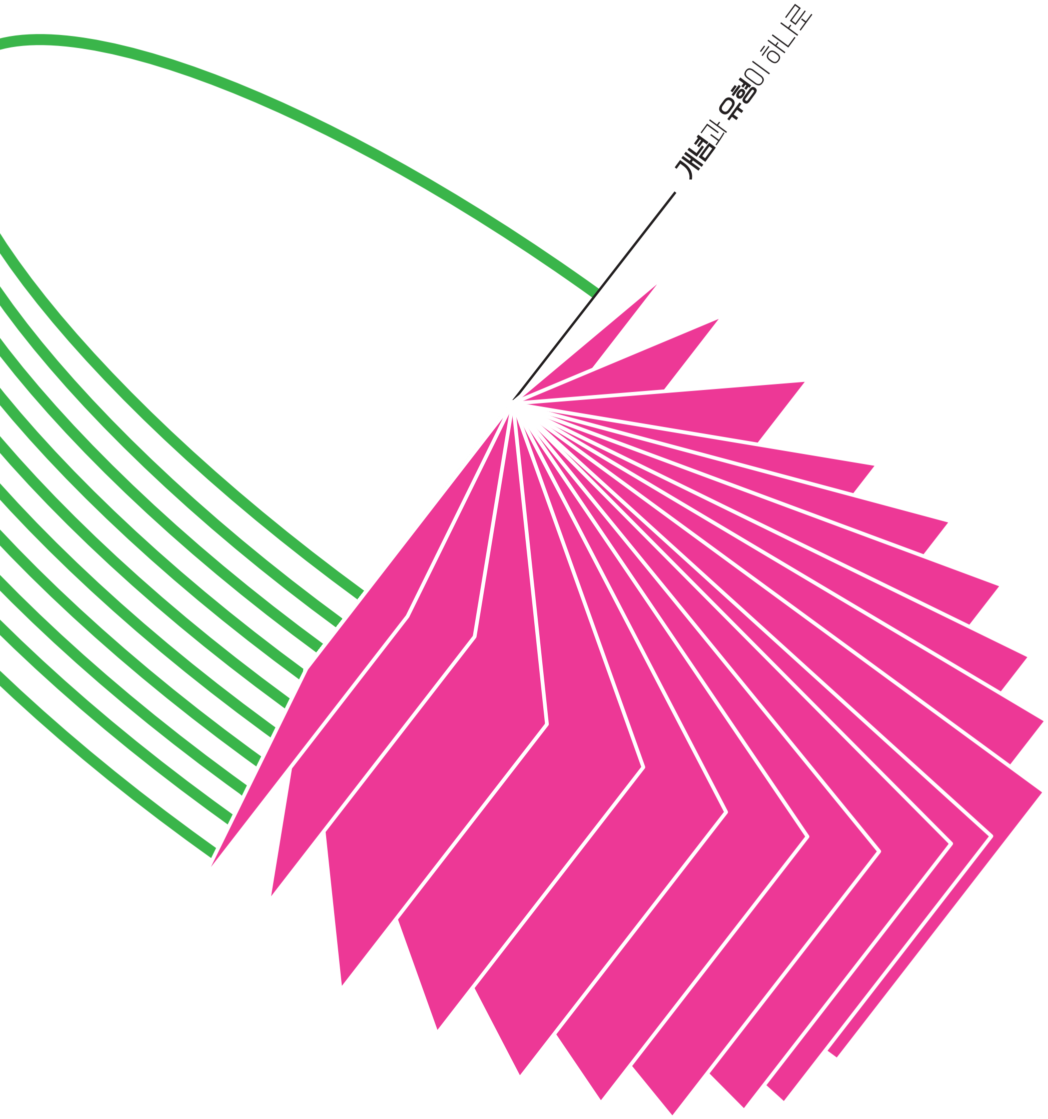
개념+유형

# 미적분 I

# 정답과 해설



# 개념편
## 정답과 해설

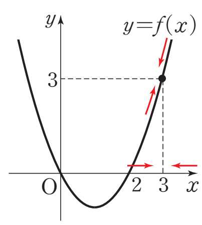
## Ⅰ-1 01 함수의 극한

### 함수의 수렴과 발산

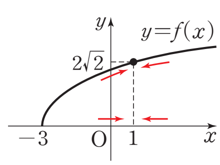
**문제** 10~11쪽

**01-1** 답 (1) **3** (2) $\mathbf{2\sqrt{2}}$ (3) **2** (4) **3** (5) $\mathbf{\infty}$ (6) $\mathbf{-\infty}$

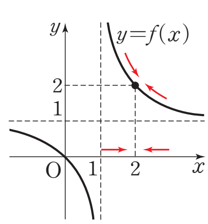
(1) $f(x)=x^2-2x$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로
$\lim\limits_{x\to3}(x^2-2x)=3$




(2) $f(x)=\sqrt{2x+6}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $2\sqrt{2}$에 한없이 가까워지므로 $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{2x+6}=2\sqrt{2}$




(3) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x}{x-1}=2$

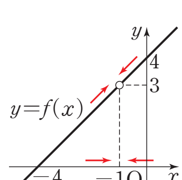



(4) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+4}{x+1}$라 하면 $x\neq-1$일 때,

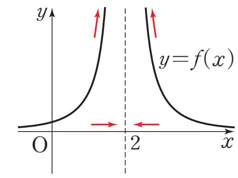
$f(x)=\dfrac{(x+1)(x+4)}{x+1}=x+4$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 $-1$에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+5x+4}{x+1}=3$

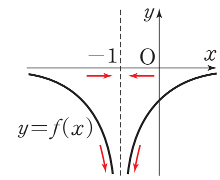



(5) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\infty$



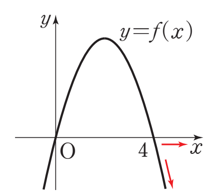

(6) $f(x)=-\dfrac{1}{|x+1|}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 $-1$에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim\limits_{x\to-1}\left(-\dfrac{1}{|x+1|}\right)=-\infty$



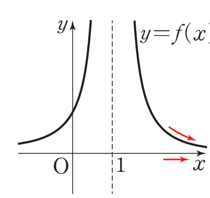

**02-1** 답 (1) $\mathbf{-\infty}$ (2) **0** (3) $\mathbf{\infty}$ (4) $\mathbf{-\infty}$ (5) **2** (6) **0**

(1) $f(x)=-x^2+4x$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로
$\lim\limits_{x\to\infty}(-x^2+4x)=-\infty$

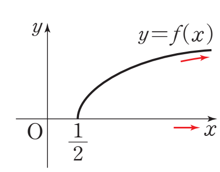



(2) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

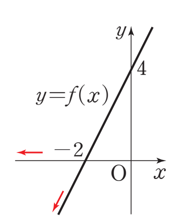
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{(x-1)^2}=0$



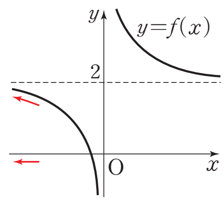

(3) $f(x)=\sqrt{2x-1}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값도 한없이 커지므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2x-1}=\infty$




(4) $f(x)=2x+4$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값도 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+4)=-\infty$

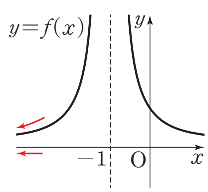


(5) $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로




$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+2\right)=2$$

(6) $f(x)=\dfrac{1}{|x+1|}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

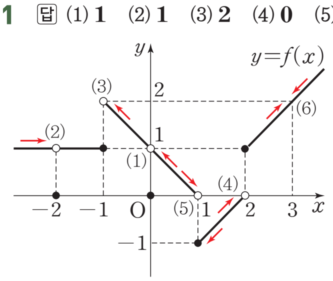



$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x+1|}=0$$

## 2 우극한과 좌극한

**문제** 14~16쪽

03-**1** 답 (1) **1** (2) **1** (3) **2** (4) **0** (5) **존재하지 않는다.** (6) **2**




(1) $\displaystyle\lim_{x\to0+}f(x)=1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-2-}f(x)=1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-1+}f(x)=2$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to2-}f(x)=0$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x)=-1,\ \lim_{x\to1-}f(x)=0$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

(6) $\displaystyle\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=2$

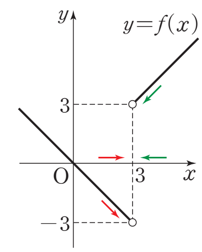
$\therefore \displaystyle\lim_{x\to3}f(x)=2$

04-**1** 답 (1) **존재하지 않는다.** (2) **존재하지 않는다.**

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{|x-3|}$라 하면

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x-3)}{x-3} & (x>3)\\[2mm] \dfrac{x(x-3)}{-(x-3)} & (x<3)\end{cases}=\begin{cases}x & (x>3)\\ -x & (x<3)\end{cases}$$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로




$\displaystyle\lim_{x\to3+}f(x)=3$,

$\displaystyle\lim_{x\to3-}f(x)=-3$

따라서

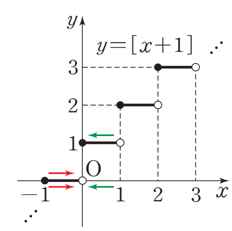
$$\lim_{x\to3+}\frac{x^2-3x}{|x-3|}\neq\lim_{x\to3-}\frac{x^2-3x}{|x-3|}$$

이므로 $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{|x-3|}$의 값은 존재하지 않는다.

(2) $0\le x<1$일 때, $1\le x+1<2$이므로 $[x+1]=1$

$-1\le x<0$일 때, $0\le x+1<1$이므로 $[x+1]=0$

즉, 함수 $y=[x+1]$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로




$\displaystyle\lim_{x\to0+}[x+1]=1$,

$\displaystyle\lim_{x\to0-}[x+1]=0$

따라서

$$\lim_{x\to0+}[x+1]\neq\lim_{x\to0-}[x+1]$$

이므로 $\displaystyle\lim_{x\to0}[x+1]$의 값은 존재하지 않는다.

05-**1** 답 (1) **0** (2) **1** (3) **−1**

(1) $g(x)=t$로 놓으면 $x\to-1-$일 때 $t=1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-1-}f(g(x))=f(1)=0$

(2) $g(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to1-$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0+}f(g(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=1$

(3) $f(x)=s$로 놓으면 $x\to2+$일 때 $s\to1+$이므로

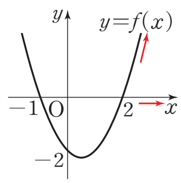
$\displaystyle\lim_{x\to2+}g(f(x))=\lim_{s\to1+}g(s)=-1$

**연습문제** 17~18쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ④ | **2** ④ | **3** ㄱ, ㄷ | **4** 4 | **5** ③ |
| **6** ③ | **7** −3 | **8** ② | **9** ④ | **10** −1 |
| **11** ① | | | | |

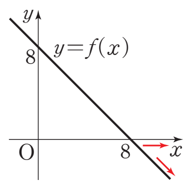
**1** ① $f(x)=x^2-x-2$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값도 한없이 커지므로

$\lim_{x\to\infty}(x^2-x-2)=\infty$



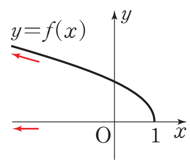

② $f(x)=8-x$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim_{x\to\infty}(8-x)=-\infty$



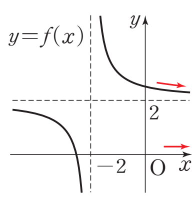

③ $f(x)=\sqrt{1-x}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}=\infty$



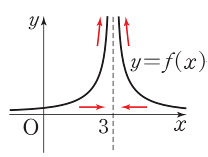

④ $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+2}=\dfrac{1}{x+2}+2$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{x+2}=2$




⑤ $f(x)=\dfrac{1}{|x-3|}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x$의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\lim_{x\to3}\dfrac{1}{|x-3|}=\infty$




따라서 극한값이 존재하는 것은 ④이다.

**2** $\lim_{x\to-1-}f(x)=2$이므로 $a=2$

$\therefore a+\lim_{x\to a-}f(x)=2+\lim_{x\to2-}f(x)$

$=2+(-1)=1$

**3** ㄱ. $\lim_{x\to-2-}f(x)=0$

ㄴ. $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=-1$

$\therefore \lim_{x\to-1}f(x)=-1$

ㄷ. $\lim_{x\to1+}f(x)=2,\ \lim_{x\to1-}f(x)=0$

즉, $\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

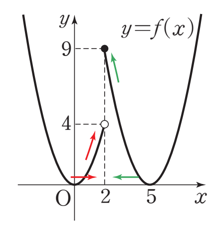
**4** $\lim_{x\to-2}f(x)=2,\ \lim_{x\to0}f(x)=0,\ \lim_{x\to1+}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to-2}f(x)+\lim_{x\to0}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=4$

**5** 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=9,\ \lim_{x\to2-}f(x)=4$

$\therefore \lim_{x\to2+}f(x)-\lim_{x\to2-}f(x)=5$



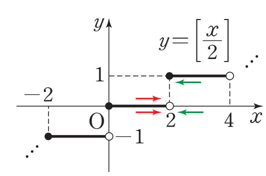

**6** ㄱ. $2\le x<4$일 때, $1\le\dfrac{x}{2}<2$이므로

$\left[\dfrac{x}{2}\right]=1$

$0\le x<2$일 때, $0\le\dfrac{x}{2}<1$이므로

$\left[\dfrac{x}{2}\right]=0$

함수 $y=\left[\dfrac{x}{2}\right]$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로




$\lim_{x\to2+}\left[\dfrac{x}{2}\right]=1,$

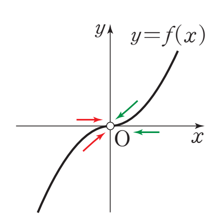
$\lim_{x\to2-}\left[\dfrac{x}{2}\right]=0$

즉, $\lim_{x\to2+}\left[\dfrac{x}{2}\right]\neq\lim_{x\to2-}\left[\dfrac{x}{2}\right]$이므로 $\lim_{x\to2}\left[\dfrac{x}{2}\right]$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(x)=\dfrac{x^3}{|x|}$이라 하면

$f(x)=\begin{cases}x^2 & (x>0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




$\therefore \lim_{x\to0+}f(x)=0,\ \lim_{x\to0-}f(x)=0$

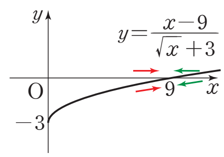
즉, $\lim_{x\to0+}\dfrac{x^3}{|x|}=\lim_{x\to0-}\dfrac{x^3}{|x|}=0$이므로

$\lim_{x\to0}\dfrac{x^3}{|x|}=0$

ㄷ. $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{(x-9)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}=\dfrac{(x-9)(\sqrt{x}-3)}{x-9}$

$=\sqrt{x}-3$

함수 $y=\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로




$\lim\limits_{x\to 9+}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}=0$,

$\lim\limits_{x\to 9-}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}=0$

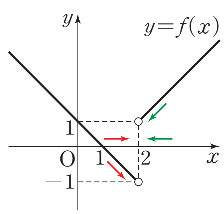
즉, $\lim\limits_{x\to 9+}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}=\lim\limits_{x\to 9-}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}=0$

ㄹ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{|x-2|}$라 하면

$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x>2) \\ -x+1 & (x<2) \end{cases}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




$\therefore \lim\limits_{x\to 2+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=-1$

즉, $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-2|}\neq\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-2|}$이므로

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-2|}$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**7** $x>2$일 때, $f(x)=x^2-4x+3$이므로

$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}(x^2-4x+3)=-1$

$x<2$일 때, $f(x)=x+k$이므로

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}(x+k)=k+2$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$의 값이 존재하려면

$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}f(x)$이어야 하므로

$-1=k+2$

$\therefore k=-3$

**8** $f(x)=\begin{cases} -x^2+ax+b & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ x(x-2) & (-1<x<1) \end{cases}$이므로

$\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1+}x(x-2)=3$

$\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1-}(-x^2+ax+b)$

$=-a+b-1$

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(-x^2+ax+b)$

$=a+b-1$

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}x(x-2)=-1$

모든 실수 $x$에서 극한값이 존재하려면

$\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}f(x)$이어야 하므로

$3=-a+b-1$, $a+b-1=-1$

$\therefore a-b=-4$, $a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$

$\therefore ab=-4$

**9** $x-1=t$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $t\to -1+$이므로

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x-1)=\lim\limits_{t\to -1+}f(t)=-1$

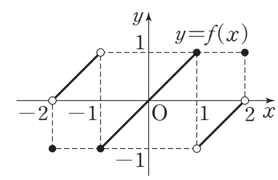
$f(x)=s$로 놓으면 $x\to 1+$일 때 $s\to -1-$이므로

$\lim\limits_{x\to 1+}f(f(x))=\lim\limits_{s\to -1-}f(s)=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0+}f(x-1)+\lim\limits_{x\to 1+}f(f(x))=-1+2=1$

**10** 정의역에 속하는 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로




$\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=-1$,

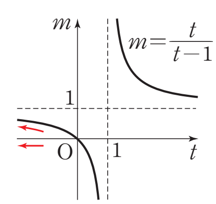
$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1+}f(x)+\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=-1$

**11** $\dfrac{t}{t-1}=m$으로 놓으면

$\dfrac{t}{t-1}=\dfrac{1}{t-1}+1$이므로

함수 $m=\dfrac{t}{t-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



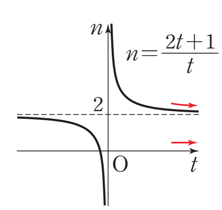

$t\to -\infty$일 때 $m\to 1-$이므로

$\lim\limits_{t\to -\infty}f\left(\dfrac{t}{t-1}\right)=\lim\limits_{m\to 1-}f(m)=0$

$\dfrac{2t+1}{t}=n$으로 놓으면

$\dfrac{2t+1}{t}=\dfrac{1}{t}+2$이므로

함수 $n=\dfrac{2t+1}{t}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




$t\to\infty$일 때 $n\to 2+$이므로

$\lim\limits_{t\to\infty}f\left(\dfrac{2t+1}{t}\right)=\lim\limits_{n\to 2+}f(n)=3$

$\therefore \lim\limits_{t\to -\infty}f\left(\dfrac{t}{t-1}\right)-2\lim\limits_{t\to\infty}f\left(\dfrac{2t+1}{t}\right)=0-2\times 3=-6$

# Ⅰ-1 02 함수의 극한값의 계산

## 함수의 극한에 대한 성질

**개념 Check** 20쪽

**1** 답 (1) **11** (2) **15** (3) **5** (4) $\mathbf{\frac{7}{25}}$

**문제** 22~26쪽

**01-1** 답 $-\frac{5}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+f(x)}{x-f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2+\frac{f(x)}{x}}{1-\frac{f(x)}{x}}$$
$$=\frac{\lim_{x\to 0}2+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}}{\lim_{x\to 0}1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}}$$
$$=\frac{2+3}{1-3}=-\frac{5}{2}$$

**01-2** 답 **4**

$$\lim_{x\to 2}(x^2+1)f(x)=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)}{x+2}\times(x+2)(x^2+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x+2}\times\lim_{x\to 2}(x+2)(x^2+1)$$
$$=\frac{1}{5}\times 4\times 5=4$$

**01-3** 답 $-1$

$x-3=t$로 놓으면 $x\to 3$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x-3)}{x-3}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=2$$
$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$$
$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x-2f(x)}{x+f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{2f(x)}{x}}{1+\frac{f(x)}{x}}$$
$$=\frac{\lim_{x\to 0}1-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}}{\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}}$$
$$=\frac{1-2\times 2}{1+2}=-1$$

**01-4** 답 $-17$

$2f(x)-g(x)=h(x)$로 놓으면 $\lim_{x\to 2}h(x)=8$

$g(x)=2f(x)-h(x)$, $\lim_{x\to 2}f(x)=3$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{3f(x)-4g(x)}{f(x)+2g(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{3f(x)-4\{2f(x)-h(x)\}}{f(x)+2\{2f(x)-h(x)\}}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{-5f(x)+4h(x)}{5f(x)-2h(x)}$$
$$=\frac{-5\lim_{x\to 2}f(x)+4\lim_{x\to 2}h(x)}{5\lim_{x\to 2}f(x)-2\lim_{x\to 2}h(x)}$$
$$=\frac{-5\times 3+4\times 8}{5\times 3-2\times 8}=-17$$

**01-5** 답 $-\frac{5}{6}$

$3f(x)-g(x)=h(x)$로 놓으면 $\lim_{x\to\infty}h(x)=2$

$g(x)=3f(x)-h(x)$, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{3f(x)+g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2\{3f(x)-h(x)\}}{3f(x)+3f(x)-h(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5f(x)+2h(x)}{6f(x)-h(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5+\frac{2h(x)}{f(x)}}{6-\frac{h(x)}{f(x)}}$$
$$=\frac{\lim_{x\to\infty}(-5)+2\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}}{\lim_{x\to\infty}6-\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}}$$
$$=\frac{-5+2\times 0}{6-0}=-\frac{5}{6}$$

**02-1** 답 (1) **5** (2) $-2$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) **16**

(1) 분자를 인수분해하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$$

(2) 분모, 분자를 각각 인수분해하면

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^3+x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-x+1}{x-1}$$
$$=\frac{2+1+1}{-2}=-2$$

(3) 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

(4) 분모를 유리화하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x+2)(\sqrt{x+2}+2)$$
$$=4(2+2)=16$$

**02-2** 답 **4**

$$\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)f(x)}{x^2-4}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)f(x)}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x-2}=\frac{f(-2)}{-4}$$

따라서 $-\frac{f(-2)}{4}=-1$이므로 $f(-2)=4$

**03-1** 답 (1) **4** (2) **0** (3) **1** (4) $\boldsymbol{\infty}$

(1) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 $x^2$으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=4$$

(2) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 $x^2$으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{2x^2+x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}=0$$

(3) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 $x$로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}}}=1$$

(4) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 $x$로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}=\infty$$

**03-2** 답 $-\frac{2}{5}$

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}-4x}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{t^2+1}+4t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}+4}=-\frac{2}{5}$$

**04-1** 답 (1) $-\infty$ (2) $-\frac{1}{4}$ (3) **3** (4) $-\frac{4}{3}$

(1) 최고차항인 $x^2$으로 묶으면

$$\lim_{x\to\infty}(-x^2+4x-5)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(-1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)$$
$$=-\infty$$

(2) 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}(2x-\sqrt{4x^2+x})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-\sqrt{4x^2+x})(2x+\sqrt{4x^2+x})}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{2x+\sqrt{4x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{2+\sqrt{4+\frac{1}{x}}}=-\frac{1}{4}$$

(3) 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x})(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x})}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}}=3$$

(4) 분모를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4x^2-3x}-2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2-3x}+2x}{(\sqrt{4x^2-3x}-2x)(\sqrt{4x^2-3x}+2x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2-3x}+2x}{-3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{3}{x}}+2}{-3}=-\frac{4}{3}$$

**04-2** 답 **1**

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x+2}+x)$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+2t+2}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+2t+2}-t)(\sqrt{t^2+2t+2}+t)}{\sqrt{t^2+2t+2}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t+2}{\sqrt{t^2+2t+2}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{2+\frac{2}{t}}{\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}}+1}=1$$

**05-1** 답 (1) $\frac{5}{9}$ (2) $\frac{1}{2}$

(1) $\frac{x^2}{x+2}-\frac{1}{3}$을 통분한 후 약분하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{x^2}{x+2}-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}\times\frac{3x^2-x-2}{3(x+2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}\times\frac{(3x+2)(x-1)}{3(x+2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{3x+2}{3(x+2)}=\frac{3+2}{3\times3}=\frac{5}{9}$$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-1$을 통분한 후 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2-x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x(x-1)}\times\frac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x(x-1)}\times\frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x(x-1)}\times\frac{-x}{\sqrt{x+1}+x+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{(x-1)(\sqrt{x+1}+x+1)}$$
$$=\frac{-1}{-1\times2}=\frac{1}{2}$$

**05-2** 답 $\dfrac{1}{18}$

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}x^2\left(\frac{1}{3}+\frac{x}{\sqrt{9x^2+3}}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}t^2\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{\sqrt{9t^2+3}}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(t^2\times\frac{\sqrt{9t^2+3}-3t}{3\sqrt{9t^2+3}}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{t^2\times\frac{(\sqrt{9t^2+3}-3t)(\sqrt{9t^2+3}+3t)}{3\sqrt{9t^2+3}(\sqrt{9t^2+3}+3t)}\right\}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2}{3(9t^2+3+3t\sqrt{9t^2+3})}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{9t^2+3+\sqrt{81t^4+27t^2}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{9+\frac{3}{t^2}+\sqrt{81+\frac{27}{t^2}}}=\frac{1}{18}$$

## 2 함수의 극한의 응용

**문제** 28～31쪽

**06-1** 답 (1) $\boldsymbol{a=-1,\ b=-2}$ (2) $\boldsymbol{a=-12,\ b=20}$
(3) $\boldsymbol{a=5,\ b=-2}$ (4) $\boldsymbol{a=8,\ b=\frac{1}{6}}$

(1) $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서 $\lim\limits_{x\to-1}(x^2+a)=0$

$1+a=0$ $\therefore a=-1$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x-1)=-2$$

$\therefore b=-2$

(2) $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서 $\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=0$

$4+2a+b=0$ $\therefore b=-2a-4$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+a+2}{x+2}$$
$$=\frac{a+4}{4}$$

즉, $\dfrac{a+4}{4}=-2$이므로

$a+4=-8$ $\therefore a=-12$

이를 ㉠에 대입하면

$b=24-4=20$

(3) $x\to-1$일 때 (분자)$\to0$이고, $0$이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$에서 $\lim\limits_{x\to-1}(\sqrt{x+a}+b)=0$

$\sqrt{-1+a}+b=0$ $\therefore b=-\sqrt{a-1}$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a-1}}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x^2-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1})}{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a-1})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1})}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1})}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1})$$
$$=-2\times2\sqrt{a-1}=-4\sqrt{a-1}$$

즉, $-4\sqrt{a-1}=-8$이므로

$\sqrt{a-1}=2$, $a-1=4$ $\therefore a=5$

이를 ㉠에 대입하면

$b=-\sqrt{5-1}=-2$

(4) $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서 $\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x+a}-3)=0$

$\sqrt{1+a}-3=0$, $\sqrt{a+1}=3$

$a+1=9$ $\therefore a=8$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}$$
$$=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

$\therefore b=\dfrac{1}{6}$

**07-1** 답 $-3$

(가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+4x+3}=3$이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다. ...... ㉠

(나)에서 $\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{x^2-3x-4}=2$에서 $x\to4$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서 $\lim_{x\to4}f(x)=0$

$\therefore f(4)=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=3(x-4)(x+a)$ ($a$는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{x^2-3x-4}&=\lim_{x\to4}\frac{3(x-4)(x+a)}{(x+1)(x-4)}\\&=\lim_{x\to4}\frac{3(x+a)}{x+1}\\&=\frac{3(a+4)}{5}\end{aligned}$$

즉, $\frac{3(a+4)}{5}=2$이므로 $a+4=\frac{10}{3}$

$\therefore a=-\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=3(x-4)\left(x-\frac{2}{3}\right)=(x-4)(3x-2)$이므로

$f(1)=-3\times1=-3$

**07-2** 답 $14$

(가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$이므로 $f(x)-2x^3$은 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다. ...... ㉠

(나)에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-3$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서 $\lim_{x\to0}f(x)=0$

$\therefore f(0)=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)-2x^3=x^2+ax$, 즉 $f(x)=2x^3+x^2+ax$ ($a$는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3+x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}(2x^2+x+a)=a$$

$\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=2x^3+x^2-3x$이므로

$f(2)=16+4-6=14$

**08-1** 답 $3$

$x>0$일 때, 주어진 부등식의 각 변을 $x$로 나누면

$$\frac{3x+1}{x}<\frac{f(x)}{x}<\frac{3x+4}{x}$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x}=3$, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{x}=3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$$

**08-2** 답 $2$

$x^2>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x^2$으로 나누면

$$\frac{2x^2-5x-3}{x^2}<f(x)<\frac{2x^2+2x-1}{x^2}$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x-3}{x^2}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2x-1}{x^2}=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=2$$

**08-3** 답 $\frac{4}{3}$

$x\ge0$일 때, $\sqrt{4x+1}>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 제곱하면

$4x+1<\{f(x)\}^2<4x+3$

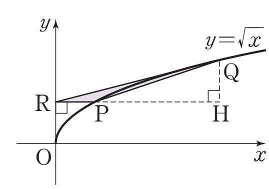
또 $x\ge0$일 때, $3x+2>0$이므로 각 변을 $3x+2$로 나누면

$$\frac{4x+1}{3x+2}<\frac{\{f(x)\}^2}{3x+2}<\frac{4x+3}{3x+2}$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{3x+2}=\frac{4}{3}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{4x+3}{3x+2}=\frac{4}{3}$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{3x+2}=\frac{4}{3}$$

**09-1** 답 $2$




점 Q에서 직선 PR에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{QH}=\sqrt{t+2}-\sqrt{t}$,

$\overline{PR}=t$이므로

$$\begin{aligned}S(t)&=\frac{1}{2}\times\overline{PR}\times\overline{QH}\\&=\frac{t(\sqrt{t+2}-\sqrt{t})}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t}}{S(t)}&=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t}}{\frac{t(\sqrt{t+2}-\sqrt{t})}{2}}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{2}{\sqrt{t}(\sqrt{t+2}-\sqrt{t})}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{2(\sqrt{t+2}+\sqrt{t})}{\sqrt{t}(\sqrt{t+2}-\sqrt{t})(\sqrt{t+2}+\sqrt{t})}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{2(\sqrt{t+2}+\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t+2}+\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{t}}+1}{1}\\&=2\end{aligned}$$

09-**2** 답 $\frac{1}{2}$

곡선 $y=\frac{1}{8}x^2$에 $x=a$를 대입하면

$y=\frac{1}{8}a^2 \qquad \therefore \mathrm{A}\left(a,\ \frac{1}{8}a^2\right)$

원 $x^2+(y-1)^2=1$에 $x=a$를 대입하면

$a^2+(y-1)^2=1,\ (y-1)^2=1-a^2$

$y-1=\pm\sqrt{1-a^2} \qquad \therefore y=1\pm\sqrt{1-a^2}$

$\therefore \mathrm{B}(a,\ 1-\sqrt{1-a^2}),\ \mathrm{C}(a,\ 1+\sqrt{1-a^2})$

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}=\frac{1}{8}a^2,\ \overline{\mathrm{PB}}=1-\sqrt{1-a^2},\ \overline{\mathrm{PC}}=1+\sqrt{1-a^2}$이므로

$$\lim_{a\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{PC}}}{\overline{\mathrm{PB}}}=\lim_{a\to0+}\frac{\frac{1}{8}a^2(1+\sqrt{1-a^2})}{1-\sqrt{1-a^2}}$$
$$=\frac{1}{8}\lim_{a\to0+}\frac{a^2(1+\sqrt{1-a^2})^2}{(1-\sqrt{1-a^2})(1+\sqrt{1-a^2})}$$
$$=\frac{1}{8}\lim_{a\to0+}\frac{a^2(2-a^2+2\sqrt{1-a^2})}{a^2}$$
$$=\frac{1}{8}\lim_{a\to0+}(2-a^2+2\sqrt{1-a^2})$$
$$=\frac{1}{8}\times4=\frac{1}{2}$$

## 연습문제 32~34쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ③ | **2** $\frac{1}{2}$ | **3** $\frac{5}{6}$ | **4** 3 | **5** ㄱ, ㄷ |
| **6** $-1$ | **7** ⑤ | **8** $-\frac{3}{2}$ | **9** ④ | **10** $\frac{5}{4}$ |
| **11** $-1$ | **12** 13 | **13** ④ | **14** ② | **15** 27 |
| **16** $\frac{9}{2}$ | **17** 8 | **18** $-1$ | **19** ③ | **20** 9 |
| **21** 4 | **22** ④ | | | |

**1** $\lim_{x\to0+}f(x)=-1,\ \lim_{x\to0-}f(x)=2,\ \lim_{x\to0+}g(x)=3,$

$\lim_{x\to0-}g(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to0+}\{f(x)+kg(x)\}=\lim_{x\to0+}f(x)+k\lim_{x\to0+}g(x)$$
$$=-1+k\times3=3k-1$$
$$\lim_{x\to0-}\{f(x)+kg(x)\}=\lim_{x\to0-}f(x)+k\lim_{x\to0-}g(x)$$
$$=2+k\times1=k+2$$

이때 $\lim_{x\to0}\{f(x)+kg(x)\}$의 값이 존재하므로

$3k-1=k+2 \qquad \therefore k=\frac{3}{2}$

**2** $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$이고, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha$ ($\alpha$는 실수)라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+f(x)}{2x^2-3f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{f(x)}{x}\times\frac{1}{x}}{2-\frac{3f(x)}{x}\times\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{x}\times\frac{1}{x}\right\}}{\lim_{x\to\infty}2-3\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{x}\times\frac{1}{x}\right\}}$$
$$=\frac{1+\alpha\times0}{2-3\alpha\times0}=\frac{1}{2}$$

**3** $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=3 \qquad \therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{x+3f(x)}{3x^2+4f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{3f(x)}{x}}{3x+\frac{4f(x)}{x}}$$
$$=\frac{\lim_{x\to0}1+3\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}}{3\lim_{x\to0}x+4\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}}$$
$$=\frac{1+3\times3}{4\times3}=\frac{5}{6}$$

**4** $3f(x)+g(x)=h(x),\ f(x)-g(x)=k(x)$로 놓으면

$\lim_{x\to1}h(x)=8,\ \lim_{x\to1}k(x)=2$

$h(x)+k(x)=4f(x),\ h(x)-3k(x)=4g(x)$이므로

$f(x)=\frac{h(x)+k(x)}{4},\ g(x)=\frac{h(x)-3k(x)}{4}$

$$\therefore \lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{h(x)+k(x)}{4}+\frac{h(x)-3k(x)}{4}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-k(x)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\{\lim_{x\to1}h(x)-\lim_{x\to1}k(x)\}=\frac{1}{2}(8-2)=3$$

**5** ㄱ. $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\beta$ ($\alpha,\ \beta$는 실수)라 하면

$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}[\{f(x)+g(x)\}-f(x)]=\beta-\alpha$

ㄴ. [반례] $f(x)=x,\ g(x)=\frac{1}{x}$이면 $\lim_{x\to0}f(x)=0,$

$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=1$이지만 $\lim_{x\to0}g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to a}g(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$ ($\alpha,\ \beta$는 실수)라 하면

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{g(x)\times\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\alpha\beta$

ㄹ. [반례] $f(x)=g(x)=\begin{cases} 0 & (x\ge 0) \\ 1 & (x<0) \end{cases}$이면

$\lim_{x\to 0}\{f(x)-g(x)\}=0$이지만 $\lim_{x\to 0}f(x)$, $\lim_{x\to 0}g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

**6** $\lim_{x\to -2-}\frac{f(x)}{x+2}+\lim_{x\to -2+}\frac{f(x)}{x+2}$

$=\lim_{x\to -2-}\frac{x^2+x-2}{x+2}+\lim_{x\to -2+}\frac{-x^2-2x}{x+2}$

$=\lim_{x\to -2-}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}+\lim_{x\to -2+}\frac{-x(x+2)}{x+2}$

$=\lim_{x\to -2-}(x-1)+\lim_{x\to -2+}(-x)=-3+2=-1$

**7** ① $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x+3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-3)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-3}{x+1}=-\frac{1}{2}$

② $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$

③ $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$

④ $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)(x-1)}{3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x-1}{3x^2+2}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}=\frac{2}{3}$

⑤ $\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+1}-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{x}}=4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

**8** $x=-t$로 놓으면 $x\to -\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2-x-2x}}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+t}+2t}{-t-\sqrt{t^2+1}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{t}}+2}{-1-\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-\frac{3}{2}$

**9** $x=-t$로 놓으면 $x\to -\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2-ax+3}-\sqrt{x^2+2x-3})$

$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+at+3}-\sqrt{t^2-2t-3})$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+at+3}-\sqrt{t^2-2t-3})(\sqrt{t^2+at+3}+\sqrt{t^2-2t-3})}{\sqrt{t^2+at+3}+\sqrt{t^2-2t-3}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(a+2)t+6}{\sqrt{t^2+at+3}+\sqrt{t^2-2t-3}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{a+2+\frac{6}{t}}{\sqrt{1+\frac{a}{t}+\frac{3}{t^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{t}-\frac{3}{t^2}}}=\frac{a+2}{2}$

즉, $\frac{a+2}{2}=2$이므로 $a+2=4$

$\therefore a=2$

**10** $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=1$

$\therefore a=1$

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{3-x}-\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{1}{x-1}\times\frac{x-1}{2(3-x)}\right\}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2(3-x)}=\frac{1}{4}$

$\therefore b=\frac{1}{4}$

$\therefore a+b=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

**11** $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서 $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x^2+3}+a)=0$

$2+a=0 \qquad \therefore a=-2$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\frac{1}{2}$

$\therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore ab=-2\times\frac{1}{2}=-1$

**12** $x\to 3$일 때 (분자)$\to 0$이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to 0$에서 $\lim_{x\to 3}(x^3+ax^2+bx)=0$

$27+9a+3b=0 \quad \therefore b=-3a-9 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^3+ax^2-(3a+9)x}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x(x-3)(x+a+3)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x(x+a+3)}$$
$$=\frac{1}{3(a+6)}$$

즉, $\frac{1}{3(a+6)}=\frac{1}{12}$이므로 $a+6=4 \quad \therefore a=-2$

이를 ㉠에 대입하면 $b=6-9=-3$

$\therefore a^2+b^2=4+9=13$

**13** $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=6$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서 $\lim_{x\to 2}f(x)=0$

$\therefore f(2)=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}$의 값이 존재하고, $x\to -1$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$에서 $\lim_{x\to -1}f(x)=0$

$\therefore f(-1)=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=a(x+1)(x-2)\ (a\neq 0)$라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{a(x+1)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}a(x+1)=3a$$

즉, $3a=6$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=2(x+1)(x-2)=2x^2-2x-4$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x-4}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)=2$$

**14** $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{3x^2}=0$에서 $f(x)-2x^3$은 일차 이하의 함수이므로 $f(x)-2x^3=ax+b$, 즉 $f(x)=2x^3+ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하자.

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-1}{x+1}=7$에서 $x\to -1$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서 $\lim_{x\to -1}\{f(x)-1\}=0$

$\therefore f(-1)=1$

$f(-1)=1$에서 $-2-a+b=1 \quad \therefore b=a+3$

즉, $f(x)=2x^3+ax+a+3$이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{2x^3+ax+a+2}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x^2-2x+a+2)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}(2x^2-2x+a+2)=a+6$$

즉, $a+6=7$이므로 $a=1$

따라서 $f(x)=2x^3+x+4$이므로 $f(1)=2+1+4=7$

**15** $|f(x)-3x|<3$이므로 $-3<f(x)-3x<3$

$\therefore 3x-3<f(x)<3x+3$

$x>1$일 때, $3x-3>0$이므로 각 변을 세제곱하면

$(3x-3)^3<\{f(x)\}^3<(3x+3)^3$

또 $x>1$일 때, $x^3+1>0$이므로 각 변을 $x^3+1$로 나누면

$$\frac{(3x-3)^3}{x^3+1}<\frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1}<\frac{(3x+3)^3}{x^3+1}$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-3)^3}{x^3+1}=27$, $\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+3)^3}{x^3+1}=27$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1}=27$

**16** $x>\frac{2}{3}$일 때, $\frac{(3x-2)^2}{x}>0$이므로 주어진 부등식의 각 변에 $\frac{(3x-2)^2}{x}$을 곱하면

$$\frac{(3x-2)^2}{x\sqrt{4x^2+2}}<(3x-2)^2f(x)<\frac{(3x-2)^2}{2x^2}$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-2)^2}{x\sqrt{4x^2+2}}=\frac{9}{2}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-2)^2}{2x^2}=\frac{9}{2}$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to\infty}(3x-2)^2f(x)=\frac{9}{2}$

**17** 점 $\mathrm{P}(a, b)\ (0<a<2,\ 0<b<2)$는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로 $a^2+b^2=4 \quad \therefore b=\sqrt{4-a^2}\ (\because b>0)$

두 점 $\mathrm{P}(a, \sqrt{4-a^2})$, $\mathrm{A}(2, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{\sqrt{4-a^2}}{a-2}(x-2)$$

이때 점 B는 이 직선과 $y$축의 교점이므로 $\mathrm{B}\left(0, \frac{2\sqrt{4-a^2}}{2-a}\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{BO}}=\frac{2\sqrt{4-a^2}}{2-a}$

또 $\mathrm{H}(a, 0)$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{4-a^2}$

$$\therefore \lim_{a\to 2-}(\overline{\mathrm{BO}}\times\overline{\mathrm{PH}})=\lim_{a\to 2-}\left(\frac{2\sqrt{4-a^2}}{2-a}\times\sqrt{4-a^2}\right)$$
$$=\lim_{a\to 2-}\frac{2(4-a^2)}{2-a}$$
$$=\lim_{a\to 2-}\frac{2(2+a)(2-a)}{2-a}$$
$$=\lim_{a\to 2-}2(2+a)=8$$

**18** $x=-t$로 놓으면 $x\to -\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+ax}+bx)$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-at}-bt)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-at}-bt)(\sqrt{t^2-at}+bt)}{\sqrt{t^2-at}+bt}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(1-b^2)t^2-at}{\sqrt{t^2-at}+bt} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠의 값이 존재하려면 분모와 분자의 차수가 같아야 하므로

$1-b^2=0,\ -a\neq 0$ $\quad\therefore a\neq 0,\ b=1\ (\because b>0)$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{-at}{\sqrt{t^2-at}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-a}{\sqrt{1-\frac{a}{t}}+1}=-\frac{a}{2}$$

즉, $-\frac{a}{2}=1$이므로 $a=-2$

$\therefore a+b=-2+1=-1$

**19** ㈎에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)}{x^3}=2$이므로 $f(x)g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이다. …… ㉠

㈏에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=-4$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x^2$을 인수로 갖는다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)g(x)=2x^2(x+a)\ (a\neq 0)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2(x+a)}{x^2}=\lim_{x\to 0}2(x+a)=2a$$

즉, $2a=-4$이므로 $a=-2$

$\therefore f(x)g(x)=2x^2(x-2)$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 상수항과 계수가 모두 정수이므로 $f(x)=2x^2$, $g(x)=x-2$일 때 $f(2)$의 값이 최대가 된다.

따라서 $f(2)$의 최댓값은 8이다.

**20** $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=2$에서 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$의 차수가 같고 최고차항의 계수의 비가 2이다.

또 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=3$에서 $f(x)-g(x)$는 일차함수이므로 $f(x)$, $g(x)$는 모두 일차함수이다.

따라서 $f(x)=2ax+b$, $g(x)=ax+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b-c}{x-2}=3 \qquad \therefore a=3$$

$\therefore f(x)=6x+b,\ g(x)=3x+c$

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)+g(x)}{x+1}$의 값이 존재하고, $x\to -1$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to -1}\{f(x)+g(x)\}=0$ $\quad\therefore f(-1)+g(-1)=0$

$-6+b-3+c=0$ $\quad\therefore b+c=9$

$$\therefore \lim_{x\to -1}\frac{f(x)+g(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{6x+b+3x+c}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{9x+9}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{9(x+1)}{x+1}=9$$

**21** 주어진 부등식의 각 변을 $x-2$로 나누면

(i) $x>2$일 때, $\frac{x^2-4}{x-2}\le\frac{f(x)}{x-2}\le\frac{2x^2-4x}{x-2}$

$\quad\therefore x+2\le\frac{f(x)}{x-2}\le 2x$

(ii) $x<2$일 때, $\frac{2x^2-4x}{x-2}\le\frac{f(x)}{x-2}\le\frac{x^2-4}{x-2}$

$\quad\therefore 2x\le\frac{f(x)}{x-2}\le x+2$

$\lim_{x\to 2}(x+2)=4$, $\lim_{x\to 2}2x=4$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=4$$

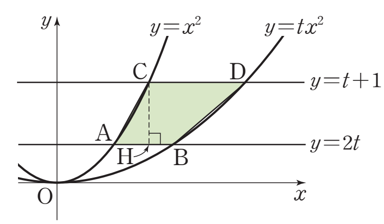
**22** $\mathrm{A}(\sqrt{2t},\ 2t)$, $\mathrm{B}(\sqrt{2},\ 2t)$, $\mathrm{C}(\sqrt{t+1},\ t+1)$, $\mathrm{D}\left(\sqrt{\frac{t+1}{t}},\ t+1\right)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}-\sqrt{2t}=\sqrt{2}(1-\sqrt{t})$

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{\frac{t+1}{t}}-\sqrt{t+1}=\sqrt{\frac{t+1}{t}}(1-\sqrt{t})$

점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{CH}}=(t+1)-2t=1-t$




$\therefore S(t)$
$$=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}})\times\overline{\mathrm{CH}}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{2}(1-\sqrt{t})+\sqrt{\frac{t+1}{t}}(1-\sqrt{t})\right\}(1-t)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{\frac{t+1}{t}}\right)(1-\sqrt{t})(1-t)$$

$$\therefore \lim_{t\to 1-}\frac{S(t)}{(1-t)^2}$$
$$=\lim_{t\to 1-}\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{\frac{t+1}{t}}\right)(1-\sqrt{t})(1-t)}{(1-t)^2}$$
$$=\lim_{t\to 1-}\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{\frac{t+1}{t}}\right)(1-\sqrt{t})(1+\sqrt{t})}{2(1-t)(1+\sqrt{t})}$$
$$=\lim_{t\to 1-}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{t+1}{t}}}{2(1+\sqrt{t})}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

## Ⅰ-2 01 함수의 연속

### 함수의 연속

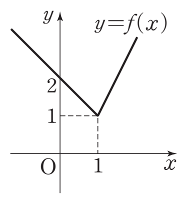
**개념 Check** 37쪽

**1** 답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$
(3) $(-\infty, 3]$ (4) $(-\infty, 2), (2, \infty)$

**문제** 38~42쪽

**01-1** 답 (1) **연속** (2) **불연속** (3) **불연속** (4) **불연속**

(1) $x=1$에서의 함숫값은 $f(1)=1$




$x\to1$일 때의 극한값은

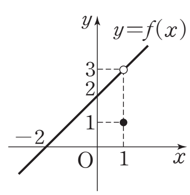
$\lim\limits_{x\to1+} f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(2x-1)=1$

$\lim\limits_{x\to1-} f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(-x+2)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to1} f(x)=1$

따라서 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(2) $x=1$에서의 함숫값은 $f(1)=1$




$x\to1$일 때의 극한값은

$\lim\limits_{x\to1} f(x)$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

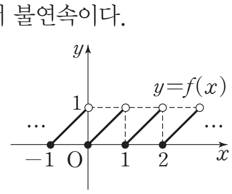
$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+2)=3$

따라서 $\lim\limits_{x\to1} f(x)\neq f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(3) 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$은 $x=1$일 때 분모가 0이므로 $x=1$에서 정의되지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(4) $x=1$에서의 함숫값은




$f(1)=1-[1]=0$

$x\to1$일 때의 극한을 조사하면

$\lim\limits_{x\to1+} f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(x-[x])$

$=\lim\limits_{x\to1+}(x-1)=0$

$\lim\limits_{x\to1-} f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(x-[x])=\lim\limits_{x\to1-}x=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to1+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to1-} f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

**02-1** 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $x\to1$일 때의 극한값은

$\lim\limits_{x\to1+} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to1-} f(x)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to1} f(x)=0$

ㄴ. $x\to2$일 때의 극한을 조사하면

$\lim\limits_{x\to2+} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to2-} f(x)=1$

즉, $\lim\limits_{x\to2+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to2-} f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to2} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

ㄷ. (i) $x=1$에서의 함숫값은 $f(1)=1$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)\neq f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(ii) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(iii) $x=3$에서의 함숫값은 $f(3)=1$

$x\to3$일 때의 극한값은

$\lim\limits_{x\to3+} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to3-} f(x)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to3} f(x)=1$

즉, $\lim\limits_{x\to3} f(x)=f(3)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(i)~(iii)에서 불연속인 $x$의 값은 1, 2의 2개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

**03-1** 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $x\to-1$일 때의 극한을 조사하면

$\lim\limits_{x\to-1+} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to-1+} f(x)\times\lim\limits_{x\to-1+} g(x)$

$=0\times(-1)=0$

$\lim\limits_{x\to-1-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to-1-} f(x)\times\lim\limits_{x\to-1-} g(x)$

$=1\times1=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to-1+} f(x)g(x)\neq\lim\limits_{x\to-1-} f(x)g(x)$

즉, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)g(x)$의 값이 존재하지 않는다.

ㄴ. $x=0$에서의 함숫값은 $f(g(0))=f(-1)=0$

$g(x)=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t=-1$이므로 $x\to0$일 때의 극한값은 $\lim\limits_{x\to0} f(g(x))=f(-1)=0$

즉, $\lim\limits_{x\to0} f(g(x))=f(g(0))$이므로 함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $x=1$에서의 함숫값은 $g(f(1))=g(2)=0$

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to-1-$이고, $x\to1-$일 때 $t\to2-$이므로 $x\to1$일 때의 극한을 조사하면

$\lim\limits_{x\to1+} g(f(x))=\lim\limits_{t\to-1-} g(t)=1$

$\lim_{x\to1-} g(f(x))=\lim_{t\to2-} g(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to1+} g(f(x))\neq \lim_{x\to1-} g(f(x))$

즉, $\lim_{x\to1} g(f(x))$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $g(f(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**04-1** 답 $\frac{1}{6}$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이면 $\lim_{x\to3} f(x)=f(3)$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=a$$

$$\begin{aligned}\therefore a&=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}\\&=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}\\&=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}\\&=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

**04-2** 답 1

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이면 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+a}{x-1}=b$ …… ㉠

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to1}(x^2+x+a)=0$

$1+1+a=0$ $\therefore a=-2$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+2)=3$

$\therefore b=3$

$\therefore a+b=-2+3=1$

**04-3** 답 $-9$

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=f(1)$

이때

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+} x(x-2)=-1$,

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-}(-x^2+ax+b)=-1+a+b$,

$f(1)=-1$이므로

$-1=-1+a+b$

$\therefore a+b=0$ …… ㉠

또 $f(-2)=5$에서

$-4-2a+b=5$

$\therefore 2a-b=-9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=3$

$\therefore ab=-9$

**05-1** 답 4

$x\neq3$일 때, $f(x)=\frac{x^2+ax-6}{x-3}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이면 $x=3$에서 연속이므로 $f(3)=\lim_{x\to3} f(x)$에서

$f(3)=\lim_{x\to3}\frac{x^2+ax-6}{x-3}$ …… ㉠

$x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to3}(x^2+ax-6)=0$

$9+3a-6=0$ $\therefore a=-1$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}f(3)&=\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x+2)(x-3)}{x-3}\\&=\lim_{x\to3}(x+2)=5\end{aligned}$$

$\therefore a+f(3)=-1+5=4$

**05-2** 답 $\frac{1}{2}$

$x\neq4$일 때, $f(x)=\frac{\sqrt{x+a}-1}{x-4}$

함수 $f(x)$가 $x\geq3$인 모든 실수 $x$에서 연속이면 $x=4$에서 연속이므로 $f(4)=\lim_{x\to4} f(x)$에서

$f(4)=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+a}-1}{x-4}$ …… ㉠

$x\to4$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to4}(\sqrt{x+a}-1)=0$

$\sqrt{4+a}-1=0$ $\therefore a=-3$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}f(4)&=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x-3}-1}{x-4}\\&=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x-3}-1)(\sqrt{x-3}+1)}{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)}\\&=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)}\\&=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x-3}+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

**05-3** 답 4

$x \neq -1$, $x \neq 1$일 때, $f(x)=\dfrac{x^4+ax^3+b}{x^2-1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이면 $x=-1$, $x=1$에서 연속이므로

(i) $f(-1)=\lim\limits_{x\to-1} f(x)$에서

$f(-1)=\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^4+ax^3+b}{x^2-1}$

$x\to-1$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim\limits_{x\to-1}(x^4+ax^3+b)=0$

$1-a+b=0 \quad \therefore a-b=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $f(1)=\lim\limits_{x\to1} f(x)$에서

$f(1)=\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^4+ax^3+b}{x^2-1}$

$x\to1$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim\limits_{x\to1}(x^4+ax^3+b)=0$

$1+a+b=0 \quad \therefore a+b=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-1$

따라서 $f(-1)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1}(x^2+1)=2$,

$f(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}(x^2+1)=2$이므로

$f(-1)+f(1)=2+2=4$

## 2 연속함수의 성질

**문제** 45～47쪽

**06-1** 답 ㄱ, ㄴ

두 함수 $f(x)=x^2-5x$, $g(x)=x^2-3$은 다항함수이므로 모든 실수 $x$에서 연속이다.

ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $2g(x)$는 모든 실수 $x$에서 연속이므로 함수 $f(x)+2g(x)$도 모든 실수 $x$에서 연속이다.

ㄴ. $\{f(x)\}^2=f(x)\times f(x)$이므로 함수 $\{f(x)\}^2$은 모든 실수 $x$에서 연속이다.

ㄷ. $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{x^2-3}{x^2-5x}=\dfrac{x^2-3}{x(x-5)}$은 $x(x-5)=0$,

즉 $x=0$, $x=5$에서 정의되지 않으므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=0$, $x=5$에서 불연속이다.

ㄹ. $\dfrac{1}{f(x)-g(x)}=\dfrac{1}{(x^2-5x)-(x^2-3)}=\dfrac{1}{-5x+3}$은 $-5x+3=0$, 즉 $x=\dfrac{3}{5}$에서 정의되지 않으므로 함수 $\dfrac{1}{f(x)-g(x)}$은 $x=\dfrac{3}{5}$에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수에서 모든 실수 $x$에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

**06-2** 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 두 함수 $3f(x)$, $5g(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 함수 $3f(x)-5g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. 두 함수 $2f(x)$, $g(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 함수 $2f(x)g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄷ. $\{g(x)\}^2=g(x)\times g(x)$이므로 함수 $\{g(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속이다.

ㄹ. $f(a)=0$이면 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=a$에서 정의되지 않으므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=a$에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수에서 $x=a$에서 항상 연속인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

**07-1** 답 (1) **최댓값: 2, 최솟값: $-\dfrac{17}{4}$**

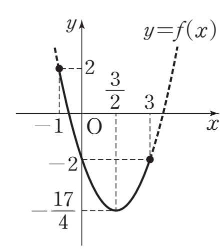
(2) **최댓값: 3, 최솟값: 1**

(3) **최댓값: 2, 최솟값: 0**

(4) **최댓값: 3, 최솟값: $\dfrac{7}{3}$**

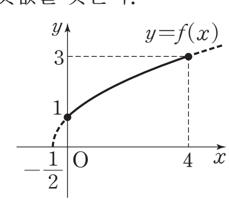
(1) 함수 $f(x)=x^2-3x-2$는 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 2, $x=\dfrac{3}{2}$에서 최솟값 $-\dfrac{17}{4}$을 갖는다.



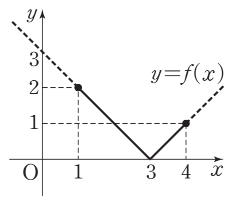

(2) 함수 $f(x)=\sqrt{2x+1}$은 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 3, $x=0$에서 최솟값 1을 갖는다.

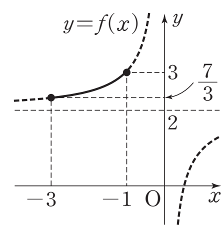



(3) 함수 $f(x)=|x-3|$은 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는
$x=1$에서 최댓값 2,
$x=3$에서 최솟값 0을 갖는다.

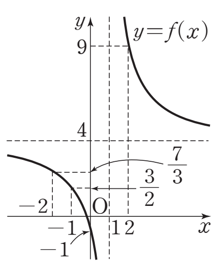



(4) 함수 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x}=-\dfrac{1}{x}+2$는 닫힌구간 $[-3,\ -1]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
함수 $f(x)$는
$x=-1$에서 최댓값 3,
$x=-3$에서 최솟값 $\dfrac{7}{3}$을 갖는다.




07-**2** 답 ㄱ, ㄷ

함수 $f(x)=\dfrac{4x+1}{x-1}=\dfrac{5}{x-1}+4$의 그래프는 다음 그림과 같다.




ㄱ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 불연속이고 최댓값과 최솟값은 없다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.
ㄷ. 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 최댓값은 $-1$, 최솟값은 없다.
ㄹ. 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 최댓값은 없고, 최솟값은 9이다.
따라서 보기의 구간에서 최솟값이 존재하지 않는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

08-**1** 답 **3개**

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 연속이고
$f(-1)f(0)>0$, $f(0)f(1)<0$, $f(1)f(2)>0$,
$f(2)f(3)<0$, $f(3)f(4)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-1,\ 4)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

08-**2** 답 $-2,\ -1$

$f(x)=x^2+2x+a$라 하면
함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고,
$f(0)=a$
$f(1)=1+2+a=a+3$
이때 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 $f(0)f(1)<0$이어야 하므로
$a(a+3)<0$ $\quad\therefore\ -3<a<0$
따라서 구하는 정수 $a$의 값은 $-2,\ -1$이다.

