_2=3p_3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $3p_3+p_3=1 \qquad \therefore p_3=\frac{1}{4}$

$\therefore P(X\le 0)=P(X=-2)+P(X=0)$

$=p_1+p_2=3p_3=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

**7** 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이므로

$P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)$ …… ㉠

7개의 붕어빵 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_7C_3$이고, 슈크림 붕어빵이 $x$개 나오는 경우의 수는 ${}_3C_x\times{}_4C_{3-x}$이므로

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_4C_1}{{}_7C_3}=\frac{12}{35}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_3C_3\times{}_4C_0}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$$

따라서 ㉠에서

$$P(X\ge 2)=\frac{12}{35}+\frac{1}{35}=\frac{13}{35}$$

**8** $X^2-6X+8=0$에서 $(X-2)(X-4)=0$

$\therefore X=2$ 또는 $X=4$

$\therefore P(X^2-6X+8=0)=P(X=2)+P(X=4)$ …… ㉠

유형편

$X=2$인 경우는 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$의 2가지이므로

$P(X=2)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

$X=4$인 경우는 $(1,\ 4)$, $(2,\ 2)$, $(4,\ 1)$의 3가지이므로

$P(X=4)=\frac{3}{16}$

따라서 ㉠에서

$P(X^2-6X+8=0)=\frac{1}{8}+\frac{3}{16}=\frac{5}{16}$

**9** ㄱ. $X$는 0, 1, 2의 값을 가질 수 있으므로 이산확률변수이다.

ㄴ. 8명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_8C_2$이고, 남자가 $x$명 뽑히는 경우의 수는 ${}_5C_x\times{}_3C_{2-x}$이므로 $X$의 확률질량함수는

$P(X=x)=\frac{{}_5C_x\times{}_3C_{2-x}}{{}_8C_2}$ $(x=0,\ 1,\ 2)$

ㄷ. 남자가 적어도 한 명 뽑힐 확률은

$P(X\geq1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)$

$=1-\frac{{}_5C_0\times{}_3C_2}{{}_8C_2}=1-\frac{3}{28}=\frac{25}{28}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

**10** 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고 각각의 확률은

$P(X=1)=\frac{{}_7C_1\times{}_3C_3}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{30}$, $P(X=2)=\frac{{}_7C_2\times{}_3C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{3}{10}$,

$P(X=3)=\frac{{}_7C_3\times{}_3C_1}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{2}$, $P(X=4)=\frac{{}_7C_4\times{}_3C_0}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{6}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

이때 $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{5}{6}$이므로

$P(X\leq3)=\frac{5}{6}$ $\quad\therefore k=3$

**11** 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{12}+\frac{5}{12}+a+\frac{1}{12}=1$ $\quad\therefore a=\frac{5}{12}$

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=-1\times\frac{1}{12}+0\times\frac{5}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

$E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{12}+0^2\times\frac{5}{12}+1^2\times\frac{5}{12}+2^2\times\frac{1}{12}$

$=\frac{5}{6}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{5}{6}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{12}$

$\therefore E(X)V(X)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{12}=\frac{7}{24}$

**12** 확률의 총합은 1이므로

$\frac{a}{8}+\frac{a}{8}+\frac{a+2}{8}=1$

$\frac{3a+2}{8}=1$

$\therefore a=2$

확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |

$E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{9}{4}-\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{11}{16}}=\frac{\sqrt{11}}{4}$

**13** 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+b=1$ $\quad\therefore a+b=\frac{3}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$E(X)=2$에서

$1\times\frac{1}{4}+2a+3b=2$ $\quad\therefore 2a+3b=\frac{7}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$V(X)+\{E(X)\}^2=E(X^2)$

$=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{2}$

**14** 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 각각의 확률은

$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\times{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$

$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{8}{15}$

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_2C_0}{{}_6C_2}=\frac{2}{5}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{2}{5}$ | 1 |

$E(X)=0\times\frac{1}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{3}$

**15** 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0}{2^3}=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{2^3}=\frac{3}{8}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{2^3}=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{2^3}=\frac{1}{8}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 1 |

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}=3$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

**16** 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4이다.

$X=2$인 경우는 2가 적힌 카드는 반드시 뽑고, 1이 적힌 카드를 뽑으면 되므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$

$X=3$인 경우는 3이 적힌 카드는 반드시 뽑고, 1, 2가 적힌 카드 중에서 1장을 뽑으면 되므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$

$X=4$인 경우는 4가 적힌 카드는 반드시 뽑고, 1, 2, 3이 적힌 카드 중에서 1장을 뽑으면 되므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 2 | 3 | 4 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |

$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{2}=\frac{10}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{2}=\frac{35}{3}$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{35}{3}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

**17** 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이고 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{5}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 1 |

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}=3$

**18** 받을 수 있는 상금을 $X$원이라 하고 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 10000 | 50000 | 100000 | 300000 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{9}{10}$ | $\frac{2}{25}$ | $\frac{3}{250}$ | $\frac{3}{500}$ | $\frac{1}{500}$ | 1 |

따라서 구하는 기댓값은

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{9}{10}+10000\times\frac{2}{25}+50000\times\frac{3}{250}+100000\times\frac{3}{500}+300000\times\frac{1}{500}=2600(\text{원})$$

**19** 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 50원짜리 동전 3개를 동시에 던져서 받을 수 있는 상금은

HHH ➡ 150원

HHT, HTH, THH ➡ 100원

HTT, THT, TTH ➡ 50원

TTT ➡ 0원

받을 수 있는 상금을 $X$원이라 하고 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 50 | 100 | 150 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 1 |

따라서 구하는 기댓값은

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+50\times\frac{3}{8}+100\times\frac{3}{8}+150\times\frac{1}{8}=75(\text{원})$

**20** 받을 수 있는 상금은

빨간 공 0개, 노란 공 2개 ➡ 7000원

빨간 공 1개, 노란 공 1개 ➡ 10500원

빨간 공 2개, 노란 공 0개 ➡ 14000원

즉, 받을 수 있는 상금을 $X$원이라 하면

$\mathrm{P}(X=7000)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$

$\mathrm{P}(X=10500)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{4}{7}$

$\mathrm{P}(X=14000)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 7000 | 10500 | 14000 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | 1 |

따라서 구하는 기댓값은

$E(X)=7000\times\frac{2}{7}+10500\times\frac{4}{7}+14000\times\frac{1}{7}$

$=10000$(원)

**21** $E(X)=2$, $E(X^2)=8$에서

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=8-2^2=4$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{4}=2$

$\therefore \sigma(4X-1)=|4|\sigma(X)=4\times2=8$

**22** $E(Y)=2$에서 $E(3X+1)=2$

$3E(X)+1=2 \qquad \therefore E(X)=\frac{1}{3}$

$\sigma(Y)=9$에서 $\sigma(3X+1)=9$

$|3|\sigma(X)=9 \qquad \therefore \sigma(X)=3$

$\therefore V(X)=\{\sigma(X)\}^2=3^2=9$

$\therefore E(X)V(X)=\frac{1}{3}\times9=3$

**23** $E(2X-10)=4$에서

$2E(X)-10=4 \qquad \therefore E(X)=7$

$V(2X)=12$에서

$2^2V(X)=12 \qquad \therefore V(X)=3$

$\therefore E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=3+7^2=52$

**24** $E(Y)=2$에서 $E(aX-2)=2$

$aE(X)-2=2$

이때 $E(X)=-2$이므로

$-2a-2=2 \qquad \therefore a=-2$

$V(Y)=b$에서 $V(-2X-2)=b$

$(-2)^2V(X)=b$

이때 $V(X)=3$이므로 $b=(-2)^2\times3=12$

$\therefore ab=-2\times12=-24$

**25** 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}=\frac{10}{3}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{10}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