## 연습문제

48~50쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ④ | **2** 3 | **3** ㄴ, ㄷ | **4** ㄴ | **5** $-16$ |
| **6** ⑤ | **7** $-1$ | **8** 0 | **9** ④ | |
| **10** $0<a<3$ | | **11** ㄱ, ㄴ | **12** ④ | **13** 4개 |
| **14** ② | **15** $-3,\ 3$ | **16** ㄴ, ㄷ | **17** $-4$ | **18** ④ |
| **19** 3개 | | | | |

**1** ①, ②, ③ 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 정의되지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다.
④ $x=1$에서의 함숫값은 $f(1)=3$
$x\to1$일 때의 극한값은
$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(x+2)=3$
$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}3=3$
$\therefore\ \lim\limits_{x\to1}f(x)=3$
즉, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
⑤ $x=1$에서의 함숫값은 $f(1)=1$
$x\to1$일 때의 극한을 조사하면
$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$
$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{-(x-1)}{x-1}=-1$
$\therefore\ \lim\limits_{x\to1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1-}f(x)$
즉, $\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.
따라서 $x=1$에서 연속인 함수는 ④이다.

**2** $f(x)=\dfrac{1}{x-\dfrac{16}{x}}=\dfrac{1}{\dfrac{x^2-16}{x}}=\dfrac{x}{x^2-16}$는 $x=0$,

$x^2-16=0$, 즉 $x=-4$, $x=0$, $x=4$에서 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$가 불연속인 $x$의 값은 $-4$, $0$, $4$의 3개이다.

**3** ㄱ. $x\to 1$일 때의 극한을 조사하면

$\lim_{x\to 1+} f(x)=2$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=1$

즉, $\lim_{x\to 1+} f(x)\neq \lim_{x\to 1-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $1<x<3$에서 연속이므로 $1<a<3$인 실수 $a$에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$이다.

ㄷ. (i) $x=0$에서의 함숫값은 $f(0)=1$

$x\to 0$일 때의 극한값은

$\lim_{x\to 0+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)=0$

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(ii) $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 불연속인 $x$의 값은 0, 1의 2개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**4** ㄱ. $x\to -1$일 때의 극한값은

$$\lim_{x\to -1+} \{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to -1+} f(x)-\lim_{x\to -1+} g(x)=1-1=0$$

$$\lim_{x\to -1-} \{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to -1-} f(x)-\lim_{x\to -1-} g(x)=-1-(-1)=0$$

$\therefore \lim_{x\to -1} \{f(x)-g(x)\}=0$

ㄴ. $x=0$에서의 함숫값은

$f(0)g(0)=0\times 0=0$

$x\to 0$일 때의 극한값은

$$\lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)\times\lim_{x\to 0+} g(x)=0\times(-1)=0$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)\times\lim_{x\to 0-} g(x)=0\times(-1)=0$$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)g(x)=0$

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $x=1$에서의 함숫값은

$g(f(1))=g(-1)=1$

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to 1+$일 때 $t\to -1+$이고, $x\to 1-$일 때 $t\to 1-$이므로 $x\to 1$일 때의 극한을 조사하면

$\lim_{x\to 1+} g(f(x))=\lim_{t\to -1+} g(t)=1$

$\lim_{x\to 1-} g(f(x))=\lim_{t\to 1-} g(t)=-1$

$\therefore \lim_{x\to 1+} g(f(x))\neq \lim_{x\to 1-} g(f(x))$

즉, $\lim_{x\to 1} g(f(x))$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

**5** 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이면 $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$이므로

$\lim_{x\to 2}\dfrac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to 2}(a\sqrt{x-1}+b)=0$

$a+b=0$ $\qquad\therefore b=-a$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x-1}-a}{x-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{a(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{a}{\sqrt{x-1}+1}\\&=\frac{a}{2}\end{aligned}$$

즉, $\dfrac{a}{2}=2$이므로 $a=4$

$\therefore b=-a=-4$

$\therefore ab=4\times(-4)=-16$

**6** 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=-1$, $x=3$에서 연속이므로

(i) $\lim_{x\to -1+} |f(x)|=\lim_{x\to -1-} |f(x)|=|f(-1)|$

이때

$\lim_{x\to -1+} |f(x)|=\lim_{x\to -1+} |x|=1$,

$\lim_{x\to -1-} |f(x)|=\lim_{x\to -1-} |x+a|=|a-1|$,

$|f(-1)|=1$이므로

$1=|a-1|$

$a-1=-1$ 또는 $a-1=1$ $\qquad\therefore a=2$ ($\because a>0$)

(ii) $\lim_{x\to3+}|f(x)|=\lim_{x\to3-}|f(x)|=|f(3)|$

이때

$\lim_{x\to3+}|f(x)|=\lim_{x\to3+}|bx-2|=|3b-2|$,

$\lim_{x\to3-}|f(x)|=\lim_{x\to3-}|x|=3$,

$|f(3)|=|3b-2|$이므로

$|3b-2|=3$

$3b-2=-3$ 또는 $3b-2=3$

$\therefore\ b=\frac{5}{3}\ (\because\ b>0)$

(i), (ii)에서 $a=2$, $b=\frac{5}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{11}{3}$

**7** 함수 $(x-a)f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}(x-a)f(x)=\lim_{x\to1-}(x-a)f(x)=(1-a)f(1)$

이때

$\lim_{x\to1+}(x-a)f(x)=(1-a)\times(-2)=2a-2$,

$\lim_{x\to1-}(x-a)f(x)=(1-a)\times1=1-a$,

$(1-a)f(1)=2a-2$이므로

$2a-2=1-a$

$\therefore\ a=1$

따라서 $f(a)=f(1)=-2$이므로

$a+f(a)=1+(-2)=-1$

**8** $x\neq a$일 때, $f(x)=\frac{x^2+8x+16}{x-a}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이면 $x=a$에서 연속이므로

$f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$에서

$f(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^2+8x+16}{x-a}$

$x\to a$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to a}(x^2+8x+16)=0$

$a^2+8a+16=0$

$(a+4)^2=0$

$\therefore\ a=-4$

$$\therefore\ f(a)=f(-4)=\lim_{x\to-4}\frac{x^2+8x+16}{x+4}$$
$$=\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)^2}{x+4}$$
$$=\lim_{x\to-4}(x+4)=0$$

**9** $f(x)=x^2+9$, $g(x)=-6x$이므로

$f(x)+g(x)=x^2-6x+9$
$=(x-3)^2$

$\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}=\frac{x^2+9}{(x-3)^2}$이므로 $(x-3)^2=0$, 즉 $x=3$에서 정의되지 않는다.

따라서 함수 $\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}$가 연속인 구간은

④ $(-\infty,\ 3)$, $(3,\ \infty)$이다.

**10** 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 $x$에서 연속이면 모든 실수 $x$에서

$g(x)=x^2-2ax+3a>0$

이차방정식 $x^2-2ax+3a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-3a<0$

$a(a-3)<0$

$\therefore\ 0<a<3$

**11** ㄱ. 임의의 실수 $a$에 대하여 $g(a)=b$라 하면 함수 $g(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a}g(x)=b$

$x=a$에서의 함숫값은

$f(g(a))=f(b)$

$g(x)=t$로 놓으면 $x\to a$일 때 $t\to b$이고, 함수 $f(x)$는 모든 실수 $x$에서 연속이므로

$x\to a$일 때의 극한값은

$\lim_{x\to a}f(g(x))=\lim_{t\to b}f(t)=f(b)$

$\lim_{x\to a}f(g(x))=f(g(a))$이므로 함수 $f(g(x))$는 $x=a$에서 연속이다.

즉, 함수 $f(g(x))$는 모든 실수 $x$에서 연속이다.

ㄴ. $f(x)+g(x)=h(x)$로 놓으면

$g(x)=h(x)-f(x)$

이때 두 함수 $f(x)$, $h(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 함수 $g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

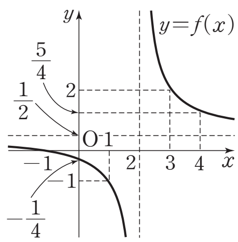
ㄷ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\geq0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이면

$f(x)g(x)=0$

두 함수 $f(x)$, $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

**12** 함수 $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




① 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.
② 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.
③ 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 최댓값은 $-1$, 최솟값은 없다.
④ 닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 최댓값은 없고, 최솟값은 2이다.
⑤ 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[3,\ 4]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.
따라서 최댓값이 존재하지 않는 구간은 ④이다.

**13** 함수 $f(x)$는 모든 실수 $x$에서 연속이고, $f(1)f(2)<0$, $f(4)f(5)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$, $(4,\ 5)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
이때 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로
$f(-1)f(-2)<0$, $f(-4)f(-5)<0$
즉, 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-5,\ -4)$, $(-2,\ -1)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 4개의 실근을 갖는다.

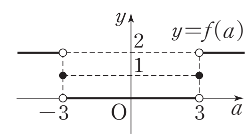
**14** $g(x)=f(x)-x^2$이라 하면 함수 $g(x)$는 모든 실수 $x$에서 연속이고,
$g(0)=f(0)-0^2=1-0=1$
$g(1)=f(1)-1^2=a^2-a-5-1=a^2-a-6$
이때 방정식 $g(x)=0$의 중근이 아닌 오직 하나의 실근이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재하려면 $g(0)g(1)<0$이어야 하므로
$a^2-a-6<0$
$(a+2)(a-3)<0 \qquad \therefore\ -2<a<3$
따라서 모든 정수 $a$의 값의 합은
$-1+0+1+2=2$

**15** 주어진 집합의 원소의 개수 $f(a)$는 이차방정식
$x^2+2(a+2)x+4a+13=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
의 실근의 개수와 같다.
이차방정식 ㉠의 판별식을 $D$라 하면
$\dfrac{D}{4}=(a+2)^2-(4a+13)$
$=a^2-9=(a+3)(a-3)$

(i) $f(a)=2$일 때, $\dfrac{D}{4}>0$이므로
$(a+3)(a-3)>0$
$\therefore\ a<-3$ 또는 $a>3$
(ii) $f(a)=1$일 때, $\dfrac{D}{4}=0$이므로
$(a+3)(a-3)=0$
$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=3$
(iii) $f(a)=0$일 때, $\dfrac{D}{4}<0$이므로
$(a+3)(a-3)<0$
$\therefore\ -3<a<3$
(i)~(iii)에서

$$f(a)=\begin{cases} 2 & (a<-3 \text{ 또는 } a>3) \\ 1 & (a=-3 \text{ 또는 } a=3) \\ 0 & (-3<a<3) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(a)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(a)$가 불연속인 $a$의 값은 $-3$, 3이다.




**16** ㄱ. $x=0$에서의 함숫값은
$f(0)+f(0)=2f(0)=2\times(-1)=-2$
$-x=t$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $t\to 0-$이고,
$x\to 0-$일 때 $t\to 0+$이므로
$x\to 0$일 때의 극한값은

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\{f(x)+f(-x)\}&=\lim_{x\to 0+}f(x)+\lim_{x\to 0+}f(-x)\\&=\lim_{x\to 0+}f(x)+\lim_{t\to 0-}f(t)\\&=1+(-1)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-}\{f(x)+f(-x)\}&=\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 0-}f(-x)\\&=\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{t\to 0+}f(t)\\&=-1+1=0\end{aligned}$$

$\therefore\ \lim_{x\to 0}\{f(x)+f(-x)\}=0$
즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)+f(-x)\}\neq f(0)+f(0)$이므로 함수 $f(x)+f(-x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
ㄴ. $x=0$에서의 함숫값은
$\{f(0)\}^2=(-1)^2=1$
$x\to 0$일 때의 극한값은
$\lim_{x\to 0+}\{f(x)\}^2=1^2=1$
$\lim_{x\to 0-}\{f(x)\}^2=(-1)^2=1$
$\therefore\ \lim_{x\to 0}\{f(x)\}^2=1$
즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)\}^2=\{f(0)\}^2$이므로 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $x=0$에서의 함숫값은

$f(f(0))=f(-1)=0$

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $t\to 1-$이고,

$x\to 0-$일 때 $t\to -1+$이므로

$x\to 0$일 때의 극한값은

$\lim_{x\to 0+} f(f(x))=\lim_{t\to 1-} f(t)=0$

$\lim_{x\to 0-} f(f(x))=\lim_{t\to -1+} f(t)=0$

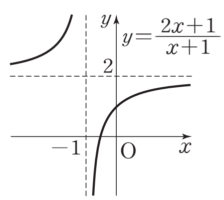
$\therefore \lim_{x\to 0} f(f(x))=0$

즉, $\lim_{x\to 0} f(f(x))=f(f(0))$이므로 함수 $f(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 보기의 함수에서 $x=0$에서 연속인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**17** 함수 $g(x)=2x+a$는 다항함수이므로 모든 실수 $x$에서 연속이다.

함수 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로




$t=2$일 때, $f(t)=0$

$t\neq 2$일 때, $f(t)=1$

$\therefore f(x)=\begin{cases} 1 & (x\neq 2) \\ 0 & (x=2) \end{cases}$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로 $f(2)g(2)=\lim_{x\to 2} f(x)g(x)$에서

$0\times(4+a)=1\times(4+a)$

$\therefore a=-4$

**18** 삼차함수 $f(x)$는 모든 실수 $x$에서 연속이므로 함수 $g(x)$는 $f(x)\neq 0$인 모든 실수 $x$에서 연속이다.

이때 $\lim_{x\to 3} g(x)=g(3)-1$에서 $\lim_{x\to 3} g(x)\neq g(3)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

즉, $f(3)=0$이므로 $g(3)=3$

$\therefore \lim_{x\to 3} g(x)=g(3)-1=3-1=2$

$\lim_{x\to 3} g(x)=2$에서

$\lim_{x\to 3} \dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=2$ …… ㉠

$x\to 3$일 때 (분모) $\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$에서

$\lim_{x\to 3} f(x+3)\{f(x)+1\}=0$

$f(6)\{f(3)+1\}=0$

$\therefore f(6)=0\ (\because f(3)=0)$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(3)=0$, $f(6)=0$이므로

$f(x)=(x-3)(x-6)(x+a)$ ($a$는 상수)라 하면

㉠에서

$\lim_{x\to 3} \dfrac{x(x-3)(x+3+a)\{f(x)+1\}}{(x-3)(x-6)(x+a)}=2$

$\lim_{x\to 3} \dfrac{x(x+3+a)\{f(x)+1\}}{(x-6)(x+a)}=2$

$\dfrac{3(6+a)(0+1)}{-3(3+a)}=2,\ -\dfrac{6+a}{3+a}=2 \qquad \therefore a=-4$

$\therefore f(x)=(x-3)(x-4)(x-6)$

이때 $f(5)\neq 0$이므로

$g(5)=\dfrac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}$

$=\dfrac{5\times 4\times 2\times\{2\times 1\times(-1)+1\}}{2\times 1\times(-1)}=20$

**19** $\lim_{x\to -1} \dfrac{f(x)}{x+1}=5$에서 $x\to -1$일 때 (분모) $\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$에서

$\lim_{x\to -1} f(x)=0 \qquad \therefore f(-1)=0$ …… ㉠

$\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1}=2$에서 $x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$에서

$\lim_{x\to 1} f(x)=0 \qquad \therefore f(1)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)=(x+1)(x-1)g(x)$ ($g(x)$는 다항식)라 하면

$\lim_{x\to -1} \dfrac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x-1)g(x)}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1} (x-1)g(x)$

$=-2g(-1)$

즉, $-2g(-1)=5$이므로 $g(-1)=-\dfrac{5}{2}$

$\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)g(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1} (x+1)g(x)$

$=2g(1)$

즉, $2g(1)=2$이므로 $g(1)=1$

이때 다항함수 $g(x)$는 모든 실수 $x$에서 연속이고, $g(-1)g(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖고 ㉠, ㉡에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

# Ⅱ-1 01 미분계수

## 미분계수

**개념 Check** 54쪽

**1** 답 (1) $-2$ (2) $-1$

(1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{1-5}{2}=-2$

(2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{0-2}{2}=-1$

**2** 답 (1) $-4$ (2) $7$

(1) $$\begin{aligned}f'(2)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{-4(2+\Delta x)+1\}-(-7)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-4\Delta x}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}(-4)=-4\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}f'(2)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(2+\Delta x)^2+3(2+\Delta x)\}-10}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^2+7\Delta x}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x+7)=7\end{aligned}$$

**3** 답 (1) $-4$ (2) $4$

(1) $f(x)=x^2-2x+5$라 하면 구하는 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=-1$에서의 미분계수와 같으므로

$$\begin{aligned}f'(-1)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(-1+\Delta x)^2-2(-1+\Delta x)+5\}-8}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^2-4\Delta x}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x-4)=-4\end{aligned}$$

(2) $f(x)=x^3+x$라 하면 구하는 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수와 같으므로

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(1+\Delta x)^3+(1+\Delta x)\}-2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^3+3(\Delta x)^2+4\Delta x}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\{(\Delta x)^2+3\Delta x+4\}=4\end{aligned}$$

**문제** 55~59쪽

**01-1** 답 **3**

함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 $a$에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(a+1)-f(a)}{a+1-a}\\&=\{(a+1)^2-5(a+1)+4\}-(a^2-5a+4)\\&=2a-4\end{aligned}$$

따라서 $2a-4=2$이므로 $a=3$

**01-2** 답 **2**

함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{2-0}{2}=1$

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(a+\Delta x)^2-3(a+\Delta x)+2\}-(a^2-3a+2)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^2+(2a-3)\Delta x}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x+2a-3)\\&=2a-3\end{aligned}$$

따라서 $1=2a-3$이므로 $a=2$

**01-3** 답 **$-12$**

함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{(2a+8)-4}{2}=a+2$

즉, $a+2=-2$이므로 $a=-4$

따라서 $f(x)=x^2-4x+4$이므로 함수 $f(x)$의 $x=-4$에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(-4)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(-4+\Delta x)-f(-4)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(-4+\Delta x)^2-4(-4+\Delta x)+4\}-36}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^2-12\Delta x}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x-12)=-12\end{aligned}$$

**02-1** 답 (1) **3** (2) **10**

(1) $$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{2h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times\frac{3}{2}\\&=\frac{3}{2}f'(a)=\frac{3}{2}\times2=3\end{aligned}$$

(2) $\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)+f(a)-f(a-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times3$

$\quad-\lim_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\times(-2)$

$=3f'(a)+2f'(a)=5f'(a)=5\times2=10$

**02-2** 답 **3**

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1+h)}{4h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1+h)}{4h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{4h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{4h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times\frac{1}{2}$

$\quad-\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}f'(1)-\frac{1}{4}f'(1)=\frac{1}{4}f'(1)$

따라서 $\frac{1}{4}f'(1)=\frac{3}{4}$이므로 $f'(1)=3$

**03-1** 답 (1) $\frac{1}{5}$ (2) **4** (3) $-24$

(1) $\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{(x-4)(x+1)}$

$=\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}\times\lim_{x\to4}\frac{1}{x+1}$

$=f'(4)\times\frac{1}{5}=1\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$

(2) $\lim_{x\to2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x^2)-f(4)}{(x-2)(x+2)}\times(x+2)\right\}$

$=\lim_{x\to2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\times\lim_{x\to2}(x+2)$

$=f'(4)\times4=1\times4=4$

(3) $\lim_{x\to4}\frac{x^2f(4)-16f(x)}{x-4}$

$=\lim_{x\to4}\frac{x^2f(4)-16f(4)+16f(4)-16f(x)}{x-4}$

$=\lim_{x\to4}\frac{(x^2-16)f(4)-16\{f(x)-f(4)\}}{x-4}$

$=\lim_{x\to4}(x+4)f(4)-16\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$

$=8f(4)-16f'(4)=8\times(-1)-16\times1=-24$

**04-1** 답 $-4$

$f(x+y)=f(x)+f(y)-3xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)\qquad\therefore f(0)=0$

미분계수의 정의에 의하여

$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2)+f(h)-6h\}-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-6h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-\lim_{h\to0}6$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-\lim_{h\to0}6$

$=f'(0)-6=2-6=-4$

**04-2** 답 $-1$

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1\qquad\therefore f(0)=1$

미분계수의 정의에 의하여

$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1)+f(h)+2h-1\}-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2h-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}+\lim_{h\to0}2$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}2$

$=f'(0)+2$

따라서 $1=f'(0)+2$이므로

$f'(0)=-1$

**05-1** 답 ㄱ, ㄷ

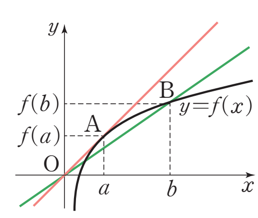
함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 $x=a$인 점을 $\mathrm{A}(a, f(a))$, $x=b$인 점을 $\mathrm{B}(b, f(b))$라 하자.

ㄱ. 직선 OA의 기울기는 $\frac{f(a)}{a}$

직선 OB의 기울기는 $\frac{f(b)}{b}$

오른쪽 그림에서 직선 OA의 기울기는 직선 OB의 기울기보다 크므로

$\frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$



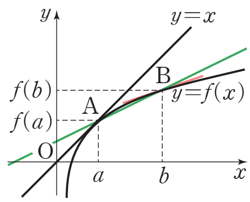

ㄴ. 직선 $y=x$가 $x=a$인 점에서 접하므로 $f'(a)$는 직선 $y=x$의 기울기와 같다.

$\therefore f'(a)=1$

ㄷ. $f'(b)$는 점 B에서의 접선의 기울기이고,

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기이다.

오른쪽 그림에서 점 B에서의 접선의 기울기는 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기보다 작으므로




$$f'(b)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 2 미분가능성과 연속성

### 문제 61~62쪽

**06-1** 답 (1) **$x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.**
(2) **$x=1$에서 연속이고 미분가능하다.**

(1) (i) $f(1)=0$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}|x^2-1|=\lim\limits_{x\to1+}(x^2-1)=0$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}|x^2-1|=\lim\limits_{x\to1-}(-x^2+1)=0$

즉, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|(1+h)^2-1|-0}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to0+}(h+2)=2$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|(1+h)^2-1|-0}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h^2-2h}{h}=\lim_{h\to0-}(-h-2)=-2$$

즉, $f'(1)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

(2) (i) $f(1)=3$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}3x=3$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(x^2+x+1)=3$

즉, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{3(1+h)-3}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{3h}{h}=3$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{\{(1+h)^2+(1+h)+1\}-3}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h^2+3h}{h}=\lim_{h\to0-}(h+3)=3$$

즉, $f'(1)$의 값이 존재하므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고 미분가능하다.

**07-1** 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=2$

ㄴ, ㄷ. (i) $x=-1$에서 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)\neq f(-1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이고, 미분가능하지 않다.

(ii) $x=1$에서 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이고, 미분가능하지 않다.

(iii) $x=2$에서 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)=2$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.
이때 $x=2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 꺾여 있으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

(iv) $x=3$에서 $\lim\limits_{x\to3}f(x)=f(3)=2$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.
이때 $x=3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 꺾여 있으므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 미분가능하지 않다.

(i)~(iv)에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이고, $x=-1$, $x=1$, $x=2$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 불연속인 $x$의 값은 2개, 미분가능하지 않은 $x$의 값은 4개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

### 연습문제 63~64쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** $\frac{5}{6}$ | **2** $\frac{14}{3}$ | **3** ⑤ | **4** ① | **5** 8 |
| **6** ② | **7** $-8$ | **8** ③ | **9** 12 | **10** ④ |
| **11** ㄴ, ㄷ | **12** ④ | **13** $\frac{1}{2}$ | **14** ㄱ, ㄴ | |

**1** $f(0)=3$, $f(5)=9$에서 $g(3)=0$, $g(9)=5$
따라서 함수 $g(x)$에서 $x$의 값이 3에서 9까지 변할 때의 평균변화율은
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{g(9)-g(3)}{9-3}=\frac{5-0}{6}=\frac{5}{6}$$

**2** 함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 $n$에서 $n+1$까지 변할 때의 평균변화율은
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}=f(n+1)-f(n)=n^2$$
따라서 함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율은
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}$$
$$=\frac{f(4)-f(3)+f(3)-f(2)+f(2)-f(1)}{3}$$
$$=\frac{3^2+2^2+1^2}{3}=\frac{14}{3}$$

**3** 함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때의 평균변화율은
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=h^2+2h+3$$
$$\therefore f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}(h^2+2h+3)=3$$

**4** $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(3+h)-4}{2h}=1$에서 $h\to0$일 때 (분모)$\to0$이고,
극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서
$$\lim_{h\to0}\{f(3+h)-4\}=0$$
$f(3)-4=0$ $\quad\therefore f(3)=4$
$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-4}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}f'(3)$$
즉, $\frac{1}{2}f'(3)=1$이므로 $f'(3)=2$
$\therefore f(3)+f'(3)=4+2=6$

**5** $\frac{1}{t}=h$로 놓으면 $t\to\infty$일 때 $h\to0$이므로
$$\lim_{t\to\infty}2t\left\{f\left(2+\frac{1}{t}\right)-f(2)\right\}=\lim_{h\to0}\frac{2}{h}\{f(2+h)-f(2)\}$$
$$=2\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=2f'(2)=2\times4=8$$

**6** $$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{f(x)-f(1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{f(x)-f(1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{(x+2)(x-1)}}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{(x+2)\times\frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+2)\times\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}$$
$$=3\times\frac{1}{f'(1)}=3\times\frac{1}{-2}=-\frac{3}{2}$$

**7** $$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}f(4)-2f(x)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}f(4)-2f(4)+2f(4)-2f(x)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{f(4)(\sqrt{x}-2)-2\{f(x)-f(4)\}}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{f(4)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}-2\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{f(4)}{\sqrt{x}+2}-2\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$
$$=\frac{f(4)}{4}-2f'(4)$$
$$=\frac{8}{4}-2\times5=-8$$

**8** $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)+f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$
$$\therefore f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+2h(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2h(h+2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}2(h+2)$$
$$=f'(0)+4=3+4=7$$

**9** 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 4이므로
$f'(1)=4$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-4h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-4h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-4h)-f(1)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-4h)-f(1)}{-4h}\times(-2)$$
$$=f'(1)+2f'(1)=3f'(1)$$
$$=3\times 4=12$$

**10** ㄱ. (i) $f(0)=0$

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}x=0$

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(-x)=0$

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h}{h}=1$

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h}{h}=-1$

즉, $f'(0)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $f(0)=0$

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(x^2-4x+3)=3$

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(x^2+4x+3)=3$

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. (i) $f(0)=0$

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(x^2+2x)=0$

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}4x=0$

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2+2h}{h}$
$=\lim_{h\to 0+}(h+2)=2$

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{4h}{h}=4$

즉, $f'(0)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 보기의 함수에서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

**11** ㄱ. $k(x)=x-1+f(x)$라 하면

$$k(x)=\begin{cases}2x-2 & (x\geq 1)\\ 0 & (x<1)\end{cases}$$

$\lim_{h\to 0+}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{2h-0}{h}=2$

$\lim_{h\to 0-}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{0-0}{h}=0$

즉, $k'(1)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $k(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $k(x)=(x-1)f(x)$라 하면

$$k(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & (x\geq 1)\\ -(x-1)^2 & (x<1)\end{cases}$$

$\lim_{h\to 0+}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2-0}{h}=\lim_{h\to 0+}h=0$

$\lim_{h\to 0-}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h^2-0}{h}$
$=\lim_{h\to 0-}(-h)=0$

즉, $k'(1)$의 값이 존재하므로 함수 $k(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄷ. $k(x)=f(x)g(x)$라 하면

$$k(x)=\begin{cases}(x-1)(2x-1) & (x\geq 1)\\ x(x-1) & (x<1)\end{cases}$$

$\lim_{h\to 0+}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h(2h+1)-0}{h}$
$=\lim_{h\to 0+}(2h+1)=1$

$\lim_{h\to 0-}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{h(1+h)-0}{h}$
$=\lim_{h\to 0-}(1+h)=1$

즉, $k'(1)$의 값이 존재하므로 함수 $k(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

따라서 보기의 함수에서 $x=1$에서 미분가능한 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**12** ① $f'(4)$는 점 $(4, f(4))$에서의 접선의 기울기와 같으므로 $f'(4)<0$

② $\lim_{x\to 3+}f(x)=2$, $\lim_{x\to 3-}f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to 3}f(x)=2$

③ 불연속인 $x$의 값은 3, 5의 2개이다.

④ $f'(x)=0$, 즉 접선의 기울기가 0인 $x$의 값은 1의 1개이다.

⑤ $x=3$, $x=5$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.
또 $x=2$에서 연속이지만 그래프가 꺾여 있으므로 미분가능하지 않다.
즉, 미분가능하지 않은 $x$의 값은 2, 3, 5의 3개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

**13** $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=1$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서 $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$

$f(1)-2=0 \quad \therefore f(1)=2$

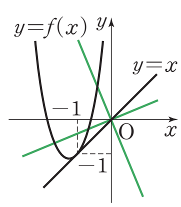
$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$

$g(1)=2f(1)$이므로 $g(1)=2\times2=4$

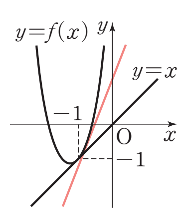
$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-xf(1)}{g(x)-xg(1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)+f(1)-xf(1)}{g(x)-g(1)+g(1)-xg(1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)-f(1)(x-1)}{g(x)-g(1)-g(1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)-f(1)(x-1)}{x-1}\times\frac{x-1}{g(x)-g(1)-g(1)(x-1)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-f(1)\right\}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}-g(1)}$$
$$=\{f'(1)-2\}\times\frac{1}{g'(1)-4}=(1-2)\times\frac{1}{2-4}=\frac{1}{2}$$

**14** ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$와 점 $(-1, -1)$에서 접하므로 $f'(-1)=1$

또 $a<0$일 때, 두 점 $(0, 0)$, $(a, f(a))$를 지나는 직선의 기울기는 1보다 작거나 같으므로 $\frac{f(a)}{a}\le1$

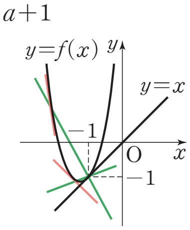



ㄴ. $-1<a<0$일 때, 오른쪽 그림에서 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기보다 크므로 $f'(a)>1$




ㄷ. $a<-1$일 때, 두 점 $(a, f(a))$, $(-1, -1)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{-1-f(a)}{-1-a}=\frac{f(a)+1}{a+1}$

오른쪽 그림에서 두 점 $(a, f(a))$, $(-1, -1)$을 지나는 직선의 기울기는 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기보다 크므로 $\frac{f(a)+1}{a+1}>f'(a)$




따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

# Ⅱ-1 02 도함수

## 1 도함수

**개념 Check** 67쪽

**1** 답 (가) $4xh$ (나) $4x$ (다) $4x-1$

**2** 답 (1) $y'=24x-16$ (2) $y'=-6x^2+2x$
(3) $y'=x^2-4x$ (4) $y'=4x^3+4x-2$

(1) $y=12x^2-16x+8$에서
$$y'=12(x^2)'-16(x)'+(8)'$$
$$=12\times2x-16\times1+0$$
$$=24x-16$$

(2) $y=-2x^3+x^2-3$에서
$$y'=-2(x^3)'+(x^2)'-(3)'$$
$$=-2\times3x^2+2x-0$$
$$=-6x^2+2x$$

(3) $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{3}{5}$에서
$$y'=\frac{1}{3}(x^3)'-2(x^2)'+\left(\frac{3}{5}\right)'$$
$$=\frac{1}{3}\times3x^2-2\times2x+0$$
$$=x^2-4x$$

(4) $y=x^4+2x^2-2x+5$에서
$$y'=(x^4)'+2(x^2)'-2(x)'+(5)'$$
$$=4x^3+2\times2x-2\times1+0$$
$$=4x^3+4x-2$$

**3** 답 (1) $y'=12x+1$ (2) $y'=3x^2-4x+3$
(3) $y'=3x^2-6x+2$ (4) $y'=(3x-1)(9x+17)$

(1) $y=(2x+1)(3x-1)$에서
$$y'=(2x+1)'(3x-1)+(2x+1)(3x-1)'$$
$$=2(3x-1)+(2x+1)\times3$$
$$=6x-2+6x+3=12x+1$$

(2) $y=(x^2+3)(x-2)$에서
$$y'=(x^2+3)'(x-2)+(x^2+3)(x-2)'$$
$$=2x(x-2)+(x^2+3)\times1$$
$$=2x^2-4x+x^2+3=3x^2-4x+3$$

(3) $y=x(x-1)(x-2)$에서
$$y'=(x)'(x-1)(x-2)+x(x-1)'(x-2)+x(x-1)(x-2)'$$
$$=(x-1)(x-2)+x(x-2)+x(x-1)$$
$$=x^2-3x+2+x^2-2x+x^2-x$$
$$=3x^2-6x+2$$

(4) $y=(x+3)(3x-1)^2$에서

$$\begin{aligned}y'&=(x+3)'(3x-1)^2+(x+3)\{(3x-1)^2\}'\\&=(3x-1)^2+(x+3)\times2(3x-1)\times3\\&=(3x-1)\{3x-1+6(x+3)\}\\&=(3x-1)(9x+17)\end{aligned}$$

## 문제 68~73쪽

**01-1** 답 (1) $-8$ (2) $5$

(1) $f(x)=-4x^3+2x^2-1$을 $x$에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}f'(x)&=-4(x^3)'+2(x^2)'-(1)'\\&=-4\times3x^2+2\times2x-0\\&=-12x^2+4x\end{aligned}$$

$\therefore f'(1)=-12+4=-8$

(2) $f(x)=(x+1)(x^2-3x+4)$를 $x$에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x+1)'(x^2-3x+4)+(x+1)(x^2-3x+4)'\\&=1\times(x^2-3x+4)+(x+1)(2x-3)\\&=x^2-3x+4+2x^2-x-3=3x^2-4x+1\end{aligned}$$

$\therefore f'(2)=12-8+1=5$

**01-2** 답 $2$

$f(x)=x^3+ax^2+(a-1)x+1$을 $x$에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x^3)'+a(x^2)'+(a-1)(x)'+(1)'\\&=3x^2+a\times2x+(a-1)\times1+0\\&=3x^2+2ax+a-1\end{aligned}$$

$f'(-2)=5$에서 $12-4a+a-1=5$

$-3a=-6 \qquad \therefore a=2$

**01-3** 답 $1$

$g(x)=(x^3+2x)f(x)$를 $x$에 대하여 미분하면

$g'(x)=(3x^2+2)f(x)+(x^3+2x)f'(x)$

$$\begin{aligned}\therefore g'(1)&=(3+2)f(1)+(1+2)f'(1)\\&=5f(1)+3f'(1)\\&=5\times(-1)+3\times2\\&=-5+6=1\end{aligned}$$

**02-1** 답 $10$

$f(1)=2$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-2}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{(x-1)(x+1)}\times(x+1)\right\}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\lim_{x\to1}(x+1)\\&=2f'(1)\end{aligned}$$

$f(x)=x^3+2x-1$에서 $f'(x)=3x^2+2$이므로

$2f'(1)=2(3+2)=10$

**02-2** 답 $3$

$f(1)=-2$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)+2}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}\times(-3)\\&=-3f'(1)\end{aligned}$$

$f(x)=-x^3+x^2-2$에서 $f'(x)=-3x^2+2x$이므로

$-3f'(1)=-3(-3+2)=3$

**02-3** 답 $36$

$h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}\\&=h'(1)\end{aligned}$$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$$\begin{aligned}h'(x)&=(-x^2+2x+3)'(2x^3+x^2+x-1)\\&\quad+(-x^2+2x+3)(2x^3+x^2+x-1)'\\&=(-2x+2)(2x^3+x^2+x-1)\\&\quad+(-x^2+2x+3)(6x^2+2x+1)\end{aligned}$$

$\therefore h'(1)=(-1+2+3)(6+2+1)=36$

**03-1** 답 $40$

$f(x)=x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6$이라 하면 $f(1)=5$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6-5}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\&=f'(1)\end{aligned}$$

따라서 $f'(x)=10x^9+9x^8+8x^7+7x^6+6x^5$이므로

$f'(1)=10+9+8+7+6=40$

**03-2** 답 $5$

$f(x)=x^n+x^2+2x$라 하면 $f(1)=4$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n+x^2+2x-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=9$$

이때 $f'(x)=nx^{n-1}+2x+2$이므로 $f'(1)=n+4$

따라서 $n+4=9$이므로 $n=5$

**03-3** 답 $37$

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^n+x-18}{x-2}=k$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고,

극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\displaystyle\lim_{x\to2}(x^n+x-18)=0$

$2^n+2-18=0,\ 2^n=16$

$\therefore n=4$

$f(x)=x^4+x$라 하면 $f(2)=18$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{x^4+x-18}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

이때 $f'(x)=4x^3+1$이므로

$f'(2)=32+1=33 \qquad \therefore k=33$

$\therefore n+k=4+33=37$

**04-1** 답 **54**

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{1}{4}f'(2)$$

즉, $\frac{1}{4}f'(2)=\frac{3}{4}$이므로 $f'(2)=3$

$f(x)=x^3+ax+b$에서 $f'(x)=3x^2+a$

$f'(2)=3$에서 $12+a=3 \qquad \therefore a=-9$

$f(x)=x^3-9x+b$이므로 $f(-1)=2$에서

$-1+9+b=2 \qquad \therefore b=-6$

$\therefore ab=(-9)\times(-6)=54$

**04-2** 답 **$-1$**

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to1}f(x)=0 \qquad \therefore f(1)=0$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$$

$f(x)=x^4+ax^2+b$에서 $f'(x)=4x^3+2ax$

$f'(1)=2$에서 $4+2a=2 \qquad \therefore a=-1$

$f(x)=x^4-x^2+b$이므로 $f(1)=0$에서

$1-1+b=0 \qquad \therefore b=0$

$\therefore a-b=-1$

**04-3** 답 **0**

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-2$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}f(x)=0 \qquad \therefore f(0)=0$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=f'(0)=-2$$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}=-1$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to1}\{f(x)+2\}=0 \qquad \therefore f(1)=-2$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)=-1$$

$f(x)$는 $f(0)=0$이고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(0)=-2$에서 $b=-2$

$f'(x)=3x^2+2ax-2$이므로

$f'(1)=-1$에서 $3+2a-2=-1 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=x^3-x^2-2x$이므로

$f(2)=8-4-4=0$

**05-1** 답 **9**

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이고 미분계수 $f'(1)$이 존재한다.

(i) $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$b+1=1+a \qquad \therefore a=b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{\{(1+h)^3+a(1+h)^2\}-(1+a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{h^3+(a+3)h^2+(2a+3)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\{h^2+(a+3)h+2a+3\}$$
$$=2a+3$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{\{b(1+h)+1\}-(1+a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{bh}{h}\ (\because ㉠)$$
$$=b$$

$\therefore 2a+3=b \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=-3 \qquad \therefore ab=9$

다른 풀이

$g(x)=x^3+ax^2$, $h(x)=bx+1$이라 하면

$g'(x)=3x^2+2ax$, $h'(x)=b$

(i) $x=1$에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$에서

$1+a=b+1 \qquad \therefore a=b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로 $g'(1)=h'(1)$에서

$3+2a=b \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=-3 \qquad \therefore ab=9$

**05-2** 답 **$-3$**

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서 연속이고 미분계수 $f'(a)$가 존재한다.

(i) $x=a$에서 연속이므로 $\lim_{x\to a-} f(x)=f(a)$에서

$3a+b=a^2-3a \qquad \therefore b=a^2-6a \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) 미분계수 $f'(a)$가 존재하므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\{(a+h)^2-3(a+h)\}-(a^2-3a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2+(2a-3)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}(h+2a-3)=2a-3$$
$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\{3(a+h)+b\}-(a^2-3a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{3h}{h}\ (\because ㉠)$$
$$=3$$

즉, $2a-3=3$이므로 $a=3$

이를 ㉠에 대입하면 $b=9-18=-9$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^2-3x & (x\geq 3) \\ 3x-9 & (x<3) \end{cases}$이므로

$f(2)=6-9=-3$

다른 풀이

$g(x)=x^2-3x$, $h(x)=3x+b$라 하면

$g'(x)=2x-3$, $h'(x)=3$

(i) $x=a$에서 연속이므로 $g(a)=h(a)$에서

$a^2-3a=3a+b \qquad \therefore b=a^2-6a \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $x=a$에서의 미분계수가 존재하므로 $g'(a)=h'(a)$에서

$2a-3=3 \qquad \therefore a=3$

이를 ㉠에 대입하면 $b=9-18=-9$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^2-3x & (x\geq 3) \\ 3x-9 & (x<3) \end{cases}$이므로

$f(2)=6-9=-3$

**06-1** 답 **199**

$x^{100}+ax+b$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 0이므로

$x^{100}+ax+b=(x+1)^2Q(x) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-a+b=0 \qquad \therefore a-b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$100x^{99}+a=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$

양변에 $x=-1$을 대입하면 $-100+a=0 \qquad \therefore a=100$

이를 ㉡에 대입하면 $100-b=1 \qquad \therefore b=99$

$\therefore a+b=100+99=199$

**06-2** 답 **10**

$x^8-x+3$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$($a$, $b$는 상수)라 하면

$x^8-x+3=(x-1)^2Q(x)+ax+b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$1-1+3=a+b \qquad \therefore a+b=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$8x^7-1=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=1$을 대입하면 $8-1=a \qquad \therefore a=7$

이를 ㉡에 대입하면 $7+b=3 \qquad \therefore b=-4$

따라서 $R(x)=7x-4$이므로

$R(2)=14-4=10$

**06-3** 답 **4**

$x^{10}+ax+b$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $2x-3$이므로

$x^{10}+ax+b=(x-1)^2Q(x)+2x-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b=2-3 \qquad \therefore a+b=-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$10x^9+a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+2$

양변에 $x=1$을 대입하면 $10+a=2 \qquad \therefore a=-8$

이를 ㉡에 대입하면 $-8+b=-2 \qquad \therefore b=6$

$\therefore a+2b=-8+12=4$

## 연습문제

74~76쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** $f'(x)=3x-1$ | | **2** ⑤ | **3** ② | **4** 3 |
| **5** 24 | **6** 2 | **7** ② | **8** ④ | **9** 2 |
| **10** ① | **11** 9 | **12** ① | **13** ③ | **14** ② |
| **15** ③ | **16** 15 | **17** ③ | **18** 18 | **19** 9 |
| **20** 7 | | | | |

**1** $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

도함수의 정의에 의하여

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+3xh-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3xh}{h}$

$=3x+\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$

$=3x+\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ ($\because$ ㉠)

$=3x+f'(0)=3x-1$

**2** $f(x)=(x^2-3x)(-2x+k)$에서

$f'(x)=(2x-3)(-2x+k)+(x^2-3x)\times(-2)$

$f'(1)=3$에서

$-(-2+k)+(-2)\times(-2)=3$

$6-k=3 \qquad \therefore k=3$

**3** $g(x)=(3x^2-12x+1)f(x)$에서

$g'(x)=(6x-12)f(x)+(3x^2-12x+1)f'(x)$

$g'(2)=11$에서

$(12-24+1)f'(2)=11$

$-11f'(2)=11 \qquad \therefore f'(2)=-1$

**4** $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고,

$f(a)=f(3)=f(5)$이므로

$f(x)=(x-a)(x-3)(x-5)+b$ ($b$는 상수)라 하면

$f'(x)=(x-3)(x-5)+(x-a)(x-5)+(x-a)(x-3)$

$f'(1)=14$에서

$(-2)\times(-4)+(1-a)\times(-4)+(1-a)\times(-2)=14$

$6a+2=14 \qquad \therefore a=2$

$\therefore f'(2)=(-1)\times(-3)=3$

**5** $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-4}{x^2-4}=2$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to2}\{f(x)-4\}=0 \qquad \therefore f(2)=4$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-4}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$

$=\frac{1}{4}f'(2)$

즉, $\frac{1}{4}f'(2)=2$이므로 $f'(2)=8$

또 $\lim_{x\to2}\frac{g(x)+1}{x-2}=8$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고,

극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to2}\{g(x)+1\}=0 \qquad \therefore g(2)=-1$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{g(x)+1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=8$

따라서 $h(x)=f(x)g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$

$=8\times(-1)+4\times8=24$

**6** $f(1)=g(1)=-4$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-g(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)+4-4-g(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+g(1)-g(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}\times(-1)$

$=f'(1)+g'(1)$

$f(x)=x^2-3x-2$, $g(x)=x^3-5$에서

$f'(x)=2x-3$, $g'(x)=3x^2$이므로

$f'(1)=-1$, $g'(1)=3$

$\therefore f'(1)+g'(1)=-1+3=2$

**7** $f(x)=x^{100}-x^{99}+x^{98}$이라 하면 $f(1)=1$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{x^{100}-x^{99}+x^{98}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

따라서 $f'(x)=100x^{99}-99x^{98}+98x^{97}$이므로

$f'(1)=100-99+98=99$

**8** $\lim_{x\to1}\frac{f(x+1)-2}{x^3-1}=-4$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고,

극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to1}\{f(x+1)-2\}=0 \qquad \therefore f(2)=2$

$x+1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to2$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x+1)-2}{x^3-1}=\lim_{t\to2}\frac{f(t)-2}{(t-1)^3-1}$

$=\lim_{t\to2}\frac{f(t)-f(2)}{t^3-3t^2+3t-2}$

$=\lim_{t\to2}\left\{\frac{f(t)-f(2)}{t-2}\times\frac{1}{t^2-t+1}\right\}$

$=\frac{1}{3}f'(2)$

즉, $\frac{1}{3}f'(2)=-4$이므로 $f'(2)=-12$

$f(x)=x^4+ax+b$에서 $f'(x)=4x^3+a$

$f'(2)=-12$에서 $32+a=-12 \qquad \therefore a=-44$

$f(x)=x^4-44x+b$이므로 $f(2)=2$에서

$16-88+b=2 \qquad \therefore b=74$

$\therefore a+b=-44+74=30$

**9** $\lim_{x\to3}\frac{f(x)+g(x)}{x-3}=1$에서 $x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to3}\{f(x)+g(x)\}=0$

$f(3)+g(3)=0 \qquad \therefore g(3)=-f(3)=-2$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to3}\frac{f(x)+g(x)}{x-3} &=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-2+2+g(x)}{x-3}\\ &=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)-g(3)+g(x)}{x-3}\\ &=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}+\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\\ &=f'(3)+g'(3)\end{aligned}$$

즉, $f'(3)+g'(3)=1$이므로 $g'(3)=0$ ($\because f'(3)=1$)

$g(x)=x^2+ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

$g'(x)=2x+a$

$g'(3)=0$에서 $6+a=0 \qquad \therefore a=-6$

$g(x)=x^2-6x+b$이므로

$g(3)=-2$에서 $9-18+b=-2 \qquad \therefore b=7$

따라서 $g(x)=x^2-6x+7$이므로

$g(1)=1-6+7=2$

**10** $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=7$이므로 $f(x)-x^3=7x^2+ax+b$, 즉 $f(x)=x^3+7x^2+ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하자.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=18$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to1}f(x)=0 \qquad \therefore f(1)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=18$

$f'(x)=3x^2+14x+a$이므로 $f'(1)=18$에서

$3+14+a=18 \qquad \therefore a=1$

$f(x)=x^3+7x^2+x+b$이므로 $f(1)=0$에서

$1+7+1+b=0 \qquad \therefore b=-9$

따라서 $f(x)=x^3+7x^2+x-9$, $f'(x)=3x^2+14x+1$이므로

$f(-1)+f'(-1)=-4+(-10)=-14$

**11** $f'(1)=a$ ($a$는 상수)라 하면 $f(x)=2x^3-2x^2-ax$이므로

$f'(x)=6x^2-4x-a$

$\therefore f'(1)=6-4-a=2-a$

즉, $a=2-a$이므로 $a=1$

따라서 $f'(x)=6x^2-4x-1$이므로

$f'(-1)=6+4-1=9$

**12** $f(x)=ax^2+b$에서 $f'(x)=2ax$

$4f(x)=\{f'(x)\}^2+x^2+4$에서

$4(ax^2+b)=(2ax)^2+x^2+4$

$4ax^2+4b=(4a^2+1)x^2+4$

위의 등식이 모든 실수 $x$에 대하여 성립하므로

$4a=4a^2+1$, $4b=4$

$4a^2-4a+1=0$에서

$(2a-1)^2=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$4b=4$에서 $b=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$이므로

$f(2)=2+1=3$

**13** 두 일차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(0)=4$, $g(0)=1$이므로 $f(x)=ax+4$, $g(x)=bx+1$ ($a\neq0$, $b\neq0$)이라 하면

$f'(x)=a$, $g'(x)=b$

$\{f(x)+g(x)\}'=1$에서 $a+b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\{f(x)g(x)\}'=-4x-2$에서

$a(bx+1)+(ax+4)\times b=-4x-2$

$2abx+a+4b=-4x-2$

$\therefore 2ab=-4$, $a+4b=-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

따라서 $f(x)=2x+4$, $g(x)=-x+1$이므로

$f(1)+g(2)=6+(-1)=5$

**14** 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 미분가능하면 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이고 미분계수 $f'(0)$이 존재한다.

(i) $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$에서

$1=b$

(ii) 미분계수 $f'(0)$이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to0+}\frac{ah+b-b}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{ah}{h}=a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to0-}\frac{ah^2-2h+1-b}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{ah^2-2h}{h}\ (\because b=1)\\&=\lim_{h\to0-}(ah-2)\\&=-2\end{aligned}$$

$\therefore a=-2$

$\therefore a+b=-2+1=-1$

다른 풀이

$g(x)=ax+b$, $h(x)=ax^2-2x+1$이라 하면

$g'(x)=a$, $h'(x)=2ax-2$

(i) $x=0$에서 연속이므로 $g(0)=h(0)$에서

$b=1$

(ii) $x=0$에서의 미분계수가 존재하므로 $g'(0)=h'(0)$에서

$a=-2$

$\therefore a+b=-2+1=-1$

**15** $k(x)=f(x)g(x)=\begin{cases} (x+3)(2x+a) & (x\ge -3) \\ -(x+3)(2x+a) & (x<-3) \end{cases}$라 하자.

함수 $k(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면

$x=-3$에서 미분가능하므로 미분계수 $k'(-3)$이 존재한다.

$\lim_{h\to 0+}\dfrac{k(-3+h)-k(-3)}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\dfrac{h(-6+2h+a)-0}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}(-6+2h+a)$

$=-6+a$

$\lim_{h\to 0-}\dfrac{k(-3+h)-k(-3)}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\dfrac{-h(-6+2h+a)-0}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}(6-2h-a)$

$=6-a$

따라서 $-6+a=6-a$이므로 $a=6$

다른 풀이

$k(x)=(x+3)(2x+a)$,

$h(x)=-(x+3)(2x+a)$라 하면

$k'(x)=2x+a+(x+3)\times 2=4x+a+6$

$h'(x)=-(2x+a)-(x+3)\times 2=-4x-a-6$

$x=-3$에서의 미분계수가 존재하므로

$k'(-3)=h'(-3)$에서

$-6+a=6-a \qquad \therefore a=6$

**16** $x^6+x^5+x^2+3$을 $x^2(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수)라 하면

$x^6+x^5+x^2+3=x^2(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$3=c$, $6=a+b+c \qquad \therefore a+b=3$, $c=3$

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$6x^5+5x^4+2x=2x(x-1)Q(x)+x^2Q(x)$
$+x^2(x-1)Q'(x)+2ax+b$

양변에 $x=0$을 대입하면 $0=b$

$a+b=3$이므로 $a=3$

따라서 $R(x)=3x^2+3$이므로

$R(2)=12+3=15$

**17** $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, $f(1)=f'(1)=0$이므로 $f(x)$, $f'(x)$는 모두 $x-1$을 인수로 갖는다.

즉, $f(x)=(x-1)^2(x+a)$ ($a$는 상수)라 하면

$f'(x)=2(x-1)(x+a)+(x-1)^2$

$=3x^2+2(a-2)x-2a+1$

이때 $f'(x)$는 이차함수이고 $f'(2+x)=f'(2-x)$에서

함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=2$이므로

$-\dfrac{2(a-2)}{2\times 3}=2$

$a-2=-6 \qquad \therefore a=-4$

따라서 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$이므로

$f(2)=1\times(-2)=-2$

다른 풀이

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(2+x)=f'(2-x)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(3)=f'(1)$

$f'(1)=0$에서 $3+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=-3$ …… ㉠

$f'(3)=0$에서 $27+6a+b=0$

$\therefore 6a+b=-27$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=9$

$f(x)=x^3-6x^2+9x+c$이므로

$f(1)=0$에서

$1-6+9+c=0 \qquad \therefore c=-4$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$이므로

$f(2)=8-24+18-4=-2$

**18** (가)에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to 1}f(x)=0 \qquad \therefore f(1)=0$ …… ㉠

(나)에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to 2}f(x)=0 \qquad \therefore f(2)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$f(x)=a(x-1)(x-2)(x+b)$ ($a$, $b$는 상수, $a\neq0$)라 하면

$$f'(x)=a\{(x-2)(x+b)+(x-1)(x+b)+(x-1)(x-2)\}$$

$b\neq-2$이면

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}=\lim_{x\to2}\frac{a(x-1)(x+b)}{f'(x)}=\frac{a(2+b)}{a(2+b)}=1$$

(나)에서 $\alpha\neq1$이므로 $b=-2$

즉, $f(x)=a(x-1)(x-2)^2$이므로

$f'(x)=a\{(x-2)^2+2(x-1)(x-2)\}$

(가)에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$$

$\therefore a=3$

$f(x)=3(x-1)(x-2)^2$이므로 $f(4)=36$

(나)에서

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{3(x-1)(x-2)^2}{(x-2)\{3(x-2)^2+6(x-1)(x-2)\}}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-1}{(x-2)+2(x-1)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

$\therefore \alpha=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \alpha\times f(4)=\dfrac{1}{2}\times36=18$

**19** $f(x)$가 일차함수이면 $f'(x)$는 상수이므로 주어진 식의 좌변은 상수이고 우변은 이차식이 되어 모순이다.

$f(x)$가 이차함수이면 $f'(x)$는 일차함수이므로 주어진 식의 좌변은 이차식이고 우변은 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이 아닐 때 이차식이다.

즉, $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수, $a\neq0$, $a\neq1$)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f'(x)\{f'(x)-2\}=16f(x)-16x^2-45$에서

$(2ax+b)(2ax+b-2)=16(ax^2+bx+c)-16x^2-45$

$4a^2x^2+(4ab-4a)x+b^2-2b$

$=(16a-16)x^2+16bx+16c-45$

위의 등식이 모든 실수 $x$에 대하여 성립하므로

$4a^2=16a-16$, $4ab-4a=16b$, $b^2-2b=16c-45$

$4a^2=16a-16$에서

$a^2-4a+4=0$, $(a-2)^2=0$

$\therefore a=2$

이를 $4ab-4a=16b$에 대입하면

$8b-8=16b$, $8b=-8$

$\therefore b=-1$

이를 $b^2-2b=16c-45$에 대입하면

$1+2=16c-45$, $16c=48$

$\therefore c=3$

따라서 $f(x)=2x^2-x+3$이므로

$f(2)=8-2+3=9$

**20** (나)에서 $g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 5이므로

$g(2)=5$

(다)에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to2}\{f(x)-g(x)\}=0$

$f(2)-g(2)=0$ $\quad\therefore f(2)=g(2)=5$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-5+5-g(x)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)+g(2)-g(x)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$$=f'(2)-g'(2)=3$$

(가)에서 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫이 $g(x)$이므로 나머지를 $ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^2g(x)+ax+b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=g(2)+2a+b$

$f(2)=g(2)=5$이므로

$5=5+2a+b$ $\quad\therefore b=-2a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)g(x)+(x-1)^2g'(x)+a$

양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(2)=2g(2)+g'(2)+a$

$\therefore a=f'(2)-g'(2)-2g(2)$

$f'(2)-g'(2)=3$, $g(2)=5$이므로

$a=3-10=-7$

이를 ㉡에 대입하면 $b=14$

따라서 $f(x)=(x-1)^2g(x)-7x+14$이므로

$f(1)=-7+14=7$

# Ⅱ-2 01 접선의 방정식과 평균값 정리

## 접선의 방정식

**개념 Check** 79쪽

**1** 답 (1) **1** (2) **−5**

(1) $f(x)=x^3-x^2+4$라 하면

$f'(x)=3x^2-2x$

$\therefore f'(1)=3-2=1$

(2) $f(x)=-2x^2+3x-1$이라 하면

$f'(x)=-4x+3$

$\therefore f'(2)=-8+3=-5$

**문제** 80~85쪽

**01-1** 답 **70**

$f(x)=x^2+ax+b$라 하면

$f'(x)=2x+a$

점 $(-1,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 5이므로

$f'(-1)=5$에서

$-2+a=5$

$\therefore a=7$

점 $(-1,\ 4)$는 곡선 $y=x^2+7x+b$ 위의 점이므로

$4=1-7+b$

$\therefore b=10$

$\therefore ab=7\times10=70$

**01-2** 답 **−7**

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$라 하면

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

두 점 $(1,\ 6)$, $(2,\ 4)$에서의 접선이 서로 평행하므로

$f'(1)=f'(2)$에서

$6+2a+b=24+4a+b$

$2a=-18 \qquad \therefore a=-9$

두 점 $(1,\ 6)$, $(2,\ 4)$는 곡선 $y=2x^3-9x^2+bx+c$ 위의 점이므로

$6=2-9+b+c$, $4=16-36+2b+c$

$\therefore b+c=13$, $2b+c=24$

두 식을 연립하여 풀면

$b=11$, $c=2$

$\therefore b+ac=11+(-9)\times2=-7$

**01-3** 답 **2**

$f(x)=-x^3+6x^2-9x-1$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+12x-9$

$\quad=-3(x-2)^2+3$

즉, 접선의 기울기는 $x=2$에서 최댓값 3을 갖는다.

$\therefore a=2$, $k=3$

이때 점 $(2,\ b)$는 곡선 $y=-x^3+6x^2-9x-1$ 위의 점이므로

$b=-8+24-18-1=-3$

$\therefore a+b+k=2+(-3)+3=2$

**02-1** 답 (1) **1** (2) $-\frac{8}{3}$

$f(x)=-x^2+x$라 하면 $f'(x)=-2x+1$

(1) 점 $(2,\ -2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=-4+1=-3$

즉, 점 $(2,\ -2)$에서의 접선의 방정식은

$y+2=-3(x-2)$

$\therefore y=-3x+4$

따라서 점 $(1,\ k)$는 접선 $y=-3x+4$ 위의 점이므로

$k=-3+4=1$

(2) 점 $(2,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $-3$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

즉, 점 $(2,\ -2)$를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y+2=\frac{1}{3}(x-2)$

$\therefore y=\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}$

따라서 구하는 $y$절편은 $-\frac{8}{3}$이다.

**02-2** 답 **−6**

$f(x)=-2x^3+5x+1$이라 하면

$f'(x)=-6x^2+5$

점 $(-1,\ a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-1)=a$에서

$2-5+1=a \qquad \therefore a=-2$

점 $(-1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=-6+5=-1$

즉, 점 $(-1,\ -2)$에서의 접선의 방정식은

$y+2=-(x+1) \qquad \therefore y=-x-3$

따라서 $m=-1$, $n=-3$이므로

$amn=-2\times(-1)\times(-3)=-6$

**02-3** 답 $y=13x-20$

점 (2, 3)은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(2)=3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (2, 3)에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(2)=2$

$g(x)=(x^2-x)f(x)$라 하면

$g'(x)=(2x-1)f(x)+(x^2-x)f'(x)$

곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는

$g'(2)=3f(2)+2f'(2)=9+4=13$

곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=2$인 점의 $y$좌표는

$g(2)=2f(2)=6$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-6=13(x-2)\qquad \therefore y=13x-20$

**03-1** 답 (1) $y=7x+19$ 또는 $y=7x-13$ (2) $\frac{11}{4}$

(1) $f(x)=x^3-5x+3$이라 하면 $f'(x)=3x^2-5$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-5t+3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 7이므로 $f'(t)=7$에서

$3t^2-5=7,\ t^2=4\qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(-2,\ 5)$ 또는 $(2,\ 1)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-5=7(x+2)$ 또는 $y-1=7(x-2)$

$\therefore y=7x+19$ 또는 $y=7x-13$

(2) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x+k$라 하면 $f'(x)=x^3-2$

접점의 좌표를 $(t,\ -3t+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $-3$이므로 $f'(t)=-3$에서

$t^3-2=-3,\ t^3=-1\qquad \therefore t=-1$ ($\because$ $t$는 실수)

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 5)$이고 이 점이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(-1)=5$에서

$\frac{1}{4}+2+k=5\qquad \therefore k=\frac{11}{4}$

**03-2** 답 $y=-2x+9$

두 점 (0, 5), (4, $-3$)을 지나는 직선과 평행한 직선의 기울기는

$\frac{-3-5}{4-0}=-2$

$f(x)=-x^2+2x+5$라 하면 $f'(x)=-2x+2$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+2t+5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $-2$이므로 $f'(t)=-2$에서

$-2t+2=-2\qquad \therefore t=2$

따라서 접점의 좌표는 (2, 5)이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-5=-2(x-2)\qquad \therefore y=-2x+9$

**03-3** 답 $\frac{5}{2}$

$f(x)=x^2,\ g(x)=ax^3+bx$라 하면

$f'(x)=2x,\ g'(x)=3ax^2+b$

점 $(-1,\ 1)$은 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$g(-1)=1$에서

$-a-b=1\qquad \therefore a+b=-1\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(-1)=-2$이고 점 $(-1,\ 1)$에서의 두 곡선의 접선이 서로 수직이므로 $g'(-1)=\frac{1}{2}$에서

$3a+b=\frac{1}{2}\qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{4},\ b=-\frac{7}{4}$

$\therefore a-b=\frac{5}{2}$

**04-1** 답 (1) $y=2x-1$ 또는 $y=-2x+7$

(2) $y=3x+2$

(1) $f(x)=-x^2+4x-2$라 하면 $f'(x)=-2x+4$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+4t-2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+4$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+4t-2)=(-2t+4)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+4)x+t^2-2\qquad \cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 (2, 3)을 지나므로

$3=-4t+8+t^2-2,\ t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0\qquad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=2x-1$ 또는 $y=-2x+7$

(2) $f(x)=x^3+4$라 하면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+4)=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3+4\qquad \cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 (0, 2)를 지나므로

$2=-2t^3+4,\ t^3=1\qquad \therefore t=1$ ($\because$ $t$는 실수)

따라서 이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=3x+2$

**04-2** 답 4

$f(x)=x^3-2x$라 하면 $f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-2t)=(3t^2-2)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-2)x-2t^3\qquad \cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$3=3t^2-2-2t^3,\ 2t^3-3t^2+5=0$

$(t+1)(2t^2-5t+5)=0 \qquad \therefore\ t=-1\ (\because\ t$는 실수$)$

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=x+2$

따라서 이 직선이 점 $(k,\ 6)$을 지나므로

$6=k+2 \qquad \therefore\ k=4$

**04-3** 답 $\mathbf{2\sqrt{2}}$

$f(x)=x^4+12$라 하면 $f'(x)=4x^3$

접점의 좌표를 $(t,\ t^4+12)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^4+12)=4t^3(x-t) \qquad \therefore\ y=4t^3x-3t^4+12$

이 직선이 원점을 지나므로

$0=-3t^4+12,\ t^4-4=0$

$(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})(t^2+2)=0$

$\therefore\ t=-\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{2}\ (\because\ t$는 실수$)$

따라서 접점의 좌표는 $(-\sqrt{2},\ 16)$ 또는 $(\sqrt{2},\ 16)$이므로

$\overline{AB}=2\sqrt{2}$

**05-1** 답 $\mathbf{-1}$

$f(x)=-x^3+ax+1,\ g(x)=bx^2+2$라 하면

$f'(x)=-3x^2+a,\ g'(x)=2bx$

$x=1$인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(1)=g(1)$에서

$-1+a+1=b+2 \qquad \therefore\ a-b=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x=1$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$에서

$-3+a=2b \qquad \therefore\ a-2b=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1$

$\therefore\ ab=-1$

**05-2** 답 $\mathbf{-5}$

$f(x)=x^3+ax,\ g(x)=bx^2+cx+4$라 하면

$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=2bx+c$

두 곡선이 점 $(-1,\ 6)$을 지나므로

$f(-1)=6$에서 $-1-a=6 \qquad \therefore\ a=-7$

$g(-1)=6$에서 $b-c+4=6 \qquad \therefore\ b-c=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

점 $(-1,\ 6)$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(-1)=g'(-1)$에서 $3+a=-2b+c$

$a=-7$을 대입하면

$-4=-2b+c \qquad \therefore\ 2b-c=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=2,\ c=0$

$\therefore\ a+b+c=-7+2+0=-5$

**05-3** 답 **3**

$f(x)=x^3-4x+2,\ g(x)=-2x^2-5x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-4,\ g'(x)=-4x-5$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하자.

$x=t$인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$에서

$t^3-4t+2=-2t^2-5t+2,\ t^3+2t^2+t=0$

$t(t+1)^2=0 \qquad \therefore\ t=-1$ 또는 $t=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x=t$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(t)=g'(t)$에서

$3t^2-4=-4t-5,\ 3t^2+4t+1=0$

$(t+1)(3t+1)=0 \qquad \therefore\ t=-1$ 또는 $t=-\dfrac{1}{3} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $t=-1$

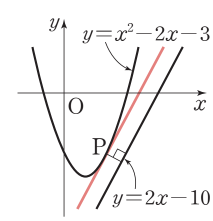
즉, 접점의 $x$좌표가 $-1$이므로 접점의 좌표는 $(-1,\ 5)$이고 접선의 기울기는 $-1$이다.

이때 접선의 방정식은

$y-5=-(x+1) \qquad \therefore\ y=-x+4$

따라서 $m=-1,\ n=4$이므로 $m+n=3$

**06-1** 답 $\mathbf{\dfrac{3\sqrt{5}}{5}}$




곡선 $y=x^2-2x-3$에 접하고 직선 $y=2x-10$과 기울기가 같은 접선의 접점을 P라 하면 구하는 거리의 최솟값은 점 P와 직선 $y=2x-10$ 사이의 거리와 같다.

$f(x)=x^2-2x-3$이라 하면

$f'(x)=2x-2$

기울기가 2인 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2-2t-3)$이라 하면 $f'(t)=2$에서

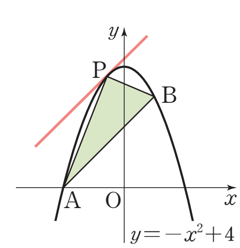
$2t-2=2 \qquad \therefore\ t=2$

$\therefore\ \mathrm{P}(2,\ -3)$

따라서 점 $\mathrm{P}(2,\ -3)$과 직선 $y=2x-10$, 즉 $2x-y-10=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|4+3-10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

**06-2** 답 $\mathbf{\dfrac{27}{8}}$




삼각형 PAB에서 밑변을 $\overline{AB}$로 생각하면 높이는 점 P와 직선 AB 사이의 거리와 같으므로 곡선에 접하고 직선 AB에 평행한 접선의 접점이 P일 때 삼각형 PAB의 넓이가 최대이다.

$f(x)=-x^2+4$라 하면 $f'(x)=-2x$

직선 AB의 기울기는 $\frac{3-0}{1-(-2)}=1$이므로 직선 AB의 방정식은

$y=x+2 \qquad \therefore x-y+2=0$

기울기가 1인 접선의 접점의 좌표를 $(t, -t^2+4)$라 하면 $f'(t)=1$에서

$-2t=1 \qquad \therefore t=-\frac{1}{2}$

즉, 삼각형 PAB의 넓이가 최대일 때의 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$이므로 이 점과 직선 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|-\frac{1}{2}-\frac{15}{2}+2\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{9\sqrt{2}}{8}$$

따라서 $\overline{AB}=\sqrt{(1+2)^2+3^2}=3\sqrt{2}$이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\frac{9\sqrt{2}}{8}=\frac{27}{8}$$

## 2 평균값 정리

**문제** 88~89쪽

**07-1** 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $0$

(1) 함수 $f(x)=2x^2-2x+1$은 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 3)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(3)=13$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 $c$가 열린구간 $(-2, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=4x-2$이므로 $f'(c)=0$에서

$4c-2=0 \qquad \therefore c=\frac{1}{2}$

(2) 함수 $f(x)=x^3+3x^2-4$는 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 1)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(1)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 $c$가 열린구간 $(-2, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2+6x$이므로 $f'(c)=0$에서

$3c^2+6c=0, 3c(c+2)=0$

$\therefore c=0 \ (\because -2<c<1)$

**07-2** 답 $3$

함수 $f(x)=-x^2+ax$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키면 $f(0)=f(2)$이므로

$0=-4+2a \qquad \therefore a=2$

즉, $f(x)=-x^2+2x$이므로 $f'(x)=-2x+2$

$f'(c)=0$에서

$-2c+2=0 \qquad \therefore c=1$

$\therefore a+c=2+1=3$

**07-3** 답 $1$

함수 $f(x)=x^4-2x^2+3$은 닫힌구간 $[-1, a]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, a)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키면 $f(-1)=f(a)$이므로

$2=a^4-2a^2+3, a^4-2a^2+1=0$

$(a+1)^2(a-1)^2=0$

$\therefore a=1 \ (\because a>-1)$

즉, 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 $c$가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=4x^3-4x$이므로 $f'(c)=0$에서

$4c^3-4c=0, 4c(c+1)(c-1)=0$

$\therefore c=0 \ (\because -1<c<1)$

따라서 롤의 정리를 만족시키는 실수 $c$는 1개이다.

**08-1** 답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\sqrt{3}$

(1) 함수 $f(x)=2x^2+x-3$은 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=f'(c)$인 $c$가 열린구간 $(-2, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=4x+1$이므로 $\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=f'(c)$에서

$\frac{0-3}{3}=4c+1$

$\therefore c=-\frac{1}{2}$

(2) 함수 $f(x)=x^3-4x$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$인 $c$가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-4$이므로 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$에서

$\frac{15-0}{3}=3c^2-4, c^2=3$

$\therefore c=\sqrt{3} \ (\because 0<c<3)$

08-**2** 답 $-1$

함수 $f(x)=x^2-3x+4$는 닫힌구간 $[a,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ 2)$에서 미분가능하며 평균값 정리를 만족시키는 실수 $c$의 값이 $\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{f(2)-f(a)}{2-a}=f'\left(\frac{1}{2}\right)$$

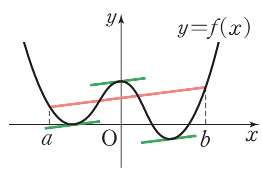
$f'(x)=2x-3$이므로

$$\frac{2-(a^2-3a+4)}{2-a}=-2$$

$a^2-a-2=0,\ (a+1)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-1\ \left(\because\ a<\frac{1}{2}\right)$

08-**3** 답 $3$




닫힌구간 $[a,\ b]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 $c$의 개수는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선과 기울기가 같은 접선의 개수와 같으므로 실수 $c$는 3개이다.

**연습문제** 90~92쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** $22$ | **2** ② | **3** $y=-20x-25$ | **4** $-3$ | |
| **5** ③ | **6** ④ | **7** $3$ | **8** ③ | **9** $-63$ |
| **10** ④ | **11** $3$ | **12** $-1$ | **13** $-\frac{1}{11}$ | **14** $\frac{1}{2}$ |
| **15** ① | **16** $4$ | **17** $\sqrt{3}$ | **18** $25$ | **19** ② |
| **20** $2\sqrt{3}$ | **21** $12$ | **22** ⑤ | | |

**1** 점 $(3,\ 2)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(3)=2$

점 $(3,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(3)=4$

$g(x)=(x+2)f(x)$에서

$g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$

$\therefore\ g'(3)=f(3)+5f'(3)=2+5\times4=22$

**2** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-1}{x+1}=2$에서 $x\longrightarrow-1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$에서

$\lim\limits_{x\to-1}\{f(x)-1\}=0\qquad\therefore\ f(-1)=1$

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$이므로

$f'(-1)=2$

즉, 점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=2(x+1)\qquad\therefore\ y=2x+3$

따라서 $a=2,\ b=3$이므로 $a-b=-1$

**3** $f(x)=-x^3+2x^2-1$이라 하면 $f'(x)=-3x^2+4x$

점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=-12+8=-4$

즉, 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$y+1=-4(x-2)\qquad\therefore\ y=-4x+7$

곡선 $y=-x^3+2x^2-1$과 직선 $y=-4x+7$의 교점의 $x$좌표를 구하면

$-x^3+2x^2-1=-4x+7,\ x^3-2x^2-4x+8=0$

$(x+2)(x-2)^2=0\qquad\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$

이때 점 $(2,\ -1)$은 접점이므로 $\mathrm{A}(-2,\ 15)$

점 $\mathrm{A}(-2,\ 15)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=-12-8=-20$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-15=-20(x+2)\qquad\therefore\ y=-20x-25$

**4** $h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$h(1)=f(1)g(1)=1\times1=1$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $h'(1)$

이때 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이고

$f'(x)=2x+1,\ g'(x)=-3x^2-2x$이므로

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$\quad\ =3\times1+1\times(-5)=-2$

즉, 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=-2(x-1)\qquad\therefore\ y=-2x+3$

따라서 이 접선이 점 $(k,\ 9)$를 지나므로

$9=-2k+3\qquad\therefore\ k=-3$

**5** $f(x)=x^3-2x^2+2x+a$에서 $f'(x)=3x^2-4x+2$

점 $(1,\ a+1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-4+2=1$

즉, 점 $(1,\ a+1)$에서의 접선의 방정식은

$y-(a+1)=x-1\qquad\therefore\ y=x+a$

직선 $y=x+a$가 $x$축, $y$축과 만나는 점이 각각 P, Q이므로

$\mathrm{P}(-a,\ 0),\ \mathrm{Q}(0,\ a)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=6$에서 $\sqrt{a^2+a^2}=6$

$2a^2=36,\ a^2=18\qquad\therefore\ a=3\sqrt{2}\ (\because\ a>0)$

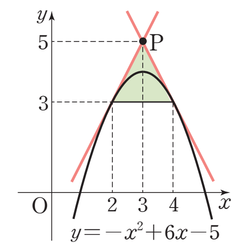
**6** $f(x)=-2x^2+4x+3$이라 하면 $f'(x)=-4x+4$
접점의 좌표를 $(t,\ -2t^2+4t+3)$이라 하면 직선 $y=\frac{1}{4}x-3$에 수직인 접선의 기울기는 $-4$이므로
$f'(t)=-4$에서
$-4t+4=-4 \qquad \therefore t=2$
즉, 접점의 좌표는 $(2,\ 3)$이므로 접선의 방정식은
$y-3=-4(x-2) \qquad \therefore y=-4x+11$
따라서 구하는 $y$절편은 11이다.

**7** $f(x)=x^3-3x^2+2$라 하면
$f'(x)=3x^2-6x=3(x-1)^2-3$
즉, 접선의 기울기는 $x=1$에서 최솟값 $-3$을 갖는다.
이때 접점의 좌표는 $(1,\ 0)$이므로 접선의 방정식은
$y=-3(x-1) \qquad \therefore y=-3x+3$
따라서 $m=-3$, $n=3$이므로
$m+2n=-3+6=3$

**8** $f(x)=-x^3+3$이라 하면 $f'(x)=-3x^2$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+3)$이라 하면 직선 $3x+y-15=0$, 즉 $y=-3x+15$에 평행한 접선의 기울기는 $-3$이므로 $f'(t)=-3$에서
$-3t^2=-3,\ t^2=1 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$
즉, 접점의 좌표는 $(-1,\ 4)$ 또는 $(1,\ 2)$이므로 접선의 방정식은
$y-4=-3(x+1)$ 또는 $y-2=-3(x-1)$
$\therefore 3x+y-1=0$ 또는 $3x+y-5=0$
따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+y-1=0$ 위의 점 $(0,\ 1)$과 직선 $3x+y-5=0$ 사이의 거리와 같으므로
$\frac{|1-5|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

**9** $f(x)=2x^2-x+2$라 하면 $f'(x)=4x-1$
접점의 좌표를 $(t,\ 2t^2-t+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t-1$이므로 접선의 방정식은
$y-(2t^2-t+2)=(4t-1)(x-t)$
$\therefore y=(4t-1)x-2t^2+2$
이 직선이 점 $(0,\ -6)$을 지나므로
$-6=-2t^2+2,\ t^2=4$
$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$
따라서 구하는 두 접선의 기울기의 곱은
$f'(-2)f'(2)=-9\times 7=-63$

**10** $f(x)=-x^2+6x-5$라 하면 $f'(x)=-2x+6$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+6t-5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+6$이므로 접선의 방정식은
$y-(-t^2+6t-5)=(-2t+6)(x-t)$
$\therefore y=(-2t+6)x+t^2-5$
이 직선이 점 $(3,\ 5)$를 지나므로
$5=-6t+18+t^2-5$
$t^2-6t+8=0$
$(t-2)(t-4)=0$
$\therefore t=2$ 또는 $t=4$
따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 3)$ 또는 $(4,\ 3)$이므로 삼각형 PAB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$

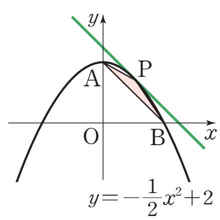



**11** $f(x)=-x^3+ax+b$, $g(x)=x^2+2$라 하면
$f'(x)=-3x^2+a$, $g'(x)=2x$
곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로
$f(-1)=3$에서
$1-a+b=3 \qquad \therefore a-b=-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$
점 $(-1,\ 3)$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로
$f'(-1)=g'(-1)$에서
$-3+a=-2 \qquad \therefore a=1$
이를 ㉠에 대입하면
$1-b=-2 \qquad \therefore b=3$
$\therefore ab=1\times 3=3$

**12** $f(x)=x^3+ax+4$, $g(x)=-x^2+4x+1$이라 하면
$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=-2x+4$
두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하자.
$x=t$인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$에서
$t^3+at+4=-t^2+4t+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$
$x=t$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로
$f'(t)=g'(t)$에서
$3t^2+a=-2t+4$
$\therefore a=-3t^2-2t+4 \qquad \cdots\cdots ㉡$
㉡을 ㉠에 대입하면
$t^3+(-3t^2-2t+4)t+4=-t^2+4t+1$
$2t^3+t^2-3=0,\ (t-1)(2t^2+3t+3)=0$
$\therefore t=1$ ($\because$ $t$는 실수)
이를 ㉡에 대입하면
$a=-3-2+4=-1$

13 $f(x)=x^2-3$, $g(x)=ax^2$이라 하면
$f'(x)=2x$, $g'(x)=2ax$
두 곡선이 $x=t$인 점에서 만난다고 하면 $f(t)=g(t)$에서
$t^2-3=at^2$ $\quad\therefore t^2=\dfrac{3}{1-a}$ ...... ㉠
$x=t$인 점에서의 두 곡선의 접선이 서로 수직이므로
$f'(t)g'(t)=-1$에서
$2t\times 2at=-1$ $\quad\therefore t^2=-\dfrac{1}{4a}$ ...... ㉡
㉠, ㉡에서 $\dfrac{3}{1-a}=-\dfrac{1}{4a}$이므로
$-12a=1-a$ $\quad\therefore a=-\dfrac{1}{11}$

14 삼각형 PAB에서 밑변을 $\overline{AB}$로 생각하면 높이는 점 P와 직선 AB 사이의 거리와 같으므로 곡선에 접하고 직선 AB에 평행한 접선의 접점이 P일 때 삼각형 PAB의 넓이가 최대이다.




$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2$라 하면 $f'(x)=-x$
직선 AB의 기울기는 $\dfrac{0-2}{2-0}=-1$이므로 직선 AB의 방정식은
$y=-x+2$ $\quad\therefore x+y-2=0$
기울기가 $-1$인 접선의 접점의 좌표를 $\left(t,\ -\dfrac{1}{2}t^2+2\right)$라 하면 $f'(t)=-1$에서
$-t=-1$ $\quad\therefore t=1$
즉, 삼각형 PAB의 넓이가 최대일 때의 점 P의 좌표는 $\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$이므로 이 점과 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리는
$$\frac{\left|1+\frac{3}{2}-2\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$
따라서 $\overline{AB}=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은
$\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{1}{2}$

15 함수 $f(x)=x^2+ax-10$은 모든 실수에서 연속이고 미분가능하다.
이때 롤의 정리를 만족시키면 $f(-5)=f(2)$이므로
$25-5a-10=4+2a-10$ $\quad\therefore a=3$
즉, $f(x)=x^2+3x-10$이므로 $f'(x)=2x+3$
$f'(c_1)=0$에서 $2c_1+3=0$ $\quad\therefore c_1=-\dfrac{3}{2}$
또 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)}=f'(c_2)$에서
$\dfrac{-6+10}{4}=2c_2+3$ $\quad\therefore c_2=-1$
$\therefore c_1+c_2=-\dfrac{3}{2}+(-1)=-\dfrac{5}{2}$

16 함수 $f(x)=x^2-3x+5$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하며 평균값 정리를 만족시키는 실수 $c$의 값이 2이므로
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(2)$
$f'(x)=2x-3$이므로
$\dfrac{b^2-3b+5-(a^2-3a+5)}{b-a}=1$
$\dfrac{b^2-3b-a^2+3a}{b-a}=1$, $\dfrac{(b-a)(a+b-3)}{b-a}=1$
$a+b-3=1$ $\quad\therefore a+b=4$

17 $f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$
점 $(a,\ a^2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a$이므로 접선의 방정식은
$y-a^2=2a(x-a)$ $\quad\therefore y=2ax-a^2$ ...... ㉠
$g(x)=-x^2-6$이라 하면 $g'(x)=-2x$
곡선 $y=g(x)$의 접점의 좌표를 $(t,\ -t^2-6)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $2a$이므로
$g'(t)=2a$에서 $-2t=2a$ $\quad\therefore t=-a$
즉, 접점의 좌표는 $(-a,\ -a^2-6)$이고 이 점은 직선 ㉠ 위의 점이므로
$-a^2-6=-3a^2$, $a^2=3$ $\quad\therefore a=\sqrt{3}$ ($\because a>0$)

18 $f(x)=-x^3+ax^2+2x$에서
$f'(x)=-3x^2+2ax+2$
점 O(0, 0)에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=2$이므로 접선의 방정식은
$y=2x$ ...... ㉠
곡선 $y=-x^3+ax^2+2x$와 직선 $y=2x$의 교점의 $x$좌표를 구하면
$-x^3+ax^2+2x=2x$, $x^3-ax^2=0$
$x^2(x-a)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=a$
이때 $(0,\ 0)$은 접점이므로 $A(a,\ 2a)$
점 A에서의 접선의 기울기는
$f'(a)=-3a^2+2a^2+2=-a^2+2$

즉, 점 A에서의 접선의 방정식은

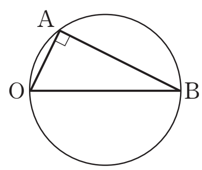
$y-2a=(-a^2+2)(x-a)$

$\therefore y=(-a^2+2)x+a^3$

이 직선이 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표를 구하면

$(-a^2+2)x+a^3=0 \qquad \therefore x=\dfrac{a^3}{a^2-2}$

$\therefore B\left(\dfrac{a^3}{a^2-2}, 0\right)$




점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로 직선 OA와 직선 AB는 서로 수직이다.

이때 ㉠에서 직선 OA의 기울기가 2이고 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{0-2a}{\dfrac{a^3}{a^2-2}-a}=-a^2+2$이므로

$2\times(-a^2+2)=-1,\ a^2=\dfrac{5}{2}$

$\therefore a=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\ (\because a>\sqrt{2})$

따라서 $A\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}, \sqrt{10}\right)$, $B\left(\dfrac{5\sqrt{10}}{2}, 0\right)$이므로

$\overline{OA}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+(\sqrt{10})^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

$\overline{AB}=\sqrt{\left(\dfrac{5\sqrt{10}}{2}-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+(-\sqrt{10})^2}=5\sqrt{2}$

$\therefore \overline{OA}\times\overline{AB}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\times5\sqrt{2}=25$

**19** $f(x)=2x^2+k$라 하면 $f'(x)=4x$

접점의 좌표를 $(t, 2t^2+k)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t$이므로 접선의 방정식은

$y-(2t^2+k)=4t(x-t)$

$\therefore y=4tx-2t^2+k \qquad \cdots\cdots ㉠$

서로 수직인 두 접선의 교점의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면 직선 ㉠이 이 점을 지나므로

$0=4at-2t^2+k$

$\therefore 2t^2-4at-k=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$

이 이차방정식의 두 실근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 $\alpha$, $\beta$는 두 접점의 $x$좌표이므로 그 점에서의 접선의 기울기는 각각

$f'(\alpha)=4\alpha,\ f'(\beta)=4\beta$

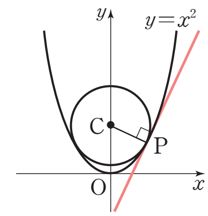
이때 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(\alpha)f'(\beta)=-1$에서

$4\alpha\times4\beta=-1 \qquad \therefore \alpha\beta=-\dfrac{1}{16}$

㉡에서 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{k}{2}=-\dfrac{1}{16} \qquad \therefore k=\dfrac{1}{8}$

**20** $f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$




원의 중심을 $C(0, a)$, 접점을 $P(t, t^2)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이고, 직선 CP의 기울기는 $\dfrac{t^2-a}{t}$이다.

이때 접선과 직선 CP는 서로 수직이므로

$2t\times\dfrac{t^2-a}{t}=-1 \qquad \therefore t^2-a=-\dfrac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$

또 $\overline{CP}=1$이므로

$\sqrt{t^2+(t^2-a)^2}=1$

㉠을 대입하면

$\sqrt{t^2+\dfrac{1}{4}}=1,\ t^2+\dfrac{1}{4}=1$

$t^2=\dfrac{3}{4} \qquad \therefore t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

두 접점에서의 접선의 기울기는 각각

$f'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3},\ f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}$

따라서 두 접선의 기울기의 차는

$\sqrt{3}-(-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

**21** 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[x-3, x+3]$에서 연속이고 열린구간 $(x-3, x+3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(x+3)-f(x-3)}{(x+3)-(x-3)}=f'(c)$인 $c$가 열린구간 $(x-3, x+3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x-3<c<x+3$에서 $x\to\infty$이면 $c\to\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x+3)-f(x-3)\}$

$=6\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+3)-f(x-3)}{(x+3)-(x-3)}$

$=6\lim\limits_{c\to\infty}f'(c)$

$=6\times2\ (\because \lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=2)$

$=12$

**22** 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$, 즉 $f(1)-4=f'(c)$인 $c$가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 (나)에서 $0<c<1$인 $c$에 대하여 $|f'(c)|\le2$이므로

$|f(1)-4|\le2$

$\therefore 2\le f(1)\le6$

따라서 $f(1)$의 최댓값은 6, 최솟값은 2이므로 구하는 합은

$6+2=8$

## Ⅱ-2 02 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

### 1 함수의 증가와 감소

**개념 Check** 94쪽

**1** 답 (1) 증가 (2) 감소

(1) 구간 $(-\infty, \infty)$에서 임의의 두 실수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $x_1<x_2$일 때,

$f(x_2)-f(x_1)=(x_2+1)-(x_1+1)=x_2-x_1>0$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=x+1$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

(2) 구간 $(0, \infty)$에서 임의의 두 실수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $0<x_1<x_2$일 때,

$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$은 구간 $(0, \infty)$에서 감소한다.

**문제** 95~96쪽

**01-1** 답 (1) **구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$에서 증가, 구간 $[-1, 1]$에서 감소**
(2) **구간 $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$에서 증가, 구간 $[-1, 0]$, $[1, \infty)$에서 감소**

(1) $f(x)=x^3-3x+1$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-1$ | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-1, 1]$에서 감소한다.

(2) $f(x)=-x^4+2x^2+4$에서

$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | $5$ | ↘ | $4$ | ↗ | $5$ | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$에서 증가하고, 구간 $[-1, 0]$, $[1, \infty)$에서 감소한다.

**01-2** 답 $-2$

$f(x)=-x^3+6x^2-9x+7$에서

$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $3$ | ↗ | $7$ | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[1, 3]$에서 증가하므로

$\alpha=1$, $\beta=3$

$\therefore \alpha-\beta=-2$

**02-1** 답 $-3\sqrt{2}\le a\le 3\sqrt{2}$

$f(x)=-x^3+ax^2-6x+5$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax-6$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 $x$에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-18\le 0$

$(a+3\sqrt{2})(a-3\sqrt{2})\le 0$

$\therefore -3\sqrt{2}\le a\le 3\sqrt{2}$

**02-2** 답 $a\ge\frac{3}{2}$

$f(x)=2x^3+3x^2+ax+3$에서

$f'(x)=6x^2+6x+a$

함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키려면 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 $x$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=9-6a\le 0$

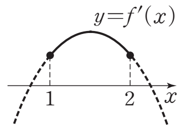
$\therefore a\ge\frac{3}{2}$

**02-3** 답 $a\ge 3$

$f(x)=-x^3+2ax^2-3ax+5$에서

$f'(x)=-3x^2+4ax-3a$

함수 $f(x)$가 구간 $[1, 2]$에서 증가하려면 $1\le x\le 2$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로




$f'(1)\ge 0$, $f'(2)\ge 0$

$f'(1)\ge 0$에서

$-3+4a-3a\ge 0$ $\quad\therefore a\ge 3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(2)\ge 0$에서

$-12+8a-3a\ge 0$ $\quad\therefore a\ge \frac{12}{5}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a\ge 3$

## 2 함수의 극대와 극소

**개념 Check** 98쪽

**1** 답 $\boldsymbol{a=1,\ b=3}$

**문제** 99~101쪽

**03-1** 답 **(1) 극댓값: $-2$, 극솟값: $-34$**
**(2) 극댓값: $-5$, 극솟값: $-6$**

(1) $f(x)=x^3-6x^2-2$에서

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $-2$ 극대 | ↘ | $-34$ 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $-2$, $x=4$에서 극솟값 $-34$를 갖는다.

(2) $f(x)=-2x^3+9x^2-12x-1$에서

$f'(x)=-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-6$ 극소 | ↗ | $-5$ 극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $-5$, $x=1$에서 극솟값 $-6$을 갖는다.

**03-2** 답 **(1) 극솟값: $5$ (2) 극댓값: $-4$, 극솟값: $-5$**

(1) $f(x)=x^4+\frac{8}{3}x^3+2x^2+5$에서

$f'(x)=4x^3+8x^2+4x=4x(x+1)^2$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $\frac{16}{3}$ | ↘ | $5$ 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $5$를 갖는다.

(2) $f(x)=-x^4+2x^2-5$에서

$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | $-4$ 극대 | ↘ | $-5$ 극소 | ↗ | $-4$ 극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 극댓값 $-4$, $x=0$에서 극솟값 $-5$를 갖는다.

**04-1** 답 **$-39$**

$f(x)=x^3+ax^2+bx$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 $5$를 가지므로

$f'(-1)=0$, $f(-1)=5$에서

$3-2a+b=0$, $-1+a-b=5$

$\therefore 2a-b=3$, $a-b=6$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=-9$

즉, $f(x)=x^3-3x^2-9x$이므로

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $5$ 극대 | ↘ | $-27$ 극소 | ↗ |

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 $-27$을 가지므로

$m=-27$

$\therefore a+b+m=-3+(-9)+(-27)=-39$

04-**2** 답 **6**

$f(x)=-2x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=-6x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=0$, $f'(1)=0$에서

$-6-2a+b=0$, $-6+2a+b=0$

$\therefore$ $2a-b=-6$, $2a+b=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=6$

함수 $f(x)=-2x^3+6x+c$가 $x=-1$에서 극솟값 $-2$를 가지므로 $f(-1)=-2$에서

$2-6+c=-2$ $\qquad\therefore$ $c=2$

따라서 함수 $f(x)=-2x^3+6x+2$는 $x=1$에서 극대이므로 극댓값은

$f(1)=-2+6+2=6$

04-**3** 답 **22**

$f(x)=-x^3+ax^2+bx$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극값을 갖고, $x=4$인 점에서의 접선의 기울기가 $-12$이므로

$f'(-2)=0$, $f'(4)=-12$에서

$-12-4a+b=0$, $-48+8a+b=-12$

$\therefore$ $4a-b=-12$, $8a+b=36$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=20$

$\therefore$ $a+b=22$

05-**1** 답 ㄷ

ㄱ. 구간 $(-1, 0)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-1, 0)$에서 감소한다.

ㄴ, ㄷ. 구간 $[-3, 5]$에서 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표는 $-2$, $0$, $2$, $4$

$x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극값을 갖지 않는다.

$x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이고,

$x=0$, $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=4$에서 극소이다.

즉, 구간 $[-3, 5]$에서 함수 $f(x)$의 극값은 3개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

05-**2** 답 **$-26$**

도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표는 $0$, $4$

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고,

$x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극소이다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(0)=0$, $f'(4)=0$이므로

$b=0$, $48+8a+b=0$ $\qquad\therefore$ $a=-6$

또 함수 $f(x)=x^3-6x^2+c$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값 6을 가지므로 $f(0)=6$에서 $c=6$

따라서 함수 $f(x)=x^3-6x^2+6$은 $x=4$에서 극소이므로 극솟값은

$f(4)=64-96+6=-26$

**연습문제** 102~103쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ③ | **2** ④ | **3** 3 | **4** $a\geq3$ | **5** ③ |
| **6** ② | **7** ② | **8** 1 | **9** ② | **10** 32 |
| **11** ㄹ | **12** ③ | **13** $-27$ | **14** 24 | |

**1** $f(x)=-2x^3+3x^2+12x+3$에서

$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $23$ | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 2]$에서 증가한다.

**2** $f(x)=x^3-6x^2+ax+7$에서 $f'(x)=3x^2-12x+a$

함수 $f(x)$가 감소하는 $x$의 값의 범위가 $1\leq x\leq b$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$, 즉 $3x^2-12x+a=0$의 두 근은 $1$, $b$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+b=-\dfrac{-12}{3}$, $1\times b=\dfrac{a}{3}$ $\qquad\therefore$ $b=3$, $a=9$

$\therefore$ $a+b=12$

다른 풀이

$f(x)=x^3-6x^2+ax+7$에서 $f'(x)=3x^2-12x+a$

이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 $1$, $b$이므로

$f'(1)=0$에서 $3-12+a=0$ $\qquad\therefore$ $a=9$

$f'(b)=0$에서 $3b^2-12b+a=0$

$3b^2-12b+9=0$, $3(b-1)(b-3)=0$

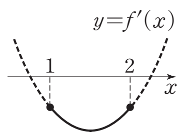
$\therefore b=3$ ($\because b>1$)

$\therefore a+b=9+3=12$

**3** $f(x)=x^3-(a+1)x^2+ax-4$에서

$f'(x)=3x^2-2(a+1)x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $[1, 2]$에서 감소하려면 $1\le x\le 2$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 $f'(1)\le 0$, $f'(2)\le 0$




$f'(1)\le 0$에서

$3-2(a+1)+a\le 0 \qquad \therefore a\ge 1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(2)\le 0$에서

$12-4(a+1)+a\le 0 \qquad \therefore a\ge \frac{8}{3} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a\ge \frac{8}{3}$

따라서 정수 $a$의 최솟값은 3이다.

**4** $f(x)=x^3+3x^2+ax$에서 $f'(x)=3x^2+6x+a$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 $x$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=9-3a\le 0 \qquad \therefore a\ge 3$

**5** $f(x)=x^3-3x+6$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 8<br>극대 | ↘ | 4<br>극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 8, $x=1$에서 극솟값 4를 가지므로 모든 극값의 합은 $8+4=12$

**6** 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 $-1$을 가지므로

$f'(2)=0$, $f(2)=-1$

$g(x)=(x^2-3)f(x)$라 하면

$g'(x)=2xf(x)+(x^2-3)f'(x)$

$\therefore g(2)=f(2)=-1$, $g'(2)=4f(2)+f'(2)=-4$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, -1)$에서의 접선의 기울기는 $-4$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y+1=-4(x-2)$

$\therefore y=-4x+7$

**7** $f(x)=2x^3-9x^2+ax+5$에서

$f'(x)=6x^2-18x+a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대이므로 $f'(1)=0$에서

$6-18+a=0 \qquad \therefore a=12$

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$이므로

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 $b=2$

$\therefore a+b=12+2=14$

**8** $f(x)=-x^3+3kx^2+9k^2x$에서

$f'(x)=-3x^2+6kx+9k^2$

$\qquad =-3(x+k)(x-3k)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-k$ 또는 $x=3k$

$k>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-k$ | $\cdots$ | $3k$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-5k^3$<br>극소 | ↗ | $27k^3$<br>극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3k$에서 극댓값 $27k^3$, $x=-k$에서 극솟값 $-5k^3$을 갖고, 그 합이 22이므로

$27k^3+(-5k^3)=22$, $k^3=1$

$\therefore k=1$ ($\because k>0$)

**9** $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$에서

$f'(x)=3x^2-6ax+3(a^2-1)$

$\qquad =3\{x^2-2ax+(a-1)(a+1)\}$

$\qquad =3\{x-(a-1)\}\{x-(a+1)\}$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=a-1$ 또는 $x=a+1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $a-1$ | $\cdots$ | $a+1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

이때 함수 $f(x)$의 극댓값이 4이므로 $f(a-1)=4$에서
$(a-1)^3-3a(a-1)^2+3(a^2-1)(a-1)=4$
$a^3-3a-2=0$, $(a+1)^2(a-2)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$
(i) $a=-1$일 때, $f(x)=x^3+3x^2$이므로
$f(-2)=-8+12=4>0$
(ii) $a=2$일 때, $f(x)=x^3-6x^2+9x$이므로
$f(-2)=-8-24-18=-50<0$
따라서 $f(-2)>0$을 만족시키는 함수 $f(x)$는
$f(x)=x^3+3x^2$
$\therefore f(-1)=-1+3=2$

**10** 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표는 $-4$, $0$
$x=-4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 극대이고,
$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이다.
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수)라 하면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
$f'(-4)=0$, $f'(0)=0$이므로
$48-8a+b=0$, $b=0$
$\therefore a=6$
따라서 함수 $f(x)=x^3+6x^2+c$의 극댓값은 $f(-4)$, 극솟값은 $f(0)$이므로 극댓값과 극솟값의 차는
$|f(-4)-f(0)|=|(-64+96+c)-c|=32$

**11** ㄱ. 구간 $(-3, 0)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.
ㄴ. 구간 $(3, 6)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.
ㄷ. $f'(-3)\neq 0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극값을 갖지 않는다.
ㄹ. 구간 $[-7, 7]$에서 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표는 $-6$, $0$, $6$
$x=-6$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-6$에서 극대이고,
$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이다.
$x=6$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=6$에서 극값을 갖지 않는다.
즉, 구간 $[-7, 7]$에서 함수 $f(x)$의 극값은 2개이다
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄹ이다.

**12** 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=0$은 이차방정식이고 두 실근이 $\alpha$, $\beta$이므로
$f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$
즉, 함수 $f(x)$의 극값은 $f(\alpha)$, $f(\beta)$이다.
(나)에서
$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2}=26$ ······ ㉠
(가)에서 $(\beta-\alpha)^2=100$이므로 이를 ㉠에 대입하면
$\sqrt{100+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2}=26$
$100+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=676$
$\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=576$ $\therefore |f(\beta)-f(\alpha)|=24$
따라서 극댓값과 극솟값의 차는 24이다.

**13** 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고, (나)에서 곡선 $y=f(x)$는 원점을 지나므로
$f(x)=x^3+ax^2+bx$ ($a$, $b$는 상수)라 하면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
(가)에서 $f'(-1)=0$이므로
$3-2a+b=0$ $\therefore 2a-b=3$ ······ ㉠
(다)에서 $f'(1-x)=f'(1+x)$의 양변에 $x=2$를 대입하면
$f'(-1)=f'(3)$
즉, $f'(3)=0$이므로
$27+6a+b=0$ $\therefore 6a+b=-27$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-9$
$\therefore f(x)=x^3-3x^2-9x$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 5<br>극대 | ↘ | $-27$<br>극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 $-27$을 갖는다.

**14** 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극대, $x=3$에서 극소이므로
$f'(2)=0$, $f'(3)=0$
즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 2, 3이므로
$f'(x)=a(x-2)(x-3)$ $(a\neq 0)$이라 하자.
$g(x)=x^2-f(x)$에서
$g'(x)=2x-f'(x)=-ax^2+(5a+2)x-6a$
삼차함수 $g(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가지므로
$g'(\alpha)=0$, $g'(\beta)=0$
즉, $2\alpha-f'(\alpha)=0$, $2\beta-f'(\beta)=0$이므로
$f'(\alpha)=2\alpha$, $f'(\beta)=2\beta$
이때 이차방정식 $g'(x)=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로
근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=\dfrac{-6a}{-a}=6$
$\therefore f'(\alpha)f'(\beta)=2\alpha\times 2\beta=4\alpha\beta=4\times 6=24$

# Ⅱ-2 03 함수의 그래프

## 함수의 그래프

**문제** 106~110쪽

**01-1** 답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $f(x)=-x^3+3x+1$에서

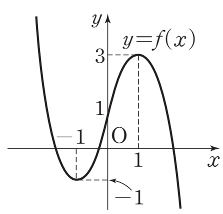
$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-1$ 극소 | ↗ | $3$ 극대 | ↘ |

또 $f(0)=1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




(2) $f(x)=\frac{3}{4}x^4+4x^3+6x^2+1$에서

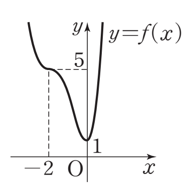
$f'(x)=3x^3+12x^2+12x=3x(x+2)^2$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $5$ | ↘ | $1$ 극소 | ↗ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




**02-1** 답 ①

도함수 $y=f'(x)$의 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $-1$, $1$이므로 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다.

**03-1** 답 $a<-6$ 또는 $a>6$

$f(x)=-x^3+ax^2-12x+4$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax-12$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D>0$에서

$\frac{D}{4}=a^2-36>0$

$(a+6)(a-6)>0$ $\therefore$ $a<-6$ 또는 $a>6$

**03-2** 답 $1\le a\le 4$

$f(x)=3x^3+(a+2)x^2+ax+1$에서

$f'(x)=9x^2+2(a+2)x+a$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D\le 0$에서

$\frac{D}{4}=(a+2)^2-9a\le 0$

$a^2-5a+4\le 0$, $(a-1)(a-4)\le 0$

$\therefore$ $1\le a\le 4$

**03-3** 답 $-\frac{1}{2}<a<0$ 또는 $0<a<4$

$f(x)$는 삼차함수이므로 $a\ne 0$ …… ㉠

$f(x)=ax^3+(a+2)x^2+(a-1)x-2$에서

$f'(x)=3ax^2+2(a+2)x+a-1$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D>0$에서

$\frac{D}{4}=(a+2)^2-3a(a-1)>0$

$2a^2-7a-4<0$, $(2a+1)(a-4)<0$

$\therefore$ $-\frac{1}{2}<a<4$ …… ㉡

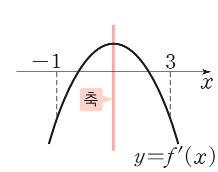
㉠, ㉡에서 $-\frac{1}{2}<a<0$ 또는 $0<a<4$

**04-1** 답 (1) $\sqrt{3}<a<2$ (2) $a>\frac{7}{4}$

$f(x)=-x^3+3ax^2-9x-1$에서

$f'(x)=-3x^2+6ax-9$

(1) 함수 $f(x)$가 $-1<x<3$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-1<x<3$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D>0$ 이어야 하므로

$\frac{D}{4}=9a^2-27>0$

$a^2-3>0$

$(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})>0$

$\therefore a<-\sqrt{3}$ 또는 $a>\sqrt{3}$ ...... ㉠

(ii) $f'(-1)<0$이어야 하므로

$-3-6a-9<0 \quad \therefore a>-2$ ...... ㉡

$f'(3)<0$이어야 하므로

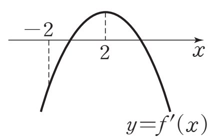
$-27+18a-9<0 \quad \therefore a<2$ ...... ㉢

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=a$이므로

$-1<a<3$ ...... ㉣

㉠~㉣에서 $\sqrt{3}<a<2$

(2) 함수 $f(x)$가 $-2<x<2$에서 극솟값을 갖고, $x>2$에서 극댓값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-2<x<2$에서 한 실근을 갖고, $x>2$에서 다른 한 실근을 가져야 한다.




$f'(-2)<0$이어야 하므로

$-12-12a-9<0 \quad \therefore a>-\frac{7}{4}$ ...... ㉠

$f'(2)>0$이어야 하므로

$-12+12a-9>0 \quad \therefore a>\frac{7}{4}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a>\frac{7}{4}$

**05-1** 답 $-1<a<0$ 또는 $a>0$

$f(x)=-3x^4-8x^3+6ax^2$에서

$f'(x)=-12x^3-24x^2+12ax$

$\quad =-12x(x^2+2x-a)$

함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $-12x(x^2+2x-a)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+2x-a=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x=0$이 이차방정식 $x^2+2x-a=0$의 근이 아니어야 하므로

$a\neq 0$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2+2x-a=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D>0$ 이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1+a>0 \quad \therefore a>-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $-1<a<0$ 또는 $a>0$

**05-2** 답 $a=-2$ 또는 $a\geq\frac{1}{4}$

$f(x)=x^4+2(a-1)x^2+4ax+3$에서

$f'(x)=4x^3+4(a-1)x+4a$

$\quad =4(x+1)(x^2-x+a)$

함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $4(x+1)(x^2-x+a)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-x+a=0$의 한 근이 $-1$이거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2-x+a=0$의 한 근이 $-1$이면

$1+1+a=0$

$\therefore a=-2$

(ii) 이차방정식 $x^2-x+a=0$이 중근 또는 허근을 가지려면 판별식을 $D$라 할 때, $D\leq 0$이어야 하므로

$D=1-4a\leq 0$

$\therefore a\geq\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $a=-2$ 또는 $a\geq\frac{1}{4}$

## 2 함수의 최댓값과 최솟값

**문제** 112~115쪽

**06-1** 답 (1) 최댓값: 20, 최솟값: 0

(2) 최댓값: 7, 최솟값: $-6$

(1) $f(x)=-x^3+3x^2$에서

$f'(x)=-3x^2+6x$

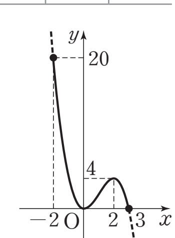
$\quad =-3x(x-2)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[-2, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | 20 | ↘ | 0 극소 | ↗ | 4 극대 | ↘ | 0 |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 20, $x=0$ 또는 $x=3$에서 최솟값 0을 갖는다.



(2) $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+7$에서

$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$

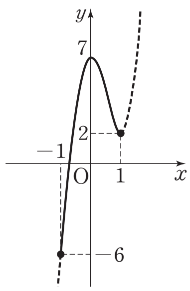
$f'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=0$ 또는 $x=1$ ($\because -1\le x\le 1$)

구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $f(x)$ | $-6$ | ↗ | $7$ 극대 | ↘ | $2$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 7, $x=-1$에서 최솟값 $-6$을 갖는다.




## 07-1 답 −19

$f(x)=-2x^3+3x^2+a$에서

$f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $a$ | ↗ | $a+1$ 극대 | ↘ | $a-27$ |

이때 함수 $f(x)$의 최댓값은 $a+1$이므로

$a+1=9 \qquad \therefore a=8$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$a-27=8-27=-19$

## 07-2 답 5

$f(x)=x^3-3x^2-9x+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

구간 $[-2, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $a-2$ | ↗ | $a+5$ 극대 | ↘ | $a-27$ 극소 | ↗ | $a-20$ |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $M=a+5$, 최솟값은 $m=a-27$이므로 $M+m=-12$에서

$a+5+a-27=-12 \qquad \therefore a=5$

## 07-3 답 3

$f(x)=ax^4-4ax^3+b$에서

$f'(x)=4ax^3-12ax^2=4ax^2(x-3)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=3$ ($\because 1\le x\le 4$)

$a>0$이므로 구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-3a+b$ | ↘ | $-27a+b$ 극소 | ↗ | $b$ |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $b$, 최솟값은 $-27a+b$이므로

$b=9,\ -27a+b=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

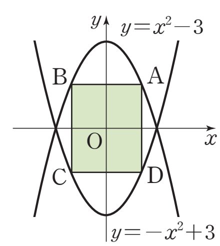
$\therefore ab=\frac{1}{3}\times 9=3$

## 08-1 답 8

오른쪽 그림과 같이 직사각형의 꼭짓점을 A, B, C, D라 하고 점 A의 $x$좌표를 $a$라 하면

$A(a,\ -a^2+3)$,

$D(a,\ a^2-3)$ (단, $0<a<\sqrt{3}$)




$\overline{AB}=2a,\ \overline{AD}=-2a^2+6$이므로 직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a(-2a^2+6)=-4a^3+12a$

$\therefore S'(a)=-12a^2+12=-12(a+1)(a-1)$

$S'(a)=0$인 $a$의 값은 $a=1$ ($\because 0<a<\sqrt{3}$)

$0<a<\sqrt{3}$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $a$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(a)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $S(a)$ | | ↗ | $8$ 극대 | ↘ | |

따라서 넓이 $S(a)$의 최댓값은 8이다.

## 08-2 답 8

점 P의 $x$좌표를 $a$라 하면 $P(a,\ a(a-4)^2)$ (단, $0<a<4$)

$\overline{OH}=a,\ \overline{PH}=a(a-4)^2$이므로 삼각형 POH의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}\times a\times a(a-4)^2=\frac{1}{2}a^4-4a^3+8a^2$

$\therefore\ S'(a)=2a^3-12a^2+16a=2a(a-2)(a-4)$

$S'(a)=0$인 $a$의 값은 $a=2\ (\because\ 0<a<4)$

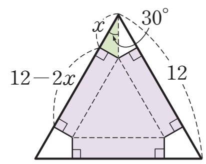
$0<a<4$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $a$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(a)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $S(a)$ | | ↗ | 8<br>극대 | ↘ | |

따라서 넓이 $S(a)$의 최댓값은 8이다.

**09-1** 답 **32**

오른쪽 그림과 같이 잘라 내는 사각형의 긴 변의 길이를 $x$라 하면 상자의 밑면인 정삼각형의 한 변의 길이는 $12-2x$이므로




$x>0,\ 12-2x>0$

$\therefore\ 0<x<6$

이때 삼각기둥의 밑면의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(12-2x)^2\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2$

또 삼각기둥의 높이를 $h$라 하면

$h=x\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2\times\frac{\sqrt{3}}{3}x=x^3-12x^2+36x$

$\therefore\ V'(x)=3x^2-24x+36=3(x-2)(x-6)$

$V'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=2\ (\because\ 0<x<6)$

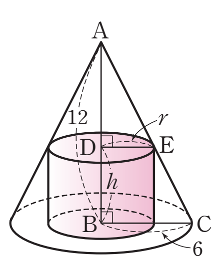
$0<x<6$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $V(x)$ | | ↗ | 32<br>극대 | ↘ | |

따라서 부피 $V(x)$의 최댓값은 32이다.

**09-2** 답 **4**

오른쪽 그림과 같이 원뿔에 내접하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $r$, 높이를 $h$라 하면




$\triangle$ABC$\backsim\triangle$ADE(AA 닮음)

이므로

$12:6=(12-h):r$

$\therefore\ h=12-2r$

이때 $r>0,\ 12-2r>0$이므로

$0<r<6$

원기둥의 부피를 $V(r)$라 하면

$V(r)=\pi r^2h=\pi r^2(12-2r)=\pi(12r^2-2r^3)$

$V'(r)=\pi(24r-6r^2)=-6\pi r(r-4)$

$V'(r)=0$인 $r$의 값은 $r=4\ (\because\ 0<r<6)$

$0<r<6$에서 함수 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $r$ | 0 | $\cdots$ | 4 | $\cdots$ | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(r)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $V(r)$ | | ↗ | $64\pi$<br>극대 | ↘ | |

따라서 부피 $V(r)$는 $r=4$일 때 최대이다.

## 연습문제

116~117쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ④ | **2** ③ | **3** $-\frac{5}{4}<a<-1$ | | **4** ② |
| **5** 28 | **6** 11 | **7** 8 | **8** 6 | **9** ⑤ |
| **10** ③ | **11** ⑤ | **12** 6 | **13** $\frac{256}{3}\pi$ | |

**1** 도함수 $y=f'(x)$의 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $a,\ b$이므로 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ | $b$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ | | ↗ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다.

**2** $f(x)=x^3+ax^2+ax+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+a$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D\leq 0$에서

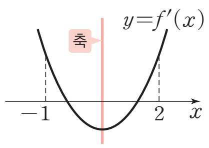
$\frac{D}{4}=a^2-3a\leq 0$

$a(a-3)\leq 0\qquad\therefore\ 0\leq a\leq 3$

따라서 정수 $a$는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

**3** $f(x)=x^3+3ax^2+3x$에서 $f'(x)=3x^2+6ax+3$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1,\ 2)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-1<x<2$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.