따라서 확률변수 $Y=-3X+7$에 대하여

$E(Y)=E(-3X+7)=-3E(X)+7$

$=-3\times\frac{5}{3}+7=2$

$V(Y)=V(-3X+7)=(-3)^2V(X)$

$=9\times\frac{5}{9}=5$

$\therefore E(Y)+V(Y)=2+5=7$

**26** 확률의 총합은 1이므로

$a+2a+a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=-4\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4}=0$

$E(X^2)=(-4)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{4}=8$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=8-0^2=8$

$\therefore V(2X-3)=2^2V(X)=4\times8=32$

**27** $Y=10X+1$이므로

$E(Y)=E(10X+1)=10E(X)+1=10\times2+1=21$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-2^2=1$이므로

$V(Y)=V(10X+1)=10^2V(X)=100\times1=100$

$\therefore E(Y)+V(Y)=21+100=121$

**28** 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 각각의 확률은

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

$E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$

$\therefore V(Y)=V(2X+7)=2^2V(X)$

$=4\times\frac{1}{2}=2$

**29** 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{7}{15}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{7}{15}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | 1 |

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{7}{15}+1^2\times\frac{7}{15}+2^2\times\frac{1}{15}=\frac{11}{15}$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{11}{15}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{28}{75}$

$\therefore\ \mathrm{V}(-5X)=(-5)^2\mathrm{V}(X)=25\times\frac{28}{75}=\frac{28}{3}$

**30** 주사위를 세 번 던져서 받을 수 있는 점수는

(짝, 짝, 짝) ➡ $2\times3=6$(점)

(짝, 짝, 홀), (짝, 홀, 짝), (홀, 짝, 짝)

➡ $3\times1+2\times2=7$(점)

(짝, 홀, 홀), (홀, 짝, 홀), (홀, 홀, 짝)

➡ $3\times2+2\times1=8$(점)

(홀, 홀, 홀) ➡ $3\times3=9$(점)

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 1 |

$\mathrm{E}(X)=6\times\frac{1}{8}+7\times\frac{3}{8}+8\times\frac{3}{8}+9\times\frac{1}{8}=\frac{15}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=6^2\times\frac{1}{8}+7^2\times\frac{3}{8}+8^2\times\frac{3}{8}+9^2\times\frac{1}{8}=57$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=57-\left(\frac{15}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\sigma(6X-3)=|6|\sigma(X)=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

**31** 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

이차방정식 $x^2-2ax+6a-8=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-6a+8=(a-2)(a-4)$

(i) $X=0$인 경우 ◀ 서로 다른 두 허근

$\frac{D}{4}=(a-2)(a-4)<0$이므로

$2<a<4 \qquad \therefore\ a=3$

(ii) $X=1$인 경우 ◀ 중근(실근)

$\frac{D}{4}=(a-2)(a-4)=0$이므로

$a=2$ 또는 $a=4$

(iii) $X=2$인 경우 ◀ 서로 다른 두 실근

$\frac{D}{4}=(a-2)(a-4)>0$이므로

$a<2$ 또는 $a>4$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=5$ 또는 $a=6$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$

$\therefore\ \mathrm{E}(3X-2)=3\mathrm{E}(X)-2=3\times\frac{4}{3}-2=2$

**32** 주사위를 9번 던지므로 9회의 독립시행이다. 또 주사위를 한 번 던져서 5의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(9,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

따라서 $X$의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_9\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{9-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$

즉, $\mathrm{P}(X=6)={}_9\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{224}{3^8}$이므로 $a=224$

**33** 제품 8개를 택하므로 8회의 독립시행이다. 또 한 개의 제품이 하자가 있을 확률은 $\frac{1}{10}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(8,\ \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

따라서 $X$의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_8\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{8-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\le7)=1-\mathrm{P}(X=8)$

$=1-{}_8\mathrm{C}_8\left(\frac{1}{10}\right)^8\left(\frac{9}{10}\right)^0=1-\frac{1}{10^8}$

**34** 흰 공이 1개만 나오려면 주머니 A, B에서 각각 흰 공, 빨간 공을 꺼내거나 주머니 A, B에서 각각 검은 공, 흰 공을 꺼내야 하므로 한 번의 시행에서 흰 공이 1개만 나올 확률은

$\frac{4}{8}\times\frac{2}{6}+\frac{4}{8}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{2}$

따라서 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로 $X$의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{20}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{20-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$

$\therefore \mathrm{P}(X \geq 19)=\mathrm{P}(X=19)+\mathrm{P}(X=20)$

$={}_{20}\mathrm{C}_{19}\left(\frac{1}{2}\right)^{19}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}+{}_{20}\mathrm{C}_{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$

$=({}_{20}\mathrm{C}_{19}+{}_{20}\mathrm{C}_{20})\times\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

$=21\times\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

$\therefore 2^{19}\times \mathrm{P}(X\geq 19)=2^{19}\times 21\times\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

$=\frac{21}{2}$

**35** 확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}(45,\ p)$를 따르고 $\mathrm{E}(X)=15$이므로

$45p=15 \qquad \therefore p=\frac{1}{3}$

**36** 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$\sigma(X)=\sqrt{48\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}}=3$

**37** 확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3n}{16}$

$\mathrm{V}(4X-5)=60$에서

$4^2\mathrm{V}(X)=60$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\frac{15}{4}$

즉, $\frac{3n}{16}=\frac{15}{4}$이므로

$n=20$

따라서 $\mathrm{E}(X)=20\times\frac{1}{4}=5$이므로

$\mathrm{E}(4X-5)=4\mathrm{E}(X)-5$

$=4\times 5-5=15$

**38** $\mathrm{E}(X)=3,\ \mathrm{V}(X)=2$이므로

$\mathrm{E}(X)=np=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3(1-p)=2 \qquad \therefore p=\frac{1}{3}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{3}n=3 \qquad \therefore n=9$

따라서 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(9,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 $X$의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{9}\mathrm{C}_{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{9-x} \quad (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$

$\therefore \frac{\mathrm{P}(X=2)}{\mathrm{P}(X=3)}=\frac{{}_{9}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{7}}{{}_{9}\mathrm{C}_{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{6}}=\frac{{}_{9}\mathrm{C}_{2}\times 2}{{}_{9}\mathrm{C}_{3}}=\frac{6}{7}$

**39** 가위바위보를 한 번 하여 A가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(18,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=18\times\frac{1}{3}=6,\ \mathrm{V}(X)=18\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=4$

$\therefore \mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=4+6^2=40$

**40** 한 개의 구슬을 꺼낼 때 빨간 구슬이 나올 확률은 $\frac{3}{8}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{3}{8}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=15$에서

$n\times\frac{3}{8}=15 \qquad \therefore n=40$

$\therefore \mathrm{V}(X)=40\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{75}{8}$

다른 풀이

확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{3}{8}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X)\times\left(1-\frac{3}{8}\right)=15\times\frac{5}{8}=\frac{75}{8}$

**41** 4개의 윷짝을 동시에 한 번 던져서 개가 나올 확률은

${}_{4}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{2}=\frac{216}{625}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(125,\ \frac{216}{625}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=125\times\frac{216}{625}=\frac{216}{5}$

$\therefore \mathrm{E}(5X-1)=5\mathrm{E}(X)-1$

$=5\times\frac{216}{5}-1=215$

**42** 동전을 20번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 $Y$라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $20-Y$이므로

$X=2Y-(20-Y)=3Y-20$

한편 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 $Y$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{E}(Y)=20\times\frac{1}{2}=10$이므로

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(3Y-20)$

$=3\mathrm{E}(Y)-20$

$=3\times 10-20=10$

## 02 연속확률변수와 정규분포 40~46쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ③ | **2** $\frac{1}{2}$ | **3** ⑤ | **4** $\frac{5}{6}$ | **5** ③ |
| **6** ③ | **7** ⑤ | **8** ③ | **9** 0.3446 | **10** ④ |
| **11** ④ | **12** ④ | **13** 8 | **14** ⑤ | **15** 0.9544 |
| **16** ① | **17** 24 | **18** ④ | **19** 1.64 | **20** ⑤ |
| **21** 0.07 | **22** 0.2119 | **23** 9544 | **24** 3 | **25** 1697 |
| **26** 72.2점 | **27** 85점 | **28** 112.2 kg | | **29** ② |
| **30** 국어, 수학, 영어 | | **31** C, A, B | | **32** ② |
| **33** ③ | **34** 0.4772 | **35** 0.0919 | **36** 0.9987 | **37** 0.02 |
| **38** 162 | **39** 90 | **40** 56 | | |

**1** ① $-2\le x<0$에서 $f(x)<0$이다.

② $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이 아니다.