(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D>0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=9a^2-9>0,\ (a+1)(a-1)>0$

$\therefore\ a<-1$ 또는 $a>1$ ...... ㉠

(ii) $f'(-1)>0$이어야 하므로

$3-6a+3>0 \qquad \therefore\ a<1$ ...... ㉡

$f'(2)>0$이어야 하므로

$12+12a+3>0 \qquad \therefore\ a>-\dfrac{5}{4}$ ...... ㉢

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-a$이므로

$-1<-a<2 \qquad \therefore\ -2<a<1$ ...... ㉣

㉠~㉣에서 $-\dfrac{5}{4}<a<-1$

**4** $f(x)=-x^3+x^2+x+8$에서

$f'(x)=-3x^2+2x+1=-(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=1\ (\because\ 0\le x\le 2)$

구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | 8 | ↗ | 9<br>극대 | ↘ | 6 |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 9, 최솟값은 6이므로 구하는 합은 $9+6=15$

**5** $f(x)=x^3+ax^2-a^2x-2$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(x+a)(3x-a)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-a$ 또는 $x=\dfrac{a}{3}$

구간 $[-a,\ a]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-a$ | $\cdots$ | $\frac{a}{3}$ | $\cdots$ | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $a^3-2$ | ↘ | $-\frac{5}{27}a^3-2$<br>극소 | ↗ | $a^3-2$ |

함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\dfrac{5}{27}a^3-2$이므로

$-\dfrac{5}{27}a^3-2=-7,\ a^3=27 \qquad \therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

함수 $f(x)$의 최댓값은 $M=a^3-2=27-2=25$

$\therefore\ a+M=3+25=28$

**6** 점 P의 $x$좌표를 $a$라 하면 $\mathrm{P}(a,\ a^2+1)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2=a^2+(a^2-1)^2=a^4-a^2+1$

$\overline{\mathrm{BP}}^2=(a-4)^2+a^4=a^4+a^2-8a+16$

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=l(a)$라 하면

$l(a)=a^4-a^2+1+a^4+a^2-8a+16=2a^4-8a+17$

$\therefore\ l'(a)=8a^3-8=8(a-1)(a^2+a+1)$

$l'(a)=0$인 $a$의 값은 $a=1\ (\because\ a$는 실수)

함수 $l(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $a$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $l'(a)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $l(a)$ | ↘ | 11<br>극소 | ↗ |

따라서 $l(a)=\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값은 11이다.

**7** $f(x)=(x-3)^2=x^2-6x+9$라 하면 $f'(x)=2x-6$

접점의 좌표는 $(a,\ a^2-6a+9)$이고 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a-6$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2-6a+9)=(2a-6)(x-a)$

$\therefore\ y=(2a-6)x-a^2+9$ ...... ㉠

㉠에 $y=0$을 대입하면 $(2a-6)x-a^2+9=0$

$\therefore\ x=\dfrac{(a+3)(a-3)}{2(a-3)}=\dfrac{a+3}{2}\ (\because\ 0<a<3)$

㉠에 $x=0$을 대입하면 $y=-a^2+9$

접선 ㉠과 $x$축 및 $y$축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a+3}{2}\times(-a^2+9)$

$\quad\ =-\dfrac{1}{4}(a^3+3a^2-9a-27)$

$\therefore\ S'(a)=-\dfrac{1}{4}(3a^2+6a-9)=-\dfrac{3}{4}(a+3)(a-1)$

$S'(a)=0$인 $a$의 값은 $a=1\ (\because\ 0<a<3)$

$0<a<3$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $a$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(a)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $S(a)$ | | ↗ | 8<br>극대 | ↘ | |

따라서 넓이 $S(a)$의 최댓값은 8이다.

**8** 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $r$, 높이를 $h$라 하면

$r+h=9 \qquad \therefore h=9-r$

이때 $r>0$, $9-r>0$이므로

$0<r<9$

원기둥의 부피를 $V(r)$라 하면

$V(r)=\pi r^2h=\pi r^2(9-r)=\pi(9r^2-r^3)$

$\therefore V'(r)=\pi(18r-3r^2)=3\pi r(6-r)$

$V'(r)=0$인 $r$의 값은 $r=6$ ($\because 0<r<9$)

$0<r<9$에서 함수 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $r$ | 0 | $\cdots$ | 6 | $\cdots$ | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(r)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $V(r)$ | | $\nearrow$ | $108\pi$ 극대 | $\searrow$ | |

따라서 부피 $V(r)$는 $r=6$일 때 최대이다.

**9** $f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$에서

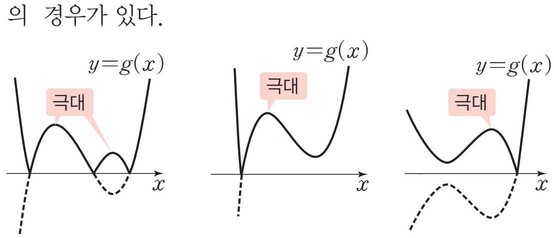
$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $k+7$ 극대 | $\searrow$ | $k-20$ 극소 | $\nearrow$ |

한편 함수 $f(x)$의 두 극값의 부호에 따라 함수 $g(x)=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같이 세 가지의 경우가 있다.




즉, 함수 $g(x)$가 2개의 극댓값을 가지려면 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 부호가 서로 반대이어야 하므로

$(k+7)(k-20)<0 \qquad \therefore -7<k<20 \quad \cdots\cdots ㉠$

또 $g(a)=|k+7|=k+7$, $g(b)=|k-20|=-k+20$이므로 $|g(a)-g(b)|>9$에서

$|k+7-(-k+20)|>9$, $|2k-13|>9$

$2k-13<-9$ 또는 $2k-13>9$

$\therefore k<2$ 또는 $k>11 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $-7<k<2$ 또는 $11<k<20$

따라서 정수 $k$는 $-6$, $-5$, $\cdots$, $1$, $12$, $13$, $\cdots$, $19$의 16개이다.

**10** $f(x)=x(x-a)(x-6)$이라 하면

$f'(x)=(x-a)(x-6)+x(x-6)+x(x-a)$

$\quad=3x^2-2(a+6)x+6a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=6a \quad \cdots\cdots ㉠$

한편 원점을 지나고 다른 한 점에서 곡선에 접하는 접선의 접점의 좌표를 $(t, t^3-(a+6)t^2+6at)$ $(t\neq0)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2(a+6)t+6a$이므로 접선의 방정식은

$y-\{t^3-(a+6)t^2+6at\}$

$=\{3t^2-2(a+6)t+6a\}(x-t)$

$\therefore y=\{3t^2-2(a+6)t+6a\}x-2t^3+(a+6)t^2$

이 직선이 원점을 지나므로

$0=-2t^3+(a+6)t^2$

$t^2\{2t-(a+6)\}=0$

$\therefore t=\dfrac{a+6}{2}$ ($\because t\neq0$)

이때 접선의 기울기는

$f'\left(\dfrac{a+6}{2}\right)=\dfrac{3(a+6)^2}{4}-(a+6)^2+6a$

$\quad=-\dfrac{1}{4}a^2+3a-9 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 두 접선의 기울기의 곱을 $g(a)$라 하면

$g(a)=6a\left(-\dfrac{1}{4}a^2+3a-9\right)$

$\quad=-\dfrac{3}{2}a^3+18a^2-54a$

$\therefore g'(a)=-\dfrac{9}{2}a^2+36a-54$

$\quad=-\dfrac{9}{2}(a-2)(a-6)$

$g'(a)=0$인 $a$의 값은 $a=2$ ($\because 0<a<6$)

$0<a<6$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $a$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(a)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $g(a)$ | | $\searrow$ | $-48$ 극소 | $\nearrow$ | |

따라서 함수 $g(a)$의 최솟값은 $-48$이다.

**11** $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=\dfrac{1}{2} \qquad \therefore c=\dfrac{1}{2}$

$g'(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ f'(x) & (x>0) \end{cases}$이고 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$f'(0)=0 \qquad \therefore b=0 \qquad \therefore f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{2}$

ㄱ. $g(0)+g'(0)=f(0)+f'(0)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$

ㄴ. $f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$이므로 $f'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

함수 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작으므로 $x\ge0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작다.

그런데 $-\frac{2}{3}a<0$이면 $x>0$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다. 즉, $x\ge0$에서 $f(x)$의 최솟값이 $f(0)=\frac{1}{2}$이 되므로 이는 조건에 모순이다.

즉, $-\frac{2}{3}a>0$이므로 $a<0$

$\therefore g(1)=f(1)=1+a+\frac{1}{2}=a+\frac{3}{2}<\frac{3}{2}$

ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 0이면 $x\ge0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이다.
$x\ge0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $-\frac{2}{3}a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\frac{1}{2}$ | ↘ | $\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}$ 극소 | ↗ |

함수 $f(x)$의 최솟값은 $\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}$이므로

$\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}=0,\ a^3=-\frac{27}{8}$

$\therefore a=-\frac{3}{2}\ (\because a<0)$

즉, $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$이므로

$g(2)=f(2)=8-6+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

**12** $f(x)=-x^3+3x^2+2$에서
$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$
$f'(x)=0$인 $x$의 값은
$x=0$ 또는 $x=2$
구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

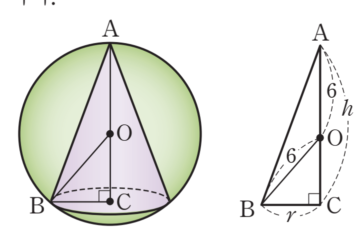
| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 |
| $f(x)$ | 6 | ↘ | 2 극소 | ↗ | 6 |

즉, 함수 $f(x)$의 최댓값은 6, 최솟값은 2이므로
$-1\le x\le 2$일 때 $2\le f(x)\le 6$이다.
이때 $f(x)=t$로 놓으면 $2\le t\le 6$이고,
$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(t)=-t^3+3t^2+2$
$\therefore f'(t)=-3t^2+6t=-3t(t-2)$
$f'(t)=0$인 $t$의 값은 $t=2\ (\because 2\le t\le 6)$
$2\le t\le 6$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | 2 | $\cdots$ | 6 |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | 0 | $-$ | |
| $f(t)$ | 6 | ↘ | $-106$ |

따라서 함수 $f(t)$, 즉 $(f\circ f)(x)$의 최댓값은 6이다.

**13** 다음 그림과 같이 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 $r$, 높이를 $h$라 하자.




삼각형 OBC는 직각삼각형이므로
$r^2+(h-6)^2=6^2 \qquad \therefore r^2=-h^2+12h$
이때 $h>0$, $h-6<6$이므로 $0<h<12$
원뿔의 부피를 $V(h)$라 하면
$V(h)=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}(-h^2+12h)h=\frac{\pi}{3}(-h^3+12h^2)$
$\therefore V'(h)=\frac{\pi}{3}(-3h^2+24h)=-\pi h(h-8)$
$V'(h)=0$인 $h$의 값은 $h=8\ (\because 0<h<12)$
$0<h<12$에서 함수 $V(h)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $h$ | 0 | $\cdots$ | 8 | $\cdots$ | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(h)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $V(h)$ | | ↗ | $\frac{256}{3}\pi$ 극대 | ↘ | |

따라서 부피 $V(h)$의 최댓값은 $\frac{256}{3}\pi$이다.

# Ⅱ-2 04 방정식과 부등식에의 활용

## 1 방정식에의 활용

**개념 Check** 119쪽

**1** 답 (1) **1** (2) **3** (3) **3**

**문제** 120～123쪽

**01-1** 답 (1) **2** (2) **1** (3) **4** (4) **2**

(1) $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은

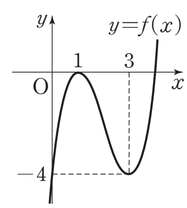
$x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $0$ 극대 | ↘ | $-4$ 극소 | ↗ |

또 $f(0)=-4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x$축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.




(2) $f(x)=x^3-3x^2+5$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

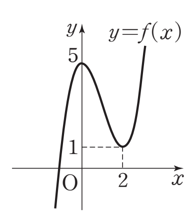
$f'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $5$ 극대 | ↘ | $1$ 극소 | ↗ |

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x$축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.




(3) $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+3$이라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$

$=4(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은

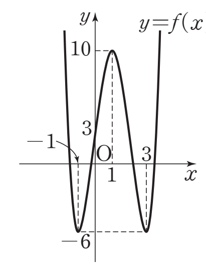
$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-6$ 극소 | ↗ | $10$ 극대 | ↘ | $-6$ 극소 | ↗ |

또 $f(0)=3$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x$축과 서로 다른 네 점에서 만난다.

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.




(4) $f(x)=x^4-2x^2-1$이라 하면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

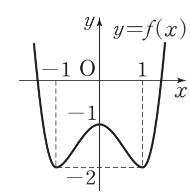
$f'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-2$ 극소 | ↗ | $-1$ 극대 | ↘ | $-2$ 극소 | ↗ |

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x$축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.




**02-1** 답 (1) $\boldsymbol{-3<k<0}$ (2) $\boldsymbol{k=-3}$ **또는** $\boldsymbol{k=0}$

(3) $\boldsymbol{-128<k<-3}$ **또는** $\boldsymbol{k>0}$

(4) $\boldsymbol{k=-128}$

주어진 방정식에서 $x^4+4x^3-8x^2=k$이므로

이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=x^4+4x^3-8x^2$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^4+4x^3-8x^2$이라 하면

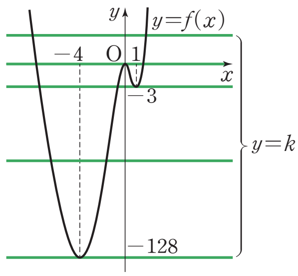
$f'(x)=4x^3+12x^2-16x=4x(x+4)(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-4$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-4$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-128$ 극소 | ↗ | $0$ 극대 | ↘ | $-3$ 극소 | ↗ |

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




(1) 직선 $y=k$와 네 점에서 만나야 하므로 $-3<k<0$

(2) 직선 $y=k$와 세 점에서 만나야 하므로 $k=-3$ 또는 $k=0$

(3) 직선 $y=k$와 두 점에서 만나야 하므로 $-128<k<-3$ 또는 $k>0$

(4) 직선 $y=k$와 한 점에서 만나야 하므로 $k=-128$

**02-2** 답 (1) $\boldsymbol{k<-7}$ **또는** $\boldsymbol{k>20}$ (2) $\boldsymbol{k=-7}$ **또는** $\boldsymbol{k=20}$

곡선 $y=2x^3+3x^2-10x$와 직선 $y=2x+k$의 교점의 개수는 방정식 $2x^3+3x^2-10x=2x+k$, 즉 $2x^3+3x^2-12x=k$의 서로 다른 실근의 개수와 같고, 이는 곡선 $y=2x^3+3x^2-12x$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=2x^3+3x^2-12x$라 하면

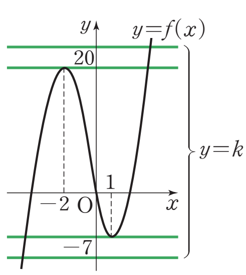
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $20$ 극대 | $\searrow$ | $-7$ 극소 | $\nearrow$ |

또 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




(1) 직선 $y=k$와 한 점에서 만나야 하므로 $k<-7$ 또는 $k>20$

(2) 직선 $y=k$와 두 점에서 만나야 하므로 $k=-7$ 또는 $k=20$

**03-1** 답 (1) $\boldsymbol{2<k<7}$ (2) $\boldsymbol{-25<k<2}$

주어진 방정식에서 $x^3-3x^2-9x+2=k$이므로 이 방정식의 실근은 함수 $y=x^3-3x^2-9x+2$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 $x$좌표와 같다.

$f(x)=x^3-3x^2-9x+2$라 하면

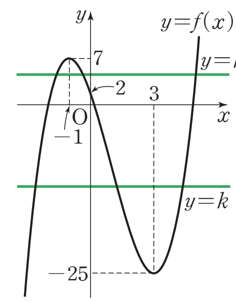
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $7$ 극대 | $\searrow$ | $-25$ 극소 | $\nearrow$ |

또 $f(0)=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 주어진 근의 조건을 만족시키는 $k$의 값의 범위는

(1) $2<k<7$

(2) $-25<k<2$

**03-2** 답 $\boldsymbol{3}$

방정식 $f(x)=g(x)$에서

$3x^3-2x^2-5x=x^3-2x^2+x+k$, 즉 $2x^3-6x=k$이므로 주어진 방정식의 실근은 함수 $y=2x^3-6x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 $x$좌표와 같다.

$h(x)=2x^3-6x$라 하면

$h'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

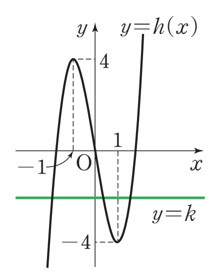
$h'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $h(x)$ | $\nearrow$ | $4$ 극대 | $\searrow$ | $-4$ 극소 | $\nearrow$ |

또 $h(0)=0$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




즉, 주어진 근의 조건을 만족시키는 $k$의 값의 범위는

$-4<k<0$

따라서 정수 $k$는 $-3$, $-2$, $-1$의 3개이다.

**04-1** 답 (1) $\boldsymbol{0<k<32}$

(2) $\boldsymbol{k=0}$ **또는** $\boldsymbol{k=32}$

(3) $\boldsymbol{k<0}$ **또는** $\boldsymbol{k>32}$

$f(x)=x^3-6x^2+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $k$ 극대 | $\searrow$ | $k-32$ 극소 | $\nearrow$ |

(1) (극댓값)×(극솟값)<0이어야 하므로

$k(k-32)<0$

$\therefore 0<k<32$

(2) (극댓값)×(극솟값)=0이어야 하므로

$k(k-32)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=32$

(3) 한 개의 실근을 가지려면

$k(k-32)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>32$

## 2 부등식에의 활용

**문제** 125~126쪽

**05-1** 답 $\boldsymbol{k\le 0}$

$f(x)=x^4-4x^3+4x^2-k$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-k$ 극소 | $\nearrow$ | $-k+1$ 극대 | $\searrow$ | $-k$ 극소 | $\nearrow$ |

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-k$이므로 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$-k\ge 0 \qquad \therefore k\le 0$

**05-2** 답 $\boldsymbol{-3}$

모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\le g(x)$가 성립하려면

$f(x)-g(x)\le 0$이어야 한다.

$F(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$F(x)=-3x^4+16x^3-14x^2-24-(4x^2-k)$

$\quad=-3x^4+16x^3-18x^2-24+k$

$\therefore F'(x)=-12x^3+48x^2-36x$

$\quad=-12x(x-1)(x-3)$

$F'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $F(x)$ | $\nearrow$ | $k-24$ 극대 | $\searrow$ | $k-29$ 극소 | $\nearrow$ | $k+3$ 극대 | $\searrow$ |

함수 $F(x)$의 최댓값은 $k+3$이므로 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\le g(x)$, 즉 $F(x)\le 0$이 성립하려면

$k+3\le 0 \qquad \therefore k\le -3$

따라서 실수 $k$의 최댓값은 $-3$이다.

**06-1** 답 (1) $\boldsymbol{k\ge 4}$ (2) $\boldsymbol{k\le -16}$

(1) $f(x)=x^3-3x^2+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=2$ ($\because x\ge 1$)

$x\ge 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $k-2$ | $\searrow$ | $k-4$ 극소 | $\nearrow$ |

따라서 $x\ge 1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $k-4$이므로 $x\ge 1$일 때, $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$k-4\ge 0 \qquad \therefore k\ge 4$

(2) $x^3+x^2-4x<x^2+8x-k$에서 $x^3-12x+k<0$

$f(x)=x^3-12x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$2<x<4$일 때, $f'(x)>0$이므로 $2<x<4$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

따라서 $2<x<4$일 때, $f(x)<0$이 성립하려면

$f(4)\le 0$이어야 하므로

$64-48+k\le 0 \qquad \therefore k\le -16$

**06-2** 답 $\boldsymbol{k<1}$

구간 $[0, 2]$에서 $f(x)<g(x)$가 성립하려면

$f(x)-g(x)<0$이어야 한다.

$F(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$F(x)=-2x^2+2x+k-(x^3-2x^2-x+3)$

$\quad=-x^3+3x+k-3$

$\therefore F'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$F'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=1$ ($\because 0\le x\le 2$)

구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $F(x)$ | $k-3$ | ↗ | $k-1$<br>극대 | ↘ | $k-5$ |

따라서 구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $F(x)$의 최댓값은 $k-1$이므로 구간 $[0,\ 2]$에서 $f(x)<g(x)$, 즉 $F(x)<0$이 성립하려면

$k-1<0 \qquad \therefore\ k<1$

## 연습문제 127~128쪽

**1** 3　**2** ③　**3** $-2<k<6$　**4** ④
**5** $a=-2$ 또는 $a>0$　**6** ④　**7** $-1$　**8** $a<-6$
**9** 2　**10** 3　**11** $-4<k<4$　**12** ②
**13** 34

**1** $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+5$라 하면

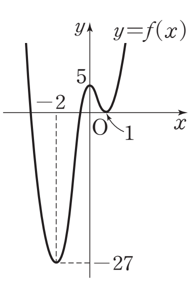
$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-27$<br>극소 | ↗ | $5$<br>극대 | ↘ | $0$<br>극소 | ↗ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x$축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.




**2** 두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되려면 방정식 $2x^2-1=x^3-x^2+k$, 즉 $-x^3+3x^2-1=k$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=-x^3+3x^2-1$이라 하면

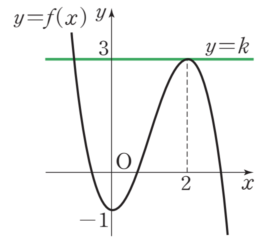
$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-1$<br>극소 | ↗ | $3$<br>극대 | ↘ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와 만나는 점이 2개가 되도록 하는 양수 $k$의 값은 3이다.




다른 풀이

두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되려면 방정식 $2x^2-1=x^3-x^2+k$, 즉 $-x^3+3x^2-1-k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$g(x)=-x^3+3x^2-1-k$라 하면

$g'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$g'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(x)$ | ↘ | $-k-1$<br>극소 | ↗ | $-k+3$<br>극대 | ↘ |

삼차방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

(극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이어야 하므로

$(-k+3)(-k-1)=0$

$\therefore\ k=-1$ 또는 $k=3$

따라서 양수 $k$의 값은 3이다.

**3** 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 3이어야 한다.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$($a$, $b$, $c$, $d$는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

주어진 함수 $y=f'(x)$의 그래프에서

$f'(0)=3$, $f'(-2)=f'(2)=0$이므로

$c=3$, $12a-4b+c=0$, $12a+4b+c=0$

$\therefore\ 12a-4b=-3$, $12a+4b=-3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{1}{4}$, $b=0$

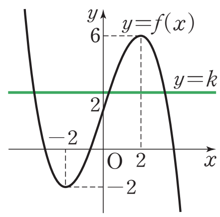
또 $f(0)=2$에서 $d=2$

$\therefore\ f(x)=-\dfrac{1}{4}x^3+3x+2$

$x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 극솟값 $f(-2)=-2$를 갖고, $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 극댓값 $f(2)=6$을 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와 만나는 점이 3개가 되도록 하는 실수 $k$의 값의 범위는

$-2<k<6$




**4** 방정식 $|f(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=3x^3-9x-1$에서

$f'(x)=9x^2-9=9(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=-1$ 또는 $x=1$

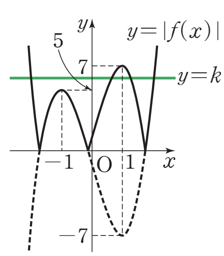
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $5$ 극대 | $\searrow$ | $-7$ 극소 | $\nearrow$ |

즉, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와 만나는 점이 4개가 되도록 하는 $k$의 값의 범위는

$5<k<7$

따라서 정수 $k$의 값은 6이다.




**5** 주어진 방정식에서 $2x^4-4x^2=a$이므로 이 방정식의 실근은 함수 $y=2x^4-4x^2$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 $x$좌표와 같다.

$f(x)=2x^4-4x^2$이라 하면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은

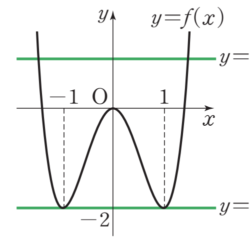
$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-2$ 극소 | $\nearrow$ | $0$ 극대 | $\searrow$ | $-2$ 극소 | $\nearrow$ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 근의 조건을 만족시키는 $a$의 값의 범위는

$a=-2$ 또는 $a>0$




**6** $5x^3+2x^2-8x=3x^3-x^2+4x+k$에서

$2x^3+3x^2-12x=k$

이 방정식의 세 실근 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$에 대하여 $\alpha<\beta<0<\gamma$이려면 서로 다른 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 가져야 한다.

$f(x)=2x^3+3x^2-12x$라 하면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

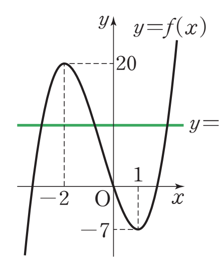
| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $20$ 극대 | $\searrow$ | $-7$ 극소 | $\nearrow$ |

또 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, 주어진 근의 조건을 만족시키는 $k$의 값의 범위는

$0<k<20$

따라서 정수 $k$는 1, 2, 3, $\cdots$, 19의 19개이다.




**7** $-x^4+3x^3+6x^2-5\le 3x^3+2x^2+a$에서

$-x^4+4x^2-5-a\ge 0$

$f(x)=-x^4+4x^2-5-a$라 하면

$f'(x)=-4x^3+8x=-4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-\sqrt{2}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\sqrt{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $-a-1$ 극대 | $\searrow$ | $-a-5$ 극소 | $\nearrow$ | $-a-1$ 극대 | $\searrow$ |

함수 $f(x)$의 최댓값은 $-a-1$이므로 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\le 0$이 성립하려면

$-a-1\le 0 \qquad \therefore a\ge -1$

따라서 실수 $a$의 최솟값은 $-1$이다.

**8** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 $x$에 대하여
$f(x)>g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)>0$이어야 한다.
$F(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$F(x)=x^4+2x^2-5x-(-x^2-15x+a)$
$\quad =x^4+3x^2+10x-a$
$\therefore F'(x)=4x^3+6x+10$
$\quad =2(x+1)(2x^2-2x+5)$
$F'(x)=0$인 $x$의 값은
$x=-1$ ($\because$ $x$는 실수)
함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $F(x)$ | $\searrow$ | $-a-6$ 극소 | $\nearrow$ |

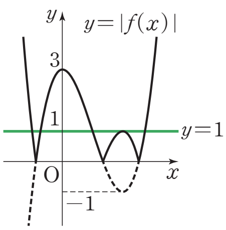
따라서 함수 $F(x)$의 최솟값은 $-a-6$이므로 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)>g(x)$, 즉 $F(x)>0$이 성립하려면
$-a-6>0$
$\therefore a<-6$

**9** $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k$라 하면
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$
$\quad =12x(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$인 $x$의 값은
$x=-1$ 또는 $x=0$ ($\because$ $-2\le x\le 0$)
$-2\le x\le 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $f(x)$ | $k+32$ | $\searrow$ | $k-5$ 극소 | $\nearrow$ | $k$ |

$-2\le x\le 0$일 때, $|f(x)|<20$, 즉
$-20<f(x)<20$이 성립하려면
($f(x)$의 최솟값)$>-20$, ($f(x)$의 최댓값)$<20$이어야 하므로
$k-5>-20$, $k+32<20$
$\therefore -15<k<-12$
따라서 정수 $k$는 $-14$, $-13$의 2개이다.

**10** $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수)라 하면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
(가)에서 $f'(0)=0$, $f(0)=3$이므로
$b=0$, $c=3$
$\therefore f(x)=x^3+ax^2+3$
(가)에서 함수 $f(x)$가 극댓값을 가지므로 극솟값도 반드시 갖고, (나)에서 방정식 $|f(x)|=1$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수와 같으므로 오른쪽 그림과 같이 5개의 점에서 만나려면 함수 $f(x)$의 극솟값이 $-1$이어야 한다.



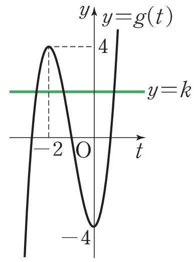

$f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$
이므로
$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$
즉, 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{2}{3}a$에서 극솟값 $-1$을 가지므로
$f\left(-\frac{2}{3}a\right)=-1$에서
$-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+3=-1$
$a^3=-27$
$\therefore a=-3$ ($\because$ $a$는 실수)
따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3$이므로
$f(3)=27-27+3=3$

**11** $f(x)=-x^3+2x$라 하면 $f'(x)=-3x^2+2$
접점의 좌표를 $(t, -t^3+2t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-3t^2+2$이므로 접선의 방정식은
$y-(-t^3+2t)=(-3t^2+2)(x-t)$
$\therefore y=(-3t^2+2)x+2t^3$
이 직선이 점 $(-2, k)$를 지나므로
$k=(-3t^2+2)\times(-2)+2t^3$
$\therefore 2t^3+6t^2-4=k$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
서로 다른 세 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
$g(t)=2t^3+6t^2-4$라 하면
$g'(t)=6t^2+12t=6t(t+2)$
$g'(t)=0$인 $t$의 값은
$t=-2$ 또는 $t=0$
함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(t)$ | $\nearrow$ | $4$ 극대 | $\searrow$ | $-4$ 극소 | $\nearrow$ |

따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와 만나는 점이 3개가 되도록 하는 $k$의 값의 범위는

$-4<k<4$




다른 풀이

㉠에서 $g(t)=2t^3+6t^2-4-k$라 하면

$g'(t)=6t^2+12t$

$\quad\;\; =6t(t+2)$

$g'(t)=0$인 $t$의 값은

$t=-2$ 또는 $t=0$

함수 $g(t)$의 극댓값은 $g(-2)=-k+4$, 극솟값은 $g(0)=-k-4$이므로 삼차방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 (극댓값)×(극솟값)<0이어야 한다.

$(-k+4)(-k-4)<0$

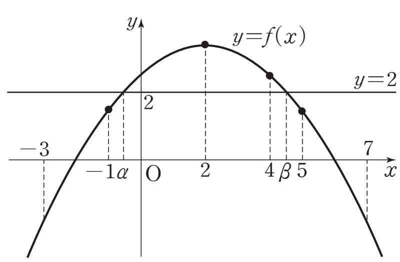
$\therefore\ -4<k<4$

**12** 부등식 $f'(x)\{f(x)-2\}\leq 0$에서

$f'(x)\leq 0$, $f(x)-2\geq 0$

또는 $f'(x)\geq 0$, $f(x)-2\leq 0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 $x$좌표를 $\alpha$, $\beta(\alpha<\beta)$라 하자.




(i) $f'(x)\leq 0$, $f(x)-2\geq 0$인 경우

$f'(x)\leq 0$을 만족시키는 $x$의 값의 범위는

$x\geq 2$ ...... ㉠

$f(x)-2\geq 0$, 즉 $f(x)\geq 2$를 만족시키는 $x$의 값의 범위는

$\alpha\leq x\leq\beta$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 $x$의 값의 범위는

$2\leq x\leq\beta$

따라서 정수 $x$의 값은 2, 3, 4이다.

(ii) $f'(x)\geq 0$, $f(x)-2\leq 0$인 경우

$f'(x)\geq 0$을 만족시키는 $x$의 값의 범위는

$x\leq 2$ ...... ㉢

$f(x)-2\leq 0$, 즉 $f(x)\leq 2$를 만족시키는 $x$의 값의 범위는

$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$ ...... ㉣

㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 $x$의 값의 범위는

$x\leq\alpha$

따라서 열린구간 $(-3,\ 7)$에서 정수 $x$의 값은 $-2$, $-1$이다.

(i), (ii)에서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 $x$는 $-2$, $-1$, 2, 3, 4의 5개이다.

**13** (i) $f(x)\leq 12x+k$에서

$-x^4-2x^3-x^2\leq 12x+k$

$x^4+2x^3+x^2+12x+k\geq 0$

$h(x)=x^4+2x^3+x^2+12x+k$라 하면

$h'(x)=4x^3+6x^2+2x+12$

$\quad\;\; =2(x+2)(2x^2-x+3)$

$h'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=-2$ ($\because$ $x$는 실수)

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | ⋯ | $-2$ | ⋯ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $h(x)$ | ↘ | $k-20$<br>극소 | ↗ |

따라서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $k-20$이므로 모든 실수 $x$에 대하여 $h(x)\geq 0$이 성립하려면

$k-20\geq 0$

$\therefore\ k\geq 20$ ...... ㉠

(ii) $12x+k\leq g(x)$에서

$12x+k\leq 3x^2+a$

$3x^2-12x-k+a\geq 0$

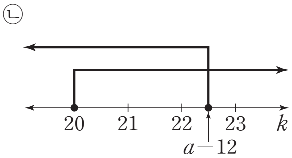
이 이차부등식이 모든 실수 $x$에 대하여 성립하려면 이차방정식 $3x^2-12x-k+a=0$의 판별식을 $D$라 할 때, $D\leq 0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=36-3(a-k)\leq 0$

$3k\leq 3a-36$

$\therefore\ k\leq a-12$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수 $k$의 개수가 3이므로




$22\leq a-12<23$

따라서 $34\leq a<35$이므로 자연수 $a$의 값은 34이다.

## 1 속도와 가속도

### 개념 Check 130쪽

**1** 답 (1) **속도: $-5$, 가속도: $-6$** (2) **속도: $0$, 가속도: $8$**

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하자.

(1) $v=\frac{dx}{dt}=-6t+7$, $a=\frac{dv}{dt}=-6$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도는

$v=-12+7=-5$

$t=2$에서의 점 P의 가속도는

$a=-6$

(2) $v=\frac{dx}{dt}=3t^2-4t-4$, $a=\frac{dv}{dt}=6t-4$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도는

$v=12-8-4=0$

$t=2$에서의 점 P의 가속도는

$a=12-4=8$

**2** 답 (1) **3** (2) **1**

(1) 위치가 0이면 $x=0$에서

$-2t^2+4t+6=0$, $t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$ $\therefore t=3$ ($\because t>0$)

따라서 점 P의 위치가 0이 되는 시각은 3이다.

(2) 시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-4t+4$

속도가 0이면 $v=0$에서

$-4t+4=0$ $\therefore t=1$

따라서 점 P의 속도가 0이 되는 시각은 1이다.

### 문제 131~136쪽

**01-1** 답 **$-24$**

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2+20$, $a=\frac{dv}{dt}=-6t$

점 P의 속도가 $-28$이면 $v=-28$에서

$-3t^2+20=-28$, $t^2-16=0$

$(t+4)(t-4)=0$ $\therefore t=4$ ($\because t>0$)

따라서 $t=4$에서의 점 P의 가속도는

$a=-24$

**01-2** 답 **$\frac{35}{2}$**

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=t^2+3t$, $a=\frac{dv}{dt}=2t+3$

점 P의 가속도가 9이면 $a=9$에서

$2t+3=9$, $2t=6$

$\therefore t=3$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 위치가 40이므로 $x=40$에서

$9+\frac{27}{2}+k=40$

$\therefore k=\frac{35}{2}$

**01-3** 답 **2**

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-12t+11$

점 P가 원점을 지날 때는 위치가 0이므로 $x=0$에서

$t^3-6t^2+11t-6=0$

$(t-1)(t-2)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$ 또는 $t=3$

따라서 점 P가 출발 후 마지막으로 원점을 지나는 시각은 3이므로 $t=3$에서의 점 P의 속도는

$v=27-36+11=2$

**02-1** 답 **32**

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2+12t$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=0$에서 $-3t^2+12t=0$

$-3t(t-4)=0$ $\therefore t=4$ ($\because t>0$)

따라서 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$x=-64+96=32$

**02-2** 답 **$2<t<4$**

시각 $t$에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$f'(t)=6t^2-12t$, $g'(t)=2t-8$

두 점이 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호는 서로 반대이므로 $f'(t)g'(t)<0$에서

$(6t^2-12t)(2t-8)<0$

$12t(t-2)(t-4)<0$

이때 $t>0$이므로 $(t-2)(t-4)<0$

$\therefore 2<t<4$

02-**3** 답 $\frac{4}{3}$

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=t^2-4t+3$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=0$에서 $t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$t=1$에서의 점 P의 위치 A는

$\frac{1}{3}-2+3+2=\frac{10}{3}$

$t=3$에서의 점 P의 위치 B는

$9-18+9+2=2$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는

$\frac{10}{3}-2=\frac{4}{3}$

03-**1** 답 (1) **속도: $-10$ m/s, 가속도: $-10$ m/s$^2$** (2) **45 m** (3) **$-30$ m/s**

(1) 물 로켓의 $t$초 후의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=20-10t(\text{m/s})$, $a=\frac{dv}{dt}=-10(\text{m/s}^2)$

따라서 3초 후의 물 로켓의 속도와 가속도는

$v=20-30=-10(\text{m/s})$, $a=-10(\text{m/s}^2)$

(2) 물 로켓이 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$v=0$에서 $20-10t=0$

$\therefore t=2$

따라서 $t=2$에서의 높이는

$x=25+40-20=45(\text{m})$

(3) 물 로켓이 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로 $x=0$에서

$25+20t-5t^2=0$, $t^2-4t-5=0$

$(t+1)(t-5)=0$ $\quad\therefore t=5$ ($\because t>0$)

따라서 $t=5$에서의 속도는

$v=20-50=-30(\text{m/s})$

03-**2** 답 **$-150$**

물체의 $t$초 후의 속도를 $v$라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=a+2bt(\text{m/s})$

물체가 최고 높이에 도달할 때, 즉 $t=3$에서의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$a+6b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $t=3$에서의 높이가 75 m이므로 $x=75$에서

$30+3a+9b=75$ $\quad\therefore a+3b=15$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=30$, $b=-5$

$\therefore ab=-150$

04-**1** 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $0<t<2$에서 점 P의 속도는 증가한다.

ㄴ. $v(2)=3>0$, $v(5)=-2<0$이므로 $t=2$일 때와 $t=5$일 때 점 P의 운동 방향이 서로 반대이다.

ㄷ. 시각 $t$에서의 가속도는 $v'(t)$이므로 속도 $v(t)$의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.
즉, $t=4$인 점에서의 접선의 기울기는 음수이므로 $t=4$에서의 점 P의 가속도는 음의 값이다.

ㄹ. $t=4$인 점에서 $v(t)=0$이고 $t=4$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=4$에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다.
즉, $0<t<6$에서 점 P는 운동 방향을 한 번 바꾼다.

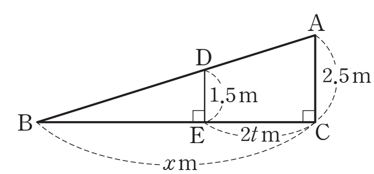
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

05-**1** 답 (1) **5 m/s** (2) **3 m/s**

민우가 2 m/s의 속도로 움직이므로 $t$초 동안 움직이는 거리는 $2t$ m

$t$초 후 가로등 바로 밑에서 민우의 그림자 끝까지의 거리를 $x$ m라 하면 다음 그림에서

△ABC∽△DBE(AA 닮음)이다.




$2.5 : x=1.5 : (x-2t)$

$1.5x=2.5x-5t$ $\quad\therefore x=5t$

(1) 민우의 그림자 끝이 움직이는 속도를 $v$ m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=5(\text{m/s})$

(2) 민우의 그림자의 길이를 $l$ m라 하면

$l=\overline{BE}=\overline{BC}-\overline{EC}=x-2t=5t-2t=3t$

따라서 그림자의 길이의 변화율은

$\frac{dl}{dt}=3(\text{m/s})$

06-**1** 답 (1) **$88\pi$** (2) **$480\pi$**

시각 $t$에서의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $10+t$

밑면의 반지름의 길이가 12가 될 때의 시각은

$10+t=12$에서 $t=2$

(1) $t$초 후의 원기둥의 겉넓이를 $S$라 하면

$S=2\pi(10+t)^2+2\pi(10+t)\times 20$
$\quad=2\pi(10+t)(30+t)$

$\therefore \frac{dS}{dt}=2\pi(30+t)+2\pi(10+t)$

따라서 $t=2$에서의 겉넓이의 변화율은

$2\pi\times 32+2\pi\times 12=88\pi$

(2) $t$초 후의 원기둥의 부피를 $V$라 하면

$V=\pi(10+t)^2\times20=20\pi(10+t)^2$

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=20\pi\times2(10+t)=40\pi(10+t)$

따라서 $t=2$에서의 부피의 변화율은

$40\pi\times12=480\pi$

**06-2** 답 **130**

$t$초 후의 점 A의 좌표는 $(3t,\ 0)$, 점 B의 좌표는 $(0,\ 2t)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{9t^2+4t^2}=\sqrt{13}t$

선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S$라 하면

$S=(\sqrt{13}t)^2=13t^2 \qquad \therefore \dfrac{dS}{dt}=26t$

따라서 $t=5$에서의 넓이의 변화율은 $26\times5=130$

## 연습문제 137~138쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** 2 | **2** ④ | **3** 7 | **4** $\frac{3}{2}$ | **5** 4 |
| **6** ③ | **7** ㄷ, ㄹ | **8** 1 m/s | **9** $16\pi$ cm²/s | |
| **10** ③ | **11** 5 | **12** ① | **13** $-20$ m/s | |

**1** 시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-3t^2+12t+3=-3(t-2)^2+15$

따라서 속도 $v$는 $t=2$일 때 최대이다.

**2** $t$초 후의 자동차의 속도를 $v$ m/s라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=24-6t$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$24-6t=0 \qquad \therefore t=4$

따라서 4초 동안 자동차가 움직인 거리는

$x=96-48=48(\text{m})$

**3** 시각 $t$에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$f'(t)=-2t+6,\ g'(t)=3t^2+7t-6$

두 점 P, Q의 속도가 같으면

$-2t+6=3t^2+7t-6,\ t^2+3t-4=0$

$(t+4)(t-1)=0 \qquad \therefore t=1\ (\because t>0) \qquad \therefore a=1$

$t=1$에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$f(1)=-1+6=5$

$g(1)=1+\dfrac{7}{2}-6+\dfrac{1}{2}=-1$

이때 두 점 P, Q 사이의 거리는

$5-(-1)=6 \qquad \therefore b=6$

$\therefore a+b=1+6=7$

**4** 시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-t-2$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=0$에서 $3t^2-t-2=0$

$(t-1)(3t+2)=0 \qquad \therefore t=1\ (\because t>0)$

이때의 점 P의 위치가 원점이므로 $x=0$에서

$1-\dfrac{1}{2}-2+a=0 \qquad \therefore a=\dfrac{3}{2}$

**5** 시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v_P$라 하면

$v_P=\dfrac{dx_P}{dt}=6t^2-24t+18$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v_P=0$에서 $6t^2-24t+18=0$

$t^2-4t+3=0,\ (t-1)(t-3)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

즉, 출발 후 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾸므로 $a=2$

시각 $t$에서의 점 Q의 속도를 $v_Q$라 하면

$v_Q=\dfrac{dx_Q}{dt}=12t-18$

점 Q가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v_Q=0$에서 $12t-18=0 \qquad \therefore t=\dfrac{3}{2}$

즉, 출발 후 점 Q는 운동 방향을 한 번 바꾸므로 $b=1$

선분 PQ의 중점 M의 시각 $t$에서의 위치를 $x_M$이라 하면

$x_M=\dfrac{(2t^3-12t^2+18t)+(6t^2-18t-4)}{2}=t^3-3t^2-2$

시각 $t$에서의 점 M의 속도를 $v_M$이라 하면

$v_M=\dfrac{dx_M}{dt}=3t^2-6t$

점 M이 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v_M=0$에서 $3t^2-6t=0$

$3t(t-2)=0 \qquad \therefore t=2\ (\because t>0)$

즉, 출발 후 점 M은 운동 방향을 한 번 바꾸므로 $c=1$

$\therefore a+b+c=2+1+1=4$

**6** 물체의 $t$초 후의 속도를 $v$ m/s라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=30-10t$

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$v=0$에서 $30-10t=0 \qquad \therefore t=3 \qquad \therefore a=3$

$t=3$에서의 높이는

$x=90-45=45 \qquad \therefore b=45$

$\therefore b-a=45-3=42$

**7** ㄱ. $t=1$, $t=3$, $t=5$인 점에서의 접선의 기울기는 0이고 좌우에서 접선의 기울기의 부호가 바뀌므로 점 P가 운동 방향을 처음으로 바꾸는 시각은 $t=1$이다.

ㄴ. $t=4$인 점에서의 접선의 기울기는 음수이므로 점 P의 속도는 0이 아니다.

ㄷ. $t=6$일 때 점 P의 위치는 0이므로 원점을 지난다.

ㄹ. $0<t<1$과 $3<t<5$인 점에서의 접선의 기울기는 음수이므로 출발할 때와 같은 방향으로 움직이는 총시간은 $1+2=3$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

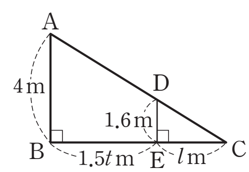
**8** 이 사람이 $t$초 동안 움직이는 거리는 $1.5t$ m

그림자의 길이를 $l$ m라 하면

오른쪽 그림에서

$\triangle$ABC$\backsim\triangle$DEC(AA 닮음)

이므로



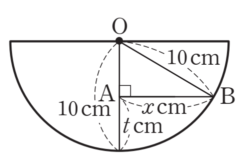

$4:(1.5t+l)=1.6:l$

$2.4t+1.6l=4l$, $2.4l=2.4t$ $\quad\therefore l=t$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 $\dfrac{dl}{dt}=1$(m/s)

**9** $t$초 후의 수면의 높이는 $t$ cm

$t$초 후의 수면의 반지름의 길이를 $x$ cm라 하면 오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{OA}}=10-t$(cm)이므로 직각삼각형 OAB에서




$x^2+(10-t)^2=10^2 \quad \therefore x^2=-t^2+20t$

$t$초 후의 수면의 넓이를 $S$ cm$^2$라 하면

$S=\pi x^2=\pi(-t^2+20t)$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=\pi(-2t+20)$

따라서 $t=2$에서의 수면의 넓이의 변화율은

$\pi(-4+20)=16\pi$(cm$^2$/s)

**10** 반지름의 길이가 매초 2 mm, 즉 0.2 cm씩 늘어나므로 $t$초 후의 풍선의 반지름의 길이는 $(2+0.2t)$ cm

$t$초 후의 풍선의 반지름의 길이가 3 cm가 될 때의 시각은

$2+0.2t=3$에서 $t=5$

$t$초 후의 풍선의 부피를 $V$ cm$^3$라 하면

$V=\dfrac{4}{3}\pi(2+0.2t)^3$

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=\dfrac{4}{3}\pi\times3(2+0.2t)^2\times0.2=0.8\pi(2+0.2t)^2$

따라서 $t=5$에서의 부피의 변화율은

$0.8\pi\times(2+1)^2=7.2\pi$(cm$^3$/s)

**11** 두 점 P, Q의 시각 $t$에서의 속도를 각각 $v_{\mathrm{P}}$, $v_{\mathrm{Q}}$, 가속도를 각각 $a_{\mathrm{P}}$, $a_{\mathrm{Q}}$라 하면

$v_{\mathrm{P}}=\dfrac{dx_{\mathrm{P}}}{dt}=4t^3-12t^2$, $v_{\mathrm{Q}}=\dfrac{dx_{\mathrm{Q}}}{dt}=2kt$

$a_{\mathrm{P}}=\dfrac{dv_{\mathrm{P}}}{dt}=12t^2-24t$, $a_{\mathrm{Q}}=\dfrac{dv_{\mathrm{Q}}}{dt}=2k$

가속도가 서로 같으면

$12t^2-24t=2k$

$\therefore 6t^2-12t-k=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$t>0$에서 가속도가 같아지는 순간이 2번이려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 $D$라 하면 $D>0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=36+6k>0$

$\therefore k>-6 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

이차방정식 ㉠의 두 근의 합과 곱이 모두 양수이어야 하므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2>0$, $-\dfrac{k}{6}>0$

$\therefore k<0 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $-6<k<0$

따라서 정수 $k$는 $-5$, $-4$, $-3$, $-2$, $-1$의 5개이다.

**12** 시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$라 하면

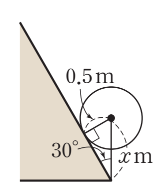
$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-10t+a=3\left(t-\dfrac{5}{3}\right)^2+a-\dfrac{25}{3}$

점 P가 움직이는 방향이 바뀌지 않으려면 $t\ge0$에서 $v\ge0$이어야 하므로

$a-\dfrac{25}{3}\ge0 \qquad \therefore a\ge\dfrac{25}{3}$

따라서 자연수 $a$의 최솟값은 9이다.

**13** 오른쪽 그림과 같이 공이 경사면에 충돌할 때 공의 중심과 바닥 사이의 거리를 $x$ m라 하면




$x\sin30°=0.5$

$\dfrac{1}{2}x=0.5 \qquad \therefore x=1$

즉, 공과 경사면이 만날 때의 공의 중심의 높이가 1 m이므로 $h(t)=1$에서

$21-5t^2=1$, $t^2=4$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

즉, $t=2$일 때 공이 경사면과 충돌한다.

$t$초 후의 공의 속도는

$h'(t)=-10t$

따라서 $t=2$에서의 공의 속도는

$h'(2)=-20$(m/s)

# Ⅲ-1 01 부정적분

## 1 부정적분

**개념 Check** 141쪽

**1** 답 (1) $\mathbf{2x+C}$ (2) $\mathbf{x^3+C}$ (3) $\mathbf{x^4+C}$ (4) $\mathbf{-x^6+C}$

**2** 답 (1) $\mathbf{f(x)=5}$ (2) $\mathbf{f(x)=x-3}$
(3) $\mathbf{f(x)=3x^2+1}$ (4) $\mathbf{f(x)=10x^4-6x}$

**3** 답 (1) $\mathbf{x^4-2x^3}$ (2) $\mathbf{x^4-2x^3+C}$

**문제** 142~143쪽

01-**1** 답 **0**

$f(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C\right)'=x^2-x$

$\therefore f(1)=1-1=0$

01-**2** 답 **2**

$3x^2+4x+a=(bx^3+cx^2-x+1)'=3bx^2+2cx-1$

즉, $3=3b$, $4=2c$, $a=-1$이므로

$a=-1$, $b=1$, $c=2$

$\therefore a+b+c=2$

01-**3** 답 $\mathbf{f(x)=3x-1}$

$$\begin{aligned}(2x+1)f(x)&=\left(2x^3+\frac{1}{2}x^2-x+C\right)'\\&=6x^2+x-1\\&=(2x+1)(3x-1)\end{aligned}$$

$\therefore f(x)=3x-1$

02-**1** 답 **32**

$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)$이므로

$f(x)=5x^3-2x^2$

$\therefore f(2)=40-8=32$

02-**2** 답 $\mathbf{-1}$

$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3-3x^2)\right\}dx=x^3-3x^2+C$

이때 $f(1)=1$에서

$1-3+C=1$ $\quad\therefore C=3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3$이므로

$f(-1)=-1-3+3=-1$

02-**3** 답 $\mathbf{f(x)=x^2-4x+9}$

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-4x)\right\}dx\\&=x^2-4x+C\\&=(x-2)^2+C-4\end{aligned}$$

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 5이므로

$C-4=5$ $\quad\therefore C=9$

$\therefore f(x)=x^2-4x+9$

## 2 부정적분의 계산

**개념 Check** 145쪽

**1** 답 (1) $\mathbf{-3x+C}$ (2) $\mathbf{2x^3+C}$
(3) $\mathbf{\frac{1}{2}x^2+3x+C}$ (4) $\mathbf{\frac{2}{3}x^3-2x^2+2x+C}$

**문제** 146~152쪽

03-**1** 답 (1) $\mathbf{\frac{3}{2}x^4+x^3-\frac{9}{2}x^2+C}$

(2) $\mathbf{y+\frac{1}{2}xy^2+x^2y^3+C}$

(3) $\mathbf{\frac{1}{3}x^3+x+C}$

(4) $\mathbf{t^2+8t+C}$

(1) $$\begin{aligned}&\int 3x(x-1)(2x+3)\,dx\\&=\int(6x^3+3x^2-9x)\,dx\\&=6\int x^3\,dx+3\int x^2\,dx-9\int x\,dx\\&=\frac{3}{2}x^4+x^3-\frac{9}{2}x^2+C\end{aligned}$$

(2) 적분변수가 $y$이므로 $x$를 상수로 보고 $y$에 대하여 적분하면

$$\begin{aligned}&\int(1+xy+3x^2y^2)\,dy\\&=\int dy+x\int y\,dy+3x^2\int y^2\,dy\\&=y+\frac{1}{2}xy^2+x^2y^3+C\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\int\frac{x^4-1}{x^2-1}dx&=\int\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1}dx\\&=\int(x^2+1)\,dx\\&=\int x^2\,dx+\int dx\\&=\frac{1}{3}x^3+x+C\end{aligned}$$

(4) $\int(2+\sqrt{t})^2dt+\int(2-\sqrt{t})^2dt$

$=\int\{(2+\sqrt{t})^2+(2-\sqrt{t})^2\}dt$

$=\int(2t+8)dt=2\int t\,dt+8\int dt$

$=t^2+8t+C$

**04-1** 답 **22**

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(2x+4)dx$

$=x^2+4x+C$

이때 $f(0)=1$에서 $C=1$

따라서 $f(x)=x^2+4x+1$이므로

$f(3)=9+12+1=22$

**04-2** 답 **5**

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-2x+1$이므로

$f'(x)=3x^2-2x+1$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(3x^2-2x+1)dx$

$=x^3-x^2+x+C$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로 $f(-1)=1$에서

$-1-1-1+C=1\qquad\therefore\ C=4$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+x+4$이므로

$f(1)=1-1+1+4=5$

**05-1** 답 $\boldsymbol{f(x)=3x^2-8x+6}$

$xf(x)-F(x)=2x^3-4x^2$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-F'(x)=6x^2-8x$

$F'(x)=f(x)$이므로

$f(x)+xf'(x)-f(x)=6x^2-8x$

$xf'(x)=6x^2-8x=x(6x-8)$

$\therefore\ f'(x)=6x-8$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(6x-8)dx$

$=3x^2-8x+C$

이때 $f(2)=2$에서

$12-16+C=2\qquad\therefore\ C=6$

$\therefore\ f(x)=3x^2-8x+6$

**05-2** 답 **2**

$\int xf(x)dx=\{f(x)\}^2$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$xf(x)=2f(x)f'(x)$

$f(x)\{2f'(x)-x\}=0$

이때 $f(x)\neq0$이므로

$2f'(x)-x=0\qquad\therefore\ f'(x)=\frac{1}{2}x$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{4}x^2+C$

이때 $f(0)=1$에서 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+1$이므로

$f(2)=1+1=2$

**05-3** 답 **−6**

$\int f(x)dx=(x+1)f(x)-3x^4-4x^3$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+1)f'(x)-12x^3-12x^2$

$(x+1)f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$

$\therefore\ f'(x)=12x^2$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx=\int12x^2dx=4x^3+C$

이때 $f(1)=2$에서

$4+C=2\qquad\therefore\ C=-2$

따라서 $f(x)=4x^3-2$이므로

$f(-1)=-4-2=-6$

**06-1** 답 **2**

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=6x^2+6x-2$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int(6x^2+6x-2)dx$

$\therefore\ f(x)+g(x)=2x^3+3x^2-2x+C_1$

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=6x^2-6x-4$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}\right]dx=\int(6x^2-6x-4)dx$

$\therefore\ f(x)-g(x)=2x^3-3x^2-4x+C_2$

이때 $f(0)=0,\ g(0)=1$이므로

$f(0)+g(0)=C_1\qquad\therefore\ C_1=0+1=1$

$f(0)-g(0)=C_2\qquad\therefore\ C_2=0-1=-1$

따라서 $f(x)+g(x)=2x^3+3x^2-2x+1$,

$f(x)-g(x)=2x^3-3x^2-4x-1$이므로

두 식을 연립하여 풀면

$f(x)=2x^3-3x,\ g(x)=3x^2+x+1$

$\therefore\ f(1)+g(-1)=(2-3)+(3-1+1)=2$

**06-2** 답 **4**

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=2x-1$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}\right]dx=\int(2x-1)\,dx$

$\therefore f(x)-g(x)=x^2-x+C_1$

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=6x^2+8x-6$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(6x^2+8x-6)\,dx$

$\therefore f(x)g(x)=2x^3+4x^2-6x+C_2$

이때 $f(1)=-2,\ g(1)=4$이므로

$f(1)-g(1)=1-1+C_1=C_1$

$\therefore C_1=-2-4=-6$

$f(1)g(1)=2+4-6+C_2=C_2$

$\therefore C_2=-2\times4=-8$

$\therefore f(x)-g(x)=x^2-x-6,$

$f(x)g(x)=2x^3+4x^2-6x-8=2(x+1)(x^2+x-4)$

그런데 $f(1)=-2,\ g(1)=4$이므로

$f(x)=x^2+x-4,\ g(x)=2x+2$

$\therefore f(0)+g(3)=-4+(6+2)=4$

**07-1** 답 **2**

(i) $x\geq0$일 때,

$f(x)=\int(2x-2)\,dx=x^2-2x+C_1$

(ii) $x<0$일 때,

$f(x)=\int(-2x-2)\,dx=-x^2-2x+C_2$

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+C_1 & (x\geq0)\\ -x^2-2x+C_2 & (x<0)\end{cases}$

이때 $f(-2)=1$에서

$-4+4+C_2=1 \qquad \therefore C_2=1$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$에서

$C_2=C_1 \qquad \therefore C_1=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1 & (x\geq0)\\ -x^2-2x+1 & (x<0)\end{cases}$이므로

$f(-1)+f(1)=(-1+2+1)+(1-2+1)=2$

**07-2** 답 **$-9$**

(i) $x>1$일 때,

$f(x)=\int(-3x^2+1)\,dx=-x^3+x+C_1$

(ii) $x<1$일 때,

$f(x)=\int(4x-2)\,dx=2x^2-2x+C_2$

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases}-x^3+x+C_1 & (x\geq1)\\ 2x^2-2x+C_2 & (x<1)\end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로

$f(-1)=1$에서

$2+2+C_2=1 \qquad \therefore C_2=-3$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$2-2+C_2=-1+1+C_1$

$C_2=C_1 \qquad \therefore C_1=-3$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-x^3+x-3 & (x\geq1)\\ 2x^2-2x-3 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(2)=-8+2-3=-9$

**08-1** 답 $\mathbf{\frac{5}{27}}$

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(3x^2-4x+1)\,dx$

$=x^3-2x^2+x+C$

$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $\frac{1}{3}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

즉, 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{3}$에서 극대이므로 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$에서

$\frac{1}{27}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+C=\frac{1}{3} \qquad \therefore C=\frac{5}{27}$

$\therefore f(x)=x^3-2x^2+x+\frac{5}{27}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 극솟값은

$f(1)=1-2+1+\frac{5}{27}=\frac{5}{27}$

**08-2** 답 $\mathbf{\frac{35}{2}}$

도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표는 $-1,\ 2$

$x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고,

$x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이다.