③ $-2\le x\le 2$에서 $f(x)\ge 0$이고 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\times\frac{1}{2}=1$

④ $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이 아니다.

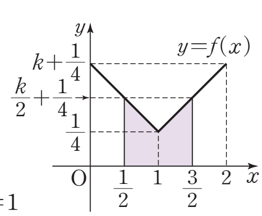
⑤ $-1<x<1$에서 $f(x)<0$이다.

따라서 $f(x)$의 그래프가 될 수 있는 것은 ③이다.

**2** $y=f(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times 4\times a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

**3** $y=f(x)$의 그래프와 $x$축, $y$축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로




$2\times\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{4}+\left(k+\frac{1}{4}\right)\right\}\times 1=1$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

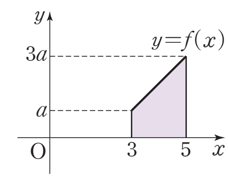
즉, $f(x)=\frac{1}{2}|x-1|+\frac{1}{4}\ (0\le x\le 2)$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{2}\right)=2\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{3}{8}$$

**4** $f(x)\ge 0$이어야 하므로




$a\ge 0$

$y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=3$, $x=5$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times(a+3a)\times 2=1$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

즉, $f(x)=\frac{1}{4}(x-2)\ (3\le x\le 5)$이므로

$f(b)=\frac{b-2}{4}$, $f(4)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(b\le X\le 4)=\frac{5}{18}$에서

$\frac{1}{2}\times(4-b)\times\left(\frac{b-2}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{18}$

$\frac{b(4-b)}{8}=\frac{5}{18}$, $18b(4-b)=40$

$9b^2-36b+20=0$, $(3b-2)(3b-10)=0$

$\therefore b=\frac{10}{3}\ (\because 3\le b<4)$

$\therefore ab=\frac{1}{4}\times\frac{10}{3}=\frac{5}{6}$

**5** $f(x)$의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(2\le X\le 4)=a$, $\mathrm{P}(0\le X\le 2)=b$로 놓으면

$\mathrm{P}(4\le X\le 6)=a$, $\mathrm{P}(6\le X\le 8)=b$

$3\mathrm{P}(2\le X\le 4)=4\mathrm{P}(6\le X\le 8)$에서

$3a=4b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{P}(0\le X\le 8)=1$이므로

$$\mathrm{P}(0\le X\le 2)+\mathrm{P}(2\le X\le 4)+\mathrm{P}(4\le X\le 6)+\mathrm{P}(6\le X\le 8)=1$$

$\therefore 2a+2b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{2}{7}$, $b=\frac{3}{14}$

$$\therefore \mathrm{P}(2\le X\le 6)=\mathrm{P}(2\le X\le 4)+\mathrm{P}(4\le X\le 6)$$
$$=2a$$
$$=2\times\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$$

**6** $y=f(x)$의 그래프의 대칭축은 직선 $x=m$이고, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프의 대칭축은 직선 $x=10$이므로

$m<10$

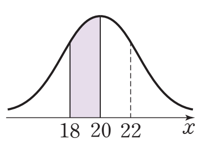
표준편차가 클수록 곡선의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 양쪽으로 넓게 퍼진 모양이므로

$\sigma>3$

**7** 정규분포 $\mathrm{N}(13,\ 3^2)$을 따르는 확률변수 $X$의 확률밀도 함수는 $x=13$에서 최댓값을 갖고, 정규분포 곡선은 직선 $x=13$에 대하여 대칭이다.
따라서 $\mathrm{P}(k-2\le X\le k+4)$가 최대가 되려면
$\dfrac{(k-2)+(k+4)}{2}=13$
$2k+2=26\qquad \therefore\ k=12$

**8** $\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)=2a$에서
$\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=2a$
$2\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=2a$
$\therefore\ \mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=a$
같은 방법으로 $\mathrm{P}(m-4\sigma\le X\le m+4\sigma)=4b$에서
$\mathrm{P}(m\le X\le m+4\sigma)=2b$
$\therefore\ \mathrm{P}(m-4\sigma\le X\le m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(m-4\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(m\le X\le m+4\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$
$=a+2b$

**9** 확률변수 $X$의 정규분포 곡선은 직선 $x=20$에 대하여 대칭이므로




$\mathrm{P}(18\le X\le 20)=0.1554$에서
$\mathrm{P}(20\le X\le 22)=0.1554$
$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 22)=\mathrm{P}(X\ge 20)-\mathrm{P}(20\le X\le 22)$
$=0.5-0.1554=0.3446$

**10** 확률변수 $X$의 정규분포 곡선은 $x=m$에 대하여 대칭이다.
$\mathrm{P}(X\le 15)=0.76$에서
$\mathrm{P}(X\ge 15)=1-0.76=0.24$이므로
$\mathrm{P}(X\ge 15)=\mathrm{P}(X\le 7)$
$m=\dfrac{15+7}{2}\qquad \therefore\ m=11$
$|X-m|\le 4$에서 $|X-11|\le 4$
$-4\le X-11\le 4\qquad \therefore\ 7\le X\le 15$
$\therefore\ \mathrm{P}(|X-m|\le 4)=\mathrm{P}(7\le X\le 15)$
$=\mathrm{P}(X\le 15)-\mathrm{P}(X\le 7)$
$=0.76-0.24=0.52$

**11** $Z_X=\dfrac{X-100}{5}$, $Z_Y=\dfrac{Y-30}{4}$으로 놓으면 확률변수 $Z_X$, $Z_Y$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로
$\mathrm{P}(X\le 90)=\mathrm{P}(Y\ge k)$에서
$\mathrm{P}\left(Z_X\le\dfrac{90-100}{5}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\dfrac{k-30}{4}\right)$
$\therefore\ \mathrm{P}(Z_X\le -2)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le\dfrac{30-k}{4}\right)$
따라서 $-2=\dfrac{30-k}{4}$이므로 $k=38$

**12** $Z_X=\dfrac{X-7}{2}$, $Z_Y=\dfrac{Y-16}{3}$으로 놓으면 확률변수 $Z_X$, $Z_Y$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로
$\mathrm{P}(5\le X\le 11)=\mathrm{P}(10\le Y\le k)$에서
$\mathrm{P}\left(\dfrac{5-7}{2}\le Z_X\le\dfrac{11-7}{2}\right)=\mathrm{P}\left(\dfrac{10-16}{3}\le Z_Y\le\dfrac{k-16}{3}\right)$
즉, $\mathrm{P}(-1\le Z_X\le 2)=\mathrm{P}\left(-2\le Z_Y\le\dfrac{k-16}{3}\right)$이므로
$\mathrm{P}(-1\le Z_X\le 2)=\mathrm{P}\left(\dfrac{16-k}{3}\le Z_Y\le 2\right)$
따라서 $-1=\dfrac{16-k}{3}$이므로 $k=19$

**13** $Z_X=\dfrac{X-14}{2}$, $Z_Y=\dfrac{Y-m}{3}$으로 놓으면 확률변수 $Z_X$, $Z_Y$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로
$2\mathrm{P}(10\le X\le 14)=\mathrm{P}(2\le Y\le 2m-2)$에서
$2\mathrm{P}\left(\dfrac{10-14}{2}\le Z_X\le\dfrac{14-14}{2}\right)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{2-m}{3}\le Z_Y\le\dfrac{2m-2-m}{3}\right)$
즉, $2\mathrm{P}(-2\le Z_X\le 0)=\mathrm{P}\left(-\dfrac{m-2}{3}\le Z_Y\le\dfrac{m-2}{3}\right)$에서
$2\mathrm{P}(0\le Z_X\le 2)=2\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\dfrac{m-2}{3}\right)$
$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z_X\le 2)=\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\dfrac{m-2}{3}\right)$
따라서 $2=\dfrac{m-2}{3}$이므로 $m=8$

**14** $Z=\dfrac{X-63}{4}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로
$\mathrm{P}(X\le 67)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{67-63}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\le 1)$
$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.5+0.3413=0.8413$

**15** $|X-m|\le 10$에서 $-10\le X-m\le 10$
$\therefore\ m-10\le X\le m+10$
$Z=\dfrac{X-m}{5}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로
$\mathrm{P}(|X-m|\le 10)=\mathrm{P}(m-10\le X\le m+10)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{m-10-m}{5}\le Z\le\dfrac{m+10-m}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)$
$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=2\times 0.4772$
$=0.9544$

**16** $\mathrm{E}(X)=70$, $\sigma(X)=3$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X+3)=2\mathrm{E}(X)+3$

$=2\times70+3=143$

$\sigma(Y)=\sigma(2X+3)=|2|\sigma(X)$

$=2\times3=6$

즉, 확률변수 $Y$는 정규분포 $\mathrm{N}(143,\ 6^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{Y-143}{6}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(140\le Y\le152)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{140-143}{6}\le Z\le\dfrac{152-143}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le1.5)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$

$=0.1915+0.4332=0.6247$

다른 풀이

$Z=\dfrac{X-70}{3}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(140\le Y\le152)$

$=\mathrm{P}(140\le 2X+3\le152)$

$=\mathrm{P}(68.5\le X\le74.5)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{68.5-70}{3}\le Z\le\dfrac{74.5-70}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le1.5)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$

$=0.1915+0.4332=0.6247$

**17** $Z=\dfrac{X-21}{4}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(20\le X\le a)=0.3721$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{20-21}{4}\le Z\le\dfrac{a-21}{4}\right)=0.3721$

$\mathrm{P}\left(-0.25\le Z\le\dfrac{a-21}{4}\right)=0.3721$

$\mathrm{P}(-0.25\le Z\le0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-21}{4}\right)=0.3721$

$\mathrm{P}(0\le Z\le0.25)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-21}{4}\right)=0.3721$

$0.0987+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-21}{4}\right)=0.3721$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-21}{4}\right)=0.2734$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le0.75)=0.2734$이므로

$\dfrac{a-21}{4}=0.75$

$a-21=3\qquad\therefore\ a=24$

**18** $Z=\dfrac{X-m}{\frac{m}{3}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}\left(X\le\dfrac{9}{2}\right)=0.9987$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{\frac{9}{2}-m}{\frac{m}{3}}\right)=0.9987$

$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{27-6m}{2m}\right)=0.9987$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{27-6m}{2m}\right)=0.4987$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le3)=0.4987$이므로

$\dfrac{27-6m}{2m}=3$

$27-6m=6m\qquad\therefore\ m=\dfrac{9}{4}$

**19** $\mathrm{P}(|X-1|\le3k)=0.899$에서

$\mathrm{P}(-3k\le X-1\le3k)=0.899$

$\therefore\ \mathrm{P}(-3k+1\le X\le3k+1)=0.899$ …… ㉠

$Z=\dfrac{X-1}{3}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 ㉠에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{-3k+1-1}{3}\le Z\le\dfrac{3k+1-1}{3}\right)=0.899$

$\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=0.899$

$2\mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.899$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.4495$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.64)=0.4495$이므로

$k=1.64$

**20** 파프리카 1개의 무게를 $X$g이라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 20^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-180}{20}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(190\le X\le210)=\mathrm{P}\left(\dfrac{190-180}{20}\le Z\le\dfrac{210-180}{20}\right)$

$=\mathrm{P}(0.5\le Z\le1.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)$

$=0.4332-0.1915$

$=0.2417$

**21** 응시자들의 점수를 $X$점이라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(84,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-84}{4}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X<78)&=P\left(Z<\frac{78-84}{4}\right)\\&=P(Z<-1.5)\\&=P(Z>1.5)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.43\\&=0.07\end{aligned}$$

**22** 등교하는 데 걸리는 시간을 $X$분이라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $N(20,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-20}{5}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
등교하는 데 걸리는 시간이 24분을 초과하면 지각하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X>24)&=P\left(Z>\frac{24-20}{5}\right)\\&=P(Z>0.8)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 0.8)\\&=0.5-0.2881\\&=0.2119\end{aligned}$$

**23** 택배 상자의 무게를 $X$ kg이라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $N(5,\ 0.3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-5}{0.3}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
택배 상자의 무게가 4.4 kg 이상 5.6 kg 이하일 확률은

$$\begin{aligned}P(4.4\le X\le 5.6)&=P\left(\frac{4.4-5}{0.3}\le Z\le\frac{5.6-5}{0.3}\right)\\&=P(-2\le Z\le 2)\\&=2P(0\le Z\le 2)\\&=2\times 0.4772\\&=0.9544\end{aligned}$$

따라서 구하는 택배 상자의 개수는
$10000\times 0.9544=9544$

**24** 의복비 지출 금액을 $X$만 원이라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $N(30,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-30}{4}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
의복비를 40만 원 이상 지출하는 사원일 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge 40)&=P\left(Z\ge\frac{40-30}{4}\right)\\&=P(Z\ge 2.5)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5-0.494\\&=0.006\end{aligned}$$

따라서 구하는 사원의 수는
$500\times 0.006=3$

**25** 보조 배터리의 용량을 $X$ mAh라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $N(20000,\ 100^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-20000}{100}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
용량이 19897 mAh 이상인 보조 배터리는 불량품이 아니므로 그 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge 19897)&=P\left(Z\ge\frac{19897-20000}{100}\right)\\&=P(Z\ge -1.03)\\&=P(Z\le 1.03)\\&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.03)\\&=0.5+0.3485\\&=0.8485\end{aligned}$$

따라서 구하는 보조 배터리의 개수는
$2000\times 0.8485=1697$

**26** 응시자들의 점수를 $X$점이라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $N(68,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-68}{5}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
상위 20 %에 속하는 응시자의 최저 점수를 $a$점이라 하면
$P(X\ge a)=0.2$에서

$P\left(Z\ge\frac{a-68}{5}\right)=0.2$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a-68}{5}\right)=0.2$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{a-68}{5}\right)=0.3$

이때 $P(0\le Z\le 0.84)=0.3$이므로

$\frac{a-68}{5}=0.84$

$a-68=4.2$

$\therefore\ a=72.2$

따라서 구하는 최저 점수는 72.2점이다.

**27** 지원자들의 점수를 $X$점이라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $N(72,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-72}{10}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
장학생의 최저 점수를 $a$점이라 하면

$P(X\ge a)=\frac{50}{500}=0.1$에서

$P\left(Z\ge\frac{a-72}{10}\right)=0.1$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a-72}{10}\right)=0.1$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{a-72}{10}\right)=0.4$

이때 $P(0 \le Z \le 1.3)=0.4$이므로

$\frac{a-72}{10}=1.3$

$a-72=13$

$\therefore a=85$

따라서 구하는 최저 점수는 85점이다.

**28** 돼지들의 무게를 $X$ kg이라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $N(120, 15^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-120}{15}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

무게가 가벼운 쪽에서 60번째인 돼지의 무게를 $a$ kg이라 하면 $P(X \le a)=\frac{60}{200}=0.3$에서

$P\left(Z \le \frac{a-120}{15}\right)=0.3$

$P\left(Z \ge \frac{120-a}{15}\right)=0.3$

$0.5-P\left(0 \le Z \le \frac{120-a}{15}\right)=0.3$

$\therefore P\left(0 \le Z \le \frac{120-a}{15}\right)=0.2$

이때 $P(0 \le Z \le 0.52)=0.2$이므로

$\frac{120-a}{15}=0.52$

$120-a=7.8$

$\therefore a=112.2$

따라서 구하는 돼지의 무게는 112.2 kg이다.