$f'(x)=a(x+1)(x-2)\,(a>0)$라 하면

$f'(0)=-6$에서

$-2a=-6 \qquad \therefore a=3$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 3(x+1)(x-2)\,dx$

$=\int 3(x^2-x-2)\,dx=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+C$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 $f(2)=4$에서

$8-6-12+C=4 \qquad \therefore C=14$

$\therefore f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+14$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로 극댓값은

$f(-1)=-1-\frac{3}{2}+6+14=\frac{35}{2}$

**09-1** 답 $\boldsymbol{f(x)=\frac{3}{2}x^2+3x}$

$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

도함수의 정의에 의하여

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+3xh-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+3xh}{h}$

$=3x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$

$=3x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ ($\because$ ㉠)

$=3x+f'(0)$

$=3x+3$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (3x+3)\,dx$

$=\frac{3}{2}x^2+3x+C$

이때 $f(0)=0$에서 $C=0$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}x^2+3x$

**09-2** 답 $\boldsymbol{-1}$

$f(x+y)=f(x)+f(y)-4$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-4 \qquad \therefore f(0)=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

도함수의 정의에 의하여

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-4-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ ($\because$ ㉠)

$=f'(0)$

$f'(0)=k$ ($k$는 상수)로 놓으면 $f'(x)=k$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int k\,dx=kx+C$

이때 $f(0)=4$에서 $C=4 \qquad \therefore f(x)=kx+4$

$f(1)=3$에서 $k+4=3 \qquad \therefore k=-1$

$\therefore f'(0)=-1$

**연습문제** 153~155쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ③ | **2** ④ | **3** ① | **4** 29 | **5** $-11$ |
| **6** $\frac{1}{5}$ | **7** $-3$ | **8** ③ | **9** ④ | **10** $-10$ |
| **11** $-22$ | **12** ③ | **13** $-11$ | **14** ② | **15** $-2$ |
| **16** ⑤ | **17** $-35$ | **18** ② | **19** $-4$ | **20** ⑤ |
| **21** $-7$ | | | | |

**1** $f(x)=(x^3+9x^2-6x+2)'=3x^2+18x-6$

따라서 $f'(x)=6x+18$이므로

$f'(-2)=-12+18=6$

**2** $g(x)=\{x^4f(x)+2\}'=4x^3f(x)+x^4f'(x)$

$\therefore g(1)=4f(1)+f'(1)=4\times(-1)+5=1$

**3** $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\times(-1)$

$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$

$f(x)=\int (x^2-3x+4)\,dx$에서 $f'(x)=x^2-3x+4$이므로

$f'(2)=4-6+4=2$

따라서 구하는 값은 $2f'(2)=2\times 2=4$

**4** $F(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int xf(x)\,dx\right\}=xf(x)$

$=x(2x^2-x)=2x^3-x^2$

$G(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}xf(x)\right\}dx=xf(x)+C$

$=x(2x^2-x)+C=2x^3-x^2+C$

이때 $G(1)=6$에서

$2-1+C=6 \qquad \therefore C=5$

따라서 $G(x)=2x^3-x^2+5$이므로

$F(2)+G(2)=(16-4)+(16-4+5)=29$

**5** $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(2x^4-ax^2)\right\}dx$

$=2x^4-ax^2+C$

이때 $f(0)=2$에서 $C=2$

즉, $f(x)=2x^4-ax^2+2$이므로

$f'(x)=8x^3-2ax$

$f'(2)=4$에서 $64-4a=4$ $\qquad\therefore a=15$

따라서 $f(x)=2x^4-15x^2+2$이므로

$f(1)=2-15+2=-11$

**6** $f(x)=\int(x-1)(x+1)(x^2+1)\,dx$

$=\int(x^2-1)(x^2+1)\,dx$

$=\int(x^4-1)\,dx$

$=\frac{1}{5}x^5-x+C$

이때 $f(0)=1$에서 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}x^5-x+1$이므로

$f(1)=\frac{1}{5}-1+1=\frac{1}{5}$

**7** $f(x)=\int\frac{x^2}{x-3}dx-\int\frac{x+6}{x-3}dx$

$=\int\frac{x^2-x-6}{x-3}dx$

$=\int\frac{(x+2)(x-3)}{x-3}dx$

$=\int(x+2)\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2+2x+C$

이때 $f(0)=-\frac{3}{2}$에서 $C=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$이므로

$f(-1)=\frac{1}{2}-2-\frac{3}{2}=-3$

**8** $f'(x)=6x+8$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(6x+8)\,dx$

$=3x^2+8x+C_1$

이때 $f(1)=8$에서

$3+8+C_1=8$ $\qquad\therefore C_1=-3$

따라서 $f(x)=3x^2+8x-3$이므로 $f(x)$를 적분하면

$\int(3x^2+8x-3)\,dx=x^3+4x^2-3x+C$

**9** $f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int\{6x^2-2f(1)x\}\,dx$

$=2x^3-f(1)x^2+C$

이때 $f(0)=4$에서 $C=4$

$\therefore f(x)=2x^3-f(1)x^2+4$

양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2-f(1)+4$

$2f(1)=6$ $\qquad\therefore f(1)=3$

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2+4$이므로

$f(2)=16-12+4=8$

**10** $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 6x\,dx=3x^2+C_1$

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int(3x^2+C_1)\,dx$

$=x^3+C_1x+C_2$

이때 $f(0)=F(0)$에서 $C_1=C_2$

또 $f(1)=F(1)$에서

$3+C_1=1+C_1+C_2$ $\qquad\therefore C_2=2$

따라서 $C_1=2$, $C_2=2$이므로

$F(x)=x^3+2x+2$

$\therefore F(-2)=-8-4+2=-10$

**11** $\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x+2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)+f(x)-f(x+2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\times(-1)$

$-\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\times2$

$=-f'(x)-2f'(x)=-3f'(x)$

즉, $-3f'(x)=9x^2-3x+6$이므로

$f'(x)=-3x^2+x-2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(-3x^2+x-2)\,dx$

$=-x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+C$

이때 $f(-2)=2$에서

$8+2+4+C=2$ $\qquad\therefore C=-12$

따라서 $f(x)=-x^3+\frac{1}{2}x^2-2x-12$이므로

$f(2)=-8+2-4-12=-22$

**12** 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $-8x+k$이므로

$f'(x)=-8x+k$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(-8x+k)\,dx$

$=-4x^2+kx+C$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로 $f(0)=3$에서

$C=3$

$\therefore\ f(x)=-4x^2+kx+3$

방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 합이 $\frac{3}{2}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{k}{-4}=\frac{3}{2}\qquad\therefore\ k=6$

따라서 $f(x)=-4x^2+6x+3$이므로

$f(-1)=-4-6+3=-7$

**13** $\int f(x)\,dx=(x-1)f(x)+x^3-3x$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x-1)f'(x)+3x^2-3$

$(x-1)f'(x)=-3x^2+3=(x-1)(-3x-3)$

$\therefore\ f'(x)=-3x-3$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-3x-3)\,dx$

$=-\frac{3}{2}x^2-3x+C$

이때 $f(0)=1$에서 $C=1$

따라서 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2-3x+1$이므로

$f(2)=-6-6+1=-11$

**14** $F(x)=xf(x)-2x^3+3x^2+5$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+6x$

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+6x$

$xf'(x)=6x^2-6x=x(6x-6)$

$\therefore\ f'(x)=6x-6$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x-6)\,dx$

$=3x^2-6x+C=3(x-1)^2+C-3$

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 1이므로

$C-3=1\qquad\therefore\ C=4$

따라서 $f(x)=3x^2-6x+4$이므로

$f(2)=12-12+4=4$

**15** $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+3$에서

$f(x)+g(x)=x^2+3x+C_1$

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2+8x-1$에서

$f(x)g(x)=x^3+4x^2-x+C_2$

이때 $f(0)=2,\ g(0)=-5$이므로

$f(0)+g(0)=C_1\qquad\therefore\ C_1=2+(-5)=-3$

$f(0)g(0)=C_2\qquad\therefore\ C_2=2\times(-5)=-10$

$\therefore\ f(x)+g(x)=x^2+3x-3,$

$f(x)g(x)=x^3+4x^2-x-10=(x+2)(x^2+2x-5)$

그런데 $f(0)=2,\ g(0)=-5$이므로

$f(x)=x+2,\ g(x)=x^2+2x-5$

$\therefore\ f(2)+g(-1)=(2+2)+(1-2-5)=-2$

**16** (i) $x\geq1$일 때,

$f(x)=\int(3x^2-2)\,dx=x^3-2x+C_1$

(ii) $x<1$일 때,

$f(x)=\int(2x-1)\,dx=x^2-x+C_2$

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases}x^3-2x+C_1 & (x\geq1)\\ x^2-x+C_2 & (x<1)\end{cases}$

이때 $f(-3)=10$에서

$9+3+C_2=10\qquad\therefore\ C_2=-2$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$1-1+C_2=1-2+C_1$

$-2=-1+C_1\qquad\therefore\ C_1=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^3-2x-1 & (x\geq1)\\ x^2-x-2 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(3)=27-6-1=20$

**17** $\int\{1-f(x)\}\,dx=-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3+3x^2+x$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$1-f(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x+1$

$\therefore\ f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x$

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $\frac{7}{2}$ 극대 | ↘ | $-10$ 극소 | ↗ |

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $\frac{7}{2}$, $x=2$에서 극솟값 $-10$을 갖는다.

따라서 $M=\frac{7}{2}$, $m=-10$이므로

$Mm=-35$

**18** $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy+1$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+1 \qquad \therefore f(0)=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-xh+1-f(x)}{h} \\ &=-x+\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h} \\ &=-x+\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \ (\because \text{㉠}) \\ &=-x+f'(0)=-x+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x)&=\int f'(x)\,dx=\int(-x+2)\,dx \\ &=-\frac{1}{2}x^2+2x+C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=-1$에서 $C=-1$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$이므로

$f(1)=-\frac{1}{2}+2-1=\frac{1}{2}$

**19** ㈎, ㈏에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, -2)$를 지나고 $y$축에 대하여 대칭이므로

$f(x)=kx^2-2\,(k\neq0)$라 하면 $f'(x)=2kx$

㈐에서 $2k(kx^2-2)=k(2kx)^2-2$이므로

$2k^2x^2-4k=4k^3x^2-2$

$2k^2x^2(2k-1)+2(2k-1)=0$

$2(k^2x^2+1)(2k-1)=0$

$\therefore k=\frac{1}{2}\ (\because k^2x^2+1\neq0)$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$

이때 $F(x)$는 삼차함수이고 함수 $F(x)$가 감소하는 $x$의 값의 범위가 $a\le x\le b$이므로 이차방정식 $F'(x)=0$의 두 근이 $a$, $b$이다.

따라서 $F(x)=\int f(x)\,dx$에서 $F'(x)=f(x)$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$ab=-4$

**20** $f(x)=\int xg(x)\,dx$에서 $f'(x)=xg(x)$

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x^3+2x$에서

$f'(x)-g'(x)=4x^3+2x$

$\therefore xg(x)-g'(x)=4x^3+2x \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$g(x)$를 $n$차함수라 하면 $xg(x)$는 $(n+1)$차함수이고

$g'(x)$는 $(n-1)$차함수이므로

$n+1=4 \qquad \therefore n=3$

즉, $g(x)$는 최고차항의 계수가 4인 이차함수이므로

$g(x)=4x^2+ax+b\,(a,\ b$는 상수)라 하면

$g'(x)=8x+a$

이를 ㉠에 대입하면

$x(4x^2+ax+b)-(8x+a)=4x^3+2x$

$4x^3+ax^2+(b-8)x-a=4x^3+2x$

즉, $a=0$, $b-8=2$이므로 $a=0$, $b=10$

따라서 $g(x)=4x^2+10$이므로

$g(1)=4+10=14$

**21** ㈏에서 $f(x)$를 $n$차함수라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차함수이고 $xf'(x)$는 $n$차함수이므로

$n=3$

즉, $f(x)$는 삼차함수이므로 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$(a,\ b,\ c,\ d$는 상수, $a\neq0)$라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

이를 ㈏의 등식에 대입하면

$ax^3+bx^2+cx+d+x(3ax^2+2bx+c)$

$=4x^3-3x^2-2x+1$

$4ax^3+3bx^2+2cx+d=4x^3-3x^2-2x+1$

즉, $4a=4$, $3b=-3$, $2c=-2$, $d=1$이므로

$a=1$, $b=-1$, $c=-1$, $d=1$

$\therefore f(x)=x^3-x^2-x+1$, $f'(x)=3x^2-2x-1$

이를 ㈐의 등식에 대입하면

$3x^2-2x-1-g'(x)=3x^2+x$

$\therefore g'(x)=-3x-1$

$$\begin{aligned} \therefore g(x)&=\int g'(x)\,dx \\ &=\int(-3x-1)\,dx \\ &=-\frac{3}{2}x^2-x+C \end{aligned}$$

$f(0)=1$이므로

㈎에서 $g(0)=1 \qquad \therefore C=1$

따라서 $g(x)=-\frac{3}{2}x^2-x+1$이므로

$g(2)=-6-2+1=-7$

## Ⅲ-1 02 정적분 (1)

### 정적분

**개념 Check** 159쪽

**1** 답 (1) **0** (2) **1** (3) **24** (4) **−6**

(1) $\int_{1}^{1}(-x^2+3x)\,dx=0$

(2) $\int_{-1}^{0}3x^2\,dx=\Big[x^3\Big]_{-1}^{0}=-(-1)=1$

(3) $\int_{-1}^{3}(x^3+x)\,dx=\Big[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^{3}$

$=\left(\frac{81}{4}+\frac{9}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=24$

(4) $\int_{1}^{-2}(x^2+1)\,dx=\Big[\frac{1}{3}x^3+x\Big]_{1}^{-2}$

$=\left(-\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)=-6$

**문제** 160~164쪽

**01-1** 답 (1) **0** (2) $-\frac{20}{3}$ (3) $-\frac{3}{2}$ (4) $\frac{26}{3}$

(1) $\int_{a}^{a}f(x)\,dx=0$이므로

$\int_{1}^{1}y(y^3+3y^2+4y)\,dy=0$

(2) $\int_{-2}^{2}(x+3)(x-1)\,dx$

$=\int_{-2}^{2}(x^2+2x-3)\,dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\Big]_{-2}^{2}$

$=\left(\frac{8}{3}+4-6\right)-\left(-\frac{8}{3}+4+6\right)=-\frac{20}{3}$

(3) $\int_{2}^{-1}(-x^2+3x)\,dx=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big]_{2}^{-1}$

$=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{8}{3}+6\right)$

$=-\frac{3}{2}$

(4) $\int_{1}^{3}\frac{x^3+8}{x+2}\,dx=\int_{1}^{3}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}\,dx$

$=\int_{1}^{3}(x^2-2x+4)\,dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2+4x\Big]_{1}^{3}$

$=(9-9+12)-\left(\frac{1}{3}-1+4\right)$

$=\frac{26}{3}$

**01-2** 답 **2**

$\int_{0}^{k}(2x-1)\,dx=\Big[x^2-x\Big]_{0}^{k}=k^2-k$

즉, $k^2-k=2$이므로

$k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=2$ ($\because k>0$)

**02-1** 답 (1) **9** (2) $-\frac{1}{2}$

(1) $\int_{-1}^{2}(x^2+2x+1)\,dx-\int_{-1}^{2}(2t-1)\,dt$

$=\int_{-1}^{2}(x^2+2x+1)\,dx-\int_{-1}^{2}(2x-1)\,dx$

$=\int_{-1}^{2}\{(x^2+2x+1)-(2x-1)\}\,dx$

$=\int_{-1}^{2}(x^2+2)\,dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3+2x\Big]_{-1}^{2}$

$=\left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}-2\right)=9$

(2) $\int_{2}^{3}\frac{x^2}{x+1}\,dx+\int_{3}^{2}\frac{2x+3}{x+1}\,dx$

$=\int_{2}^{3}\frac{x^2}{x+1}\,dx-\int_{2}^{3}\frac{2x+3}{x+1}\,dx$

$=\int_{2}^{3}\left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{2x+3}{x+1}\right)dx$

$=\int_{2}^{3}\frac{x^2-2x-3}{x+1}\,dx$

$=\int_{2}^{3}\frac{(x+1)(x-3)}{x+1}\,dx$

$=\int_{2}^{3}(x-3)\,dx$

$=\Big[\frac{1}{2}x^2-3x\Big]_{2}^{3}$

$=\left(\frac{9}{2}-9\right)-(2-6)=-\frac{1}{2}$

**02-2** 답 **1**

$\int_{1}^{3}(2x+k)^2\,dx-\int_{1}^{3}(2x-k)^2\,dx$

$=\int_{1}^{3}\{(2x+k)^2-(2x-k)^2\}\,dx$

$=\int_{1}^{3}8kx\,dx$

$=\Big[4kx^2\Big]_{1}^{3}$

$=36k-4k=32k$

따라서 $32k=32$이므로

$k=1$

**03-1** 답 (1) **12** (2) $\mathbf{\frac{2}{3}}$

(1) $\int_{-1}^{1}(3x^2+2x)\,dx-\int_{2}^{1}(3x^2+2x)\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(3x^2+2x)\,dx+\int_{1}^{2}(3x^2+2x)\,dx$

$=\int_{-1}^{2}(3x^2+2x)\,dx=\left[x^3+x^2\right]_{-1}^{2}$

$=(8+4)-(-1+1)=12$

(2) $\int_{2}^{4}(x^2-2x)\,dx-\int_{3}^{4}(x^2-2x)\,dx+\int_{1}^{2}(x^2-2x)\,dx$

$=\int_{1}^{2}(x^2-2x)\,dx+\int_{2}^{4}(x^2-2x)\,dx$

$-\int_{3}^{4}(x^2-2x)\,dx$

$=\int_{1}^{4}(x^2-2x)\,dx-\int_{3}^{4}(x^2-2x)\,dx$

$=\int_{1}^{4}(x^2-2x)\,dx+\int_{4}^{3}(x^2-2x)\,dx$

$=\int_{1}^{3}(x^2-2x)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{1}^{3}$

$=(9-9)-\left(\frac{1}{3}-1\right)$

$=\frac{2}{3}$

**03-2** 답 **6**

$\int_{1}^{3}f(x)\,dx+\int_{3}^{5}f(x)\,dx=\int_{1}^{5}f(x)\,dx$이므로

$\int_{1}^{3}f(x)\,dx=\int_{1}^{5}f(x)\,dx-\int_{3}^{5}f(x)\,dx$

$=8-2=6$

**04-1** 답 $\mathbf{-\frac{1}{3}}$

적분 구간 $[0, 3]$을 $x=1$을 기준으로 나누면

$\int_{0}^{3}f(x)\,dx=\int_{0}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{3}f(x)\,dx$

$=\int_{0}^{1}x^2\,dx+\int_{1}^{3}(-x^2+2x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{1}^{3}$

$=\frac{1}{3}+(-9+9)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)$

$=-\frac{1}{3}$

**04-2** 답 $\mathbf{-\frac{8}{3}}$

$f(x)=\begin{cases}-2x-1 & (x\ge 0)\\ x^2-1 & (x\le 0)\end{cases}$이므로

$f(x+1)=\begin{cases}-2x-3 & (x\ge -1)\\ x^2+2x & (x\le -1)\end{cases}$

적분 구간 $[-2, 0]$을 $x=-1$을 기준으로 나누면

$\int_{-2}^{0}f(x+1)\,dx$

$=\int_{-2}^{-1}(x^2+2x)\,dx+\int_{-1}^{0}(-2x-3)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[-x^2-3x\right]_{-1}^{0}$

$=\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(-\frac{8}{3}+4\right)-(-1+3)=-\frac{8}{3}$

다른 풀이

함수 $y=f(x+1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이므로

$\int_{-2}^{0}f(x+1)\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^2-1)\,dx+\int_{0}^{1}(-2x-1)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{-1}^{0}+\left[-x^2-x\right]_{0}^{1}$

$=-\left(-\frac{1}{3}+1\right)+(-1-1)=-\frac{8}{3}$

참고 함수 $y=f(x-p)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $p$만큼 평행이동한 것이므로
$\int_{a+p}^{b+p}f(x-p)\,dx$는 $\int_{a}^{b}f(x)\,dx$에서 적분 구간과 함수를 모두 $x$축의 방향으로 $p$만큼 평행이동한 것이다.

**05-1** 답 (1) **7** (2) $\mathbf{\frac{34}{3}}$ (3) **1**

(1) $x^2-2|x|+3=\begin{cases}x^2-2x+3 & (x\ge 0)\\ x^2+2x+3 & (x\le 0)\end{cases}$이므로

$\int_{-1}^{2}(x^2-2|x|+3)\,dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+3)\,dx+\int_{0}^{2}(x^2-2x+3)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{0}^{2}$

$=-\left(-\frac{1}{3}+1-3\right)+\left(\frac{8}{3}-4+6\right)=7$

(2) $x|4-x|=\begin{cases}x^2-4x & (x\ge 4)\\ -x^2+4x & (x\le 4)\end{cases}$이므로

$\int_{1}^{5}x|4-x|\,dx$

$=\int_{1}^{4}(-x^2+4x)\,dx+\int_{4}^{5}(x^2-4x)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{1}^{4}+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{4}^{5}$

$=\left(-\frac{64}{3}+32\right)-\left(-\frac{1}{3}+2\right)$

$+\left(\frac{125}{3}-50\right)-\left(\frac{64}{3}-32\right)$

$=\frac{34}{3}$

(3) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 $x$의 값을 구하면

$x^2-1=0,\ (x+1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$

즉, $|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -x^2+1 & (-1\le x\le 1)\end{cases}$이므로

$$\int_0^2 \frac{|x^2-1|}{x+1}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{-x^2+1}{x+1}dx+\int_1^2 \frac{x^2-1}{x+1}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{(x+1)(-x+1)}{x+1}dx+\int_1^2 \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}dx$$
$$=\int_0^1 (-x+1)\,dx+\int_1^2 (x-1)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2$$
$$=\left(-\frac{1}{2}+1\right)+(2-2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=1$$

## 2 여러 가지 정적분

**문제** 166~167쪽

06-**1** 답 $-48$

$$\int_{-3}^{3}(4x^3-3x^2+2x+1)\,dx$$
$$=\int_{-3}^{3}(4x^3+2x)\,dx+\int_{-3}^{3}(-3x^2+1)\,dx$$
$$=0+2\int_0^3(-3x^2+1)\,dx$$
$$=2\Big[-x^3+x\Big]_0^3$$
$$=2(-27+3)=-48$$

06-**2** 답 8

$f(-x)=f(x)$이므로

$(-x)^3f(-x)=-x^3f(x)$

$-xf(-x)=-xf(x)$

$$\therefore\ \int_{-4}^{4}(2x^3-3x+2)f(x)\,dx$$
$$=2\int_{-4}^{4}x^3f(x)\,dx-3\int_{-4}^{4}xf(x)\,dx+2\int_{-4}^{4}f(x)\,dx$$
$$=2\times0-3\times0+2\times2\int_0^4 f(x)\,dx$$
$$=4\times2=8$$

07-**1** 답 20

$f(x+3)=f(x)$이므로

$$\int_{-1}^{2}f(x)\,dx=\int_2^5 f(x)\,dx=\int_5^8 f(x)\,dx$$
$$=\int_8^{11}f(x)\,dx$$
$$\therefore\ \int_{-1}^{11}f(x)\,dx=\int_{-1}^{2}f(x)\,dx+\int_2^5 f(x)\,dx$$
$$+\int_5^8 f(x)\,dx+\int_8^{11}f(x)\,dx$$
$$=4\int_{-1}^{2}f(x)\,dx$$
$$=4\times5=20$$

07-**2** 답 12

$f(x+4)=f(x)$이므로

$$\int_{-1}^{3}f(x)\,dx=\int_3^7 f(x)\,dx=\int_7^{11}f(x)\,dx$$
$$=\int_{11}^{15}f(x)\,dx$$
$$\therefore\ \int_7^{15}f(x)\,dx=\int_7^{11}f(x)\,dx+\int_{11}^{15}f(x)\,dx$$
$$=2\int_{-1}^{3}f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\int_{-1}^{3}f(x)\,dx$의 값을 구하면

$$\int_{-1}^{3}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(3x+3)\,dx+\int_0^3(-x+3)\,dx$$
$$=\left[\frac{3}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^3$$
$$=-\left(\frac{3}{2}-3\right)+\left(-\frac{9}{2}+9\right)=6$$

따라서 ㉠에서

$$\int_7^{15}f(x)\,dx=2\int_{-1}^{3}f(x)\,dx$$
$$=2\times6=12$$

**연습문제** 168~170쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ⑤ | **2** 36 | **3** ④ | **4** 2 | **5** ③ |
| **6** 4 | **7** $-8$ | **8** ② | **9** 2 | **10** ② |
| **11** $\frac{1}{6}$ | **12** $\frac{20}{3}$ | **13** ③ | **14** 3 | **15** $-16$ |
| **16** 45 | **17** 0 | | | |

**1** $\int_{-1}^{3}(x+1)f(x)\,dx=\int_{-1}^{3}(x+1)(x^2-x+1)\,dx$

$=\int_{-1}^{3}(x^3+1)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_{-1}^{3}$

$=\left(\frac{81}{4}+3\right)-\left(\frac{1}{4}-1\right)=24$

**2** $\int_{1}^{-2}4(x+3)(x-1)\,dx+\int_{3}^{3}(3y-1)(2y+5)\,dy$

$=\int_{1}^{-2}(4x^2+8x-12)\,dx+0$

$=\left[\frac{4}{3}x^3+4x^2-12x\right]_{1}^{-2}$

$=\left(-\frac{32}{3}+16+24\right)-\left(\frac{4}{3}+4-12\right)=36$

**3** $\int_{0}^{1}f'(x)\,dx=\int_{0}^{2}f'(x)\,dx=0$에서

$\left[f(x)\right]_{0}^{1}=\left[f(x)\right]_{0}^{2}=0$

$\therefore\ f(1)-f(0)=f(2)-f(0)=0$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(1)-f(0)=0$에서

$1+a+b+c-c=0$

$\therefore\ a+b=-1$ …… ㉠

$f(2)-f(0)=0$에서

$8+4a+2b+c-c=0$

$\therefore\ 2a+b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=2$

따라서 $f'(x)=3x^2-6x+2$이므로

$f'(1)=3-6+2=-1$

**4** $\int_{1}^{a}(x+1)^2dx+\int_{a}^{1}(x-1)^2dx$

$=\int_{1}^{a}(x+1)^2dx-\int_{1}^{a}(x-1)^2dx$

$=\int_{1}^{a}\{(x+1)^2-(x-1)^2\}\,dx$

$=\int_{1}^{a}4x\,dx$

$=\left[2x^2\right]_{1}^{a}=2a^2-2$

즉, $2a^2-2=6$이므로 $a^2=4$

$\therefore\ a=2$ ($\because$ $a$는 양수)

**5** $f(x)=\int_{1}^{3}(t-x)^2dt-\int_{3}^{1}(2t^2+3)\,dt$

$=\int_{1}^{3}(t-x)^2dt+\int_{1}^{3}(2t^2+3)\,dt$

$=\int_{1}^{3}\{(t^2-2xt+x^2)+(2t^2+3)\}\,dt$

$=\int_{1}^{3}(3t^2-2xt+x^2+3)\,dt$

$=\left[t^3-xt^2+x^2t+3t\right]_{1}^{3}$

$=(27-9x+3x^2+9)-(1-x+x^2+3)$

$=2x^2-8x+32=2(x-2)^2+24$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 24를 갖는다.

따라서 $a=2$, $b=24$이므로 $a+b=26$

**6** $\int_{-1}^{0}f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{5}f(x)\,dx+\int_{5}^{0}f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{5}f(x)\,dx+\int_{5}^{0}f(x)\,dx$

$=3+7+(-5)=5$

$\therefore\ \int_{-1}^{0}\{f(x)-3x^2\}\,dx=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx-\int_{-1}^{0}3x^2\,dx$

$=5-\left[x^3\right]_{-1}^{0}$

$=5-1=4$

**7** 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(x)=\begin{cases}-3x+6 & (x\geq 0)\\ 6 & (x\leq 0)\end{cases}$

이므로

$xf(x)=\begin{cases}-3x^2+6x & (x\geq 0)\\ 6x & (x\leq 0)\end{cases}$

$\therefore\ \int_{-2}^{2}xf(x)\,dx=\int_{-2}^{0}6x\,dx+\int_{0}^{2}(-3x^2+6x)\,dx$

$=\left[3x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-x^3+3x^2\right]_{0}^{2}$

$=-12+(-8+12)$

$=-8$

**8** $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx$

$=\int_{-a}^{0}(2x+2)\,dx+\int_{0}^{a}(-x^2+2x+2)\,dx$

$=\left[x^2+2x\right]_{-a}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+2x\right]_{0}^{a}$

$=-(a^2-2a)+\left(-\frac{1}{3}a^3+a^2+2a\right)$

$=-\frac{1}{3}a^3+4a$

$F(a)=-\frac{1}{3}a^3+4a$라 하면

$F'(a)=-a^2+4=-(a+2)(a-2)$

$F'(a)=0$인 $a$의 값은

$a=2$ ($\because$ $a>0$)

$a>0$에서 함수 $F(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $a$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $F'(a)$ | | $+$ | 0 | $-$ |
| $F(a)$ | | $\nearrow$ | $\frac{16}{3}$ 극대 | $\searrow$ |

따라서 함수 $F(a)$의 최댓값은 $\frac{16}{3}$이다.

**9** $x^2-x=0$에서

$x(x-1)=0$ $\quad\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$

$$|x^2-x|=\begin{cases} x^2-x & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -x^2+x & (0\le x\le 1) \end{cases}$$

이때 $a>1$이므로

$$\int_0^a |x^2-x|\,dx$$

$$=\int_0^1 (-x^2+x)\,dx+\int_1^a (x^2-x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^a$$

$$=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}$$

즉, $\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}=1$이므로

$2a^3-3a^2-4=0$

$(a-2)(2a^2+a+2)=0$

$\therefore$ $a=2$ ($\because$ $a>1$)

**10** $xf(x)-f(x)=3x^4-3x$에서

$(x-1)f(x)=3x(x-1)(x^2+x+1)$

$\therefore$ $f(x)=3x(x^2+x+1)$

$=3x^3+3x^2+3x$

$$\therefore \int_{-2}^2 f(x)\,dx=\int_{-2}^2 (3x^3+3x^2+3x)\,dx$$

$$=\int_{-2}^2 (3x^3+3x)\,dx+\int_{-2}^2 3x^2\,dx$$

$$=0+2\int_0^2 3x^2\,dx$$

$$=2\left[x^3\right]_0^2=2\times 8=16$$

**11** $\int_{-1}^1 f(x)\,dx=1$에서

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 (x^2+ax+b)\,dx$$

$$=\int_{-1}^1 (x^2+b)\,dx+\int_{-1}^1 ax\,dx$$

$$=2\int_0^1 (x^2+b)\,dx+0$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+bx\right]_0^1$$

$$=2\left(\frac{1}{3}+b\right)=2b+\frac{2}{3}$$

즉, $2b+\frac{2}{3}=1$이므로 $b=\frac{1}{6}$

$\int_{-1}^1 xf(x)\,dx=2$에서

$$\int_{-1}^1 xf(x)\,dx=\int_{-1}^1 (x^3+ax^2+bx)\,dx$$

$$=\int_{-1}^1 (x^3+bx)\,dx+\int_{-1}^1 ax^2\,dx$$

$$=0+2\int_0^1 ax^2\,dx$$

$$=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}a$$

즉, $\frac{2}{3}a=2$이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=x^2+3x+\frac{1}{6}$이므로

$f(-3)=9-9+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

**12** $f(x+4)=f(x)$이므로

$$\int_{2026}^{2030} f(x)\,dx=\int_{2022}^{2026} f(x)\,dx=\cdots=\int_2^6 f(x)\,dx$$

$$=\int_{-2}^2 f(x)\,dx$$

$$=\int_{-2}^0 (2x+4)\,dx+\int_0^2 (x^2-4x+4)\,dx$$

$$=\left[x^2+4x\right]_{-2}^0+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^2$$

$$=-(4-8)+\left(\frac{8}{3}-8+8\right)=\frac{20}{3}$$

**13** (가)에서 $f(-x)=f(x)$이므로 $-xf(-x)=-xf(x)$

(다)에서

$$\int_{-1}^1 (x+3)f(x)\,dx=\int_{-1}^1 xf(x)\,dx+3\int_{-1}^1 f(x)\,dx$$

$$=0+3\int_{-1}^1 f(x)\,dx$$

$$=3\int_{-1}^1 f(x)\,dx$$

즉, $3\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=9$이므로 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=3$

(나)에서 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{1}^{3} f(x)\,dx=\int_{3}^{5} f(x)\,dx=\int_{5}^{7} f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_{-1}^{7} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{3} f(x)\,dx+\int_{3}^{5} f(x)\,dx+\int_{5}^{7} f(x)\,dx=4\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=4\times3=12$$

**14** (나)에서

$$\int_{n}^{n+2} f(x)\,dx=\int_{n}^{n+1} 2x\,dx=\Big[x^2\Big]_{n}^{n+1}=(n+1)^2-n^2=2n+1$$

$$\therefore \int_{0}^{6} f(x)\,dx=\int_{0}^{2} f(x)\,dx+\int_{2}^{4} f(x)\,dx+\int_{4}^{6} f(x)\,dx=1+5+9=15$$

(가)에서 $\int_{0}^{1} f(x)\,dx=2$이므로

$$\int_{0}^{5} f(x)\,dx=\int_{0}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{3} f(x)\,dx+\int_{3}^{5} f(x)\,dx=2+3+7=12$$

$$\therefore \int_{5}^{6} f(x)\,dx=\int_{0}^{6} f(x)\,dx-\int_{0}^{5} f(x)\,dx=15-12=3$$

**15** $f(x)=x^3-12x$에서

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $16$ 극대 | $\searrow$ | $-16$ 극소 | $\nearrow$ |

(i) $-2\le t\le2$일 때,

$-2\le x\le t$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(t)$이므로

$g(t)=t^3-12t$

(ii) $t\ge2$일 때,

$-2\le x\le t$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)$이므로

$g(t)=-16$

(i), (ii)에서 $g(t)=\begin{cases} t^3-12t & (-2\le t\le2) \\ -16 & (t\ge2) \end{cases}$

$$\therefore \int_{-2}^{3} g(t)\,dt=\int_{-2}^{2} (t^3-12t)\,dt+\int_{2}^{3} (-16)\,dt=0+\Big[-16t\Big]_{2}^{3}=-48-(-32)=-16$$

**16** (가)에서 $\int_{0}^{2} |f(x)|\,dx=-\int_{0}^{2} f(x)\,dx$이므로

구간 $[0,\ 2]$에서 $f(x)\le0$

(나)에서 $\int_{2}^{3} |f(x)|\,dx=\int_{2}^{3} f(x)\,dx$이므로

구간 $[2,\ 3]$에서 $f(x)\ge0$

$\therefore f(2)=0$

즉, 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=f(2)=0$이므로

$f(x)=ax(x-2)=ax^2-2ax\,(a\ne0)$라 하자.

(가)에서 $\int_{0}^{2} f(x)\,dx=-4$이므로

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx=\int_{0}^{2} (ax^2-2ax)\,dx=\left[\frac{a}{3}x^3-ax^2\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}a-4a=-\frac{4}{3}a$$

즉, $-\frac{4}{3}a=-4$이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=3x^2-6x$이므로

$f(5)=75-30=45$

**17** $f(x+y)=f(x)+f(y)$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$

또 ㉠의 양변에 $y$ 대신 $-x$를 대입하면

$f(0)=f(x)+f(-x)$

$0=f(x)+f(-x)$ $\quad\therefore f(-x)=-f(x)$

$$\therefore \int_{-4}^{2} f(x)\,dx+\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$$
$$=\int_{-4}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx+\int_{-2}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{4} f(x)\,dx$$
$$=\int_{-4}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{4} f(x)\,dx+\int_{-2}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx$$
$$=\int_{-4}^{4} f(x)\,dx+\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$$
$$=0+0=0$$

# Ⅲ-1 03 정적분 (2)

## 정적분으로 정의된 함수

**개념 Check** 172쪽

**1** 답 (1) $x^2+2x$ (2) $3x^2+2x+1$

**2** 답 (1) $f(x)=2x+3$ (2) $f(x)=3x^2-2x+1$

**문제** 173~178쪽

01-**1** 답 (1) $f(x)=3x^2-2x-4$ (2) $f(x)=x^2+2x+\frac{11}{6}$

(3) $f(x)=2x^2+\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$

(1) $\int_0^2 f(t)\,dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면

$f(x)=3x^2-2x+k$

이를 $\int_0^2 f(t)\,dt=k$에 대입하면

$\int_0^2 (3t^2-2t+k)\,dt=k,\ \left[t^3-t^2+kt\right]_0^2=k$

$8-4+2k=k\quad \therefore k=-4$

$\therefore f(x)=3x^2-2x-4$

(2) $\int_0^1 tf(t)\,dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면

$f(x)=x^2+2x+k$

이를 $\int_0^1 tf(t)\,dt=k$에 대입하면

$\int_0^1 (t^3+2t^2+kt)\,dt=k,\ \left[\frac{1}{4}t^4+\frac{2}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1=k$

$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{k}{2}=k\quad \therefore k=\frac{11}{6}$

$\therefore f(x)=x^2+2x+\frac{11}{6}$

(3) $f(x)=2x^2+\int_0^1 (2x-1)f(t)\,dt$

$=2x^2+(2x-1)\int_0^1 f(t)\,dt$

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면

$f(x)=2x^2+k(2x-1)=2x^2+2kx-k$

이를 $\int_0^1 f(t)\,dt=k$에 대입하면

$\int_0^1 (2t^2+2kt-k)\,dt=k,\ \left[\frac{2}{3}t^3+kt^2-kt\right]_0^1=k$

$\frac{2}{3}+k-k=k\quad \therefore k=\frac{2}{3}$

$\therefore f(x)=2x^2+\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$

01-**2** 답 4

$\int_0^1 f(t)\,dt=a,\ \int_0^2 f(t)\,dt=b$ ($a$, $b$는 상수)로 놓으면

$f(x)=3x^2+4ax+b$ …… ㉠

㉠을 $\int_0^1 f(t)\,dt=a$에 대입하면

$\int_0^1 (3t^2+4at+b)\,dt=a$

$\left[t^3+2at^2+bt\right]_0^1=a$

$1+2a+b=a$

$\therefore a+b=-1$ …… ㉡

㉠을 $\int_0^2 f(t)\,dt=b$에 대입하면

$\int_0^2 (3t^2+4at+b)\,dt=b$

$\left[t^3+2at^2+bt\right]_0^2=b$

$8+8a+2b=b$

$\therefore 8a+b=-8$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=0$

따라서 $f(x)=3x^2-4x$이므로

$f(2)=12-8=4$

02-**1** 답 $f(x)=3x^2-10$

주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_3^x f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(x^3-ax+3)$

$\therefore f(x)=3x^2-a$

주어진 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$\int_3^3 f(t)\,dt=27-3a+3$

$0=-3a+30\quad \therefore a=10$

$\therefore f(x)=3x^2-10$

02-**2** 답 14

주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(3x^3+5x^2-2x)$

$\therefore f(x)=9x^2+10x-2$

주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)\,dt=3a^3+5a^2-2a$

$0=3a^3+5a^2-2a$

$a(a+2)(3a-1)=0$

$\therefore a=-2$ ($\because a<0$)

$\therefore f(a)=f(-2)=36-20-2=14$

**02-3** 답 **11**

주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2-6x+f(x)$

$xf'(x)=6x^2-6x=x(6x-6)$

$\therefore f'(x)=6x-6$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x-6)\,dx$

$=3x^2-6x+C$ ...... ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2-3+\int_1^1 f(t)\,dt$

$\therefore f(1)=-1$

㉠에서 $f(1)=-3+C$이므로

$-3+C=-1 \qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=3x^2-6x+2$이므로

$f(-1)=3+6+2=11$

**03-1** 답 **30**

$\int_{-1}^x (x-t)f(t)\,dt=x^3+6x^2+9x+4$에서

$x\int_{-1}^x f(t)\,dt-\int_{-1}^x tf(t)\,dt=x^3+6x^2+9x+4$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\int_{-1}^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+12x+9$

$\therefore \int_{-1}^x f(t)\,dt=3x^2+12x+9$

양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+12 \qquad \therefore f(3)=18+12=30$

**03-2** 답 **6**

$\int_2^x (x-t)f(t)\,dt=x^4+ax^3-20x+32$에서

$x\int_2^x f(t)\,dt-\int_2^x tf(t)\,dt=x^4+ax^3-20x+32$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\int_2^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=4x^3+3ax^2-20$

$\therefore \int_2^x f(t)\,dt=4x^3+3ax^2-20$ ...... ㉠

양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2+6ax$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$\int_2^2 f(t)\,dt=32+12a-20$

$0=12a+12 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=12x^2-6x$이므로

$f(1)=12-6=6$

**03-3** 답 **2**

$\int_1^x (x-t)f(t)\,dt=x^3-ax^2+bx$ ...... ㉠

에서

$x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt=x^3-ax^2+bx$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-2ax+b$

$\therefore \int_1^x f(t)\,dt=3x^2-2ax+b$ ...... ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 (x-t)f(t)\,dt=1-a+b$

$0=1-a+b \qquad \therefore a-b=1$ ...... ㉢

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)\,dt=3-2a+b$

$0=3-2a+b \qquad \therefore 2a-b=3$ ...... ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=1$

$\therefore ab=2$

**04-1** 답 **극댓값: 4, 극솟값: 0**

주어진 함수 $f(x)$를 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이므로 극댓값은

$f(-2)=\int_0^{-2}(3t^2+6t)\,dt$

$=\Big[t^3+3t^2\Big]_0^{-2}$

$=-8+12=4$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 극솟값은

$f(0)=\int_0^0 (3t^2+6t)\,dt=0$

다른 풀이

$f(x)=\int_0^x (3t^2+6t)\,dt$

$=\Big[t^3+3t^2\Big]_0^x=x^3+3x^2$

함수 $f(x)$를 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 4<br>극대 | ↘ | 0<br>극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 4, $x=0$에서 극솟값 0을 갖는다.

**05-1** 답 **최댓값: $\frac{16}{3}$, 최솟값: $-\frac{4}{3}$**

주어진 함수 $f(x)$를 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=1$ ($\because 0\le x\le 3$)

$0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ | |

이때 $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$의 값을 각각 구하면

$$f(0)=\int_{-1}^{0}(t^2-1)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_{-1}^{0}$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}+1\right)=-\frac{2}{3}$$
$$f(1)=\int_{-1}^{1}(t^2-1)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_{-1}^{1}$$
$$=\left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)=-\frac{4}{3}$$
$$f(3)=\int_{-1}^{3}(t^2-1)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_{-1}^{3}$$
$$=(9-3)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{16}{3}$$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{16}{3}$, 최솟값은 $-\frac{4}{3}$이다.

**05-2** 답 **12**

주어진 함수 $f(x)$를 $x$에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\{3(x+1)^2+3(x+1)\}-(3x^2+3x)$$
$$=6(x+1)$$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$

$-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | |

이때 $f(-1)$, $f(1)$의 값을 각각 구하면

$$f(-1)=\int_{-1}^{0}(3t^2+3t)\,dt=\left[t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_{-1}^{0}$$
$$=-\left(-1+\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$
$$f(1)=\int_{1}^{2}(3t^2+3t)\,dt=\left[t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_{1}^{2}$$
$$=(8+6)-\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{23}{2}$$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{23}{2}$, 최솟값은 $-\frac{1}{2}$이므로

$M=\frac{23}{2}$, $m=-\frac{1}{2}$

$\therefore M-m=12$

**06-1** 답 **(1) 9 (2) $-4$**

(1) $f(t)=3t^2-2t+1$이라 하고 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x}(3t^2-2t+1)\,dt$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x}f(t)\,dt=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\Big[F(t)\Big]_{2}^{x}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=F'(2)=f(2)=12-4+1=9$$

(2) $f(x)=x^4-x^3-x^2-1$이라 하고 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1}^{1+2h}(x^4-x^3-x^2-1)\,dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1}^{1+2h}f(x)\,dx=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{1}^{1+2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{2h}\times 2$$
$$=2F'(1)=2f(1)=2(1-1-1-1)=-4$$

**06-2** 답 **2**

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_{2}^{x}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\Big[F(t)\Big]_{2}^{x}=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)$$
$$=\frac{1}{4}(-4+10+2)=2$$

## 연습문제 179~180쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 4 | 2 19 | 3 ③ | 4 15 | 5 ⑤ |
| 6 −28 | 7 1 | 8 3 | 9 0 | 10 18 |
| 11 17 | 12 −10 | 13 7 | 14 ② | |

**1** $\int_0^1 f'(t)\,dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면

$f(x)=x^3+x+k \qquad \therefore f'(x)=3x^2+1$

이를 $\int_0^1 f'(t)\,dt=k$에 대입하면

$\int_0^1 (3t^2+1)\,dt=k$

$\left[t^3+t\right]_0^1=k$

$1+1=k \qquad \therefore k=2$

따라서 $f(x)=x^3+x+2$이므로

$f(1)=1+1+2=4$

**2** $f(x)=6x^2+x\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^1 tf(t)\,dt$이므로

$\int_0^1 f(t)\,dt=a$, $\int_0^1 tf(t)\,dt=b$ ($a$, $b$는 상수)로 놓으면

$f(x)=6x^2+ax+b$ …… ㉠

㉠을 $\int_0^1 f(t)\,dt=a$에 대입하면

$\int_0^1 (6t^2+at+b)\,dt=a$

$\left[2t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^1=a$

$2+\frac{a}{2}+b=a \qquad \therefore a-2b=4$ …… ㉡

㉠을 $\int_0^1 tf(t)\,dt=b$에 대입하면

$\int_0^1 (6t^3+at^2+bt)\,dt=b$

$\left[\frac{3}{2}t^4+\frac{a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2\right]_0^1=b$

$\frac{3}{2}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=b \qquad \therefore 2a-3b=-9$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-30$, $b=-17$

따라서 $f(x)=6x^2-30x-17$이므로

$f(-1)=6+30-17=19$

**3** (가)에서 $\int_0^1 g(t)\,dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면

$f(x)=2x+2k$

$g(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$g(x)=\int f(x)\,dx=\int (2x+2k)\,dx=x^2+2kx+C$

이를 $\int_0^1 g(t)\,dt=k$에 대입하면

$\int_0^1 (t^2+2kt+C)\,dt=k$, $\left[\frac{1}{3}t^3+kt^2+Ct\right]_0^1=k$

$\frac{1}{3}+k+C=k \qquad \therefore C=-\frac{1}{3}$

즉, $g(x)=x^2+2kx-\frac{1}{3}$이므로 $g(0)=-\frac{1}{3}$

(나)에서 $-\frac{1}{3}-k=\frac{2}{3} \qquad \therefore k=-1$

따라서 $g(x)=x^2-2x-\frac{1}{3}$이므로

$g(1)=1-2-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$

**4** $\int_0^1 f(t)\,dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면

$\int_0^x f(t)\,dt=x^3+x^2-kx$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+2x-k$

이를 $\int_0^1 f(t)\,dt=k$에 대입하면

$\int_0^1 (3t^2+2t-k)\,dt=k$

$\left[t^3+t^2-kt\right]_0^1=k$

$1+1-k=k \qquad \therefore k=1$

따라서 $f(x)=3x^2+2x-1$이므로

$f(2)=12+4-1=15$

**5** 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+2ax$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a-2 \qquad \therefore a=1$

따라서 $f'(x)=3x^2+2x$이므로

$f'(a)=f'(1)=3+2=5$

**6** 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=1+6x^2-2x=6x^2-2x+1$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (6x^2-2x+1)\,dx$

$=2x^3-x^2+x+C$

주어진 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면 $f(3)=3$이므로

$54-9+3+C=3 \qquad \therefore C=-45$

$\therefore f(x)=2x^3-x^2+x-45$

$\therefore f'(2)+f(-1)=(24-4+1)+(-2-1-1-45)$

$=-28$

7 (ⅰ) $x \ge a$일 때,

$\int_a^x f(t)\,dt=(x-1)(x-a)$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=(x-a)+(x-1)=2x-a-1$

(ⅱ) $x<a$일 때,

$\int_a^x f(t)\,dt=-(x-1)(x-a)$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=-(x-a)-(x-1)=-2x+a+1$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$f(x)=\begin{cases} 2x-a-1 & (x\ge a) \\ -2x+a+1 & (x<a) \end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$는 모든 실수 $x$에서 연속이므로 $x=a$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)$이므로

$\lim_{x\to a+}(2x-a-1)=\lim_{x\to a-}(-2x+a+1)$

$2a-a-1=-2a+a+1$

$\therefore a=1$

8 $\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt=2x^3$에서

$x\int_0^x f'(t)\,dt-\int_0^x tf'(t)\,dt=2x^3$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\int_0^x f'(t)\,dt+xf'(x)-xf'(x)=6x^2$

$\therefore \int_0^x f'(t)\,dt=6x^2$

양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=12x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 12x\,dx=6x^2+C$

이때 $f(0)=-3$에서 $C=-3$

따라서 $f(x)=6x^2-3$이므로

$f(1)=6-3=3$

9 $F(x)=\int_1^x x(2t+3)\,dt$에서 $F(x)=x\int_1^x (2t+3)\,dt$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=\int_1^x (2t+3)\,dt+x(2x+3)$

$\therefore f(x)=2x^2+3x+\int_1^x (2t+3)\,dt$

양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=4x+3+2x+3=6x+6$

$\therefore f'(-1)=-6+6=0$

10 주어진 함수 $f(x)$를 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+a)^2-2(x+a)\}-(x^2-2x)$

$=2ax+a^2-2a$

이때 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극솟값을 가지므로

$f'(-2)=0$에서

$-4a+a^2-2a=0$, $a^2-6a=0$

$a(a-6)=0$ $\quad\therefore a=6$ ($\because a>0$)

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(-2)=\int_{-2}^4 (t^2-2t)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{-2}^4$

$=\left(\frac{64}{3}-16\right)-\left(-\frac{8}{3}-4\right)=12$

$\therefore b=12$

$\therefore a+b=6+12=18$

11 $\int_2^x (x-t)f(t)\,dt=x^4+ax^2+bx+c$에서

$x\int_2^x f(t)\,dt-\int_2^x tf(t)\,dt=x^4+ax^2+bx+c$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\int_2^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=4x^3+2ax+b$

$\therefore \int_2^x f(t)\,dt=4x^3+2ax+b$

양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2+2a$

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 2이므로

$2a=2$ $\quad\therefore a=1$

즉, $\int_2^x f(t)\,dt=4x^3+2x+b$이므로 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=32+4+b$ $\quad\therefore b=-36$

즉, $\int_2^x (x-t)f(t)\,dt=x^4+x^2-36x+c$이므로 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=16+4-72+c$ $\quad\therefore c=52$

$\therefore a+b+c=1+(-36)+52=17$

12 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수)라 하고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자.

(가)에서

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^{2x} f'(t)\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big[f(t)\Big]_0^{2x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x}\times 2$

$=2f'(0)$

개념편

즉, $2f'(0)=-4$이므로 $f'(0)=-2$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$b=-2$

$\therefore f(x)=x^3+ax^2-2x+c$

㈏에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt&=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\Big[F(t)\Big]_2^x\\&=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\\&=F'(2)\\&=f(2)\end{aligned}$$

즉, $f(2)=-2$이므로

$8+4a-4+c=-2$

$\therefore 4a+c=-6$ $\cdots\cdots$ ㉠

㈐에서

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{1-x}^{1+x} f(t)\,dt\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_{1-x}^{1+x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{F(1+x)-F(1-x)}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{F(1+x)-F(1)+F(1)-F(1-x)}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{F(1+x)-F(1)}{x}\\&\qquad-\lim_{x\to0}\frac{F(1-x)-F(1)}{-x}\times(-1)\\&=F'(1)+F'(1)\\&=2F'(1)\\&=2f(1)\end{aligned}$$

즉, $2f(1)=16$이므로 $f(1)=8$

$1+a-2+c=8$

$\therefore a+c=9$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5,\ c=14$

따라서 $f(x)=x^3-5x^2-2x+14$이므로

$f(3)=27-45-6+14=-10$

**13** ㈎에서

주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(1)\}+\frac{x-1}{2}f'(x)$

$\therefore f(x)=xf'(x)-f'(x)+f(1)$

$f(x)$의 최고차항을 $ax^n\ (a\neq0)$이라 하면

$xf'(x)-f'(x)+f(1)$의 최고차항은 $x\times anx^{n-1}$, 즉 $anx^n$이므로

$a=an$ $\quad\therefore n=1\ (\because a\neq0)$

즉, $f(x)=ax+b$ ($b$는 상수)라 하면

$f(0)=1$에서 $b=1$

$\therefore f(x)=ax+1$

㈏의 좌변에서

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,dx&=\int_0^2(ax+1)\,dx\\&=\Big[\frac{a}{2}x^2+x\Big]_0^2\\&=2a+2\end{aligned}$$

㈏의 우변에서

$$\begin{aligned}5\int_{-1}^1 xf(x)\,dx&=5\int_{-1}^1(ax^2+x)\,dx\\&=10\int_0^1 ax^2\,dx\\&=10\Big[\frac{a}{3}x^3\Big]_0^1\\&=\frac{10}{3}a\end{aligned}$$

즉, $2a+2=\frac{10}{3}a$이므로 $a=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x+1$이므로

$f(4)=6+1=7$

**14** 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)+f'(x)$ $\cdots\cdots$ ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g(0)=0+f(0)$

$\therefore g(0)=f(0)$ $\cdots\cdots$ ㉡

㈎에서 $g'(0)=0,\ g(0)=0$이므로

㉠에서 $f(0)+f'(0)=0$

㉡에서 $f(0)=0$

$\therefore f'(0)=0$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=0$, $f(0)=0$이므로

$f(x)=x^2(x+a)=x^3+ax^2$ ($a$는 상수)이라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax$

㉠에서

$$\begin{aligned}g'(x)&=x^3+ax^2+3x^2+2ax\\&=x^3+(a+3)x^2+2ax\end{aligned}$$

㈏에서 $g'(-x)=-g'(x)$이므로 $g'(x)$는 홀수 차수의 항만 있다.