**29** $Z_W=\frac{W-45}{4}$, $Z_X=\frac{X-52}{3}$, $Z_Y=\frac{Y-48}{8}$로 놓으면 확률변수 $Z_W$, $Z_X$, $Z_Y$는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$p=P(W \ge 46)=P\left(Z_W \ge \frac{46-45}{4}\right)=P(Z_W \ge 0.25)$

$q=P(X \ge 46)=P\left(Z_X \ge \frac{46-52}{3}\right)=P(Z_X \ge -2)$

$r=P(Y \ge 46)=P\left(Z_Y \ge \frac{46-48}{8}\right)=P(Z_Y \ge -0.25)$

이때 $P(Z_W \ge 0.25)<P(Z_Y \ge -0.25)<P(Z_X \ge -2)$이므로 $p<r<q$

**30** 주영이네 학교 학생의 국어, 수학, 영어 시험 성적을 각각 $X_1$점, $X_2$점, $X_3$점이라 하면 확률변수 $X_1$, $X_2$, $X_3$은 각각 정규분포 $N(70, 12^2)$, $N(58, 14^2)$, $N(67, 10^2)$을 따르므로 $Z_1=\frac{X_1-70}{12}$, $Z_2=\frac{X_2-58}{14}$, $Z_3=\frac{X_3-67}{10}$로 놓으면 확률변수 $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$은 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

주영이보다 국어, 수학, 영어 시험 성적이 낮을 확률은

$P(X_1<91)=P\left(Z_1<\frac{91-70}{12}\right)=P(Z_1<1.75)$

$P(X_2<79)=P\left(Z_2<\frac{79-58}{14}\right)=P(Z_2<1.5)$

$P(X_3<81)=P\left(Z_3<\frac{81-67}{10}\right)=P(Z_3<1.4)$

이때 $P(Z_1<1.75)>P(Z_2<1.5)>P(Z_3<1.4)$이므로

$P(X_1<91)>P(X_2<79)>P(X_3<81)$

따라서 주영이의 성적이 상대적으로 높은 과목을 순서대로 나열하면 국어, 수학, 영어이다.

**31** 1반, 2반, 3반 학생의 몸무게를 각각 $X_1$kg, $X_2$kg, $X_3$kg이라 하면 확률변수 $X_1$, $X_2$, $X_3$은 각각 정규분포 $N(52, 6^2)$, $N(54, 5^2)$, $N(55, 8^2)$을 따르므로

$Z_1=\frac{X_1-52}{6}$, $Z_2=\frac{X_2-54}{5}$, $Z_3=\frac{X_3-55}{8}$로 놓으면 확률변수 $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$은 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

A, B, C보다 각 반 학생의 몸무게가 가벼울 확률은

$P(X_1<55)=P\left(Z_1<\frac{55-52}{6}\right)=P(Z_1<0.5)$

$P(X_2<56)=P\left(Z_2<\frac{56-54}{5}\right)=P(Z_2<0.4)$

$P(X_3<60)=P\left(Z_3<\frac{60-55}{8}\right)=P(Z_3<0.625)$

이때 $P(Z_3<0.625)>P(Z_1<0.5)>P(Z_2<0.4)$이므로

$P(X_3<60)>P(X_1<55)>P(X_2<56)$

따라서 각자 자기 반에서 상대적으로 몸무게가 무거운 학생을 순서대로 나열하면 C, A, B이다.

**32** 확률변수 $X$가 이항분포 $B\left(900, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=900 \times \frac{1}{5}=180$

$V(X)=900 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5}=144$

이때 시행 횟수 $n=900$은 충분히 크므로 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(180, 12^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-180}{12}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(174 \le X \le 198)$

$=P\left(\frac{174-180}{12} \le Z \le \frac{198-180}{12}\right)$

$=P(-0.5 \le Z \le 1.5)$

$=P(-0.5 \le Z \le 0)+P(0 \le Z \le 1.5)$

$=P(0 \le Z \le 0.5)+P(0 \le Z \le 1.5)$

$=0.1915+0.4332=0.6247$

**33** 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=450\times\frac{2}{3}=300$

$\mathrm{V}(X)=450\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=100$

이때 시행 횟수 $n=450$은 충분히 크므로 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-300}{10}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 296)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{296-300}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -0.4)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0.4)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.4)\\&=0.5-0.16\\&=0.34\end{aligned}$$

**34** ${}_{48}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{48-x}$은 한 번의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{1}{4}$인 어떤 사건이 48번의 독립시행에서 $x$번 일어날 확률이다. 이 사건이 일어나는 횟수를 $X$라 하면 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=48\times\frac{1}{4}=12$

$\mathrm{V}(X)=48\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=9$

이때 시행 횟수 $n=48$은 충분히 크므로 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-12}{3}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&{}_{48}\mathrm{C}_{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{36}+{}_{48}\mathrm{C}_{13}\left(\frac{1}{4}\right)^{13}\left(\frac{3}{4}\right)^{35}\\&\qquad+\cdots+{}_{48}\mathrm{C}_{18}\left(\frac{1}{4}\right)^{18}\left(\frac{3}{4}\right)^{30}\\&=\mathrm{P}(X=12)+\mathrm{P}(X=13)+\cdots+\mathrm{P}(X=18)\\&=\mathrm{P}(12\le X\le 18)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{12-12}{3}\le Z\le\frac{18-12}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.4772\end{aligned}$$

**35** 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1350,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=1350\times\frac{3}{5}=810$

$\mathrm{V}(X)=1350\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=324$

이때 시행 횟수 $n=1350$은 충분히 크므로 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(810,\ 18^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-810}{18}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(783\le X\le 792)&=\mathrm{P}\left(\frac{783-810}{18}\le Z\le\frac{792-810}{18}\right)\\&=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le -1)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4332-0.3413\\&=0.0919\end{aligned}$$

**36** 예약한 승객 400명 중에서 예약을 취소하는 승객의 수를 $X$라 하면 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400\times\frac{1}{10}=40$

$\mathrm{V}(X)=400\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=36$

이때 시행 횟수 $n=400$은 충분히 크므로 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-40}{6}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

비행기를 타러 온 승객이 모두 비행기를 타려면 예약한 승객 중 22명 이상 취소해야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 22)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{22-40}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -3)\\&=\mathrm{P}(Z\le 3)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)\\&=0.5+0.4987\\&=0.9987\end{aligned}$$

**37** 수확한 배 한 개의 무게를 $X$ g이라 하면 확률변수 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 10^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-200}{10}$으로 놓으면 확률변수 $Z_X$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 배의 무게가 218 g 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 218)&=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{218-200}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_X\ge 1.8)\\&=\mathrm{P}(Z_X\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le 1.8)\\&=0.5-0.46\\&=0.04\end{aligned}$$

따라서 수확한 3750개의 배 중에서 선물용으로 구분되는 배의 개수를 $Y$라 하면 확률변수 $Y$는 이항분포 $\mathrm{B}(3750,\ 0.04)$를 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=3750\times0.04=150$

$\mathrm{V}(Y)=3750\times0.04\times0.96=144$

이때 시행 횟수 $n=3750$은 충분히 크므로 $Y$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 12^2)$을 따르고, $Z_Y=\frac{Y-150}{12}$으로 놓으면 확률변수 $Z_Y$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le126)&=\mathrm{P}\left(Z_Y\le\frac{126-150}{12}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_Y\le-2)\\&=\mathrm{P}(Z_Y\ge2)\\&=\mathrm{P}(Z_Y\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z_Y\le2)\\&=0.5-0.48=0.02\end{aligned}$$