즉, $a+3=0$이므로 $a=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2$이므로

$f(2)=8-12=-4$

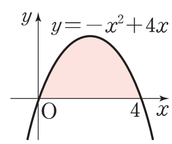
## Ⅲ-2 01 정적분의 활용

### 1 넓이

**문제** 185~189쪽

01-**1** 답 (1) $\dfrac{32}{3}$ (2) $\dfrac{9}{2}$ (3) 8 (4) $\dfrac{37}{12}$

(1) 곡선 $y=-x^2+4x$와 $x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면




$-x^2+4x=0$

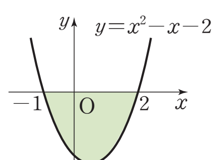
$x(x-4)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=4$

$0\le x\le 4$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_0^4(-x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

(2) 곡선 $y=x^2-x-2$와 $x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x^2-x-2=0$

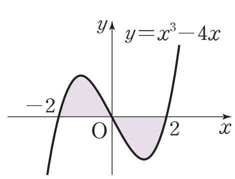
$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

$-1\le x\le 2$에서 $y\le 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-1}^2(-x^2+x+2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2=\frac{9}{2}$$

(3) 곡선 $y=x^3-4x$와 $x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x^3-4x=0$

$x(x+2)(x-2)=0$

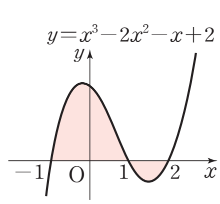
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=0$

또는 $x=2$

$-2\le x\le 0$에서 $y\ge 0$이고, $0\le x\le 2$에서 $y\le 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-2}^0(x^3-4x)\,dx+\int_0^2(-x^3+4x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_0^2$$
$$=8$$

(4) 곡선 $y=x^3-2x^2-x+2$와 $x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x^3-2x^2-x+2=0$

$(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$

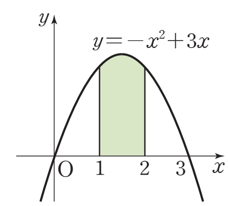
또는 $x=2$

$-1\le x\le 1$에서 $y\ge 0$, $1\le x\le 2$에서 $y\le 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-1}^1(x^3-2x^2-x+2)\,dx$$
$$+\int_1^2(-x^3+2x^2+x-2)\,dx$$
$$=2\int_0^1(-2x^2+2)\,dx$$
$$+\int_1^2(-x^3+2x^2+x-2)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_1^2$$
$$=\frac{37}{12}$$

01-**2** 답 (1) $\dfrac{13}{6}$ (2) 24

(1) 곡선 $y=-x^2+3x$와 $x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면



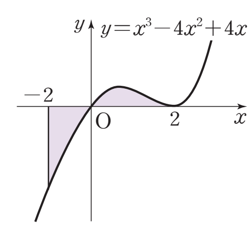

$-x^2+3x=0$, $x(x-3)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=3$

$1\le x\le 2$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_1^2(-x^2+3x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_1^2=\frac{13}{6}$$

(2) 곡선 $y=x^3-4x^2+4x$와 $x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x^3-4x^2+4x=0$

$x(x-2)^2=0$

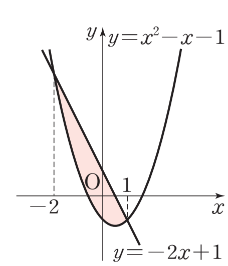
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

$-2\le x\le 0$에서 $y\le 0$이고, $0\le x\le 2$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-2}^0(-x^3+4x^2-4x)dx+\int_0^2(x^3-4x^2+4x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-2x^2\right]_{-2}^0+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^2$$
$$=24$$

02-**1** 답 $\dfrac{9}{2}$

곡선 $y=x^2-x-1$과 직선 $y=-2x+1$의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x^2-x-1=-2x+1$

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

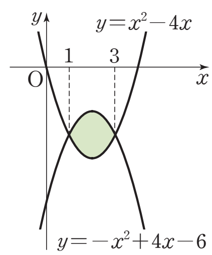
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

$-2\le x\le 1$에서 $-2x+1\ge x^2-x-1$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-2}^{1}\{(-2x+1)-(x^2-x-1)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$

**02-2** 답 $\frac{8}{3}$

두 곡선 $y=x^2-4x$, $y=-x^2+4x-6$의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x^2-4x=-x^2+4x-6$

$2x^2-8x+6=0$

$2(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$1\le x\le 3$에서 $-x^2+4x-6\ge x^2-4x$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{1}^{3}\{(-x^2+4x-6)-(x^2-4x)\}\,dx$$
$$=\int_{1}^{3}(-2x^2+8x-6)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_{1}^{3}=\frac{8}{3}$$

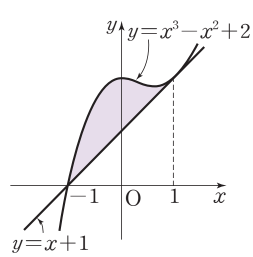
**03-1** 답 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{16}{3}$

(1) $f(x)=x^3-x^2+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-2x$

점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 접선의 방정식은

$y-2=x-1\qquad \therefore y=x+1$

곡선 $y=x^3-x^2+2$와 직선 $y=x+1$의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x^3-x^2+2=x+1$

$x^3-x^2-x+1=0$

$(x+1)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

$-1\le x\le 1$에서 $x^3-x^2+2\ge x+1$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-1}^{1}\{(x^3-x^2+2)-(x+1)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)\,dx=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}=\frac{4}{3}$$

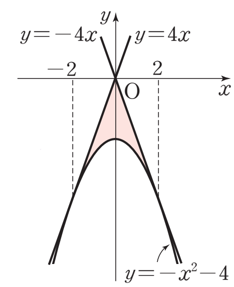
(2) $f(x)=-x^2-4$라 하면 $f'(x)=-2x$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2-4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2-4)=-2t(x-t)$

$\therefore y=-2tx+t^2-4$

이 직선이 원점을 지나므로




$0=t^2-4$, $t^2=4$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

따라서 접선의 방정식은

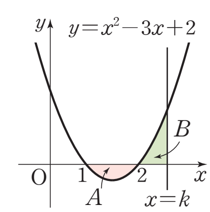
$y=4x$ 또는 $y=-4x$

곡선과 두 접선으로 둘러싸인 도형이 $y$축에 대하여 대칭이고, $0\le x\le 2$에서 $-4x\ge -x^2-4$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=2\int_{0}^{2}\{-4x-(-x^2-4)\}\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(x^2-4x+4)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{0}^{2}=\frac{16}{3}$$

**04-1** 답 $\frac{5}{2}$

오른쪽 그림에서 $A=B$이므로




$$\int_{1}^{k}(x^2-3x+2)\,dx=0$$
$$\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{1}^{k}=0$$
$$\frac{1}{3}k^3-\frac{3}{2}k^2+2k-\frac{5}{6}=0$$

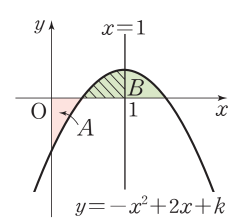
$2k^3-9k^2+12k-5=0$, $(k-1)^2(2k-5)=0$

$\therefore k=\frac{5}{2}\ (\because k>2)$

**04-2** 답 $-\frac{2}{3}$

$A : B=1 : 2$에서 $B=2A$

곡선 $y=-x^2+2x+k$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}B=A$



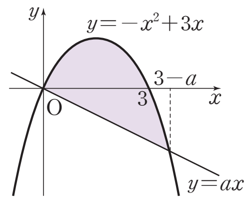

따라서 곡선 $y=-x^2+2x+k$와 $x$축, $y$축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{0}^{1}(-x^2+2x+k)\,dx=0$$
$$\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+kx\right]_{0}^{1}=0$$

$-\frac{1}{3}+1+k=0\qquad \therefore k=-\frac{2}{3}$

**05-1** 답 **54**

곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=ax$의 교점의 $x$좌표를 구하면




$-x^2+3x=ax$

$-x\{x-(3-a)\}=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=3-a$

곡선 $y=-x^2+3x$와 $x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면

$-x^2+3x=0,\ x(x-3)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=3$

$0\le x\le 3-a$에서 $-x^2+3x\ge ax$이므로

곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면

$$S_1=\int_0^{3-a}(-x^2+3x-ax)\,dx$$
$$=\int_0^{3-a}\{-x^2+(3-a)x\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3-a}{2}x^2\right]_0^{3-a}$$
$$=\frac{(3-a)^3}{6}$$

$0\le x\le 3$에서 $-x^2+3x\ge 0$이므로 곡선 $y=-x^2+3x$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면

$$S_2=\int_0^3(-x^2+3x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

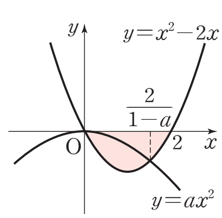
주어진 조건에서 $S_1=2S_2$이므로

$$\frac{(3-a)^3}{6}=2\times\frac{9}{2}=9$$

$\therefore\ (3-a)^3=54$

**05-2** 답 $\mathbf{1-\sqrt{2}}$

두 곡선 $y=x^2-2x$, $y=ax^2$의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x^2-2x=ax^2$

$x\{(1-a)x-2\}=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\dfrac{2}{1-a}$

곡선 $y=x^2-2x$와 $x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면

$x^2-2x=0,\ x(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

$0\le x\le 2$에서 $x^2-2x\le 0$이므로 곡선 $y=x^2-2x$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면

$$S_1=\int_0^2(-x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

$0\le x\le\dfrac{2}{1-a}$에서 $ax^2\ge x^2-2x$이므로 두 곡선 $y=x^2-2x$, $y=ax^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면

$$S_2=\int_0^{\frac{2}{1-a}}\{ax^2-(x^2-2x)\}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{2}{1-a}}\{(a-1)x^2+2x\}\,dx$$
$$=\left[\frac{a-1}{3}x^3+x^2\right]_0^{\frac{2}{1-a}}$$
$$=\frac{4}{3(a-1)^2}$$

주어진 조건에서 $S_1=2S_2$이므로

$$\frac{4}{3}=2\times\frac{4}{3(a-1)^2}$$

$(a-1)^2=2$

$a^2-2a-1=0$

$\therefore\ a=1-\sqrt{2}\ (\because\ a<0)$

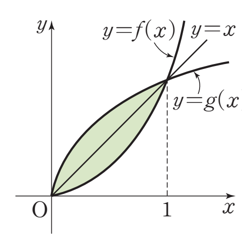
## 2 역함수의 그래프와 넓이

**문제** 191쪽

**06-1** 답 (1) $\mathbf{\frac{3}{5}}$ (2) **17**

(1) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x^4=x$

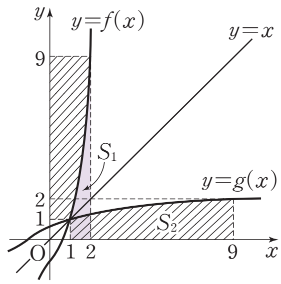
$x(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

$0\le x\le 1$에서 $x\ge x^4$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=2\int_0^1(x-x^4)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{3}{5}$$

(2) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $f(1)=1$, $f(2)=9$이므로 $g(1)=1$, $g(9)=2$이다.




$\int_1^2 f(x)\,dx=S_1$, $\int_1^9 g(x)\,dx=S_2$라 하면 위의 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 값은

$$\int_1^2 f(x)\,dx+\int_1^9 g(x)\,dx=S_1+S_2$$
$$=2\times9-1\times1=17$$

## 3 속도와 거리

**문제** 193~196쪽

07-**1** 답 (1) $\mathbf{\frac{22}{3}}$ (2) $\mathbf{\frac{2}{3}}$ (3) **2**

(1) $2+\int_0^4 (t^2-6t+8)\,dt=2+\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_0^4=\frac{22}{3}$

(2) $\int_3^5 (t^2-6t+8)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_3^5=\frac{2}{3}$

(3) $\int_3^5 |t^2-6t+8|\,dt$

$=\int_3^4 (-t^2+6t-8)\,dt+\int_4^5 (t^2-6t+8)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+3t^2-8t\right]_3^4+\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_4^5=2$

07-**2** 답 $\mathbf{\frac{31}{6}}$

$0+\int_0^3 v(t)\,dt=\int_0^1 (t^2-t)\,dt+\int_1^3 (-t^2+6t-5)\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+3t^2-5t\right]_1^3$

$=\frac{31}{6}$

08-**1** 답 (1) $\mathbf{\frac{11}{2}}$ (2) **9**

(1) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서

$3t-t^2=0$, $t(3-t)=0$ $\quad\therefore t=3$ ($\because t>0$)

따라서 좌표가 1인 점을 출발하여 $t=3$일 때 운동 방향을 바꾸므로 구하는 점 P의 위치는

$1+\int_0^3 (3t-t^2)\,dt=1+\left[\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^3$

$=\frac{11}{2}$

(2) 점 P가 좌표가 1인 점을 출발하여 좌표가 1인 점으로 다시 돌아오는 시각을 $t=a$라 하면 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P의 위치의 변화량은 0이므로

$\int_0^a (3t-t^2)\,dt=0$

$\left[\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^a=0$, $\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{3}a^3=0$

$a^3-\frac{9}{2}a^2=0$, $a^2\left(a-\frac{9}{2}\right)=0$

$\therefore a=\frac{9}{2}$ ($\because a>0$)

따라서 점 P가 좌표가 1인 점으로 다시 돌아올 때까지 움직인 거리는

$\int_0^{\frac{9}{2}} |3t-t^2|\,dt$

$=\int_0^3 (3t-t^2)\,dt+\int_3^{\frac{9}{2}} (-3t+t^2)\,dt$

$=\left[\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^3+\left[-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3\right]_3^{\frac{9}{2}}$

$=9$

09-**1** 답 (1) **40 m** (2) **45 m** (3) **65 m**

(1) 물체를 쏘아 올린 후 2초 동안 물체의 위치의 변화량은

$\int_0^2 (30-10t)\,dt=\left[30t-5t^2\right]_0^2$

$=40(\mathrm{m})$

(2) 물체가 최고 지점에 도달할 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서

$30-10t=0$ $\quad\therefore t=3$

따라서 지면에서 출발하여 $t=3$일 때 최고 지점에 도달하므로 구하는 물체의 높이는

$0+\int_0^3 (30-10t)\,dt=\left[30t-5t^2\right]_0^3$

$=45(\mathrm{m})$

(3) 물체를 쏘아 올린 후 5초 동안 물체가 움직인 거리는

$\int_0^5 |30-10t|\,dt$

$=\int_0^3 (30-10t)\,dt+\int_3^5 (-30+10t)\,dt$

$=\left[30t-5t^2\right]_0^3+\left[-30t+5t^2\right]_3^5$

$=65(\mathrm{m})$

**09-2** 답 **25 m**

물체가 지면으로부터 45 m의 높이에 도달하는 시각을 $t=a$라 하면

$$30+\int_0^a (20-10t)\,dt=45$$

$$\left[20t-5t^2\right]_0^a=15,\ 20a-5a^2=15$$

$a^2-4a+3=0,\ (a-1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=3$

따라서 $t=0$에서 $t=3$까지 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |20-10t|\,dt$$

$$=\int_0^2 (20-10t)\,dt+\int_2^3 (-20+10t)\,dt$$

$$=\left[20t-5t^2\right]_0^2+\left[-20t+5t^2\right]_2^3=25(\mathrm{m})$$

따라서 구하는 거리는 25 m이다.

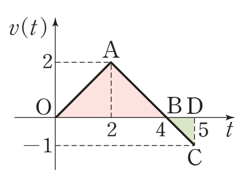
**10-1** 답 (1) $\frac{7}{2}$ (2) **4**

(1) $0+\int_0^5 v(t)\,dt$

$=\int_0^4 v(t)\,dt+\int_4^5 v(t)\,dt$

$=\triangle\mathrm{AOB}-\triangle\mathrm{BCD}$

$=\frac{1}{2}\times4\times2-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{7}{2}$




(2) $v(t)=0$인 $t$의 값은 $t=4$

따라서 점 P가 출발 후 $t=4$에서 처음으로 운동 방향을 바꾸므로 구하는 거리는

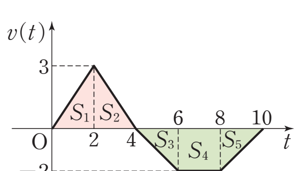
$$\int_0^4 |v(t)|\,dt=\triangle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\times4\times2=4$$

**10-2** 답 **8**

$t=a$일 때 원점으로 다시 돌아온다고 하면

$\int_0^a v(t)\,dt=0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서 속도 $v(t)$의 그래프와 $t$축이 이루는 각 부분의 넓이를 $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, $S_5$라 하면




$S_1=3,\ S_2=3,\ S_3=2,\ S_4=4,\ S_5=2$

이때 $S_1+S_2=S_3+S_4$이므로

$S_1+S_2-(S_3+S_4)=0$

$\therefore\ \int_0^8 v(t)\,dt=0$

따라서 $t=8$일 때 물체가 원점으로 다시 돌아온다.

**연습문제** 197~200쪽

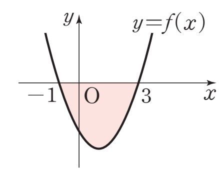
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ③ | **2** ③ | **3** ② | **4** $\frac{8}{19}$ | **5** $\frac{37}{12}$ |
| **6** $\frac{13}{6}$ | **7** ③ | **8** $\frac{5}{6}$ | **9** ① | **10** $\frac{7}{6}$ |
| **11** ② | **12** 16 | **13** ④ | **14** 8 | **15** 30 |
| **16** ③ | **17** 2 | **18** ④ | **19** 160 | **20** ㄱ |
| **21** $\frac{4}{5}$ | **22** 2 | **23** 8 | **24** ③ | **25** ⑤ |

**1** 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=xf'(x)+x^2-2x-3$

$\therefore\ f(x)=x^2-2x-3$

곡선 $y=f(x)$와 $x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

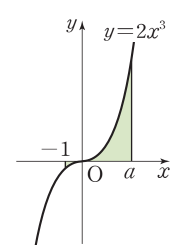
$-1\le x\le3$에서 $y\le0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-1}^3(-x^2+2x+3)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^3$$

$$=\frac{32}{3}$$

**2** $-1\le x\le0$에서 $y\le0$이고, $0\le x\le a$에서 $y\ge0$이므로 곡선 $y=2x^3$과 $x$축 및 두 직선 $x=-1$, $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S$라 하면




$$S=\int_{-1}^0(-2x^3)\,dx+\int_0^a 2x^3\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^4\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{2}a^4+\frac{1}{2}$$

즉, $\frac{1}{2}a^4+\frac{1}{2}=41$이므로

$a^4=81,\ a^4-81=0$

$(a+3)(a-3)(a^2+9)=0$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

**3** 곡선 $y=f(x)$와 $x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면

$(x-a)(x-b)=0$

$\therefore\ x=a$ 또는 $x=b$

$a\le x\le b$에서 $f(x)\le 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_a^b\{-f(x)\}\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$$
$$=-\left\{\int_a^0 f(x)\,dx+\int_0^b f(x)\,dx\right\}$$
$$=-\left\{-\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f(x)\,dx\right\}$$
$$=\int_0^a f(x)\,dx-\int_0^b f(x)\,dx$$
$$=\frac{11}{6}-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{9}{2}$$

**4** 곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표를 구하면

$-x^2+3x=x$, $x(x-2)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$

$0\le x\le 2$에서 $-x^2+3x\ge x$이므로

$$S_1=\int_0^2\{(-x^2+3x)-x\}\,dx=\int_0^2(-x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

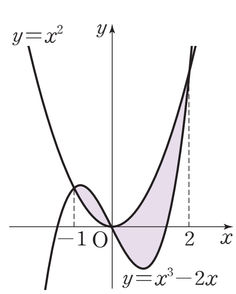
$0\le x\le 3$에서 $-x^2+3x\ge 0$이고 곡선 $y=-x^2+3x$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $S_1+S_2$이므로

$$S_1+S_2=\int_0^3(-x^2+3x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

$$\therefore\ S_2=(S_1+S_2)-S_1=\frac{9}{2}-\frac{4}{3}=\frac{19}{6}$$

$$\therefore\ \frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{19}{6}}=\frac{8}{19}$$

**5** 두 곡선 $y=x^3-2x$, $y=x^2$의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x^3-2x=x^2$

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=0$

또는 $x=2$

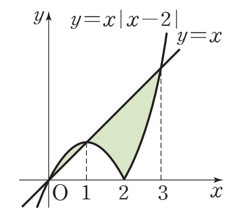
$-1\le x\le 0$에서 $x^3-2x\ge x^2$

이고, $0\le x\le 2$에서 $x^2\ge x^3-2x$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-1}^0\{(x^3-2x)-x^2\}\,dx+\int_0^2\{x^2-(x^3-2x)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^0(x^3-x^2-2x)\,dx+\int_0^2(-x^3+x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$
$$=\frac{37}{12}$$

**6** $y=x|x-2|=\begin{cases}x^2-2x & (x\ge 2)\\ -x^2+2x & (x\le 2)\end{cases}$

(i) $x\ge 2$일 때, 곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x^2-2x=x$, $x(x-3)=0$

$\therefore$ $x=3$ ($\because$ $x\ge 2$)

(ii) $x\le 2$일 때, 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표를 구하면

$-x^2+2x=x$, $x(x-1)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

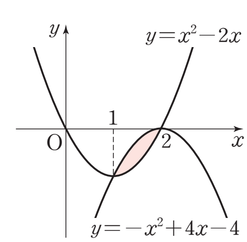
$$S=\int_0^1\{(-x^2+2x)-x\}\,dx+\int_1^2\{x-(-x^2+2x)\}\,dx+\int_2^3\{x-(x^2-2x)\}\,dx$$
$$=\int_0^1(-x^2+x)\,dx+\int_1^2(x^2-x)\,dx+\int_2^3(-x^2+3x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_2^3$$
$$=\frac{13}{6}$$

**7** $f(x)=x^2-2x$이므로

$y=-f(x-1)-1=-\{(x-1)^2-2(x-1)\}-1$

$=-x^2+4x-4$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-1)-1$의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x^2-2x=-x^2+4x-4$

$2x^2-6x+4=0$

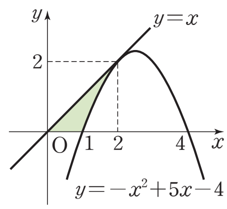
$2(x-1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=2$

$1\le x\le 2$에서 $-x^2+4x-4\ge x^2-2x$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

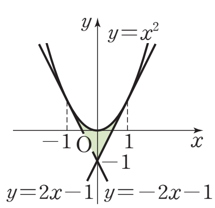
$$S=\int_1^2\{(-x^2+4x-4)-(x^2-2x)\}\,dx$$
$$=\int_1^2(-2x^2+6x-4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_1^2=\frac{1}{3}$$

**8** $f(x)=-x^2+5x-4$라 하면 $f'(x)=-2x+5$
점 $(2,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=1$이므로 접선의 방정식은
$y-2=x-2\qquad \therefore\ y=x$
곡선 $y=-x^2+5x-4$와 $x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면




$-x^2+5x-4=0$
$(x-1)(x-4)=0$
$\therefore\ x=1$ 또는 $x=4$
$0\le x\le 1$에서 $x\ge 0$이고,
$1\le x\le 2$에서 $x\ge -x^2+5x-4$
이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면
$$S=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 \{x-(-x^2+5x-4)\}\,dx$$
$$=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 (x^2-4x+4)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_1^2=\frac{5}{6}$$

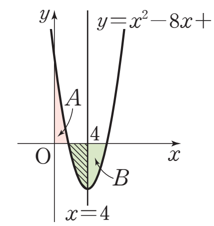
**9** $f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은
$y-t^2=2t(x-t)\qquad \therefore\ y=2tx-t^2$
이 직선이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로




$-1=-t^2$, $(t+1)(t-1)=0$
$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$
따라서 접선의 방정식은
$y=-2x-1$ 또는 $y=2x-1$
이때 곡선과 두 접선으로 둘러싸인 도형이 $y$축에 대하여 대칭이고, $0\le x\le 1$에서 $x^2\ge 2x-1$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면
$$S=2\int_0^1 \{x^2-(2x-1)\}\,dx=2\int_0^1 (x^2-2x+1)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

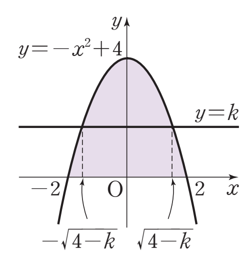
**10** 두 곡선과 $y$축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로
$$\int_0^2 \{a(x-2)^2-(-x^2+2x)\}\,dx=0$$
$$\int_0^2 \{(a+1)x^2-2(2a+1)x+4a\}\,dx=0$$
$$\left[\frac{a+1}{3}x^3-(2a+1)x^2+4ax\right]_0^2=0$$
$$\frac{8}{3}(a+1)-4=0\qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}$$
두 곡선 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$, $y=-x^2+2x$의 교점의 $x$좌표를 구하면
$\frac{1}{2}(x-2)^2=-x^2+2x$, $3x^2-8x+4=0$
$(3x-2)(x-2)=0\qquad \therefore\ x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$
따라서 $k=\frac{2}{3}$이므로 $a+k=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$

**11** $A:B=1:2$에서 $B=2A$
곡선 $y=x^2-8x+k$는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}B=A$




따라서 곡선 $y=x^2-8x+k$와 $x$축, $y$축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로
$$\int_0^4 (x^2-8x+k)\,dx=0,\ \left[\frac{1}{3}x^3-4x^2+kx\right]_0^4=0$$
$$\frac{64}{3}-64+4k=0\qquad \therefore\ k=\frac{32}{3}$$

**12** 곡선 $y=-x^2+4$와 직선 $y=k$의 교점의 $x$좌표를 구하면




$-x^2+4=k$
$(x+\sqrt{4-k})(x-\sqrt{4-k})=0$
$\therefore\ x=-\sqrt{4-k}$
또는 $x=\sqrt{4-k}$
곡선 $y=-x^2+4$와 $x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면
$-x^2+4=0$, $(x+2)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$
$-2\le x\le 2$에서 $-x^2+4\ge 0$이므로 곡선 $y=-x^2+4$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면
$$S_1=\int_{-2}^2 (-x^2+4)\,dx=2\int_0^2 (-x^2+4)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2=\frac{32}{3}$$
$-\sqrt{4-k}\le x\le \sqrt{4-k}$에서 $-x^2+4\ge k$이므로 곡선 $y=-x^2+4$와 직선 $y=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면
$$S_2=\int_{-\sqrt{4-k}}^{\sqrt{4-k}} (-x^2+4-k)\,dx$$
$$=2\int_0^{\sqrt{4-k}} (-x^2+4-k)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+(4-k)x\right]_0^{\sqrt{4-k}}=\frac{4}{3}(\sqrt{4-k})^3$$

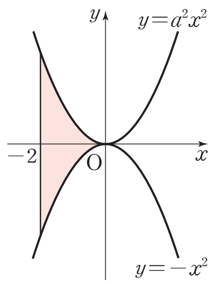
주어진 조건에서 $S_1=2S_2$이므로

$\frac{32}{3}=2\times\frac{4}{3}(\sqrt{4-k})^3$

$(\sqrt{4-k})^3=4$

$\therefore\ (4-k)^3=16$

**13** $-2\le x\le 0$에서 $a^2x^2\ge -x^2$이므로




$$S(a)=\int_{-2}^{0}\{a^2x^2-(-x^2)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(a^2+1)x^2\,dx$$
$$=\left[\frac{a^2+1}{3}x^3\right]_{-2}^{0}$$
$$=\frac{8}{3}(a^2+1)$$

$$\therefore\ \frac{S(a)}{a}=\frac{8(a^2+1)}{3a}=\frac{8}{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

이때 $a>0$, $\frac{1}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+\frac{1}{a}\ge 2\sqrt{a\times\frac{1}{a}}=2$ (단, 등호는 $a=1$일 때 성립)

$$\therefore\ \frac{S(a)}{a}=\frac{8}{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)\ge\frac{8}{3}\times2=\frac{16}{3}$$

따라서 $\frac{S(a)}{a}$의 최솟값은 $\frac{16}{3}$이다.

**14** ㈎에서 $f(-1)=-1$, $f(2)=2$이므로

$g(-1)=-1$, $g(2)=2$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 닫힌구간 $[-1, 2]$에서

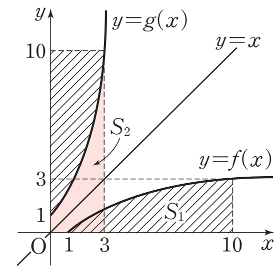
$g(x)\le x\le f(x)$ ($\because$ ㈐)

또 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-1}^{2}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$
$$=2\int_{-1}^{2}\{f(x)-x\}\,dx$$
$$=2\left\{\int_{-1}^{2}f(x)\,dx-\int_{-1}^{2}x\,dx\right\}$$
$$=2\left(\frac{11}{2}-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2}\right)\ (\because\ ㈏)$$
$$=2\left(\frac{11}{2}-\frac{3}{2}\right)$$
$$=2\times4=8$$

**15** 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.




$\int_{1}^{10}f(x)\,dx=S_1$,

$\int_{0}^{3}g(x)\,dx=S_2$라 하면

오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{1}^{10}f(x)\,dx+\int_{0}^{3}g(x)\,dx=S_1+S_2=3\times10=30$$

**16** 점 P가 원점을 출발하여 원점으로 다시 돌아오는 시각을 $t=a$라 하면 점 P의 위치의 변화량이 0이므로

$$\int_{0}^{a}(-3t^2+4t+15)\,dt=0$$
$$\left[-t^3+2t^2+15t\right]_{0}^{a}=0$$

$-a^3+2a^2+15a=0$, $a(a+3)(a-5)=0$

$\therefore\ a=5$ ($\because\ a>0$)

따라서 점 P가 원점으로 다시 돌아오는 시각은 $t=5$

**17** 두 점 P, Q의 $t=a$에서의 위치를 각각 $x_{\mathrm{P}}(a)$, $x_{\mathrm{Q}}(a)$라 하면

$$x_{\mathrm{P}}(a)=0+\int_{0}^{a}(6t^2-6t+4)\,dt$$
$$=\left[2t^3-3t^2+4t\right]_{0}^{a}=2a^3-3a^2+4a$$
$$x_{\mathrm{Q}}(a)=0+\int_{0}^{a}(3t^2+2t+1)\,dt$$
$$=\left[t^3+t^2+t\right]_{0}^{a}=a^3+a^2+a$$

이때 두 점 P, Q가 만날 때는 $x_{\mathrm{P}}(a)=x_{\mathrm{Q}}(a)$이므로

$2a^3-3a^2+4a=a^3+a^2+a$

$a^3-4a^2+3a=0$, $a(a-1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=3$ ($\because\ a>0$)

따라서 출발 후 두 점 P, Q가 만나는 횟수는 2이다.

**18** 점 P의 $t=2$에서의 위치는

$$0+\int_{0}^{2}v(t)\,dt=\int_{0}^{2}(3t^2+at)\,dt$$
$$=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_{0}^{2}=2a+8$$

이때 $a>0$에서 $2a+8>6$이고, 점 $\mathrm{P}(2a+8)$과 점 $\mathrm{A}(6)$ 사이의 거리가 10이므로

$2a+8-6=10$ $\quad\therefore\ a=4$

**19** $a=\int_0^5 (40-10t)\,dt$

$=\Big[40t-5t^2\Big]_0^5=75$

$b=\int_0^5 |40-10t|\,dt$

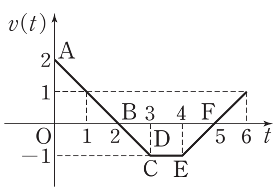
$=\int_0^4 (40-10t)\,dt+\int_4^5 (-40+10t)\,dt$

$=\Big[40t-5t^2\Big]_0^4+\Big[-40t+5t^2\Big]_4^5$

$=85$

$\therefore\ a+b=75+85=160$

**20**




ㄱ. $v(t)=0$인 $t$의 값은 $t=2$ 또는 $t=5$

즉, $0<t<6$에서 운동 방향을 두 번 바꾼다.

ㄴ. 출발 후 $t=3$까지 움직인 거리는

$\int_0^3 |v(t)|\,dt=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{BCD}$

$=\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times1\times1$

$=\frac{5}{2}$

ㄷ. $t=5$에서의 위치는

$0+\int_0^5 v(t)\,dt=\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^5 v(t)\,dt$

$=\triangle\mathrm{OAB}-\square\mathrm{BCEF}$

$=\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times(1+3)\times1$

$=0$

즉, $t=5$일 때 원점에 있다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

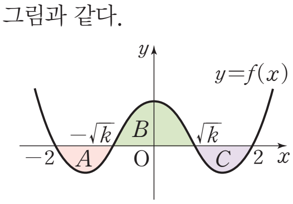
**21** 곡선 $y=f(x)$와 $x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면

$(x^2-4)(x^2-k)=0$

$(x+2)(x-2)(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=-\sqrt{k}$ 또는 $x=\sqrt{k}$ 또는 $x=2$

이때 $0<k<4$에서 $0<\sqrt{k}<2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.




주어진 조건에서 $A+C=B$이므로

$\int_{-2}^2 f(x)\,dx=0,\ \int_{-2}^2 (x^2-4)(x^2-k)\,dx=0$

$\int_{-2}^2 \{x^4-(k+4)x^2+4k\}\,dx=0$

$2\int_0^2 \{x^4-(k+4)x^2+4k\}\,dx=0$

$\int_0^2 \{x^4-(k+4)x^2+4k\}\,dx=0$

$\Big[\frac{1}{5}x^5-\frac{k+4}{3}x^3+4kx\Big]_0^2=0$

$\frac{16}{3}k-\frac{64}{15}=0\qquad\therefore\ k=\frac{4}{5}$

**22** $f(1-x)=-f(1+x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(1)=-f(1)\qquad\therefore\ f(1)=0$

$f(1-x)=-f(1+x)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(0)=-f(2)\qquad\therefore\ f(2)=0\ (\because\ f(0)=0)$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고

$f(0)=f(1)=f(2)=0$이므로

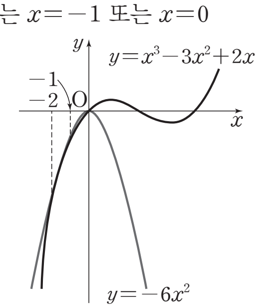
$f(x)=x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=-6x^2$의 교점의 $x$좌표를 구하면

$x^3-3x^2+2x=-6x^2$

$x^3+3x^2+2x=0,\ x(x+2)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$




$-2\le x\le-1$에서 $x^3-3x^2+2x\ge-6x^2$,

$-1\le x\le0$에서 $-6x^2\ge x^3-3x^2+2x$이므로

$S=\int_{-2}^{-1} \{x^3-3x^2+2x-(-6x^2)\}\,dx$

$\quad+\int_{-1}^0 \{-6x^2-(x^3-3x^2+2x)\}\,dx$

$=\int_{-2}^{-1} (x^3+3x^2+2x)\,dx$

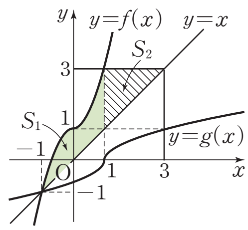
$\quad+\int_{-1}^0 (-x^3-3x^2-2x)\,dx$

$=\Big[\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2\Big]_{-2}^{-1}+\Big[-\frac{1}{4}x^4-x^3-x^2\Big]_{-1}^0$

$=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 4S=4\times\frac{1}{2}=2$

**23** 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=3$, $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=x$, $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.




곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표를 구하면

$x^3+x+1=x$, $x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=-1$ ($\because$ $x$는 실수)

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3$의 교점의 $x$좌표를 구하면

$x^3+x+1=3$, $x^3+x-2=0$

$(x-1)(x^2+x+2)=0$

$\therefore x=1$ ($\because$ $x$는 실수)

$-1\le x\le 1$에서 $x^3+x+1\ge x$이므로 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=x$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면

$$S_1=\int_{-1}^{1}\{(x^3+x+1)-x\}\,dx=\int_{-1}^{1}(x^3+1)\,dx$$

$$=2\int_{0}^{1}dx=2\Big[x\Big]_0^1=2$$

$1\le x\le 3$에서 세 직선 $y=x$, $x=1$, $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면

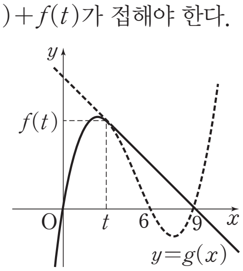
$S_2=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$

따라서 구하는 넓이는

$2(S_1+S_2)=2(2+2)=8$

**24** 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))\,(0<t<6)$에 대하여 $x<t$이면 $g(x)=f(x)$, $x\ge t$이면 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(t,\ f(t))$를 지나면서 기울기가 $-1$인 직선이다.

이때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 영역의 넓이가 최대가 되려면 다음 그림과 같이 $x=t\,(0<t<6)$인 점에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-(x-t)+f(t)$가 접해야 한다.




$f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)=\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+6x$에서

$f'(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{10}{3}x+6$

$x=t$인 점에서의 접선의 기울기가 $-1$이어야 하므로

$f'(t)=-1$

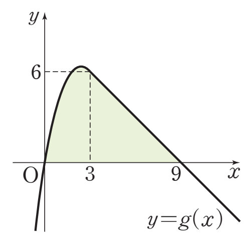
$\frac{1}{3}t^2-\frac{10}{3}t+6=-1$

$t^2-10t+21=0$, $(t-3)(t-7)=0$

$\therefore t=3$ ($\because 0<t<6$)

즉, 접점의 좌표는 $(3,\ 6)$이므로 접선의 방정식은

$y-6=-(x-3)$ $\quad\therefore y=-x+9$




따라서 $0\le x\le 3$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이의 최댓값을 $S$라 하면

$$S=\int_0^3\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+6x\right)dx+\frac{1}{2}\times(9-3)\times 6$$

$$=\left[\frac{1}{36}x^4-\frac{5}{9}x^3+3x^2\right]_0^3+18=\frac{57}{4}+18=\frac{129}{4}$$

**25** ㄱ. 지면으로부터 $x_0$의 높이에서 쏘아 올린 후 $t=a$일 때, A와 B의 높이는 각각

$x_0+\int_0^a f(t)\,dt$, $x_0+\int_0^a g(t)\,dt$

이때 $\int_0^a f(t)\,dt>\int_0^a g(t)\,dt$이므로 A의 위치가 B의 위치보다 높다.

ㄴ. $t=x$일 때, A와 B의 높이의 차를 $h(x)$라 하면

$$h(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x g(t)\,dt$$

$$=\int_0^x\{f(t)-g(t)\}\,dt$$

$\therefore h'(x)=f(x)-g(x)$

$h'(x)=0$, 즉 $f(x)=g(x)$인 $x$의 값은 $x=b$

$0\le x\le c$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $b$ | $\cdots$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $h(x)$ | 0 | ↗ | 극대 | ↘ | |

즉, $t=b$일 때, $h(x)$는 최대이므로 A와 B의 높이의 차가 최대이다.

ㄷ. 지면으로부터 $x_0$의 높이에서 쏘아 올린 후 $t=c$일 때, A와 B의 높이는 각각

$x_0+\int_0^c f(t)\,dt$, $x_0+\int_0^c g(t)\,dt$

이때 $\int_0^c f(t)\,dt=\int_0^c g(t)\,dt$이므로 A와 B의 높이가 같다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

# 유형편

## 정답과 해설

## I-1. 함수의 극한

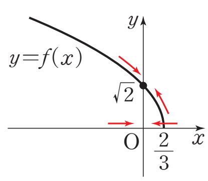
**01 함수의 극한** 4~6쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ② | **2** ④ | **3** ⑤ | **4** ⑤ | **5** ④ |
| **6** ⑤ | **7** ② | **8** ④ | **9** ㄱ | **10** ③ |
| **11** $-2$ | **12** 10 | **13** $-3$ | **14** 3 | **15** ㄴ, ㄹ |

**1** ㄱ. $f(x)=\sqrt{2-3x}$라 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

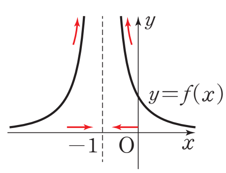
$\lim\limits_{x\to0}\sqrt{2-3x}=\sqrt{2}$



ㄴ. $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$이라 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{(x+1)^2}=\infty$

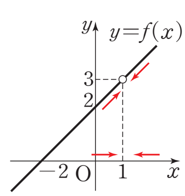


ㄷ. $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$라 하면

$x\neq1$일 때,

$f(x)=\dfrac{(x+2)(x-1)}{x-1}=x+2$

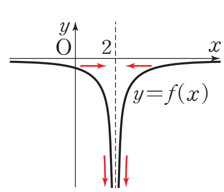
즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=3$



ㄹ. $f(x)=-\dfrac{1}{|x-2|}$이라 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim\limits_{x\to2}\left(-\dfrac{1}{|x-2|}\right)=-\infty$

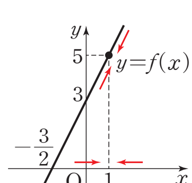


따라서 보기에서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

**2** ① $f(x)=2x+3$이라 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

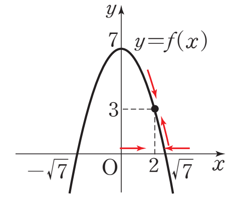
$\lim\limits_{x\to1}(2x+3)=5$



② $f(x)=-x^2+7$이라 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

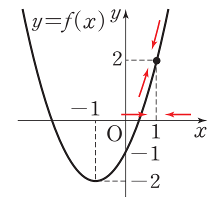
$\lim\limits_{x\to2}(-x^2+7)=3$



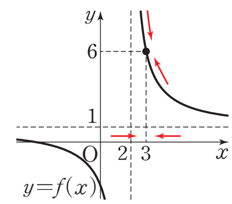
③ $f(x)=x^2+2x-1$이라 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim\limits_{x\to1}(x^2+2x-1)=2$



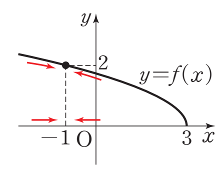
④ $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{5}{x-2}+1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+3}{x-2}=6$



⑤ $f(x)=\sqrt{-x+3}$이라 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{-x+3}=2$

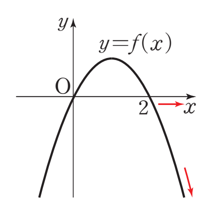


따라서 극한값이 가장 큰 것은 ④이다.

**3** ㄱ. $f(x)=-x^2+2x$라 하면

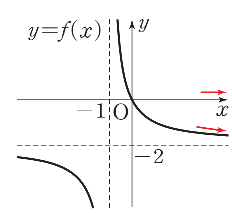
함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim\limits_{x\to\infty}(-x^2+2x)=-\infty$



ㄴ. $f(x)=\dfrac{-2x}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}-2$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

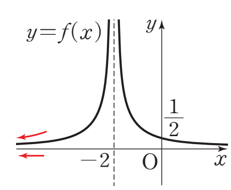
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{x+1}=-2$



ㄷ. $f(x)=\dfrac{1}{|x+2|}$이라 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

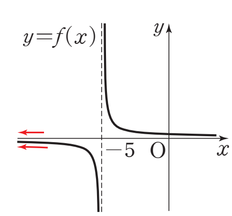
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{|x+2|}=0$



ㄹ. $f(x)=\dfrac{1}{x+5}$이라 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+5}=0$



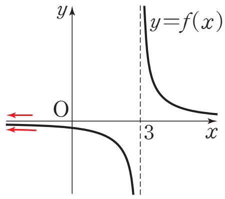
따라서 보기에서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

**4** ① $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$이라 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-3}=0$

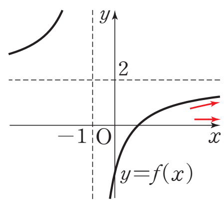



② $f(x)=2-\dfrac{4}{x+1}$라 하면

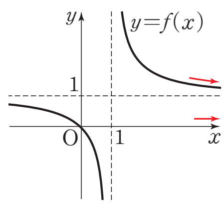
함수 $y=f(x)$의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{4}{x+1}\right)=2$




③ $f(x)=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$

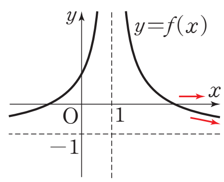



④ $f(x)=\dfrac{2}{|x-1|}-1$이라 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

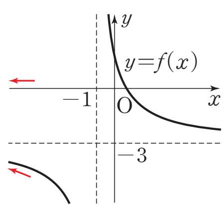
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{|x-1|}-1\right)=-1$




⑤ $f(x)=\dfrac{2-3x}{x+1}=\dfrac{5}{x+1}-3$

이라 하면 함수 $y=f(x)$의

그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-3x}{x+1}=-3$




따라서 극한값이 가장 작은 것은 ⑤이다.

**5** $\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to2}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)+\lim\limits_{x\to2}f(x)=4$

**6** ① $f(-1)=1$ ② $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=0$

③ $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=2$ ④ $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=0$

⑤ $\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)=1$ $\therefore\lim\limits_{x\to2}f(x)=1$

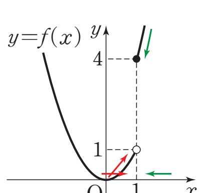
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

**7** 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=1$

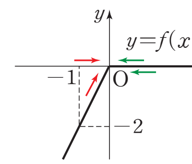
$\therefore \lim\limits_{x\to1+}f(x)-\lim\limits_{x\to1-}f(x)=3$




**8** ① $f(x)=\begin{cases}0 & (x\ge0)\\ 2x & (x<0)\end{cases}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)=0$

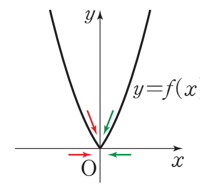
이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$




② $f(x)=\begin{cases}x^2+x & (x\ge0)\\ x^2-x & (x<0)\end{cases}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)=0$

이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

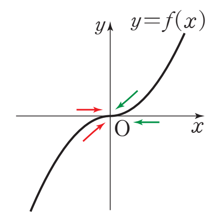



③ $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\ge0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)=0$

이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

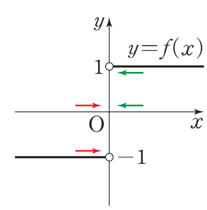



④ $f(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore \lim\limits_{x\to0+}f(x)=1$,

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=-1$

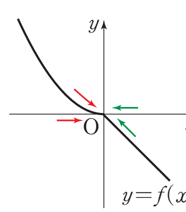
즉, $\lim\limits_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.




⑤ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}f(x)=0$



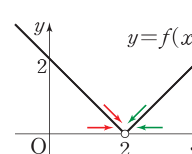

따라서 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하지 않는 것은 ④이다.

**9** ㄱ. $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{|x-2|}$이라 하면

$f(x)=\begin{cases}x-2 & (x>2)\\ -x+2 & (x<2)\end{cases}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)=0$이므로

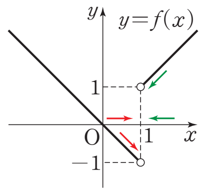
$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2}{|x-2|}=0$



ㄴ. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x-1|}$라 하면

$f(x)=\begin{cases} x & (x>1) \\ -x & (x<1) \end{cases}$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




$\therefore \lim\limits_{x\to1+} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to1-} f(x)=-1$

즉, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{|x-1|}$의 값은 존재하지 않는다.

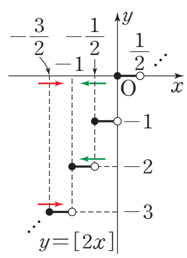
ㄷ. $-1\le x<-\dfrac{1}{2}$일 때, $-2\le 2x<-1$이므로

$[2x]=-2$

$-\dfrac{3}{2}\le x<-1$일 때, $-3\le 2x<-2$이므로

$[2x]=-3$

함수 $y=[2x]$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



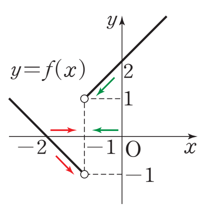

$\lim\limits_{x\to-1+}[2x]=-2,$

$\lim\limits_{x\to-1-}[2x]=-3$

즉, $\lim\limits_{x\to-1}[2x]$의 값은 존재하지 않는다.

ㄹ. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{|x+1|}$라 하면

$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x>-1) \\ -x-2 & (x<-1) \end{cases}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




$\therefore \lim\limits_{x\to-1+} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to-1-} f(x)=-1$

즉, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{|x+1|}$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ이다.

**10** $x>1$일 때, $f(x)=-x+a$이므로

$\lim\limits_{x\to1+} f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(-x+a)=a-1$

$x<1$일 때, $f(x)=3x^2-2x+1$이므로

$\lim\limits_{x\to1-} f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(3x^2-2x+1)=2$

이때 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$의 값이 존재하려면

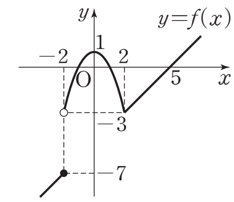
$\lim\limits_{x\to1+} f(x)=\lim\limits_{x\to1-} f(x)$이어야 하므로

$a-1=2$

$\therefore a=3$

**11** $f(x)=\begin{cases} x-5 & (x\le-2 \text{ 또는 } x\ge2) \\ 1-x^2 & (-2<x<2) \end{cases}$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로




$\lim\limits_{x\to-2+} f(x)=-3,$

$\lim\limits_{x\to-2-} f(x)=-7$

따라서 $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$의 값은 존재하지 않으므로 $a=-2$

**12** $x>-4$일 때, $f(x)=kx+12$이므로

$\lim\limits_{x\to-4+} f(x)=\lim\limits_{x\to-4+}(kx+12)=-4k+12$

$x<-4$일 때, $f(x)=(x+k)^2$이므로

$\lim\limits_{x\to-4-} f(x)=\lim\limits_{x\to-4-}(x+k)^2=(k-4)^2$

이때 $\lim\limits_{x\to-4} f(x)$의 값이 존재하려면

$\lim\limits_{x\to-4+} f(x)=\lim\limits_{x\to-4-} f(x)$이어야 하므로

$-4k+12=(k-4)^2,\ k^2-4k+4=0$

$(k-2)^2=0 \qquad \therefore k=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases} 2x+12 & (x\ge-4) \\ (x+2)^2 & (x<-4) \end{cases}$이므로

$f(-1)=2\times(-1)+12=10$

**13** $f(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t=2$이므로

$\lim\limits_{x\to0+} f(f(x))=f(2)=2$

$x\to-1-$일 때 $t\to-3-$이므로

$\lim\limits_{x\to-1-} f(f(x))=\lim\limits_{t\to-3-} f(t)=\lim\limits_{t\to-3-}(t-2)=-5$

$\therefore \lim\limits_{x\to0+} f(f(x))+\lim\limits_{x\to-1-} f(f(x))=2+(-5)=-3$

**14** $x+1=t$로 놓으면 $x\to0-$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim\limits_{x\to0-} f(x+1)=\lim\limits_{t\to1-} f(t)=1$

$x-1=s$로 놓으면 $x\to0-$일 때 $s\to-1-$이므로

$\lim\limits_{x\to0-} f(x-1)=\lim\limits_{s\to-1-} f(s)=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to0-} f(x+1)+\lim\limits_{x\to0-} f(x-1)=1+2=3$

**15** ㄱ. $\lim\limits_{x\to1+} f(x)=-1,\ \lim\limits_{x\to1-} f(x)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to1-$일 때 $t=1$이므로

$\lim\limits_{x\to1-} f(f(x))=f(1)=-1$

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim\limits_{x\to1+} f(f(x))=\lim\limits_{t\to-1+} f(t)=-1$

ㄹ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to2-$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim\limits_{x\to2-} f(f(x))=\lim\limits_{t\to0-} f(t)=0$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

유형편

## 02 함수의 극한값의 계산 7~12쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ㄴ, ㄷ | **2** 16 | **3** $\frac{5}{3}$ | **4** $-3$ | **5** 1 |
| **6** $-7$ | **7** (1) 12 (2) 2 | | **8** ② | **9** $\frac{3}{2}$ |
| **10** 0 | **11** ㄴ, ㄷ | **12** $-2$ | **13** ② | |
| **14** (1) $-\infty$ (2) $-1$ | | **15** ② | **16** ① | **17** ③ |
| **18** ③ | **19** $-\frac{1}{9}$ | **20** 6 | **21** $-16$ | **22** 3 |
| **23** ① | **24** $-4$ | **25** ⑤ | **26** ④ | **27** 6 |
| **28** 4 | **29** 10 | **30** 8 | **31** 5 | **32** ② |
| **33** ① | **34** 3 | **35** ④ | **36** ① | **37** 1 |
| **38** ④ | | | | |

**1** $\lim_{x\to1+}f(x)=2$, $\lim_{x\to1-}f(x)=-2$, $\lim_{x\to1+}g(x)=2$, $\lim_{x\to1-}g(x)=-2$이므로

ㄱ. $\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to1+}g(x)=4$

$\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1-}g(x)=-4$

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{x\to1+}g(x)=4$

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\times\lim_{x\to1-}g(x)=4$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)g(x)=4$

ㄷ. $\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to1+}f(x)}{\lim_{x\to1+}g(x)}=1$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to1-}f(x)}{\lim_{x\to1-}g(x)}=1$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

따라서 보기에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**2** $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x^2-1}=\frac{1}{2}$에서 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{g(x)}=2$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{(x+1)f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{x^2-1}{g(x)}\times\frac{f(x)}{x-1}\right\}=2\times8=16$$

**3** $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{f(x-1)}=\lim_{t\to0}\frac{(t+1)^2+3(t+1)-4}{f(t)}=\lim_{t\to0}\frac{t^2+5t}{f(t)}=\lim_{t\to0}\left\{\frac{t}{f(t)}\times(t+5)\right\}=\frac{1}{3}\times5=\frac{5}{3}$$

**4** $2f(x)-g(x)=h(x)$로 놓으면 $\lim_{x\to2}h(x)=3$

$g(x)=2f(x)-h(x)$, $\lim_{x\to2}f(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{6f(x)-3g(x)}{f(x)+4g(x)}=\lim_{x\to2}\frac{6f(x)-3\{2f(x)-h(x)\}}{f(x)+4\{2f(x)-h(x)\}}=\lim_{x\to2}\frac{3h(x)}{9f(x)-4h(x)}=\frac{3\times3}{9\times1-4\times3}=-3$$

**5** $f(x)-g(x)=h(x)$로 놓으면 $\lim_{x\to\infty}h(x)=3$

$g(x)=f(x)-h(x)$, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)-2g(x)}{2f(x)-g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)-2\{f(x)-h(x)\}}{2f(x)-\{f(x)-h(x)\}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2h(x)}{f(x)+h(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2h(x)}{f(x)}}{1+\frac{h(x)}{f(x)}}=1$$

**6** $\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=4$에서 $\alpha+\beta=4$

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=-5$에서 $\alpha\beta=-5$

두 근을 $\alpha$, $\beta$로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-4x-5=0$, $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

그런데 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=5$, $\beta=-1$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)=5$, $\lim_{x\to1}g(x)=-1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{2g(x)+1}=\frac{5+2}{2\times(-1)+1}=-7$$

**7** (1) $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x^2+2x+4)=12$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}=\lim_{x\to0}(\sqrt{x+1}+1)=2$

**8** $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4-2x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{4-2x}-\sqrt{4+x})(\sqrt{4-2x}+\sqrt{4+x})(\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-x})}{(\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-x})(\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-x})(\sqrt{4-2x}+\sqrt{4+x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-3x\times(\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-x})}{3x\times(\sqrt{4-2x}+\sqrt{4+x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{4-2x}+\sqrt{4+x}}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**9** $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)f(x)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{(x+1)f(x)}=\frac{3}{2f(1)}$

즉, $\frac{3}{2f(1)}=1$이므로 $2f(1)=3$ $\therefore f(1)=\frac{3}{2}$

**10** $\lim_{x\to1+}\frac{x^2+2x-3}{|x^2-1|}=\lim_{x\to1+}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{x+3}{x+1}=2$

$\therefore a=2$

$\lim_{x\to0-}\frac{|x|-x}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-2x}{x}=-2$

$\therefore b=-2$

$\therefore a+b=2+(-2)=0$

**11** ㄱ. $\lim_{x\to\infty}\frac{x-3}{x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=0$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^2-2x+4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=-5$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\frac{9x}{\sqrt{4x^2-x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$=3$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**12** $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}-3x}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+2t}+3t}{-t-\sqrt{t^2+1}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{t}}+3}{-1-\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-2$

**13** $x<0$일 때, $f(x)=\frac{-x-1}{3x+2}$

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-1}{3x+2}=\lim_{t\to\infty}\frac{t-1}{-3t+2}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{1-\frac{1}{t}}{-3+\frac{2}{t}}=-\frac{1}{3}$

**14** (1) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-3x+1)$

$=\lim_{t\to\infty}(-t^3+2t^2+3t+1)$

$=\lim_{t\to\infty}t^3\left(-1+\frac{2}{t}+\frac{3}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)=-\infty$

(2) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}=-1$

**15** $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2+3x-2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+3x-2}}{(x-\sqrt{x^2+3x-2})(x+\sqrt{x^2+3x-2})}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+3x-2}}{-3x+2}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}}{-3+\frac{2}{x}}=-\frac{2}{3}$

**16** $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-4t}-t)$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-4t}-t)(\sqrt{t^2-4t}+t)}{\sqrt{t^2-4t}+t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{-4t}{\sqrt{t^2-4t}+t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{t}}+1}=-2$

**17** $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}\times\frac{(x+1)^2-4}{4(x+1)^2}\right\}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}\times\frac{(x+3)(x-1)}{4(x+1)^2}\right\}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x+3}{4(x+1)^2}=\frac{1}{4}$

**18** $\lim_{x\to9}(\sqrt{x}-3)\left(1-\frac{3}{x-9}\right)$

$=\lim_{x\to9}\left\{(\sqrt{x}-3)\times\frac{x-12}{x-9}\right\}$

$=\lim_{x\to9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)(x-12)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim_{x\to9}\frac{(x-9)(x-12)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim_{x\to9}\frac{x-12}{\sqrt{x}+3}=-\frac{1}{2}$

**19** $\lim_{x\to 0}\frac{6}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+9}}-\frac{1}{3}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{6}{x}\times\frac{3-\sqrt{x+9}}{3\sqrt{x+9}}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{6}{x}\times\frac{(3-\sqrt{x+9})(3+\sqrt{x+9})}{3\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{6}{x}\times\frac{-x}{3\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})}=-\frac{1}{9}$

**20** $\frac{1}{n}=t$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(\frac{n+3}{n}\right)-f\left(\frac{-2n-3}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\{f(1+3t)-f(-2-3t)\}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{(1+3t)^2+(1+3t)-\{-(-2-3t)\}}{t}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{9t^2+6t}{t}$

$=\lim_{t\to 0+}(9t+6)=6$

다른 풀이

$n>0$일 때, $\frac{n+3}{n}=1+\frac{3}{n}>0$, $\frac{-2n-3}{n}=-2-\frac{3}{n}<0$

이므로

$f\left(\frac{n+3}{n}\right)=\left(\frac{n+3}{n}\right)^2+\frac{n+3}{n}=\frac{2n^2+9n+9}{n^2}$

$f\left(\frac{-2n-3}{n}\right)=-\frac{-2n-3}{n}=\frac{2n+3}{n}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(\frac{n+3}{n}\right)-f\left(\frac{-2n-3}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n^2+9n+9}{n^2}-\frac{2n+3}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(n\times\frac{6n+9}{n^2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+9}{n}=6$

**21** $x\to -1$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$에서 $\lim_{x\to -1}(x^2+ax-8)=0$

$1-a-8=0$

$\therefore\ a=-7$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-7x-8}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-8)}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1}(x-8)=-9$

$\therefore\ b=-9$

$\therefore\ a+b=-7+(-9)=-16$

**22** $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x^2-1}=2$이므로 $a=2$

이를 $\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)}{x^2-1}=b$의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{x+1}=1$

$\therefore\ b=1$

$\therefore\ a+b=2+1=3$

**23** $x\to -2$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$에서 $\lim_{x\to -2}(a\sqrt{x+3}+b)=0$

$a+b=0\qquad\therefore\ b=-a\qquad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to -2}\frac{a\sqrt{x+3}-a}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{a(\sqrt{x+3}-1)}{x+2}$

$=\lim_{x\to -2}\frac{a(\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{x+3}+1)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$

$=\lim_{x\to -2}\frac{a(x+2)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$

$=\lim_{x\to -2}\frac{a}{\sqrt{x+3}+1}=\frac{a}{2}$

즉, $\frac{a}{2}=1$이므로 $a=2$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-2$

$\therefore\ a^2+b^2=4+4=8$

**24** $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{a}{x+1}-2\right)=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{1}{x-2}\times\frac{a-2(x+1)}{x+1}\right\}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{-2x+a-2}{(x-2)(x+1)}\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$에서 $\lim_{x\to 2}(-2x+a-2)=0$

$-4+a-2=0\qquad\therefore\ a=6$

이를 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to 2}\frac{-2x+4}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-2)}{(x-2)(x+1)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{-2}{x+1}=-\frac{2}{3}$

$\therefore\ b=-\frac{2}{3}\qquad\therefore\ ab=6\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-4$

**25** $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-2x-3}=2$이므로 $a=2$

$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+bx+c}{x^2-2x-3}=2$에서 $x\to -1$일 때 (분모)$\to 0$이고,

극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to -1}(2x^2+bx+c)=0$

$2-b+c=0\qquad\therefore\ c=b-2\qquad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+bx+c}{x^2-2x-3}=2$의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+bx+b-2}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x+b-2)}{(x+1)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{2x+b-2}{x-3}=\frac{4-b}{4}$$

즉, $\frac{4-b}{4}=2$이므로 $b=-4$

이를 ㉠에 대입하면 $c=-4-2=-6$

$\therefore a+b+c=2+(-4)+(-6)=-8$

**26** $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax+1}-\sqrt{ax^2+1})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax+1}-\sqrt{ax^2+1})(\sqrt{x^2+ax+1}+\sqrt{ax^2+1})}{\sqrt{x^2+ax+1}+\sqrt{ax^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2+ax}{\sqrt{x^2+ax+1}+\sqrt{ax^2+1}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠의 극한값이 존재하려면 분자의 차수가 분모의 차수보다 작거나 같아야 하므로

$1-a=0 \qquad \therefore a=1$

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore b=\frac{1}{2} \qquad \therefore 4ab=4\times1\times\frac{1}{2}=2$

**27** $x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$에서 $\lim_{x\to3}(2x^2+ax+b)=0$

$18+3a+b=0 \qquad \therefore b=-3a-18 \quad \cdots\cdots ㉠$

$$\lim_{x\to3+}\frac{2x^2+ax+b}{|x-3|}=\lim_{x\to3+}\frac{2x^2+ax-3a-18}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}\frac{(x-3)(2x+a+6)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}(2x+a+6)$$
$$=a+12$$

$$\lim_{x\to3-}\frac{2x^2+ax+b}{|x-3|}=\lim_{x\to3-}\frac{2x^2+ax-3a-18}{-(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to3-}\frac{(x-3)(2x+a+6)}{-(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to3-}(-2x-a-6)=-a-12$$

이때 $\lim_{x\to3}\frac{2x^2+ax+b}{|x-3|}$의 값이 존재하므로

$a+12=-a-12 \qquad \therefore a=-12$

이를 ㉠에 대입하면 $b=36-18=18$

$\therefore a+b=-12+18=6$

**28** $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2+x+1}=1$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다. $\cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2+x-6}=\frac{2}{5}$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서 $\lim_{x\to2}f(x)=0$

$\therefore f(2)=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=2(x-2)(x+a)$ ($a$는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2+x-6}=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)(x+a)}{x^2+x-6}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)(x+a)}{(x+3)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2(x+a)}{x+3}$$
$$=\frac{2a+4}{5}$$

즉, $\frac{2a+4}{5}=\frac{2}{5}$이므로 $a=-1$

따라서 $f(x)=2(x-2)(x-1)$이므로

$f(3)=2\times1\times2=4$

**29** $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=2$에서 $f(x)-x^3$은 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다. $\cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-3$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서 $\lim_{x\to0}f(x)=0$

$\therefore f(0)=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)-x^3=2x^2+ax$, 즉 $f(x)=x^3+2x^2+ax$ ($a$는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+2x^2+ax}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x^2+2x+a)$$
$$=a$$

$\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-3x$이므로

$f(2)=8+8-6=10$

**30** $\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)-2x^3+1}{x^2}=5$에서 $xf(x)-2x^3+1$은 최고차항의 계수가 5인 이차함수이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2이고, 일차항의 계수가 5인 이차함수이다.