**38** 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=450\times\frac{1}{3}=150$

$\mathrm{V}(X)=450\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=100$

이때 시행 횟수 $n=450$은 충분히 크므로 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-150}{10}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\ge k)=0.12$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-150}{10}\right)=0.12$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-150}{10}\right)=0.12$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-150}{10}\right)=0.38$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.2)=0.38$이므로

$\frac{k-150}{10}=1.2$

$k-150=12\qquad\therefore\ k=162$

**39** 108개의 화살 중에서 10점에 맞힌 화살의 개수를 $X$라 하면 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(108,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=108\times\frac{3}{4}=81$

$\mathrm{V}(X)=108\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{81}{4}$

이때 시행 횟수 $n=108$은 충분히 크므로 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(81,\ \left(\frac{9}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-81}{\frac{9}{2}}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

10점에 맞힌 화살이 $k$개 이상일 확률이 0.0228이므로

$\mathrm{P}(X\ge k)=0.0228$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-81}{\frac{9}{2}}\right)=0.0228$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{2k-162}{9}\right)=0.0228$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{2k-162}{9}\right)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\frac{2k-162}{9}=2\qquad\therefore\ k=90$

**40** 빨간 공, 파란 공이 나오는 횟수를 각각 $X$, $Y$라 하자.

확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400\times\frac{1}{5}=80$

$\mathrm{V}(X)=400\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=64$

이때 시행 횟수 $n=400$은 충분히 크므로 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따른다.

따라서 $Z_X=\frac{X-80}{8}$으로 놓으면 확률변수 $Z_X$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\ge k)=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{k-80}{8}\right)\qquad\cdots\cdots$ ㉠

한편 확률변수 $Y$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=400\times\frac{1}{2}=200$

$\mathrm{V}(Y)=400\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=100$

이때 시행 횟수 $n=400$은 충분히 크므로 $Y$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z_Y=\frac{Y-200}{10}$으로 놓으면 확률변수 $Z_Y$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le230)&=\mathrm{P}\left(Z_Y\le\frac{230-200}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_Y\le3)\\&=\mathrm{P}(Z_Y\ge-3)\qquad\cdots\cdots\ ㉡\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(X\ge k)=\mathrm{P}(Y\le230)$이므로 ㉠, ㉡에서

$\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{k-80}{8}\right)=\mathrm{P}(Z_Y\ge-3)$

따라서 $\frac{k-80}{8}=-3$이므로 $k=56$

# III-2. 통계적 추정

## 01 통계적 추정 48~55쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ④ | **2** 90 | **3** ④ | **4** 112 | **5** ① |
| **6** $\frac{55}{8}$ | **7** 4 | **8** ① | **9** ⑤ | **10** 0.8185 |
| **11** 0.9772 | **12** ③ | **13** 192 | **14** 16 | **15** ③ |
| **16** ④ | **17** $\mathrm{N}(0.4,\ 0.02^2)$ | | **18** 180 | **19** 84 |
| **20** 0.9544 | **21** 0.8185 | **22** ④ | **23** $28.71\le m\le 31.29$ | |
| **24** ④ | **25** 21 | **26** ② | **27** 20.355 | **28** 64 |
| **29** 1557 | **30** 144 | **31** ⑤ | **32** ④ | **33** 16 |
| **34** 3 | **35** ① | **36** ② | **37** ④ | **38** ④ |
| **39** ② | **40** 0.07 | **41** ③ | **42** 196 | **43** 600 |
| **44** $0.7608\le p\le 0.8392$ | | | **45** ② | **46** ③ |

**1** $\mathrm{E}(\overline{X})=20,\ \sigma(\overline{X})=\frac{5}{\sqrt{16}}=\frac{5}{4}$

$\therefore\ \mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=\frac{85}{4}$

**2** $\mathrm{E}(\overline{X})=54,\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{n}}=\frac{3}{\sqrt{n}}$

즉, $\frac{3}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}$이므로 $\sqrt{n}=6\qquad\therefore\ n=36$

$\therefore\ \mathrm{E}(\overline{X})+n=54+36=90$

**3** $\sigma(\overline{X})=\frac{9}{\sqrt{n}}$이므로 $\frac{9}{\sqrt{n}}\le 3$

$\sqrt{n}\ge 3\qquad\therefore\ n\ge 9$

따라서 $n$의 최솟값은 9이다.

**4** $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=8$이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=80-8^2=16$

그런데 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}$이므로

$16=\frac{\mathrm{V}(X)}{3}\qquad\therefore\ \mathrm{V}(X)=48$

$\therefore\ \mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=48+8^2=112$

**5** 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+a=1\qquad\therefore\ a=\frac{1}{6}$

모평균 $m$과 모분산 $\sigma^2$을 구하면

$m=-2\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}$

$\sigma^2=(-2)^2\times\frac{1}{3}+0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

이때 표본의 크기가 16이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{16}=\frac{5}{64}$

**6** 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 $X$라 하고, $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

$m=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

$\sigma^2=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

이때 표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{5}{2},\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{5}{4}}{2}=\frac{5}{8}$

$\therefore\ \mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$

$=\frac{5}{8}+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{55}{8}$

**7** 상자에서 한 장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 숫자를 확률변수 $X$라 하고, $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 3 | 5 | 7 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | 1 |

$m=3\times\frac{2}{7}+5\times\frac{3}{7}+7\times\frac{2}{7}=5$

$\sigma^2=3^2\times\frac{2}{7}+5^2\times\frac{3}{7}+7^2\times\frac{2}{7}-5^2=\frac{16}{7}$

표본의 크기가 $n$이므로 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{16}{7}}{n}=\frac{16}{7n}$에서

$\frac{16}{7n}=\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2$

$\therefore\ n=4$

**8** 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기 $n=36$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 1)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-100}{1}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 101)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{101-100}{1}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 1)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.3413=0.1587$

**9** 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(201.5,\ 1.8^2)$을 따르고 표본의 크기 $n=9$이므로 9개의 화장품 내용량의 평균을 $\overline{X}$g이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(201.5,\ 0.6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-201.5}{0.6}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 200)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{200-201.5}{0.6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -2.5)=\mathrm{P}(Z\le 2.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5+0.4938=0.9938\end{aligned}$$

**10** 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(160,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기 $n=4$이므로 4개의 토마토의 무게의 평균을 $\overline{X}$g이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(160,\ 5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-160}{5}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(155\le\overline{X}\le 170)&=\mathrm{P}\left(\frac{155-160}{5}\le Z\le\frac{170-160}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.3413+0.4772=0.8185\end{aligned}$$

**11** 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기 $n=25$이므로 25회의 평균 이용 시간을 $\overline{X}$분이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-40}{2}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

25회 이용 시간의 총합이 1100분 이하이려면 $25\overline{X}\le 1100$, 즉 $\overline{X}\le 44$이어야 한다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le 44)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{44-40}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.4772=0.9772\end{aligned}$$

**12** 확률변수 $X$가 따르는 정규분포를 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$이라 하면

$\mathrm{P}(X\ge 3.4)=\dfrac{1}{2}$에서 $m=3.4$

따라서 확률변수 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(3.4,\ \sigma^2)$을 따르므로

$Z_X=\dfrac{X-3.4}{\sigma}$로 놓으면

$\mathrm{P}(X\le 3.9)+\mathrm{P}(Z_X\le -1)=1$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{3.9-3.4}{\sigma}\right)+\mathrm{P}(Z_X\le -1)=1$

$\mathrm{P}\left(Z_X\le\dfrac{0.5}{\sigma}\right)+\mathrm{P}(Z_X\ge 1)=1$

즉, $\dfrac{0.5}{\sigma}=1$이므로 $\sigma=0.5$

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(3.4,\ 0.5^2)$을 따르고 표본의 크기 $n=25$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(3.4,\ 0.1^2)$을 따른다.

따라서 $Z_{\overline{X}}=\dfrac{\overline{X}-3.4}{0.1}$로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 3.55)&=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{3.55-3.4}{0.1}\right)=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le 1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

**13** 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 32^2)$을 따르고 표본의 크기 $n=64$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-200}{4}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\le k)=0.0228$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{k-200}{4}\right)=0.0228$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{200-k}{4}\right)=0.0228$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{200-k}{4}\right)=0.0228$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{200-k}{4}\right)=0.0228$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{200-k}{4}\right)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\dfrac{200-k}{4}=2 \qquad \therefore\ k=192$

**14** 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(183,\ 24^2)$을 따르고 표본의 크기가 $n$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(183,\ \left(\dfrac{24}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-183}{\frac{24}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(|\overline{X}-183|\le 3)=0.383$에서

$\mathrm{P}(-3\le\overline{X}-183\le 3)=0.383$

$\mathrm{P}(180\le\overline{X}\le 186)=0.383$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{180-183}{\frac{24}{\sqrt{n}}}\le Z\le\dfrac{186-183}{\frac{24}{\sqrt{n}}}\right)=0.383$

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{8}\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.383,\ 2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.383$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.1915$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로

$\dfrac{\sqrt{n}}{8}=0.5,\ \sqrt{n}=4 \qquad \therefore\ n=16$

**15** 모집단이 정규분포 $N(m,\ 5^2)$을 따르고 표본의 크기 $n=36$이므로 36명의 일주일 근무 시간의 평균을 $\overline{X}$시간이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \left(\frac{5}{6}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{5}{6}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\ge 38)=0.9332$에서

$P\left(Z\ge\dfrac{38-m}{\frac{5}{6}}\right)=0.9332$

$P\left(Z\ge\frac{6}{5}(38-m)\right)=0.9332$

$P\left(Z\le\frac{6}{5}(m-38)\right)=0.9332$

$P(Z\le 0)+P\left(0\le Z\le\frac{6}{5}(m-38)\right)=0.9332$

$0.5+P\left(0\le Z\le\frac{6}{5}(m-38)\right)=0.9332$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{6}{5}(m-38)\right)=0.4332$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{6}{5}(m-38)=1.5$

$m-38=1.25$

$\therefore\ m=39.25$

**16** 모비율 $p=0.45$, 표본의 크기 $n=1100$이므로

$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\dfrac{0.45\times0.55}{1100}}=0.015$

**17** 모비율 $p=0.4$, 표본의 크기 $n=600$이므로

$E(\hat{p})=0.4$

$V(\hat{p})=\dfrac{0.4\times0.6}{600}=0.0004$

표본의 크기 $n=600$은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.4,\ 0.0004)$, 즉 $N(0.4,\ 0.02^2)$을 따른다.

**18** 모비율 $p=\frac{1}{3}$, 표본의 크기 $n=120$이므로

$E(\hat{p})=\dfrac{1}{3}$

$V(\hat{p})=\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}{120}=\dfrac{1}{540}$

$\therefore\ \dfrac{E(\hat{p})}{V(\hat{p})}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{540}}=180$

**19** 모비율 $p=0.3$이므로

$V(\hat{p})=\dfrac{0.3\times0.7}{n}=\dfrac{21}{100n}$

$V(\hat{p})=\dfrac{1}{400}$에서

$\dfrac{21}{100n}=\dfrac{1}{400}\qquad\therefore\ n=84$

**20** 이 대학교 학생 100명 중 봉사 활동 경험이 있는 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율 $p=0.1$, 표본의 크기 $n=100$이므로

$E(\hat{p})=0.1$

$V(\hat{p})=\dfrac{0.1\times0.9}{100}=0.0009=0.03^2$

표본의 크기 $n=100$은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.1,\ 0.03^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\hat{p}-0.1}{0.03}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P\left(\frac{4}{100}\le\hat{p}\le\frac{16}{100}\right)&=P(0.04\le\hat{p}\le0.16)\\&=P\left(\frac{0.04-0.1}{0.03}\le Z\le\frac{0.16-0.1}{0.03}\right)\\&=P(-2\le Z\le 2)\\&=2P(0\le Z\le 2)\\&=2\times0.4772\\&=0.9544\end{aligned}$$

**21** 이 보건소의 방문자 400명 중 예방 접종을 받는 방문자의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율 $p=0.8$, 표본의 크기 $n=400$이므로

$E(\hat{p})=0.8$

$V(\hat{p})=\dfrac{0.8\times0.2}{400}=0.0004=0.02^2$

표본의 크기 $n=400$은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.8,\ 0.02^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\hat{p}-0.8}{0.02}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P\left(\frac{312}{400}\le\hat{p}\le\frac{336}{400}\right)&=P(0.78\le\hat{p}\le0.84)\\&=P\left(\frac{0.78-0.8}{0.02}\le Z\le\frac{0.84-0.8}{0.02}\right)\\&=P(-1\le Z\le 2)\\&=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)\\&=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

**22** 이 회사의 직원 1600명 중 자격증 A를 가진 직원의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율 $p=0.2$, 표본의 크기 $n=1600$이므로

$\mathrm{E}(\hat{p})=0.2$

$\mathrm{V}(\hat{p})=\dfrac{0.2\times0.8}{1600}=0.0001=0.01^2$

표본의 크기 $n=1600$은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0.2,\ 0.01^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\hat{p}-0.2}{0.01}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}\left(\hat{p}\ge\dfrac{a}{100}\right)=0.9772$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{\frac{a}{100}-0.2}{0.01}\right)=0.9772$

$\mathrm{P}(Z\ge a-20)=0.9772$, $\mathrm{P}(Z\le20-a)=0.9772$

$\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le20-a)=0.9772$

$0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le20-a)=0.9772$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le20-a)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$20-a=2\qquad\therefore\ a=18$

**23** 표본평균 $\overline{x}=30$, 표본의 크기 $n=36$, 모표준편차 $\sigma=3$이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$30-2.58\times\dfrac{3}{\sqrt{36}}\le m\le30+2.58\times\dfrac{3}{\sqrt{36}}$

$\therefore\ 28.71\le m\le31.29$

**24** 표본평균 $\overline{x}=55$, 표본의 크기 $n=100$이고 표본의 크기가 충분히 크므로 모표준편차 $\sigma$ 대신 표본표준편차 10을 이용하면 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$55-1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{100}}\le m\le55+1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{100}}$

$\therefore\ 53.04\le m\le56.96$

**25** 표본평균 $\overline{x}=1000$, 표본의 크기 $n=16$, 모표준편차 $\sigma=16$이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$1000-2.58\times\dfrac{16}{\sqrt{16}}\le m\le1000+2.58\times\dfrac{16}{\sqrt{16}}$

$\therefore\ 989.68\le m\le1010.32$

따라서 구하는 자연수는 990, 991, $\cdots$, 1010의 21개이다.