즉, $f(x)=2x^2+5x+a$ ($a$는 상수)라 하면

$f(0)=1$에서 $a=1$

따라서 $f(x)=2x^2+5x+1$이므로

$f(1)=2+5+1=8$

**31** $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$에서 $f(x)$는 이차 이하의 함수이다. …… ㉠

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서 $\lim_{x\to0}f(x)=0$

$\therefore f(0)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=ax^2+bx$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{ax^2+bx}{x}=\lim_{x\to0}(ax+b)=b$

즉, $b=3$이므로 $f(x)=ax^2+3x$

방정식 $f(x)=x$의 한 근이 $-1$이므로 $f(-1)=-1$에서

$a-3=-1$ $\quad\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2x^2+3x$이므로

$f(1)=2+3=5$

**32** $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서 $\lim_{x\to0}f(x)=0$

$\therefore f(0)=0$ …… ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서 $\lim_{x\to1}f(x)=0$

$\therefore f(1)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=ax(x-1)(x+b)$ ($a$, $b$는 상수, $a\neq0$)라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{ax(x-1)(x+b)}{x}=\lim_{x\to0}a(x-1)(x+b)=-ab$$

즉, $-ab=1$이므로 $ab=-1$ …… ㉢

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{ax(x-1)(x+b)}{x-1}=\lim_{x\to1}ax(x+b)=a+ab$$

$\therefore a+ab=1$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=2x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=x(x-1)(2x-1)$이므로

$f(2)=2\times1\times3=6$

**33** $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+2x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{f(t)}{t^3}-1}{\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+2t^2}$$

즉, $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+2t^2}=1$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{1+2x^2}=1$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{1+2x^2}=1$에서 $f(x)-x^3$은 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로

$f(x)-x^3=2x^2+ax+b$, 즉 $f(x)=x^3+2x^2+ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하자.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서 $\lim_{x\to1}f(x)=0$

$\therefore f(1)=0$

$f(1)=0$에서 $1+2+a+b=0$ $\quad\therefore b=-a-3$

즉, $f(x)=x^3+2x^2+ax-a-3$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}&=\lim_{x\to1}\frac{x^3+2x^2+ax-a-3}{x^2+x-2}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+3x+a+3)}{(x+2)(x-1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x+a+3}{x+2}=\frac{a+7}{3}\end{aligned}$$

즉, $\frac{a+7}{3}=\frac{1}{3}$이므로 $a=-6$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-6x+3$이므로

$\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x}+3\right)=3$

**34** $x^2+3>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x^2+3$으로 나누면

$\frac{3x^2+1}{x^2+3}<f(x)<\frac{3x^2+4}{x^2+3}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x^2+3}=3$, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4}{x^2+3}=3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=3$

**35** $x>0$일 때, 주어진 부등식의 각 변을 $x$로 나누면

$\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}<\frac{f(x)}{x}<\frac{\sqrt{4x^2+3}}{x}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3}}{x}=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2$

**36** $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)=0$, $\lim_{x\to0}(x^2+2x)=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to0}f(x)=0$

주어진 부등식의 각 변을 $x$로 나누면

(i) $x>0$일 때,

$$\frac{1}{2}x+2<\frac{f(x)}{x}<x+2$$

(ii) $x<0$일 때,

$$x+2<\frac{f(x)}{x}<\frac{1}{2}x+2$$

$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}x+2\right)=2$, $\lim_{x\to0}(x+2)=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{xf(x)+5x}{2f(x)-x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+5}{\frac{2f(x)}{x}-1}$$

$$=\frac{0+5}{2\times2-1}=\frac{5}{3}$$

**37** A$(2,\ 1)$, B$\left(t,\ \frac{2}{t}\right)$, C$\left(2,\ \frac{2}{t}\right)$이고 $t>2$이므로

$$\overline{\text{AB}}=\sqrt{(t-2)^2+\left(\frac{2}{t}-1\right)^2}=\sqrt{(t-2)^2+\left(\frac{2-t}{t}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(t-2)^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}=(t-2)\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}$$

$\overline{\text{BC}}=t-2$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\text{AB}}}{\overline{\text{BC}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{(t-2)\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}{t-2}=\lim_{t\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=1$$

**38** 직선 $l$의 기울기가 1이고 $y$절편이 $g(t)$이므로 직선 $l$의 방정식은 $y=x+g(t)$

A$(\alpha,\ \alpha+g(t))$, B$(\beta,\ \beta+g(t))\ (\alpha<\beta)$라 하면 이차방정식 $x^2=x+g(t)$, 즉 $x^2-x-g(t)=0$의 두 실근은 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-g(t)$ ······ ㉠

이때 $\overline{\text{AB}}=2t$에서

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=2t$

$2(\alpha-\beta)^2=4t^2$ $\therefore (\alpha-\beta)^2=2t^2$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$이므로

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2t^2$

이 등식의 좌변에 ㉠을 대입하면

$1^2-4\times\{-g(t)\}=2t^2$

$1+4g(t)=2t^2$ $\therefore g(t)=\frac{2t^2-1}{4}$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2-1}{4t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{2-\frac{1}{t^2}}{4}=\frac{1}{2}$$

# I-2. 함수의 연속

## 01 함수의 연속 14~18쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ① | **2** ㄴ, ㄷ | **3** ④ | **4** 0 | **5** 2 |
| **6** ⑤ | **7** ③ | **8** ㄴ | **9** ③ | **10** $-2$ |
| **11** ② | **12** $-\frac{1}{2}$ | **13** $-1$ | **14** 6 | **15** 1 |
| **16** ④ | **17** ⑤ | **18** ㄱ, ㄷ | **19** ④ | **20** $-1$ |
| **21** ① | **22** ③ | **23** ㄱ, ㅁ | **24** ④ | **25** ④ |
| **26** ④ | **27** 3개 | **28** $-4<a<2$ | | |

**1** $f(x)=\sqrt{1-5x}$는 $1-5x<0$, 즉 $x>\frac{1}{5}$에서 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$가 연속인 구간은 ① $\left(-\infty,\ \frac{1}{5}\right]$이다.

**2** ㄱ. $f(0)=0$, $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$,

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0-}\frac{x}{-x}=-1$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$

즉, $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $f(1)=-2$, $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(\sqrt{x-1}-2)=-2$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(-2)=-2$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $f(2)=4$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}(x+2)=4$$

$\therefore \lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

따라서 보기의 함수에서 모든 실수 $x$에서 연속인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**3** ① $f(-1)=0$, $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(x+1)=0$,

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(-x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

② $f(-1)=6$, $\lim_{x\to-1}(x^2-2x+3)=6$이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

③ $f(-1)=-1$, $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1+}(2x+1)=-1$,

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}(-1)=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

④ $f(-1)=3$, $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1+}(-\sqrt{x+1}+3)=3$,

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}0=0$이므로

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1-}f(x)$

즉, $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

⑤ $f(-1)=-3$

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x-2)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-1}(x-2)=-3$

$\therefore \lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

따라서 $x=-1$에서 불연속인 함수는 ④이다.

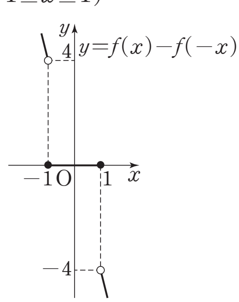
**4** $f(x)=\begin{cases}3-2x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\\ 2 & (-1\le x\le 1)\end{cases}$이므로

$f(-x)=\begin{cases}3+2x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\\ 2 & (-1\le x\le 1)\end{cases}$

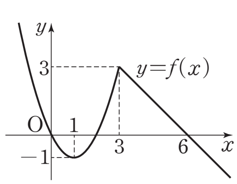
$\therefore f(x)-f(-x)=\begin{cases}-4x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\\ 0 & (-1\le x\le 1)\end{cases}$

즉, 함수 $y=f(x)-f(-x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)-f(-x)$가 불연속인 $x$의 값은 $-1$, $1$이다.

따라서 구하는 $x$의 값의 합은 $-1+1=0$

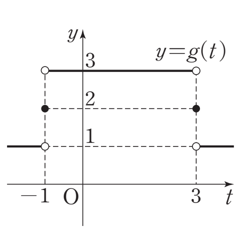



**5** 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로




$g(t)=\begin{cases}1 & (t<-1 \text{ 또는 } t>3)\\ 2 & (t=-1 \text{ 또는 } t=3)\\ 3 & (-1<t<3)\end{cases}$

따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $g(t)$가 불연속인 실수 $t$의 값은 $-1$, $3$의 2개이다.




**6** ① $f(0)=0$

② $\lim\limits_{x\to-2+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-2-}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to-2}f(x)=1$

③ $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1-}f(x)$

즉, $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

④ $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

⑤ $f(2)=2$, $\lim\limits_{x\to2}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to2}f(x)\neq f(2)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

**7** (i) $f(1)=0$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1-}f(x)$

즉, $\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(ii) $f(3)=1$

$\lim\limits_{x\to3+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to3-}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to3+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to3-}f(x)$

즉, $\lim\limits_{x\to3}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

(iii) $f(4)=0$, $\lim\limits_{x\to4+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to4-}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to4}f(x)\neq f(4)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 불연속이다.

(i)~(iii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=3$에서 극한값이 존재하지 않고, $x=1$, $x=3$, $x=4$에서 불연속이므로

$a=2$, $b=3$ $\quad\therefore a+b=5$

**8** ㄱ. $f(0)=1$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to0+$이고, $x\to1-$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x-1)=\lim\limits_{t\to0+}f(t)=1$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x-1)=\lim\limits_{t\to0-}f(t)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to1+}f(x-1)\neq\lim\limits_{x\to1-}f(x-1)$

즉, $\lim\limits_{x\to1}f(x-1)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x-1)$은 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $f(f(0))=f(1)=0$

$f(x)=t$로 놓으면 $x \to 0+$일 때 $t=1$이고, $x \to 0-$일 때 $t \to 0-$이므로

$\lim_{x \to 0+} f(f(x))=f(1)=0$

$\lim_{x \to 0-} f(f(x))=\lim_{t \to 0-} f(t)=0$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(f(x))=f(f(0))$

즉, 함수 $f(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $f(f(1))=f(0)=1$

$f(x)=t$로 놓으면 $x \to 1+$일 때 $t \to 0+$이고, $x \to 1-$일 때 $t=1$이므로

$\lim_{x \to 1+} f(f(x))=\lim_{t \to 0+} f(t)=1$

$\lim_{x \to 1-} f(f(x))=f(1)=0$

$\therefore \lim_{x \to 1+} f(f(x)) \neq \lim_{x \to 1-} f(f(x))$

즉, $\lim_{x \to 1} f(f(x))$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(f(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

**9** ㄱ. $f(0)-g(0)=1-0=1$

$\lim_{x \to 0+} \{f(x)-g(x)\}=\lim_{x \to 0+} f(x)-\lim_{x \to 0+} g(x)$

$=0-2=-2$

$\lim_{x \to 0-} \{f(x)-g(x)\}=\lim_{x \to 0-} f(x)-\lim_{x \to 0-} g(x)$

$=0-(-2)=2$

$\therefore \lim_{x \to 0+} \{f(x)-g(x)\} \neq \lim_{x \to 0-} \{f(x)-g(x)\}$

즉, $\lim_{x \to 0} \{f(x)-g(x)\}$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $f(0)g(0)=1 \times 0=0$,

$\lim_{x \to 0+} f(x)g(x)=0 \times 2=0$,

$\lim_{x \to 0-} f(x)g(x)=0 \times (-2)=0$이므로

$\lim_{x \to 0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $f(g(0))=f(0)=1$

$g(x)=t$로 놓으면 $x \to 0+$일 때 $t \to 2-$이고, $x \to 0-$일 때 $t \to -2+$이므로

$\lim_{x \to 0+} f(g(x))=\lim_{t \to 2-} f(t)=1$

$\lim_{x \to 0-} f(g(x))=\lim_{t \to -2+} f(t)=1$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(g(x))=1$

즉, $\lim_{x \to 0} f(g(x))=f(g(0))$이므로 함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄹ. $g(f(0))=g(1)=1$

$f(x)=t$로 놓으면 $x \to 0$일 때 $t \to 0+$이므로

$\lim_{x \to 0} g(f(x))=\lim_{t \to 0+} g(t)=2$

$\therefore \lim_{x \to 0} g(f(x)) \neq g(f(0))$

즉, 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수에서 $x=0$에서 연속인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**10** 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x \to 1} f(x)=f(1)$에서

$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}+a}{x-1}=b$ …… ㉠

$x \to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서 $\lim_{x \to 1} (\sqrt{x+3}+a)=0$

$2+a=0 \qquad \therefore a=-2$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

$\therefore b=\frac{1}{4} \qquad \therefore 4ab=4 \times (-2) \times \frac{1}{4}=-2$

**11** 함수 $(x^2+ax+b)f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1+} (x^2+ax+b)f(x)=\lim_{x \to 1-} (x^2+ax+b)f(x)$

$=(1+a+b)f(1)$

이때

$\lim_{x \to 1+} (x^2+ax+b)f(x)=(1+a+b) \times 3$

$=3a+3b+3$

$\lim_{x \to 1-} (x^2+ax+b)f(x)=(1+a+b) \times 1$

$=a+b+1$

$(1+a+b)f(1)=a+b+1$이므로

$3a+3b+3=a+b+1 \qquad \therefore a+b=-1$

**12** $f(x)=f(x+3)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=f(3)$

$a(-2)^2+b=-2 \times 3+4$

$\therefore 4a+b=-2$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x \to 2+} f(x)=\lim_{x \to 2-} f(x)=f(2)$에서

$\lim_{x \to 2+} f(x)=\lim_{x \to 2+} (-2x+4)=0$

$\lim_{x \to 2-} f(x)=\lim_{x \to 2-} \{a(x-2)^2+b\}=b$

유형편

$f(2)=b$

$\therefore b=0$

이를 ㉠에 대입하면 $4a=-2 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 & (0\le x\le 2) \\ -2x+4 & (2<x\le 3) \end{cases}$

$\therefore f(19)=f(16)=\cdots=f(4)=f(1)$

$=-\frac{1}{2}(1-2)^2=-\frac{1}{2}$

**13** $x\ne 1$일 때, $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}+k}{x-1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로 $f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)$에서

$f(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}+k}{x-1}$ ...... ㉠

$x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$에서 $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x^2+3}+k)=0$

$2+k=0 \qquad \therefore k=-2$

이를 ㉠에 대입하면

$f(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\frac{1}{2}$

$\therefore kf(1)=-2\times\frac{1}{2}=-1$

**14** $x\ne -1,\ x\ne 1$일 때,

$f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$

$=\frac{(x+3)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=x+3$

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이면 $x=-1,\ x=1$에서 연속이므로

(i) $f(-1)=\lim_{x\to -1}f(x)$에서 $f(-1)=\lim_{x\to -1}(x+3)=2$

(ii) $f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)$에서 $f(1)=\lim_{x\to 1}(x+3)=4$

$\therefore f(-1)+f(1)=2+4=6$

**15** $x\ne -3,\ x\ne 2$일 때,

$f(x)=\frac{x^3+ax+b}{x^2+x-6}=\frac{x^3+ax+b}{(x+3)(x-2)}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이면 $x=-3,\ x=2$에서 연속이므로

(i) $f(-3)=\lim_{x\to -3}f(x)$에서

$f(-3)=\lim_{x\to -3}\frac{x^3+ax+b}{(x+3)(x-2)}$

$x\to -3$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$에서 $\lim_{x\to -3}(x^3+ax+b)=0$

$-27-3a+b=0 \qquad \therefore 3a-b=-27$ ...... ㉠

(ii) $f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)$에서 $f(2)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+ax+b}{(x+3)(x-2)}$

$x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$에서 $\lim_{x\to 2}(x^3+ax+b)=0$

$8+2a+b=0 \qquad \therefore 2a+b=-8$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-7,\ b=6$

$\therefore f(2)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-7x+6}{(x+3)(x-2)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-1)(x-2)}{(x+3)(x-2)}$

$=\lim_{x\to 2}(x-1)=1$

**16** $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+1}{x^2-2x-3}=\frac{x+1}{(x+1)(x-3)}$은 $x=-1,\ x=3$에서 정의되지 않으므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 연속인 구간은

④ $(-\infty,\ -1),\ (-1,\ 3),\ (3,\ \infty)$이다.

**17** 두 함수 $f(x)=x,\ g(x)=x^2-4$는 다항함수이므로 모든 실수 $x$에서 연속이다.

① 두 함수 $f(x),\ 2g(x)$는 모든 실수 $x$에서 연속이므로 함수 $f(x)+2g(x)$도 모든 실수 $x$에서 연속이다.

② 두 함수 $f(x),\ g(x)$는 모든 실수 $x$에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$도 모든 실수 $x$에서 연속이다.

③ $g(f(x))=x^2-4$이므로 함수 $g(f(x))$는 모든 실수 $x$에서 연속이다.

④ $f(g(x))=x^2-4$이므로 함수 $f(g(x))$는 모든 실수 $x$에서 연속이다.

⑤ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x}{x^2-4}=\frac{x}{(x+2)(x-2)}$는 $x=-2,\ x=2$에서 정의되지 않으므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=-2,\ x=2$에서 불연속이다.

따라서 모든 실수 $x$에서 연속인 함수가 아닌 것은 ⑤이다.

**18** ㄱ. $f(a)=b$($b$는 상수)라 하면 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $\lim_{x\to a}f(x)=b$

$|f(a)|=|b|$이고, $f(x)=t$로 놓으면 $x \to a$일 때 $t \to b$이므로

$\lim\limits_{x \to a}|f(x)|=\lim\limits_{t \to b}|t|=|b|$

$\therefore \lim\limits_{x \to a}|f(x)|=|f(a)|$

즉, 함수 $|f(x)|$는 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases} -1 & (x \ge 0) \\ 1 & (x<0) \end{cases}$이면 $\{f(x)\}^2=1$이므로

함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 연속이지만 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(x)+g(x)=h(x)$, $f(x)-g(x)=k(x)$라 하면

$g(x)=\dfrac{h(x)-k(x)}{2}$

이때 두 함수 $h(x)$, $k(x)$가 $x=a$에서 연속이면 함수 $g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

**19** 함수 $f(x)$는 $x \ne a$인 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$\{f(a)\}^2=\lim\limits_{x \to a+}\{f(x)\}^2=\lim\limits_{x \to a-}\{f(x)\}^2$

이때 $\{f(a)\}^2=a^2$, $\lim\limits_{x \to a+}\{f(x)\}^2=\lim\limits_{x \to a+}(2x-a)^2=a^2$,

$\lim\limits_{x \to a-}\{f(x)\}^2=\lim\limits_{x \to a-}(-2x+6)^2=(-2a+6)^2$이므로

$a^2=(-2a+6)^2$, $a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0 \qquad \therefore a=2$ 또는 $a=6$

따라서 구하는 $a$의 값의 합은 $2+6=8$

**20** 모든 실수 $x$에서 $f(x)>0$이고 $\lim\limits_{x \to 2+}f(x) \ne \lim\limits_{x \to 2-}f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

이때 함수 $g(x)$는 모든 실수 $x$에서 연속이므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 모든 실수 $x$에서 연속이면 $x=2$에서 연속이다.

$\dfrac{g(2)}{f(2)}=\lim\limits_{x \to 2+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x \to 2-}\dfrac{g(x)}{f(x)}$에서

$\dfrac{g(2)}{f(2)}=\dfrac{2a+2}{3}$, $\lim\limits_{x \to 2+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x \to 2+}\dfrac{ax+2}{3}=\dfrac{2a+2}{3}$,

$\lim\limits_{x \to 2-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x \to 2-}\dfrac{ax+2}{x^2-4x+6}=a+1$

따라서 $\dfrac{2a+2}{3}=a+1$이므로 $a=-1$

**21** (가)의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)g(0)=0$

이때 (나)에서 $g(0)=1$이므로 $f(0)=0$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

(가)에서 $x(x^2+ax+b)g(x)=x(x+3)$

$x \ne 0$, $x^2+ax+b \ne 0$일 때,

$g(x)=\dfrac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)}=\dfrac{x+3}{x^2+ax+b} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x \to 0}g(x)=g(0)$에서 $\lim\limits_{x \to 0}g(x)=1$

㉠에서 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{x+3}{x^2+ax+b}=1$, $\dfrac{3}{b}=1 \qquad \therefore b=3$

한편 ㉠에서 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면

$x^2+ax+3 \ne 0$

즉, 모든 실수 $x$에서 $x^2+ax+3>0$이므로 이차방정식 $x^2+ax+3=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=a^2-12<0 \qquad \therefore -2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

또 $f(x)=x(x^2+ax+3)$에서 $f(1)$은 자연수이므로

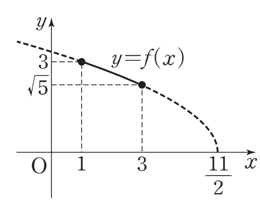
$f(1)=a+4>0 \qquad \therefore a>-4$

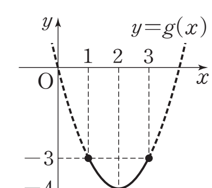
즉, $a$는 $-4$보다 큰 정수이다. $\qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $a$의 값은 $-3$, $-2$, $-1$, $0$, $1$, $2$, $3$이다.

따라서 $g(2)=\dfrac{2+3}{4+2a+3}=\dfrac{5}{2a+7}$이므로 $a=3$에서 최솟값 $\dfrac{5}{13}$를 갖는다.

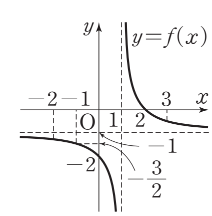
**22** 닫힌구간 $[1, 3]$에서 두 함수 $f(x)=\sqrt{-2x+11}$, $g(x)=x^2-4x$의 그래프는 다음 그림과 같다.




따라서 $M=3$, $m=-4$이므로 $M+m=-1$

**23** 함수 $f(x)=\dfrac{2-x}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




ㄱ, ㅁ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, -1]$, $[2, 3]$에서 연속이므로 각 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

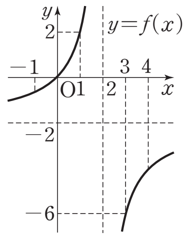
ㄴ. 반열린구간 $[-1, 0)$에서 최댓값은 $-\dfrac{3}{2}$, 최솟값은 없다.

ㄷ. 반열린구간 $(0, 1]$에서 최댓값과 최솟값은 없다.

ㄹ. 닫힌구간 $[1, 2]$에서 최댓값은 없고, 최솟값은 0이다.

따라서 보기의 구간에서 최댓값과 최솟값이 모두 존재하는 것은 ㄱ, ㅁ이다.

**24** 함수 $f(x)=\dfrac{2x}{2-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




①, ②, ⑤ 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 0]$, $[0,\ 1]$, $[3,\ 4]$에서 연속이므로 각 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

③ 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 최댓값은 없고, 최솟값은 2이다.

④ 닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 최댓값은 $-6$, 최솟값은 없다.

따라서 최솟값이 존재하지 않는 구간은 ④이다.

**25** $f(x)=x^3+2x-8$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 연속이고

$f(-2)=-20,\ f(-1)=-11,\ f(0)=-8,$

$f(1)=-5,\ f(2)=4,\ f(3)=25$

따라서 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 ④이다.

**26** 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 $x$에서 연속이고, $f(1)f(3)<0,\ f(3)f(5)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1,\ 3)$, $(3,\ 5)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때 방정식 $f(x)=0$, 즉 $x(x-m)(x-n)=0$의 실근은 $x=0$ 또는 $x=m$ 또는 $x=n$이고, $m$, $n$은 자연수이므로

$m=2,\ n=4$ 또는 $m=4,\ n=2$

따라서 $f(x)=x(x-2)(x-4)$이므로

$f(6)=6\times4\times2=48$

**27** $g(x)=f(x)-x^2$이라 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 연속이고

$g(1)=f(1)-1^2=3,\ g(2)=f(2)-2^2=-3,$

$g(3)=f(3)-3^2=2,\ g(4)=f(4)-4^2=-1$

이때 $g(1)g(2)<0,\ g(2)g(3)<0,\ g(3)g(4)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 열린구간 $(1,\ 4)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

**28** $f(x)=x^2-3x+a$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고

$f(-1)=1+3+a=a+4,\ f(1)=1-3+a=a-2$

이때 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 $f(-1)f(1)<0$이어야 하므로

$(a+4)(a-2)<0 \qquad \therefore\ -4<a<2$

# Ⅱ-1. 미분계수와 도함수

## 01 미분계수 20~23쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** $-3$ | **2** 1 | **3** ① | **4** 3 | **5** ③ |
| **6** ① | **7** 12 | **8** $-5$ | **9** ④ | **10** $\frac{1}{6}$ |
| **11** 1 | **12** ③ | **13** 10 | **14** ③ | **15** ⑤ |
| **16** ④ | **17** 2 | **18** ㄱ, ㄴ | | |
| **19** $f'(b)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(a)$ | | | **20** ㄴ, ㄷ | **21** ㄱ, ㄴ |
| **22** ④ | **23** 3 | **24** ⑤ | | |

**1** 함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 $-1$에서 1까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{a+3-(-a+3)}{2}=\frac{2a}{2}=a$$

$\therefore\ a=-3$

**2** 함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 $a$에서 $a+2$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+2)-f(a)}{a+2-a}$$
$$=\frac{\{(a+2)^2+(a+2)\}-(a^2+a)}{2}$$
$$=\frac{4a+6}{2}=2a+3$$

따라서 $2a+3=5$이므로 $a=1$

**3** 함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{2-0}{2}=1 \qquad \therefore\ a=1$$

함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{-(1+\Delta x)^2+3(1+\Delta x)\}-2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}(-\Delta x+1)=1$$

$\therefore\ b=1$

$\therefore\ a+b=1+1=2$

**4** 함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 1에서 5까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{4-0}{4}=1$$

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(a+\Delta x)^2-5(a+\Delta x)+4\}-(a^2-5a+4)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+(2a-5)\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2a-5)$$
$$=2a-5$$

따라서 $1=2a-5$이므로 $a=3$

**5** $f(a)=-2$, $f(b)=4$에서 $g(-2)=a$, $g(4)=b$

함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 $a$에서 $b$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{4-(-2)}{b-a}=\frac{6}{b-a}$$

즉, $\frac{6}{b-a}=\frac{1}{2}$이므로 $b-a=12$

따라서 함수 $g(x)$에서 $x$의 값이 $-2$에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{g(4)-g(-2)}{4-(-2)}=\frac{b-a}{6}=\frac{12}{6}=2$$

**6** $f(x)=x^2+ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면 $x$의 값이 0에서 6까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(6)-f(0)}{6-0}=\frac{36+6a+b-b}{6}=\frac{6a+36}{6}=a+6$$

즉, $a+6=0$이므로 $a=-6$

따라서 $f(x)=x^2-6x+b$이므로

$$f'(4)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(4+\Delta x)^2-6(4+\Delta x)+b\}-(b-8)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2)=2$$

**7** $$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-4h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-4h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-4h)-f(1)}{-4h}\times(-4)$$
$$=2f'(1)+4f'(1)=6f'(1)$$
$$=6\times 2=12$$

**8** $$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3+h^2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)+f(3)-f(3+h^2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h^2)-f(3)}{h^2}\times h$$
$$=f'(3)-f'(3)\times 0$$
$$=f'(3)=-5$$

**9** $$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+kh)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+kh)-f(2)}{kh}\times k$$
$$=kf'(2)=3k$$

따라서 $3k=9$이므로 $k=3$

**10** $\frac{3}{t}=h$로 놓으면 $t\to\infty$일 때 $h\to 0$이므로

$$\lim_{t\to\infty}t\left\{f\left(\frac{2t+3}{t}\right)-6\right\}=3\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-6}{h}=\frac{1}{2}$$

$3\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-6}{h}=\frac{1}{2}$에서 $h\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$$\lim_{h\to 0}\{f(2+h)-6\}=0$$

$f(2)-6=0$ $\quad\therefore f(2)=6$

$$\therefore 3\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-6}{h}=3\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=3f'(2)$$

따라서 $3f'(2)=\frac{1}{2}$이므로 $f'(2)=\frac{1}{6}$

**11** $$\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^3-8}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\times\frac{x^2-4}{x^3-8}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\times\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$
$$=f'(4)\times\frac{4}{12}=3\times\frac{1}{3}=1$$

**12** $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-x^2f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)+f(1)-x^2f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}-\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)f(1)}{x-1}$$
$$=2f'(1)-2f(1)$$
$$=2\times 2-2\times(-1)=6$$

유형편

**13** $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9f(x)}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-9f(3)+9f(3)-9f(x)}{x^2-9}$

$=\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-9}-9\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}$

$=1-9\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\frac{1}{x+3}\right\}$

$=1-9\left\{\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\lim_{x\to3}\frac{1}{x+3}\right\}$

$=1-9\times f'(3)\times\frac{1}{6}$

$=1+9=10$

**14** ㈎에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=0$

$f(1)-g(1)=0 \quad \therefore f(1)=g(1) \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)+g(1)-g(x)}{x-1}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$=f'(1)-g'(1)$

$\therefore f'(1)-g'(1)=5 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㈏에서

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)-f(1)\}+\{g(x)-g(1)\}}{x-1}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}+\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$=f'(1)+g'(1)$

$\therefore f'(1)+g'(1)=7 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $f'(1)=6$, $g'(1)=1$

이때 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$에서 $b\times g(1)$은 실수이므로 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1}$의 값은 존재한다.

즉, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to1}\{f(x)-a\}=0$

$f(1)-a=0 \quad \therefore a=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

㉠에 의하여

$f'(1)=b\times g(1)=b\times f(1)=ab$

$\therefore ab=6$

**15** $f(x+y)=f(x)+f(y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$

미분계수의 정의에 의하여

$f'(3)=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(3)+f(h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=3$

**16** $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy+1$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+1 \quad \therefore f(0)=-1$

미분계수의 정의에 의하여

$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+2h+1-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2h+1}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}2$

$=f'(0)+2$

따라서 $f'(0)+2=4$이므로 $f'(0)=2$

**17** $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)-1$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1 \quad \therefore f(0)=1$

미분계수의 정의에 의하여

$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+6h(2+h)-1-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+6h(2+h)-1}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}6(2+h)$

$=f'(0)+12$

즉, $f'(0)+12=11$이므로 $f'(0)=-1$

$\therefore f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+3h(1+h)-1-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3h(1+h)-1}{h}$

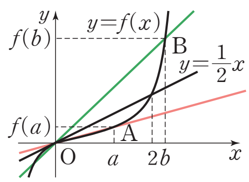
$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}3(1+h)$

$=f'(0)+3=-1+3=2$

**18** 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 $x=a$인 점을 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $x=b$인 점을 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$라 하자.

ㄱ. 오른쪽 그림에서 직선 OA의 기울기는 직선 OB의 기울기보다 작으므로

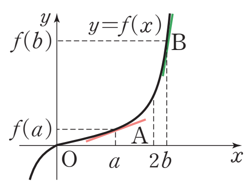
$\dfrac{f(a)}{a}<\dfrac{f(b)}{b}$




ㄴ. 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서의 접선의 기울기는 각각 $f'(a)$, $f'(b)$이다.

오른쪽 그림에서 점 A에서의 접선의 기울기는 점 B에서의 접선의 기울기보다 작으므로

$f'(a)<f'(b)$

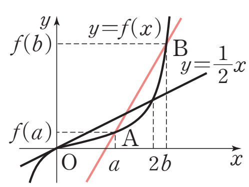



ㄷ. 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

오른쪽 그림에서 직선 AB의 기울기는 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$의 기울기보다 크므로

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>\dfrac{1}{2}$



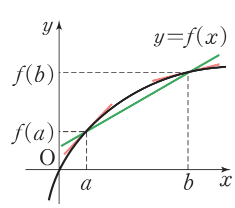

이때 $0<a<2<b$에서 $b-a>0$이므로

$f(b)-f(a)>\dfrac{b-a}{2}$

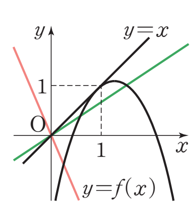
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

**19** 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기는 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기보다 작고 점 $(b,\ f(b))$에서의 접선의 기울기보다 크므로

$f'(b)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(a)$




**20** ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$와 점 $(1,\ 1)$에서 접하므로 $f'(1)=1$

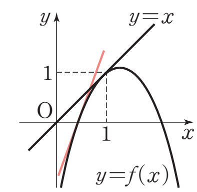



$a>0$일 때, 두 점 $(0,\ 0)$, $(a,\ f(a))$를 지나는 직선의 기울기는 1보다 작거나 같으므로

$\dfrac{f(a)}{a}\le 1$

ㄴ. $0<a<1$일 때, 오른쪽 그림에서 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기보다 크므로

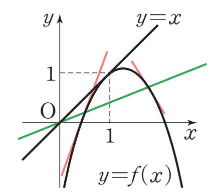
$f'(a)>1$




ㄷ. $f(a)>af'(a)$에서 $\dfrac{f(a)}{a}>f'(a)$ ($\because a>0$)

오른쪽 그림에서 원점과 점 $(a,\ f(a))$를 지나는 직선의 기울기 $\dfrac{f(a)}{a}$가 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기 $f'(a)$보다 큰 $a$의 값의 범위는

$a>1$




따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**21** ㄱ. (i) $f(0)=0$

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}2x=0$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}0=0$

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to0+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\dfrac{2h}{h}=2$

$\lim_{h\to0-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\dfrac{0}{h}=0$

즉, $f'(0)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. (i) $f(0)=0$

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x^2-2x)=0$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(x^2+2x)=0$

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to0+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\dfrac{h^2-2h}{h}=-2$

$\lim_{h\to0-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\dfrac{h^2+2h}{h}=2$

즉, $f'(0)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. (i) $f(0)=0$

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}x^2=0$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}x^2=0$

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^2}{h}=0$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h^2}{h}=0$

즉, $f'(0)$의 값이 존재하므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄹ. (i) $f(0)=0$

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(-x^2+x)=0$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(-x^2+x)=0$

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{-h^2+h}{h}=1$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h^2+h}{h}=1$

즉, $f'(0)$의 값이 존재하므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 보기의 함수에서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

**22** $f(x)=\begin{cases}-1 & (x\ge1)\\ 2x^2-1 & (-1<x<0 \text{ 또는 } 0<x<1)\\ 0 & (x=0)\\ 1 & (x\le-1)\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases}1 & (x\ge1)\\ -x & (-1<x<0 \text{ 또는 } 0<x<1)\\ -1 & (x=0)\\ -1 & (x\le-1)\end{cases}$로 놓고

$k(x)=f(x)g(x)=\begin{cases}-1 & (x\ge1)\\ -x(2x^2-1) & (-1<x<1)\\ -1 & (x\le-1)\end{cases}$이라 하자.

ㄱ. $\lim_{x\to-1+}k(x)=\lim_{x\to-1+}\{-x(2x^2-1)\}=1$

$\lim_{x\to-1-}k(x)=\lim_{x\to-1-}(-1)=-1$

즉, $\lim_{x\to-1+}k(x)\ne\lim_{x\to-1-}k(x)$이므로 함수 $k(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{h\to0}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-h(2h^2-1)-0}{h}$

$=\lim_{h\to0}(1-2h^2)$

$=1$

즉, $k'(0)$의 값이 존재하므로 함수 $k(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $\lim_{h\to0+}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{-1-(-1)}{h}=0$

$\lim_{h\to0-}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0-}\frac{-(1+h)\{2(1+h)^2-1\}-(-1)}{h}$

$=\lim_{h\to0-}\frac{-2h^3-6h^2-5h}{h}$

$=\lim_{h\to0-}(-2h^2-6h-5)$

$=-5$

즉, $k'(1)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $k(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**23** $x=1$에서 불연속이므로 $a=1$

$x=0$, $x=1$에서 미분가능하지 않으므로 $b=2$

$\therefore a+b=3$

**24** ① $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)$의 값이 존재한다.

② 점 $(3, f(3))$에서의 접선의 기울기가 0보다 크므로 $f'(3)>0$이다.

③ 불연속인 $x$의 값은 2, 6의 2개이다.

④ $f'(x)=0$, 즉 접선의 기울기가 0인 $x$의 값은 5의 1개이다.

⑤ 미분가능하지 않은 $x$의 값은 2, 4, 6의 3개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

## 02 도함수 24~26쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ③ | **2** 78 | **3** ② | **4** 10 | **5** 6 |
| **6** 2 | **7** 7 | **8** ① | **9** −4 | **10** 13 |
| **11** ① | **12** 10 | **13** ④ | **14** 1 | **15** ⑤ |
| **16** ⑤ | **17** 1 | **18** ① | **19** ③ | **20** 7 |

**1** $f'(x)=3x^2+k$이므로

$f'(0)=-2$에서 $k=-2$

따라서 $f(x)=x^3-2x-3$이므로

$f(2)=8-4-3=1$

**2** $f'(x)=3(x-1)(x^2+1)+(3x+1)(x^2+1)+(3x+1)(x-1)\times 2x$

$\therefore f'(2)=3\times1\times5+7\times5+7\times1\times4=78$

**3** $g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$이므로

$g'(0)=-2f(0),\ g'(2)=2f(2)$

$g'(0)+g'(2)=16$에서

$-2f(0)+2f(2)=2\{f(2)-f(0)\}=16$

$\therefore f(2)-f(0)=8$

**4** $(x^2-1)f(x)=\{g(x)\}^2-25$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$2xf(x)+(x^2-1)f'(x)=2g(x)g'(x)$

양변에 $x=1$을 대입하면

$2f(1)=2g(1)g'(1)$

$\therefore f(1)=g(1)g'(1)=5\times2=10$

**5** $\frac{1}{t}=h$로 놓으면 $t\to\infty$일 때 $h\to0$이므로

$$\lim_{t\to\infty}t\left\{f\left(1+\frac{2}{t}\right)-f\left(1-\frac{1}{t}\right)\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2-\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\times(-1)$$
$$=2f'(1)+f'(1)$$
$$=3f'(1)$$

이때 $f'(x)=3x^2-2x+1$이므로

$3f'(1)=3\times(3-2+1)=6$

**6** $$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times3-\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times(-2)$$
$$=3f'(1)+2f'(1)=5f'(1)$$

즉, $5f'(1)=35$이므로 $f'(1)=7$

$f'(x)=3x^2+2ax$이므로 $f'(1)=7$에서

$3+2a=7\qquad\therefore a=2$

**7** $f(x)=x^n+3x$라 하면 $f(1)=4$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n+3x-4}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}=\frac{1}{2}f'(1)$$

즉, $\frac{1}{2}f'(1)=5$이므로 $f'(1)=10$

$f'(x)=nx^{n-1}+3$이므로 $f'(1)=10$에서

$n+3=10\qquad\therefore n=7$

**8** $\lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고,

극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=0$

$\therefore f(0)+g(0)=0\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)-g(0)+g(x)}{x}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$
$$=f'(0)+g'(0)=3\qquad\cdots\cdots ㉡$$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고,

극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}\{f(x)+3\}=0\qquad\therefore f(0)=-3$

이를 ㉠에 대입하면

$-3+g(0)=0\qquad\therefore g(0)=3$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)-f(0)}{x}\times\frac{1}{g(x)}\right\}=\frac{1}{3}f'(0)\ (\because g(0)=3)$$

즉, $\frac{1}{3}f'(0)=2$이므로 $f'(0)=6$

이를 ㉡에 대입하면

$6+g'(0)=3\qquad\therefore g'(0)=-3$

$h(x)=f(x)g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\therefore h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$
$=6\times3+(-3)\times(-3)=27$

**9** $$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}=\frac{1}{2}f'(1)$$

즉, $\frac{1}{2}f'(1)=1$이므로 $f'(1)=2$

$f(x)=x^4+ax+b$에서 $f'(x)=4x^3+a$
$f'(1)=2$에서 $4+a=2$ $\quad\therefore a=-2$
$f(x)=x^4-2x+b$이므로 $f(-1)=5$에서
$1+2+b=5$ $\quad\therefore b=2$
$\therefore ab=-2\times2=-4$

**10** ㈎에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 삼차함수이므로
$f(x)=3x^3+ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수)라 하면
$f'(x)=9x^2+2ax+b$
㈏에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로
(분자)$\to0$에서
$\lim_{x\to0}f'(x)=0$ $\quad\therefore f'(0)=0$
$f'(0)=0$에서 $b=0$이므로 $f'(x)=9x^2+2ax$
$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{9x^2+2ax}{x}=\lim_{x\to0}(9x+2a)=2a$
즉, $2a=4$이므로 $a=2$
따라서 $f'(x)=9x^2+4x$이므로
$f'(1)=9+4=13$

**11** ㈎에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로
(분자)$\to0$에서
$\lim_{x\to1}\{f(x)g(x)+4\}=0$ $\quad\therefore f(1)g(1)=-4$
이때 $f(1)=-2$이므로 $g(1)=2$
$g(x)=ax+b$ ($a$, $b$는 상수, $a\neq0$)라 하면 $g'(x)=a$
㈏에서 $b=a$이고, $g(1)=2$에서 $a+b=2$이므로
두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)+4}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)f(x)-2f(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)+2f(x)-2f(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\left\{f(x)+2\times\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}\\&=f(1)+2f'(1)=8\end{aligned}$$

따라서 $-2+2f'(1)=8$이므로 $f'(1)=5$

**12** $f'(1)=a$ ($a$는 상수)라 하면 $f(x)=x^3-2ax$이므로
$f'(x)=3x^2-2a$ $\quad\therefore f'(1)=3-2a$
즉, $a=3-2a$이므로 $a=1$
따라서 $f'(x)=3x^2-2$이므로 $f'(2)=12-2=10$

**13** $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수, $a\neq0$)라 하면
$f'(x)=2ax+b$
$(x+1)f'(x)-2f(x)+6=0$에서
$(x+1)(2ax+b)-2(ax^2+bx+c)+6=0$
$(2a-b)x+b-2c+6=0$
위의 등식이 모든 실수 $x$에 대하여 성립하므로
$2a-b=0$, $b-2c+6=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
이때 $f(0)=2$에서 $c=2$
이를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$
따라서 $f'(x)=-2x-2$이므로
$f'(1)=-2-2=-4$

**14** $f(x)$를 $n$차함수라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차함수이므로
$2(n-1)=n$ $\quad\therefore n=2$
$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수, $a\neq0$)라 하면
$f'(x)=2ax+b$
$\{f'(x)\}^2=4f(x)-3$에서
$(2ax+b)^2=4(ax^2+bx+c)-3$
$4a^2x^2+4abx+b^2=4ax^2+4bx+4c-3$
위의 등식이 모든 실수 $x$에 대하여 성립하므로
$4a^2=4a$, $4ab=4b$, $b^2=4c-3$
$4a^2=4a$에서 $4a(a-1)=0$ $\quad\therefore a=1$ ($\because a\neq0$)
또 $f'(1)=5$에서 $2+b=5$ $\quad\therefore b=3$
이를 $b^2=4c-3$에 대입하여 풀면 $c=3$
따라서 $f(x)=x^2+3x+3$이므로
$f(-1)=1-3+3=1$

**15** 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이고 미분계수 $f'(1)$이 존재한다.
(i) $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서
$b+2=1+a$ $\quad\therefore a-b=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
(ii) 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{\{(1+h)^3+a(1+h)^2\}-(1+a)}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{h^3+(a+3)h^2+(2a+3)h}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\{h^2+(a+3)h+2a+3\}\\&=2a+3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{\{b(1+h)+2\}-(1+a)}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{bh}{h}\ (\because ㉠)\\&=b\end{aligned}$$

$\therefore 2a+3=b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=-5$

$\therefore ab=20$

다른 풀이

$g(x)=x^3+ax^2$, $h(x)=bx+2$라 하면

$g'(x)=3x^2+2ax$, $h'(x)=b$

(i) $x=1$에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$에서

$1+a=b+2 \qquad \therefore a-b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$g'(1)=h'(1)$에서 $3+2a=b \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=-5$

$\therefore ab=20$

**16** $f(x)=\begin{cases} (x+1)(x^2+ax+1) & (x\geq -1) \\ -(x+1)(x^2+ax+1) & (x<-1) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 미분가능하면 $x=-1$에서 미분가능하므로 미분계수 $f'(-1)$이 존재한다.

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{h\{(-1+h)^2+a(-1+h)+1\}-0}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\{h^2+(a-2)h-a+2\}$

$=-a+2$

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\frac{-h\{(-1+h)^2+a(-1+h)+1\}-0}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\{-h^2-(a-2)h+a-2\}$

$=a-2$

즉, $-a+2=a-2$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=|x+1|(x^2+2x+1)$이므로

$f(1)=2\times 4=8$

다른 풀이

$g(x)=(x+1)(x^2+ax+1)$,

$h(x)=-(x+1)(x^2+ax+1)$이라 하면

$g'(x)=x^2+ax+1+(x+1)(2x+a)$,

$h'(x)=-(x^2+ax+1)-(x+1)(2x+a)$

$x=-1$에서의 미분계수가 존재하므로

$g'(-1)=h'(-1)$에서

$2-a=a-2$

$\therefore a=2$

따라서 $f(x)=|x+1|(x^2+2x+1)$이므로

$f(1)=2\times 4=8$

**17** $k(x)=f(x)g(x)=\begin{cases} (x+2)(x^2+ax+b) & (x\geq 2) \\ (-x+4)(x^2+ax+b) & (x<2) \end{cases}$라 하자.

함수 $k(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 $x=2$에서 연속이고 미분계수 $k'(2)$가 존재한다.

(i) $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 2-}k(x)=k(2)$에서

$8+4a+2b=16+8a+4b$

$\therefore 2a+b=-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) 미분계수 $k'(2)$가 존재하므로

$\lim_{h\to 0+}\frac{k(2+h)-k(2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{(4+h)\{(2+h)^2+a(2+h)+b\}-(16+8a+4b)}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\{h^2+(a+8)h+6a+b+20\}$

$=6a+b+20$

$\lim_{h\to 0-}\frac{k(2+h)-k(2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\frac{(2-h)\{(2+h)^2+a(2+h)+b\}-(16+8a+4b)}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\{-h^2-(a+2)h-b+4\}$ ($\because$ ㉠)

$=-b+4$

즉, $6a+b+20=-b+4$이므로

$3a+b=-8 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=4$

따라서 $g(x)=x^2-4x+4$이므로

$g(1)=1-4+4=1$

다른 풀이

$k(x)=(x+2)(x^2+ax+b)$,

$h(x)=(-x+4)(x^2+ax+b)$라 하면

$k'(x)=x^2+ax+b+(x+2)(2x+a)$,

$h'(x)=-(x^2+ax+b)+(-x+4)(2x+a)$

(i) $x=2$에서 연속이므로

$k(2)=h(2)$에서

$16+8a+4b=8+4a+2b$

$\therefore 2a+b=-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $x=2$에서의 미분계수가 존재하므로

$k'(2)=h'(2)$에서

$6a+b+20=-b+4$

$\therefore 3a+b=-8 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=4$

따라서 $g(x)=x^2-4x+4$이므로

$g(1)=1-4+4=1$

**18** $x^{10}-2x^9+ax+b$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 0이므로

$x^{10}-2x^9+ax+b=(x-1)^2Q(x)$ ...... ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$1-2+a+b=0$

$\therefore a+b=1$ ...... ㉡

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$10x^9-18x^8+a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

양변에 $x=1$을 대입하면

$10-18+a=0 \quad \therefore a=8$

이를 ㉡에 대입하면

$8+b=1 \quad \therefore b=-7$

$\therefore a-b=8-(-7)=15$

**19** $x^{12}-x+1$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$($a$, $b$는 상수)라 하면

$x^{12}-x+1=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ ...... ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$1+1+1=-a+b$

$\therefore a-b=-3$ ...... ㉡

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$12x^{11}-1=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-12-1=a \quad \therefore a=-13$

이를 ㉡에 대입하면

$-13-b=-3 \quad \therefore b=-10$

따라서 $R(x)=-13x-10$이므로

$R(-2)=26-10=16$

**20** $x^{20}+ax^9+b$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $-2x+1$이므로

$x^{20}+ax^9+b=(x+1)^2Q(x)-2x+1$ ...... ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-a+b=2+1$

$\therefore a-b=-2$ ...... ㉡

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$20x^{19}+9ax^8=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)-2$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-20+9a=-2 \quad \therefore a=2$

이를 ㉡에 대입하면

$2-b=-2 \quad \therefore b=4$

따라서 다항식 $x^{20}+2x^9+4$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여

$1+2+4=7$

# Ⅱ-2. 도함수의 활용

## 01 접선의 방정식과 평균값 정리 28~33쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** $-4$ | **2** $-3$ | **3** ⑤ | **4** $\frac{2}{3}$ | **5** ③ |
| **6** ③ | **7** ② | **8** ③ | **9** 5 | **10** ① |
| **11** 11 | **12** $-4$ | **13** ⑤ | **14** $-3$ | **15** ④ |
| **16** $\frac{1}{4}$ | **17** 26 | **18** $y=12x-2$ | | **19** ④ |
| **20** ⑤ | **21** $8\sqrt{2}$ | **22** $-\frac{1}{4}$ | **23** ③ | **24** 0 |
| **25** ② | **26** ① | **27** $-2$ | **28** ② | **29** $\frac{1}{8}$ |
| **30** 6 | **31** ④ | **32** ② | **33** ④ | **34** ⑤ |
| **35** 3 | **36** ㄴ, ㄷ | **37** ③ | **38** 2 | **39** 11 |

**1** $f(x)=-2x^3+x^2-4$라 하면 $f'(x)=-6x^2+2x$

따라서 점 $(1, -5)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-6+2=-4$

**2** $f(x)=x^3+ax^2+bx$라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-2, 4)$를 지나므로

$f(-2)=4$에서 $-8+4a-2b=4$

$\therefore 2a-b=6$ ...... ㉠

$x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(1)=1$에서 $3+2a+b=1$

$\therefore 2a+b=-2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$

$\therefore a+b=-3$

**3** $x$의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{52-(-2)}{3}=18$

$f(x)=x^3-3x$에서 $f'(x)=3x^2-3$이므로

점 $(k, f(k))$에서의 접선의 기울기는

$f'(k)=3k^2-3$

따라서 $3k^2-3=18$이므로

$k^2=7 \quad \therefore k=\sqrt{7}\ (\because k>0)$

**4** $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$라 하면

$f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$

점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(2)=2$에서

$(2-b)(2-c)+(2-a)(2-c)+(2-a)(2-b)=2$

점 $(2, 3)$은 곡선 $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ 위의 점이므로

$3=(2-a)(2-b)(2-c)$

$\therefore \dfrac{1}{2-a}+\dfrac{1}{2-b}+\dfrac{1}{2-c}$

$=\dfrac{(2-b)(2-c)+(2-a)(2-c)+(2-a)(2-b)}{(2-a)(2-b)(2-c)}$

$=\dfrac{2}{3}$

**5** 곡선 $y=x^2-4x+3$이 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표를 구하면

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

즉, 곡선이 $x$축과 만나는 두 점의 좌표는 $(1, 0)$, $(3, 0)$

$f(x)=x^2-4x+3$이라 하면 $f'(x)=2x-4$

점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-2$이므로 접선의 방정식은

$y=-2(x-1)$ $\quad\therefore y=-2x+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

점 $(3, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=2$이므로 접선의 방정식은

$y=2(x-3)$ $\quad\therefore y=2x-6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-2$

따라서 교점의 좌표는 $(2, -2)$이므로

$a=2$, $b=-2$ $\quad\therefore a+b=0$

**6** $f(x)=-x^3+2x+5$라 하면 $f'(x)=-3x^2+2$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1, a)$를 지나므로

$f(-1)=a$에서 $1-2+5=a$ $\quad\therefore a=4$

점 $(-1, 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-1$이므로

접선의 방정식은

$y-4=-(x+1)$ $\quad\therefore y=-x+3$

이 접선이 점 $(b, 1)$을 지나므로

$1=-b+3$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore a-b=4-2=2$

**7** $f(x)=x^3-4x^2+x-1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-8x+1$

점 $(1, -3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-4$이므로

접선의 방정식은

$y+3=-4(x-1)$ $\quad\therefore y=-4x+1$

곡선 $y=x^3-4x^2+x-1$과 직선 $y=-4x+1$의 교점의 $x$좌표를 구하면

$x^3-4x^2+x-1=-4x+1$, $x^3-4x^2+5x-2=0$

$(x-1)^2(x-2)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 교점 중 접점이 아닌 점의 좌표는 $(2, -7)$이므로

$a=2$, $b=-7$ $\quad\therefore 2a+b=4-7=-3$

**8** 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 $-2$이므로 $f(1)=2$, $f'(1)=-2$

$g(x)=(2x^3-5x)f(x)$라 하면

$g'(x)=(6x^2-5)f(x)+(2x^3-5x)f'(x)$

곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는

$g'(1)=f(1)-3f'(1)=2+6=8$

곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=1$인 점의 $y$좌표는

$g(1)=-3f(1)=-6$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, -6)$에서의 접선의 방정식은

$y+6=8(x-1)$ $\quad\therefore y=8x-14$

따라서 $m=8$, $n=-14$이므로 $m-n=22$

**9** $f(x)=x^3-2x^2+3x$라 하면 $f'(x)=3x^2-4x+3$

점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 접선의 방정식은

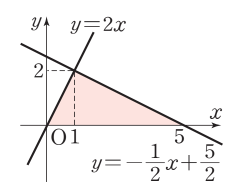
$y-2=2(x-1)$ $\quad\therefore y=2x$

점 $(1, 2)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이므로 이 직선의 방정식은

$y-2=-\dfrac{1}{2}(x-1)$ $\quad\therefore y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

따라서 두 직선 $y=2x$, $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$ 및 $x$축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times5\times2=5$




**10** (나)에서 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$에서

$\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=0$ $\quad\therefore f(1)=g(1)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)+g(1)-g(x)}{x-1}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$=f'(1)-g'(1)=-18$

$\therefore f'(1)=g'(1)-18$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

(가)의 양변에 $x=1$을 대입하면 $g(1)=2f(1)-5$이므로

$f(1)=2f(1)-5$ ($\because$ ㉠) $\quad\therefore f(1)=g(1)=5$

이때 $g'(x)=6x^2f(x)+2x^3f'(x)$이므로

$g'(1)=6f(1)+2f'(1)$

$g'(1)=6\times5+2\times\{g'(1)-18\}$ ($\because$ ㉡)

$\therefore g'(1)=6$

즉, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, 5)$에서의 접선의 방정식은

$y-5=6(x-1)$ $\quad\therefore y=6x-1$

따라서 $a=6$, $b=-1$이므로 $a+b=5$

**11** $f(x)=2x^4-4x+k$라 하면 $f'(x)=8x^3-4$
접점의 좌표를 $(t,\ 4t+5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 4이므로 $f'(t)=4$에서
$8t^3-4=4,\ t^3=1$ $\quad\therefore t=1$ ($\because t$는 실수)
즉, 접점의 좌표는 $(1,\ 9)$이고 이 점이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=9$에서
$2-4+k=9$ $\quad\therefore k=11$

**12** $f(x)=x^3-x+3$이라 하면 $f'(x)=3x^2-1$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3-t+3)$이라 하면 직선 $y=x+2$에 수직인 접선의 기울기는 $-1$이므로 $f'(t)=-1$에서
$3t^2-1=-1$ $\quad\therefore t=0$
즉, 접점의 좌표는 $(0,\ 3)$이므로 접선의 방정식은
$y-3=-x$ $\quad\therefore y=-x+3$
따라서 $a=-1,\ b=3$이므로 $a-b=-4$

**13** $f(x)=-x^3+3x^2+10x+1$이라 하면
$f'(x)=-3x^2+6x+10$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+3t^2+10t+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $\tan 45°=1$이므로 $f'(t)=1$에서
$-3t^2+6t+10=1,\ t^2-2t-3=0$
$(t+1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=-1$ 또는 $t=3$
즉, 접점의 좌표는 $(-1,\ -5)$ 또는 $(3,\ 31)$이므로 접선의 방정식은
$y+5=x+1$ 또는 $y-31=x-3$
$\therefore y=x-4$ 또는 $y=x+28$
따라서 두 접선이 $x$축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(4,\ 0)$, $(-28,\ 0)$이므로 $\overline{AB}=4-(-28)=32$

**14** $f(x)=-2x^3+6x^2+5x-1$이라 하면
$f'(x)=-6x^2+12x+5=-6(x-1)^2+11$
즉, 접선의 기울기는 $x=1$에서 최댓값 11을 갖는다.
이때 접점의 좌표는 $(1,\ 8)$이므로 접선의 방정식은
$y-8=11(x-1)$ $\quad\therefore y=11x-3$
따라서 구하는 $y$절편은 $-3$이다.