**26** 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차 $\sigma=5$, 표본의 크기 $n=49$이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{5}{\sqrt{49}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\dfrac{5}{\sqrt{49}}$

$\therefore\ \overline{x}-1.4\le m\le\overline{x}+1.4$

이 신뢰구간이 $a\le m\le\dfrac{6}{5}a$와 일치하므로

$\overline{x}-1.4=a\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{x}+1.4=\dfrac{6}{5}a\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=14$, $\overline{x}=15.4$

**27** 표본의 크기 $n=144$이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{144}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{144}}$

이 신뢰구간이 $23.02\le m\le24.98$과 일치하므로

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{144}}=23.02\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{144}}=24.98\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\overline{x}=24$, $\sigma=6$

따라서 표본의 크기 $n=576$, 표본평균 $\overline{x}-3=21$일 때, 모표준편차 $\sigma=6$이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$21-2.58\times\dfrac{6}{\sqrt{576}}\le m\le21+2.58\times\dfrac{6}{\sqrt{576}}$

$20.355\le m\le21.645$

$\therefore\ a=20.355$

**28** 표본평균 $\overline{x}=501$, 모표준편차 $\sigma=4$이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$501-2.58\times\dfrac{4}{\sqrt{n}}\le m\le501+2.58\times\dfrac{4}{\sqrt{n}}$

이 신뢰구간이 $499.71\le m\le502.29$와 일치하므로

$2.58\times\dfrac{4}{\sqrt{n}}=1.29$

$\sqrt{n}=8\qquad\therefore\ n=64$

**29** 표본평균 $\overline{x}=1480$, 모표준편차 $\sigma=100$이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$1480-1.96\times\dfrac{100}{\sqrt{n}}\le m\le1480+1.96\times\dfrac{100}{\sqrt{n}}$

이 신뢰구간이 $1452\le m\le k$와 일치하므로

$1480-1.96\times\dfrac{100}{\sqrt{n}}=1452$에서

$1.96\times\dfrac{100}{\sqrt{n}}=28$

$\sqrt{n}=7\qquad\therefore\ n=49$

$k=1480+1.96\times\dfrac{100}{\sqrt{n}}=1480+28=1508$이므로

$n+k=49+1508=1557$

**30** 모표준편차 $\sigma=4$이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}$

$-2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le 2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ |m-\overline{x}|\le 2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}$

이때 모평균 $m$과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 0.86 이하가 되려면

$2.58\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le 0.86$

$\sqrt{n}\ge 12\qquad\therefore\ n\ge 144$

따라서 $n$의 최솟값은 144이다.

**31** 표본의 크기 $n=100$, 모표준편차 $\sigma=15$이므로 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times 2.58\times\frac{15}{\sqrt{100}}=7.74$

**32** 모표준편차 $\sigma=4$이므로 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 0.98 g이 되려면

$2\times 1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}=0.98$

$\sqrt{n}=16\qquad\therefore\ n=256$

**33** 표본의 크기를 $n$이라 할 때, 모표준편차 $\sigma=2$이므로 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이가 2.58 이하가 되려면

$2\times 2.58\times\frac{2}{\sqrt{n}}\le 2.58$

$\sqrt{n}\ge 4\qquad\therefore\ n\ge 16$

따라서 구하는 표본의 크기의 최솟값은 16이다.

**34** 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 $n$인 표본을 임의추출하여 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이를 $l$이라 하면

$l=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (단, $k$는 상수)

표본의 크기가 $\frac{1}{9}$배, 즉 $\frac{1}{9}n$이면 신뢰구간의 길이는

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{\frac{1}{9}n}}=3\times 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=3l$

따라서 신뢰구간의 길이는 3배가 되므로

$a=3$

**35** $\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 $\alpha$ %로 모평균을 추정할 때, 표본의 크기 $n=16$, 모표준편차 $\sigma=20$, 신뢰구간의 길이가 12이므로

$2\times k\times\frac{20}{\sqrt{16}}=12\qquad\therefore\ k=1.2$

따라서 신뢰구간의 길이가 4가 되도록 하는 표본의 크기를 $n$이라 하면

$2\times 1.2\times\frac{20}{\sqrt{n}}=4$

$\sqrt{n}=12\qquad\therefore\ n=144$

**36** $\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 $\alpha$ %로 모평균을 추정할 때, 표본의 크기 $n=81$, 모표준편차 $\sigma=5$, 신뢰구간의 길이가 2분이므로

$2\times k\times\frac{5}{\sqrt{81}}=2\qquad\therefore\ k=1.8$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.8)=0.46$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(-1.8\le Z\le 1.8)&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.8)\\&=2\times 0.46\\&=0.92\end{aligned}$$

따라서 $\frac{\alpha}{100}=0.92$이므로

$\alpha=92$

**37** 표본의 크기 $n=900$, 표본비율 $\hat{p}=0.1$이고, $n$은 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.1-1.96\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{900}}\le p\le 0.1+1.96\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{900}}$

$\therefore\ 0.0804\le p\le 0.1196$

**38** 표본의 크기 $n=3600$, 표본비율 $\hat{p}=0.36$이고, $n$은 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.36-2.58\sqrt{\frac{0.36\times 0.64}{3600}}\le p\le 0.36+2.58\sqrt{\frac{0.36\times 0.64}{3600}}$

이 신뢰구간이 $0.36-2.58k\le p\le 0.36+2.58k$와 일치하므로

$k=\sqrt{\frac{0.36\times 0.64}{3600}}=0.008$

**39** 표본의 크기 $n=100$, 표본비율 $\hat{p}=\frac{80}{100}=0.8$이고, $n$은 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.8-2.58\sqrt{\frac{0.8\times 0.2}{100}}\le p\le 0.8+2.58\sqrt{\frac{0.8\times 0.2}{100}}$

$\therefore\ 0.6968\le p\le 0.9032$

**40** 표본의 크기 $n=196$, 표본비율 $\hat{p}=0.5$이고, $n$은 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.5-1.96\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{196}}\le p\le 0.5+1.96\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{196}}$

$-1.96\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{196}}\le p-0.5\le 1.96\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{196}}$

$|p-0.5|\le 1.96\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{196}}$

$\therefore\ |p-0.5|\le 0.07$

따라서 모비율 $p$와 표본비율 $\hat{p}$의 차의 최댓값은 0.07이다.

**41** 표본의 크기 $n=1200$, 표본비율 $\hat{p}=\frac{900}{1200}=0.75$이고, $n$은 충분히 크므로 $\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모비율 $p$에 대한 신뢰도 $\alpha$ %의 신뢰구간은

$0.75-k\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{1200}}\le p\le 0.75+k\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{1200}}$

이 신뢰구간이 $0.73\le p\le 0.77$과 일치하므로

$k\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{1200}}=0.02 \qquad \therefore\ k=1.6$

이때 $\mathrm{P}(-1.6\le Z\le 1.6)=2\times0.45=0.9=\frac{90}{100}$이므로

$\alpha=90$

**42** 표본비율 $\hat{p}=0.5$이므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.5-1.96\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{n}}\le p\le 0.5+1.96\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{n}}$

$\therefore\ 0.5-\frac{0.98}{\sqrt{n}}\le p\le 0.5+\frac{0.98}{\sqrt{n}}$

이 신뢰구간이 $0.43\le p\le 0.57$과 일치하므로

$\frac{0.98}{\sqrt{n}}=0.07$

$\sqrt{n}=14 \qquad \therefore\ n=196$

**43** 표본비율 $\hat{p}=0.6$이므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.6-2.58\sqrt{\frac{0.6\times0.4}{n}}\le p\le 0.6+2.58\sqrt{\frac{0.6\times0.4}{n}}$

이 신뢰구간이 $0.5484\le p\le 0.6516$과 일치하므로

$2.58\sqrt{\frac{0.6\times0.4}{n}}=0.0516$

$\sqrt{\frac{0.6\times0.4}{n}}=0.02 \qquad \therefore\ n=600$

**44** 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

이 신뢰구간이 $0.2968\le p\le 0.5032$와 일치하므로

$\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=0.2968 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=0.5032 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\hat{p}=0.8 \qquad \therefore\ \hat{p}=0.4$

이를 ㉠에 대입하면

$0.4-2.58\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{n}}=0.2968$

$\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{n}}=0.04 \qquad \therefore\ n=150$

따라서 표본의 크기 $n+250=400$, 표본비율 $2\hat{p}=0.8$일 때, 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.8-1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{400}}\le p\le 0.8+1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{400}}$

$\therefore\ 0.7608\le p\le 0.8392$

**45** 표본의 크기 $n=100$, 표본비율 $\hat{p}=0.2$이고, $n$은 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}=0.1568$

**46** 표본비율 $\hat{p}=\frac{4}{5}=0.8$이고, $n$은 충분히 크므로 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이가 0.1032 이하가 되려면

$2\times2.58\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}\le 0.1032$

$\sqrt{n}\ge 20 \qquad \therefore\ n\ge 400$

따라서 $n$의 최솟값은 400이다.

MEMO

MEMO

MEMO