**15** $f(x)=x^3-3x^2-2x$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x-2$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2-2t)$라 하면 직선 $2x+y+3=0$, 즉 $y=-2x-3$에 평행한 접선의 기울기는 $-2$이므로 $f'(t)=-2$에서
$3t^2-6t-2=-2,\ 3t(t-2)=0$ $\quad\therefore t=0$ 또는 $t=2$
즉, 접점의 좌표는 $(0,\ 0)$ 또는 $(2,\ -8)$이므로 접선의 방정식은
$y=-2x$ 또는 $y+8=-2(x-2)$
$\therefore 2x+y=0$ 또는 $2x+y+4=0$
따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x+y=0$ 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선 $2x+y+4=0$ 사이의 거리와 같으므로
$\dfrac{|4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

**16** $f(x)=-x^2+3x$라 하면 $f'(x)=-2x+3$
점 $A(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 접선 $l$의 방정식은
$y-2=x-1$ $\quad\therefore y=x+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-1$이므로
$B(t,\ -t^2+3t)$라 하면 $f'(t)=-1$에서
$-2t+3=-1$ $\quad\therefore t=2$
$\therefore B(2,\ 2)$
점 $B(2,\ 2)$에서의 접선 $m$의 방정식은
$y-2=-(x-2)$ $\quad\therefore y=-x+4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$x=\dfrac{3}{2},\ y=\dfrac{5}{2}$ $\quad\therefore C\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

**17** 두 접점 P, Q의 $x$좌표를 각각 $\alpha,\ \beta\ (\alpha\neq\beta)$라 하자.
$f(x)=x^3+6x^2-x$라 하면 $f'(x)=3x^2+12x-1$
이때 접선의 기울기가 $m$이므로 $\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $3x^2+12x-1=m$, 즉 $3x^2+12x-m-1=0$의 서로 다른 두 근이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=-\dfrac{m+1}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
기울기가 $m$으로 같은 두 접선은 서로 평행하므로 두 접선 사이의 거리와 $\overline{PQ}$가 같으려면 두 접점 P, Q를 지나는 직선과 접선이 서로 수직이어야 한다.
직선 PQ의 기울기를 구하면
$$\begin{aligned}&\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\\&=\frac{\beta^3+6\beta^2-\beta-(\alpha^3+6\alpha^2-\alpha)}{\beta-\alpha}\\&=\frac{\beta^3-\alpha^3+6(\beta^2-\alpha^2)-(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}\\&=\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2+6(\beta+\alpha)-1\\&=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+6(\alpha+\beta)-1\\&=(-4)^2-\left(-\frac{m+1}{3}\right)+6\times(-4)-1\ (\because ㉠)\\&=\frac{m+1}{3}-9\end{aligned}$$

즉, $m\times\left(\frac{m+1}{3}-9\right)=-1$이므로

$m^2-26m+3=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 조건을 만족시키는 모든 실수 $m$의 값의 합은 26이다.

**18** $f(x)=x^4+4x^2+5$라 하면 $f'(x)=4x^3+8x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^4+4t^2+5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3+8t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^4+4t^2+5)=(4t^3+8t)(x-t)$

$\therefore\ y=(4t^3+8t)x-3t^4-4t^2+5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2=-3t^4-4t^2+5$, $3t^4+4t^2-7=0$

$(t+1)(t-1)(3t^2+7)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$ ($\because$ $t$는 실수)

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-12x-2$ 또는 $y=12x-2$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=12x-2$이다.

**19** $f(x)=x^3-x+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-t+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-1)x-2t^3+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$4=-2t^3+2$, $t^3=-1$ $\quad\therefore\ t=-1$ ($\because$ $t$는 실수)

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=2x+4$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$0=2x+4$ $\quad\therefore\ x=-2$

따라서 구하는 $x$절편은 $-2$이다.

**20** $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-6t^2+9t-2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-12t+9$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-6t^2+9t-2)=(3t^2-12t+9)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-12t+9)x-2t^3+6t^2-2$

이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=-2t^3+6t^2-2$ $\quad\therefore\ t^3-3t^2+1=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $x_1,\ x_2,\ x_3$은 삼차방정식 ㉠의 세 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2+x_3=3$

**21** $f(x)=x^4-2x^2+8$이라 하면 $f'(x)=4x^3-4x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^4-2t^2+8)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3-4t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^4-2t^2+8)=(4t^3-4t)(x-t)$

$\therefore\ y=(4t^3-4t)x-3t^4+2t^2+8$

이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=-3t^4+2t^2+8$, $(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})(3t^2+4)=0$

$\therefore\ t=-\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{2}$ ($\because$ $t$는 실수)

따라서 접점의 좌표는 $(-\sqrt{2},\ 8)$ 또는 $(\sqrt{2},\ 8)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times8=8\sqrt{2}$

**22** $f(x)=-x^2+2x+a$라 하면 $f'(x)=-2x+2$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+2t+a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+2t+a)=(-2t+2)(x-t)$

$\therefore\ y=(-2t+2)x+t^2+a$

이 직선이 점 $(-2,\ 1)$을 지나므로

$1=4t-4+t^2+a$ $\quad\therefore\ t^2+4t+a-5=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 ㉠의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha,\ \beta$는 두 접점의 $x$좌표이므로 그 점에서의 접선의 기울기는 각각

$f'(\alpha)=-2\alpha+2$, $f'(\beta)=-2\beta+2$

이때 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(\alpha)f'(\beta)=-1$에서

$(-2\alpha+2)(-2\beta+2)=-1$

$4\alpha\beta-4(\alpha+\beta)+4=-1$

㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=a-5$이므로

$4(a-5)+16+4=-1$ $\quad\therefore\ a=-\frac{1}{4}$

**23** $f(x)=x^3-3x^2+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+1)=(3t^2-6t)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+1$

이 직선이 점 $(a,\ 1)$을 지나므로

$1=(3t^2-6t)a-2t^3+3t^2+1$

$t\{2t^2-3(a+1)t+6a\}=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$

접선이 오직 한 개만 존재하려면 이차방정식 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$이 $t=0$을 중근으로 갖거나 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$이 $t=0$을 중근으로 갖는 경우

이를 만족시키는 $a$의 값이 존재하지 않는다.

유형편

(ii) 이차방정식 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$이 허근을 갖는 경우 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면 $D<0$이어야 하므로

$D=\{-3(a+1)\}^2-4\times2\times6a<0$

$9a^2-30a+9<0$, $3(3a-1)(a-3)<0$

$\therefore \frac{1}{3}<a<3$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{3}<a<3$

**24** $f(x)=ax^3-5x-1$, $g(x)=2x^2+bx+3$이라 하면

$f'(x)=3ax^2-5$, $g'(x)=4x+b$

$x=-1$인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(-1)=g(-1)$에서

$-a+5-1=2-b+3 \qquad \therefore a-b=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x=-1$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(-1)=g'(-1)$에서

$3a-5=-4+b \qquad \therefore 3a-b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

이때 접점의 좌표는 $(-1, 3)$이고 접선의 기울기는 $-2$이므로 공통인 접선의 방정식은

$y-3=-2(x+1) \qquad \therefore y=-2x+1$

따라서 $m=-2$, $n=1$이므로

$ab+mn=1\times2+(-2)\times1=0$

**25** $f(x)=x^3+ax+1$, $g(x)=bx^2+c$라 하면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2bx$

두 곡선이 점 $(1, 5)$를 지나므로 $f(1)=5$에서

$1+a+1=5 \qquad \therefore a=3$

$g(1)=5$에서 $b+c=5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

점 $(1, 5)$에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$에서

$3+a=2b$, $6=2b \qquad \therefore b=3$

이를 ㉠에 대입하면

$3+c=5 \qquad \therefore c=2$

$\therefore abc=3\times3\times2=18$

**26** $f(x)=x^3+2$, $g(x)=3x^2-2$라 하면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=6x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하자.

$x=t$인 점에서 두 곡선이 만나므로

$f(t)=g(t)$에서

$t^3+2=3t^2-2$, $t^3-3t^2+4=0$

$(t+1)(t-2)^2=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x=t$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(t)=g'(t)$에서

$3t^2=6t$, $3t(t-2)=0 \qquad \therefore t=0$ 또는 $t=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $t=2$

이때 접점의 좌표는 $(2, 10)$이고 접선의 기울기는 12이므로 공통인 접선의 방정식은

$y-10=12(x-2) \qquad \therefore y=12x-14$

따라서 $a=12$, $b=-14$이므로 $a+b=-2$

**27** $f(x)=x^3+3$, $g(x)=2x^3+x^2+ax+2$라 하면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=6x^2+2x+a$

$x=t$인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$에서

$t^3+3=2t^3+t^2+at+2$

$\therefore t^3+t^2+at-1=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x=t$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(t)=g'(t)$에서

$3t^2=6t^2+2t+a \qquad \therefore a=-3t^2-2t \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$t^3+t^2+(-3t^2-2t)t-1=0$

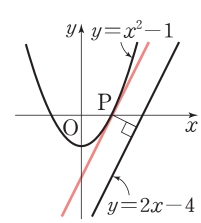
$2t^3+t^2+1=0$, $(t+1)(2t^2-t+1)=0$

$\therefore t=-1$ ($\because$ $t$는 실수)

이를 ㉡에 대입하면 $a=-3+2=-1$

$\therefore a+t=-1+(-1)=-2$

**28** 곡선 $y=x^2-1$에 접하고 직선 $y=2x-4$와 기울기가 같은 접선의 접점을 P라 하면 구하는 거리의 최솟값은 점 P와 직선 $y=2x-4$ 사이의 거리와 같다.




$f(x)=x^2-1$이라 하면 $f'(x)=2x$

기울기가 2인 접선의 접점의 좌표를 $(t, t^2-1)$이라 하면

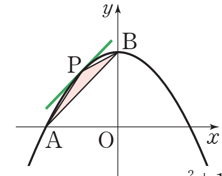
$f'(t)=2$에서 $2t=2 \qquad \therefore t=1$

$\therefore$ P$(1, 0)$

따라서 점 P$(1, 0)$과 직선 $y=2x-4$, 즉 $2x-y-4=0$

사이의 거리는 $\frac{|2-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

**29** 곡선에 접하고 직선 AB에 평행한 접선의 접점이 P일 때 삼각형 PAB의 넓이가 최대이다.




$f(x)=-x^2+1$이라 하면

$f'(x)=-2x$

직선 AB의 기울기는 $\frac{1-0}{0-(-1)}=1$이므로 직선 AB의 방정식은

$y=x+1 \qquad \therefore x-y+1=0$

기울기가 1인 접선의 접점의 좌표를 $(t, -t^2+1)$이라 하면

$f'(t)=1$에서

$-2t=1 \qquad \therefore t=-\frac{1}{2}$

즉, 삼각형 PAB의 넓이가 최대일 때의 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$이므로 이 점과 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리는

$\frac{\left|-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$

따라서 $\overline{AB}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{1}{8}$

**30** $f(x)=-x^3+3x^2-x-3$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x-1$

점 A$(2, -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-1$이므로 접선의 방정식은

$y+1=-(x-2) \qquad \therefore y=-x+1$

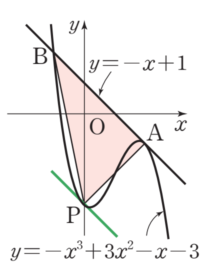
곡선 $y=-x^3+3x^2-x-3$과 직선 $y=-x+1$의 교점의 $x$좌표를 구하면

$-x^3+3x^2-x-3=-x+1$, $x^3-3x^2+4=0$

$(x+1)(x-2)^2=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$\therefore$ B$(-1, 2)$

곡선에 접하고 직선 AB, 즉 $y=-x+1$에 평행한 직선의 접점이 P일 때 삼각형 ABP의 넓이가 최대이다.




기울기가 $-1$인 접선의 접점의 좌표를 $(t, -t^3+3t^2-t-3)$이라 하면 $f'(t)=-1$에서

$-3t^2+6t-1=-1$, $3t(t-2)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$

즉, 접점의 좌표는 $(0, -3)$ 또는 $(2, -1)$이므로 삼각형 ABP의 넓이가 최대일 때의 점 P의 좌표는 $(0, -3)$이다.

점 $(0, -3)$과 직선 $y=-x+1$, 즉 $x+y-1=0$ 사이의 거리는 $\frac{|-3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AB}=\sqrt{(-1-2)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{2}$이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=6$

**31** 함수 $f(x)=x^4-2x^2$은 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(2)=8$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 $c$가 열린구간 $(-2, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=4x^3-4x$이므로 $f'(c)=0$에서

$4c^3-4c=0$, $4c(c+1)(c-1)=0$

$\therefore c=-1$ 또는 $c=0$ 또는 $c=1$

따라서 롤의 정리를 만족시키는 실수 $c$는 3개이다.

**32** 함수 $f(x)=-x^3+ax^2-2$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키면 $f(0)=f(2)$이므로

$-2=-8+4a-2 \qquad \therefore a=2$

즉, $f(x)=-x^3+2x^2-2$이므로 $f'(x)=-3x^2+4x$

$f'(c)=0$에서 $-3c^2+4c=0$

$-3c\left(c-\frac{4}{3}\right)=0 \qquad \therefore c=\frac{4}{3}\ (\because 0<c<2)$

$\therefore a-c=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$

**33** 함수 $f(x)=x^3-ax^2+2$는 닫힌구간 $[0, a]$에서 연속이고 열린구간 $(0, a)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(a)=2$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 $c$가 열린구간 $(0, a)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 롤의 정리를 만족시키는 실수 $c$의 값이 2이고

$f'(x)=3x^2-2ax$이므로 $f'(2)=0$에서

$12-4a=0 \qquad \therefore a=3$

**34** 함수 $f(x)=x^3-4x+1$은 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$인 $c$가 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-4$이므로

$\frac{1-4}{3}=3c^2-4$, $c^2=1 \qquad \therefore c=1\ (\because -1<c<2)$

**35** 함수 $f(x)=x^2+x$는 닫힌구간 $[-3, 2k]$에서 연속이고 열린구간 $(-3, 2k)$에서 미분가능하며 평균값 정리를 만족시키는 실수 $c$의 값이 $\frac{k}{2}$이므로

$\frac{f(2k)-f(-3)}{2k-(-3)}=f'\left(\frac{k}{2}\right)$

이때 $f'(x)=2x+1$이므로 $\frac{4k^2+2k-6}{2k+3}=k+1$

$2k^2-3k-9=0$, $(2k+3)(k-3)=0$

$\therefore k=3\ \left(\because -3<2k,\text{ 즉 } k>-\frac{3}{2}\right)$

**36** ㄱ. $f'(0)<0$, $f'(2)>0$이므로 $f'(0)<f'(2)$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$, 즉

$f(2)-f(-1)=3f'(c)$인 $c$가 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}=0$에서 $f'(c)=0$

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 $c$가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**37** 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 5)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

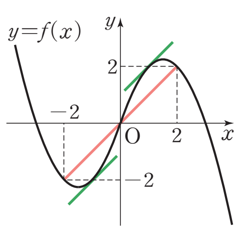
$\dfrac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)$, 즉 $f'(c)=\dfrac{f(5)-3}{4}$인 $c$가 열린구간 $(1, 5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 ㈏에서 $1<c<5$인 $c$에 대하여 $f'(c)\geq 5$이므로

$\dfrac{f(5)-3}{4}\geq 5$ $\quad\therefore f(5)\geq 23$

따라서 $f(5)$의 최솟값은 23이다.

**38** 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$에서 미분가능하며 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




닫힌구간 $[-2, 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 $c$의 개수는 두 점 $(-2, -2)$, $(2, 2)$를 지나는 직선과 기울기가 같은 접선의 개수와 같으므로 실수 $c$는 2개이다.

**39** 함수 $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$은 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 $(a, b)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 $c$가 열린구간 $(a, b)$에 적어도 하나 존재한다.

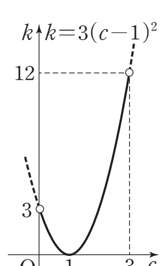
$f'(x)=3x^2-6x+3$이므로

$k=f'(c)=3c^2-6c+3=3(c-1)^2$

이때 $0<c<3$이고 $k\neq 0$이므로

$0<k<12$

따라서 정수 $k$는 1, 2, 3, $\cdots$, 11의 11개이다.




## 02 함수의 증가와 감소, 극대와 극소 　34~36쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** 2 | **2** ④ | **3** 12 | **4** 6 | **5** 0 |
| **6** ③ | **7** 3 | **8** 5 | **9** 6 | **10** 11 |
| **11** ④ | **12** 11 | **13** $-22$ | **14** ① | **15** 0 |
| **16** 12 | **17** ㄴ, ㄷ | **18** 1 | **19** ④ | **20** $\dfrac{2}{3}$ |
| **21** 9 | | | | |

**1** $f(x)=-x^3+3x^2+24x-7$에서

$f'(x)=-3x^2+6x+24=-3(x+2)(x-4)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-2$ 또는 $x=4$

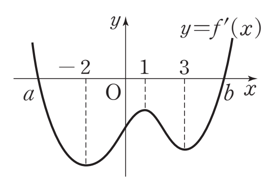
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | 4 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-35$ | ↗ | 73 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-2, 4]$에서 증가하므로

$\alpha=-2$, $\beta=4$ $\quad\therefore \alpha+\beta=2$

**2** 오른쪽 그림과 같이 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표를 $a$, $b(a<b)$라 하면




함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, a)$, $(b, \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 구간 $(-\infty, a]$, $[b, \infty)$에서 증가하고, 구간 $(a, b)$에서 $f'(x)<0$이므로 구간 $[a, b]$에서 감소한다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

**3** $f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$에서 $f'(x)=6x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x\leq -1$, $x\geq 3$에서 증가하고, $-1\leq x\leq 3$에서 감소하므로 이차방정식 $f'(x)=0$, 즉 $6x^2+2ax+b=0$의 두 근이 $-1$, 3이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+3=-\dfrac{2a}{6}$, $-1\times 3=\dfrac{b}{6}$

$\therefore a=-6$, $b=-18$

$\therefore a-b=12$

**4** $f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-(a^2-8a)$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 $x$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D\le0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2+3(a^2-8a)\le0$

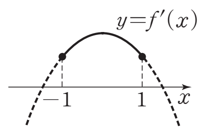
$4a(a-6)\le0$  $\therefore 0\le a\le6$

따라서 실수 $a$의 최댓값은 6이다.

**5** $f(x)=-x^3+ax^2+5x-1$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+5$

함수 $f(x)$가 구간 $[-1, 1]$에서 증가하려면 $-1\le x\le1$에서 $f'(x)\ge0$이어야 하므로




$f'(-1)\ge0$, $f'(1)\ge0$

$f'(-1)\ge0$에서

$-3-2a+5\ge0$  $\therefore a\le1$  …… ㉠

$f'(1)\ge0$에서

$-3+2a+5\ge0$  $\therefore a\ge-1$  …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-1\le a\le1$

따라서 정수 $a$는 $-1$, 0, 1이므로 구하는 합은 0이다.

**6** $f(x)=-3x^3-ax^2-ax+2$에서

$f'(x)=-9x^2-2ax-a$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 $x$에서 $f'(x)\le0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D\le0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-9a\le0$, $a(a-9)\le0$  $\therefore 0\le a\le9$

따라서 정수 $a$는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 10개이다.

**7** $f(x)=\frac{1}{3}x^3+kx^2-(k-2)x+3$에서

$f'(x)=x^2+2kx-(k-2)$

함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $x_1\ne x_2$일 때, $f(x_1)\ne f(x_2)$를 만족시키려면 일대일대응이어야 하고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 $x$에서 $f'(x)\ge0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D\le0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2+k-2\le0$

$(k+2)(k-1)\le0$  $\therefore -2\le k\le1$

따라서 $M=1$, $m=-2$이므로 $M-m=3$

**8** $f(x)=-x^3+3x^2+9x-27$에서

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | … | $-1$ | … | 3 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극대이고 $x=-1$에서 극소이므로

$a=3$, $b=-1$  $\therefore 2a+b=6-1=5$

**9** $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | … | 1 | … | 3 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 5<br>극대 | ↘ | 1<br>극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 5, $x=3$에서 극솟값 1을 가지므로

$M=5$, $m=1$  $\therefore M+m=6$

**10** $f(x)=x^3-3x+12$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | … | $-1$ | … | 1 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 14<br>극대 | ↘ | 10<br>극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 $a=1$

$\therefore a+f(a)=1+f(1)=1+10=11$

**11** $f(x)=x^4-8x^2+5$에서

$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | … | $-2$ | … | 0 | … | 2 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-11$<br>극소 | ↗ | 5<br>극대 | ↘ | $-11$<br>극소 | ↗ |

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값 5를 가지므로 점 A의 좌표는 $(0,\ 5)$

또 함수 $f(x)$는 $x=-2$와 $x=2$에서 극소이고 극솟값 $-11$을 가지므로 두 점 B, C의 좌표는

$(-2,\ -11)$, $(2,\ -11)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times16=32$

**12** $f(x)=-x^3-3x^2+9x+k$에서

$f'(x)=-3x^2-6x+9=-3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $k-27$ 극소 | $\nearrow$ | $k+5$ 극대 | $\searrow$ |

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $k+5$, $x=-3$에서 극솟값 $k-27$을 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값이 절댓값은 같고 부호가 서로 다르므로

$k+5+(k-27)=0 \qquad \therefore k=11$

**13** $f(x)=2x^3-3x^2+ax+b$에서

$f'(x)=6x^2-6x+a$

$x=-1$에서 극댓값 5를 가지므로

$f'(-1)=0$, $f(-1)=5$에서

$6+6+a=0$, $-2-3-a+b=5$

$\therefore a=-12,\ b=-2$

즉, $f(x)=2x^3-3x^2-12x-2$이므로

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $5$ 극대 | $\searrow$ | $-22$ 극소 | $\nearrow$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 $-22$를 갖는다.

**14** $f(x)=-x^4+8a^2x^2-1$에서

$f'(x)=-4x^3+16a^2x$

$\qquad =-4x(x+2a)(x-2a)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=-2a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2a$

$a>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2a$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 극대 | $\searrow$ | 극소 | $\nearrow$ | 극대 | $\searrow$ |

함수 $f(x)$는 $x=-2a$와 $x=2a$에서 극대이다.

한편 $b>1$에서 $-2b<-2$

$\therefore 2-2b<0$

즉, $2-2b<b$이므로

$-2a=2-2b$, $2a=b$

$\therefore a-b=-1$, $2a-b=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$

$\therefore a+b=3$

**15** $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

(나)에서 $f'(0)=0$이므로 $b=0$

(가)에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$에서

$\lim_{x\to1}f(x)=0 \qquad \therefore f(1)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=9$

$f(1)=0$, $f'(1)=9$에서

$1+a+b+c=0$, $3+2a+b=9$

이때 $b=0$이므로

$a+c=-1$, $a=3 \qquad \therefore c=-4$

즉, $f(x)=x^3+3x^2-4$이므로

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $0$ 극대 | $\searrow$ | $-4$ 극소 | $\nearrow$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 0을 갖는다.

**16** 구간 $[0,\ 9]$에서 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표는 0, 2, 4, 6, 8

$x=4$, $x=8$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=4$, $x=8$에서 극대이다.

따라서 모든 $x$의 값의 합은

$4+8=12$

**17** ㄱ. $4<x<5$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 $4<x<5$에서는 감소한다.

ㄴ. $f'(-2)=0$이고, $x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극소이다.

ㄷ. 구간 $[-1, 4]$에서 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표는 0, 3

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

$x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극대이다.

즉, 구간 $[-1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 극댓값은 1개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**18** 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표는 $-1$, 1

$x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고,

$x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(-1)=0$, $f'(1)=0$이므로

$3-2a+b=0$, $3+2a+b=0$

$\therefore 2a-b=3$, $2a+b=-3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-3$

또 함수 $f(x)=x^3-3x+c$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값 5를 가지므로 $f(-1)=5$에서

$-1+3+c=5 \qquad \therefore c=3$

따라서 함수 $f(x)=x^3-3x+3$은 $x=1$에서 극소이므로 극솟값은

$f(1)=1-3+3=1$

**19** ①, ③ 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표는 $a$, $c$

$x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖지 않는다.

$x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=c$에서 극소이다.

즉, 함수 $f(x)$의 극값은 1개이다.

② $f'(b)\neq 0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극값을 갖지 않는다.

④ 구간 $(a, c)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.

$\therefore f(a)>f(b)>f(c)$

⑤ 구간 $(b, c)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

**20** $h(x)=f(x)-g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$h'(x)=0$, 즉 $f'(x)-g'(x)=0$인 $x$의 값은 두 도함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프의 교점의 $x$좌표와 같으므로

$x=-1$ 또는 $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=5$

$x=-1$, $x=5$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=-1$, $x=5$에서 극대이고,

$x=\frac{2}{3}$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=\frac{2}{3}$에서 극소이다.

따라서 구하는 $x$의 값은 $\frac{2}{3}$이다.

**21** 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표는 0, 2

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고,

$x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이다.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a$, $b$, $c$, $d$는 상수, $a<0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=0$, $f'(2)=0$이므로

$c=0$, $12a+4b+c=0$

$\therefore b=-3a$

즉, $f(x)=ax^3-3ax^2+d$이므로 $f(3)=3$에서

$27a-27a+d=3$

$\therefore d=3$

이때 함수 $f(x)=ax^3-3ax^2+3$의 극댓값은

$f(2)=-4a+3$, 극솟값은 $f(0)=3$이고 극댓값과 극솟값의 차가 12이므로

$(-4a+3)-3=12$

$\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-3x^3+9x^2+3$이므로

$f(1)=-3+9+3=9$

## 03 함수의 그래프 37~41쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ④ | **2** ③ | **3** ① | **4** ㄷ | **5** ⑤ |
| **6** ② | **7** ③ | **8** ② | **9** ⑤ | **10** ① |
| **11** ④ | **12** 4 | **13** ② | **14** ③ | **15** 2 |
| **16** 3 | **17** 23 | **18** ⑤ | **19** 19 | **20** 11 |
| **21** $\frac{7}{2}$ | **22** ⑤ | **23** 32 | **24** 1 | **25** $\frac{27}{16}$ |
| **26** $\frac{28}{3}\pi$ | **27** $\frac{16}{3}\pi$ | **28** $\frac{16\sqrt{2}}{27}$ | | |

**1** $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+1$에서

$f'(x)=x^3-3x^2=x^2(x-3)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $1$ | ↘ | $-\frac{23}{4}$ 극소 | ↗ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다.

**2** $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$는 $x=x_1$에서 극소, $x=x_2$에서 극대이므로

$f'(x_1)=f'(x_2)=0$

즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 $x_1$, $x_2$이고, $x_1>0$, $x_2>0$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=-\frac{2a}{-3}=\frac{2a}{3}>0$, $x_1x_2=\frac{b}{-3}>0$

$\therefore\ a>0,\ b<0$

또 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=0$일 때 $y$축의 양의 부분과 만나므로

$f(0)=c>0$

$\therefore\ \frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=\frac{a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{c}{c}=1-1+1=1$

**3** 도함수 $y=f'(x)$의 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $-1$, $1$, $2$이므로 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

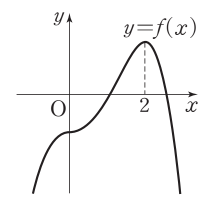
| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다.

**4** 도함수 $y=f'(x)$의 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $0$, $2$이므로 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | | ↗ | 극대 | ↘ |

이때 $f(0)<0<f(2)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.




ㄱ. 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 증가하고, $f(0)<0$이므로 $f(-1)<0$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

**5** $f(x)=x^3+ax^2+(a^2-4a)x+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+a^2-4a$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D>0$에서

$\frac{D}{4}=a^2-3(a^2-4a)>0$

$a(a-6)<0$

$\therefore\ 0<a<6$

따라서 정수 $a$는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

**6** $f(x)=x^3+3x^2-3(a^2-9)x+6$에서

$f'(x)=3x^2+6x-3(a^2-9)$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D\le 0$에서

$\frac{D}{4}=9+9(a^2-9)\le 0$

$a^2\le 8$

$\therefore\ -2\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}$

따라서 $m=-2\sqrt{2}$, $n=2\sqrt{2}$이므로

$n-m=4\sqrt{2}$

**7** $f(x)$는 삼차함수이므로 $a\neq0$ …… ㉠

$f(x)=ax^3+3x^2+(a-2)x-1$에서

$f'(x)=3ax^2+6x+a-2$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D>0$에서

$\frac{D}{4}=9-3a(a-2)>0$

$(a+1)(a-3)<0$ $\quad\therefore -1<a<3$ …… ㉡

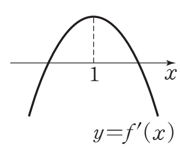
㉠, ㉡에서 $-1<a<0$ 또는 $0<a<3$

따라서 정수 $a$는 1, 2이므로 그 합은 $1+2=3$

**8** $f(x)=-x^3-kx^2+(k+8)x+1$에서

$f'(x)=-3x^2-2kx+k+8$

함수 $f(x)$가 $x<1$에서 극솟값을 갖고, $x>1$에서 극댓값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x<1$에서 한 실근을 갖고, $x>1$에서 다른 한 실근을 가져야 한다.



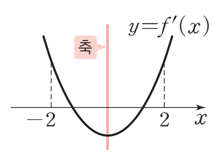

즉, $f'(1)>0$이어야 하므로

$-3-2k+k+8>0$ $\quad\therefore k<5$

따라서 자연수 $k$는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

**9** $f(x)=x^3-3ax^2+3x+1$에서 $f'(x)=3x^2-6ax+3$

함수 $f(x)$가 구간 $(-2, 2)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-2<x<2$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.




(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=9a^2-9>0$, $(a+1)(a-1)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>1$ …… ㉠

(ii) $f'(-2)>0$이어야 하므로

$12+12a+3>0$ $\quad\therefore a>-\frac{5}{4}$ …… ㉡

$f'(2)>0$이어야 하므로

$12-12a+3>0$ $\quad\therefore a<\frac{5}{4}$ …… ㉢

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=a$이므로 $-2<a<2$ …… ㉣

㉠~㉣에서 $-\frac{5}{4}<a<-1$ 또는 $1<a<\frac{5}{4}$

따라서 실수 $a$의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

**10** $f(x)=x^3+3(a-1)x^2-3(a-3)x+5$에서

$f'(x)=3x^2+6(a-1)x-3(a-3)$

함수 $f(x)$가 $x>0$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=9(a-1)^2+9(a-3)>0$

$(a+1)(a-2)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>2$ …… ㉠

(두 근의 합)$>0$이어야 하므로

$-2(a-1)>0$ $\quad\therefore a<1$ …… ㉡

(두 근의 곱)$>0$이어야 하므로

$-(a-3)>0$ $\quad\therefore a<3$ …… ㉢

㉠~㉢에서 $a<-1$

따라서 정수 $a$의 최댓값은 $-2$이다.

**11** $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^3+kx^2+1$에서

$f'(x)=2x^3-3x^2+2kx=x(2x^2-3x+2k)$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $2x^2-3x+2k=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x=0$이 이차방정식 $2x^2-3x+2k=0$의 근이 아니어야 하므로

$2k\neq0$ $\quad\therefore k\neq0$ …… ㉠

이차방정식 $2x^2-3x+2k=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D>0$이어야 하므로

$D=9-16k>0$ $\quad\therefore k<\frac{9}{16}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k<0$ 또는 $0<k<\frac{9}{16}$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=\frac{9}{16}$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{9}{16}$

**12** $f(x)=3x^4-4x^3-(a-3)x^2$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2-2(a-3)x$

$\qquad=2x(6x^2-6x-a+3)$

함수 $f(x)$가 극값을 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $6x^2-6x-a+3=0$의 한 근이 0이거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $6x^2-6x-a+3=0$의 한 근이 0이면

$-a+3=0 \qquad \therefore a=3$

(ii) 이차방정식 $6x^2-6x-a+3=0$이 중근 또는 허근을 가지려면 판별식을 $D$라 할 때, $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=9-6(-a+3)\le 0 \qquad \therefore a\le\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $a\le\frac{3}{2}$ 또는 $a=3$

따라서 자연수 $a$는 1, 3이므로 그 합은 $1+3=4$

**13** $f(x)=-3x^4+4x^3-6(a-2)x^2-12ax-2$에서

$f'(x)=-12x^3+12x^2-12(a-2)x-12a$

$=-12(x+1)(x^2-2x+a)$

함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 한 근이 $-1$이거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 한 근이 $-1$이면

$1+2+a=0 \qquad \therefore a=-3$

(ii) 이차방정식 $x^2-2x+a=0$이 중근 또는 허근을 가지려면 판별식을 $D$라 할 때, $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1-a\le 0 \qquad \therefore a\ge 1$

(i), (ii)에서 $a=-3$ 또는 $a\ge 1$

**14** $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

구간 $[-2, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-3$ | ↗ | 4<br>극대 | ↘ | $-28$<br>극소 | ↗ | $-21$ |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 $-28$이므로

$M=4,\ m=-28 \qquad \therefore M-m=32$

**15** 도함수 $y=f'(x)$의 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $-1$, 0, 2이므로 $f'(x)$의 부호를 조사하여 구간 $[0, 5]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ | |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최소이다.

**16** $x^2+y^2=1$에서 $y^2=1-x^2$이므로

$x^4+2y^2=x^4+2(1-x^2)=x^4-2x^2+2$

$y^2=1-x^2\ge 0$이므로

$(x+1)(x-1)\le 0 \qquad \therefore -1\le x\le 1$

$f(x)=x^4-2x^2+2$라 하면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↗ | 2<br>극대 | ↘ | $1$ |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 2, 최솟값은 1이므로 그 합은 $2+1=3$

**17** $f(x)=-x^3+6x^2$에서

$f'(x)=-3x^2+12x=-3x(x-4)$

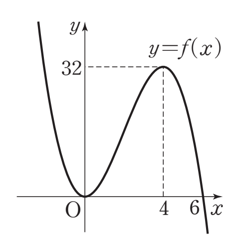
$f'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | 0<br>극소 | ↗ | 32<br>극대 | ↘ |

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




(i) $a=-2$일 때,

구간 $[-2, -1]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(-1)$이므로

$g(-2)=f(-1)=1+6=7$

(ii) $a=-\frac{1}{2}$일 때,

구간 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)$이므로

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=f(0)=0$

(iii) $a=2$일 때,

구간 $[2, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)$이므로

$g(2)=f(2)=-8+24=16$

$\therefore g(-2)+g\left(-\frac{1}{2}\right)+g(2)=7+0+16=23$

**18** $f(x)=-2x^3+3ax^2-a^2$에서

$f'(x)=-6x^2+6ax$

$=-6x(x-a)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=0$ 또는 $x=a$

구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $-a^2$ | $\nearrow$ | $a^3-a^2$ 극대 | $\searrow$ | $-a^2+12a-16$ |

함수 $f(x)$의 최댓값은 $a^3-a^2$이므로

$g(a)=a^3-a^2$

$\therefore\ g'(a)=3a^2-2a=a(3a-2)$

$g'(a)=0$인 $a$의 값은

$a=\frac{2}{3}$ ($\because\ 0<a<2$)

$0<a<2$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $a$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{2}{3}$ | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(a)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $g(a)$ | | $\searrow$ | $-\frac{4}{27}$ 극소 | $\nearrow$ | |

따라서 함수 $g(a)$의 최솟값은 $-\frac{4}{27}$이다.

**19** $x-2=t$로 놓으면 $1\le x\le 6$에서

$-1\le t\le 4$

$g(t)=t^3-3t^2-3$이라 하면

$g'(t)=3t^2-6t$

$=3t(t-2)$

$g'(t)=0$인 $t$의 값은

$t=0$ 또는 $t=2$

$-1\le t\le 4$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | $-1$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $g(t)$ | $-7$ | $\nearrow$ | $-3$ 극대 | $\searrow$ | $-7$ 극소 | $\nearrow$ | 13 |

즉, 함수 $g(t)$는 $t=4$에서 최댓값 13을 가지므로 함수 $f(x)$는 $x=6$에서 최댓값 13을 갖는다.

따라서 $a=6$, $M=13$이므로

$a+M=19$

**20** $f(x)=x^3-6x^2+9x+k$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

구간 $[-1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $k-16$ | $\nearrow$ | $k+4$ 극대 | $\searrow$ | $k$ 극소 | $\nearrow$ | $k+4$ |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $k+4$, 최솟값은 $k-16$이므로

$k+4+k-16=10$

$\therefore\ k=11$

**21** $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

도함수 $y=f'(x)$의 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 0, 1이므로

$f'(0)=0$, $f'(1)=0$

$b=0$, $-3+2a+b=0$

$\therefore\ a=\frac{3}{2}$

즉, $f(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2+c$이므로

$f'(x)=-3x^2+3x$

$=-3x(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $c$ | $\nearrow$ | $c+\frac{1}{2}$ 극대 | $\searrow$ | $c-2$ |

즉, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $c-2$이므로

$c-2=1\quad \therefore\ c=3$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$c+\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

**22** $f(x)=t$로 놓으면

$t=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$이므로

모든 실수 $x$에서 $t\ge k-1$

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(t)=2t^3-9t^2+12t-2$

$\therefore\ g'(t)=6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)$

$g'(t)=0$인 $t$의 값은 $t=1$ 또는 $t=2$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

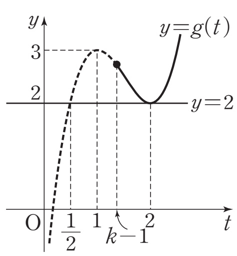
| $t$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $g(t)$ | ↗ | 3<br>극대 | ↘ | 2<br>극소 | ↗ |

주어진 조건에서 함수 $g(t)$의 최솟값은 2이므로 $g(t)=2$인 $t$의 값을 구하면

$2t^3-9t^2+12t-2=2$, $(2t-1)(t-2)^2=0$

$\therefore\ t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

즉, 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=2$는 오른쪽 그림과 같으므로 $t \geq k-1$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 2가 되려면




$\frac{1}{2} \leq k-1 \leq 2$

$\therefore\ \frac{3}{2} \leq k \leq 3$

따라서 실수 $k$의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.

**23** 곡선 $y=-x^2+6x$와 $x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면

$-x^2+6x=0$, $x(x-6)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=6$

즉, $A(6,\ 0)$이므로 $\overline{OA}=6$

점 B의 좌표를 $(a,\ -a^2+6a)\,(3<a<6)$라 하면

$C(6-a,\ -a^2+6a)$이므로

$\overline{BC}=2a-6$

사다리꼴 OABC의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}(2a-6+6)(-a^2+6a)$

$\quad=-a^3+6a^2$

$\therefore\ S'(a)=-3a^2+12a$

$\quad=-3a(a-4)$

$S'(a)=0$인 $a$의 값은

$a=4$ ($\because$ $3<a<6$)

$3<a<6$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $a$ | 3 | $\cdots$ | 4 | $\cdots$ | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(a)$ | | + | 0 | − | |
| $S(a)$ | | ↗ | 32<br>극대 | ↘ | |

따라서 넓이 $S(a)$의 최댓값은 32이다.

**24** 점 P의 좌표를 $(a,\ a(a-2)^2)\,(0<a<2)$이라 하고 직사각형 OHPQ의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=a\times a(a-2)^2$

$\quad=a^4-4a^3+4a^2$

$\therefore\ S'(a)=4a^3-12a^2+8a$

$\quad=4a(a-1)(a-2)$

$S'(a)=0$인 $a$의 값은

$a=1$ ($\because$ $0<a<2$)

$0<a<2$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $a$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(a)$ | | + | 0 | − | |
| $S(a)$ | | ↗ | 1<br>극대 | ↘ | |

따라서 넓이 $S(a)$의 최댓값은 1이다.

**25** $f(x)=2x^3-4x^2+1$에서

$f'(x)=6x^2-8x$

점 $A(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=0$이므로 접선의 방정식은 $y=1$

곡선 $y=2x^3-4x^2+1$과 직선 $y=1$의 교점의 $x$좌표를 구하면

$2x^3-4x^2+1=1$, $2x^2(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

$\therefore\ B(2,\ 1)$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P의 $x$좌표를 $a\,(0<a<2)$라 하면

$P(a,\ 2a^3-4a^2+1)$, $H(a,\ 1)$

삼각형 APH의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}a\{1-(2a^3-4a^2+1)\}$

$\quad=-a^4+2a^3$

$\therefore\ S'(a)=-4a^3+6a^2$

$\quad=-2a^2(2a-3)$

$S'(a)=0$인 $a$의 값은

$a=\frac{3}{2}$ ($\because$ $0<a<2$)

$0<a<2$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $a$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{3}{2}$ | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(a)$ | | + | 0 | − | |
| $S(a)$ | | ↗ | $\frac{27}{16}$<br>극대 | ↘ | |

따라서 넓이 $S(a)$의 최댓값은 $\frac{27}{16}$이다.

**26** 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $r$, 높이를 $h$라 하면

$r+h=3 \qquad \therefore h=3-r$

이때 $r>0$, $3-r>0$이므로

$0<r<3$

원기둥의 부피를 $V(r)$라 하면

$V(r)=\pi r^2 h=\pi r^2(3-r)=\pi(3r^2-r^3)$

$\therefore V'(r)=\pi(6r-3r^2)$

$\qquad\qquad =-3\pi r(r-2)$

$V'(r)=0$인 $r$의 값은

$r=2$ ($\because 0<r<3$)

$0<r<3$에서 함수 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $r$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(r)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $V(r)$ | | $\nearrow$ | $4\pi$ 극대 | $\searrow$ | |

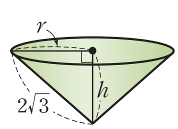
즉, 원기둥의 부피는 $r=2$에서 최댓값 $4\pi$를 가지므로 $r=2$일 때 반구의 부피는

$\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{16}{3}\pi$

따라서 구하는 전체 입체도형의 부피는

$4\pi+\frac{16}{3}\pi=\frac{28}{3}\pi$

**27** 모선의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 $r$, 높이를 $h$라 하면




$r^2+h^2=12$

$\therefore r^2=12-h^2$

이때 $h>0$, $12-h^2>0$이므로

$0<h<2\sqrt{3}$

원뿔의 부피를 $V(h)$라 하면

$V(h)=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{\pi}{3}(12-h^2)h=\frac{\pi}{3}(12h-h^3)$

$\therefore V'(h)=\frac{\pi}{3}(12-3h^2)=-\pi(h+2)(h-2)$

$V'(h)=0$인 $h$의 값은

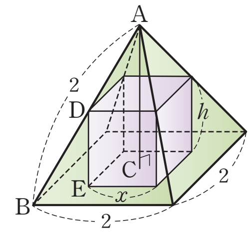
$h=2$ ($\because 0<h<2\sqrt{3}$)

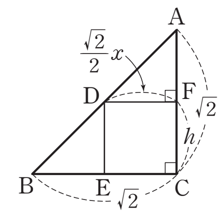
$0<h<2\sqrt{3}$에서 함수 $V(h)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $h$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | $2\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(h)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $V(h)$ | | $\nearrow$ | $\frac{16}{3}\pi$ 극대 | $\searrow$ | |

따라서 부피 $V(h)$의 최댓값은 $\frac{16}{3}\pi$이다.

**28** 다음 그림과 같이 정사각뿔에 내접하는 직육면체의 밑면은 정사각형이므로 직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 $x$, 높이를 $h$라 하자.




정사각뿔의 밑면의 대각선의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{2}$

직육면체의 밑면의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}x$이므로

$\overline{DF}=\frac{\sqrt{2}}{2}x$

삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$

$\triangle ABC \backsim \triangle ADF$(AA 닮음)이므로

$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AF}:\overline{DF}$에서

$\sqrt{2}:\sqrt{2}=(\sqrt{2}-h):\frac{\sqrt{2}}{2}x$

$\sqrt{2}-h=\frac{\sqrt{2}}{2}x$

$\therefore h=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}x$

이때 $x>0$, $h>0$이므로

$0<x<2$

직육면체의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x^2h=x^2\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}x^3+\sqrt{2}x^2$

$\therefore V'(x)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}x^2+2\sqrt{2}x$

$\qquad\qquad =-\frac{\sqrt{2}}{2}x(3x-4)$

$V'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=\frac{4}{3}$ ($\because 0<x<2$)

$0<x<2$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{4}{3}$ | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $V(x)$ | | $\nearrow$ | $\frac{16\sqrt{2}}{27}$ 극대 | $\searrow$ | |

따라서 부피 $V(x)$의 최댓값은 $\frac{16\sqrt{2}}{27}$이다.

유형편

## 04 방정식과 부등식에의 활용 42~45쪽

**1** 2 **2** ③ **3** 2
**4** $k<-4\sqrt{2}$ 또는 $k>4\sqrt{2}$ **5** ④ **6** 1, 2
**7** ① **8** 1, 7 **9** 21 **10** $k<-4$ 또는 $k>0$
**11** 13 **12** ③ **13** ② **14** 26 **15** ⑤
**16** ② **17** $-1<a<0$ 또는 $a>0$ **18** $a>\frac{9}{32}$
**19** ④ **20** ⑤ **21** 3 **22** $-4$ **23** ⑤
**24** 3 **25** $k\ge-1$

**1** $f(x)=x^4-2x^2-5$라 하면

$f'(x)=4x^3-4x$

$\quad=4x(x+1)(x-1)$

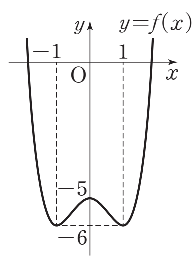
$f'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-6$ 극소 | ↗ | $-5$ 극대 | ↘ | $-6$ 극소 | ↗ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x$축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.




**2** $f(x)=x^3+3x^2+1$이라 하면

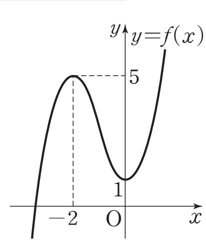
$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $5$ 극대 | ↘ | $1$ 극소 | ↗ |

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x$축과 한 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.




$\therefore a=1$

$g(x)=2x^3-6x+1$이라 하면

$g'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

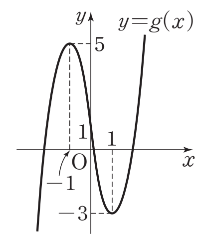
$g'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | ↗ | $5$ 극대 | ↘ | $-3$ 극소 | ↗ |

또 $g(0)=1$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x$축과 서로 다른 세 점에서 만난다.

즉, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



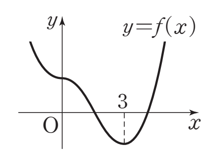

$\therefore b=3$

$\therefore a+b=1+3=4$

**3** 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $+$ | ↘ | $-$ 극소 | ↗ |

$f(0)>0$, $f(3)<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.




따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

**4** 주어진 방정식에서 $x^3-6x=k$이므로 이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=x^3-6x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^3-6x$라 하면

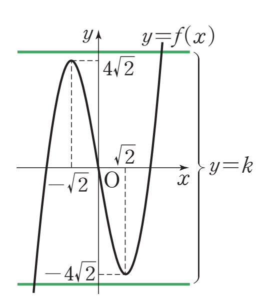
$f'(x)=3x^2-6=3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-\sqrt{2}$ | $\cdots$ | $\sqrt{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $4\sqrt{2}$ 극대 | ↘ | $-4\sqrt{2}$ 극소 | ↗ |

또 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나는 점이 1개가 되도록 하는 $k$의 값의 범위는

$k<-4\sqrt{2}$ 또는 $k>4\sqrt{2}$

**5** 주어진 방정식에서 $3x^4-8x^3-6x^2+24x=k$이므로 이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=3x^4-8x^3-6x^2+24x$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$라 하면

$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$

$\quad=12(x+1)(x-1)(x-2)$

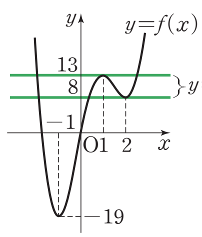
$f'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-19$ 극소 | ↗ | $13$ 극대 | ↘ | $8$ 극소 | ↗ |

또 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나는 점이 3개가 되도록 하는 $k$의 값은

$k=8$ 또는 $k=13$

따라서 모든 실수 $k$의 값의 합은

$8+13=21$

**6** $f(x)=x^3+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+1)=3t^2(x-t)$

$\therefore\ y=3t^2x-2t^3+1$

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a=-2t^3+3t^2+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

서로 다른 두 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$g(t)=-2t^3+3t^2+1$이라 하면

$g'(t)=-6t^2+6t=-6t(t-1)$

$g'(t)=0$인 $t$의 값은

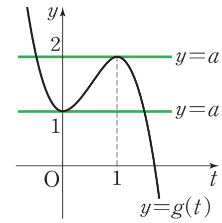
$t=0$ 또는 $t=1$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(t)$ | ↘ | $1$ 극소 | ↗ | $2$ 극대 | ↘ |

따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=a$와 만나는 점이 2개가 되도록 하는 $a$의 값은

$a=1$ 또는 $a=2$




**7** 방정식 $x^3-6x^2+15=k$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=x^3-6x^2+15$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$g(x)=x^3-6x^2+15$라 하면

$g'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$g'(x)=0$인 $x$의 값은

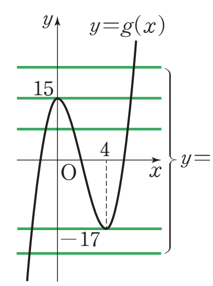
$x=0$ 또는 $x=4$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | ↗ | $15$ 극대 | ↘ | $-17$ 극소 | ↗ |

함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $k$의 값에 따른 서로 다른 실근의 개수 $f(k)$는

$$f(k)=\begin{cases}1\ (k<-17\ \text{또는}\ k>15)\\2\ (k=-17\ \text{또는}\ k=15)\\3\ (-17<k<15)\end{cases}$$




따라서 함수 $f(k)$는 $k=-17$, $k=15$에서 불연속이므로 모든 실수 $a$의 값의 합은

$-17+15=-2$

**8** $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,\ b,\ c,\ d$는 상수, $a\neq0)$라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

주어진 함수 $y=f'(x)$의 그래프에서

$f'(0)=0,\ f'(1)=-6,\ f'(2)=0$이므로

$c=0,\ 3a+2b+c=-6,\ 12a+4b+c=0$

$\therefore\ 3a+2b=-6,\ 3a+b=0$

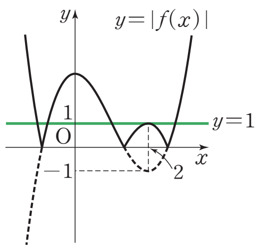
두 식을 연립하여 풀면

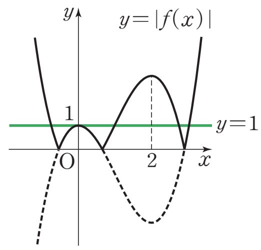
$a=2,\ b=-6$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $d$ 극대 | ↘ | $d-8$ 극소 | ↗ |

방정식 $|f(x)|=1$이 서로 다른 5개의 실근을 가질 때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같이 2가지가 될 수 있다.




(i) $f(2)=-1$, $f(0)>1$인 경우

$d-8=-1$, $d>1$ $\quad\therefore d=7$

(ii) $f(0)=1$, $f(2)<-1$인 경우

$d=1$, $d-8<-1$ $\quad\therefore d=1$

(i), (ii)에서 $d=1$ 또는 $d=7$

따라서 $f(0)=d$이므로 모든 $f(0)$의 값은 1, 7이다.

**9** 주어진 방정식에서 $f(x)+|f(x)+x|-6x=k$이므로 이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)+|f(x)+x|-6x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$라 하자.

$$f(x)+x=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+11x$$
$$=\frac{1}{2}x(x^2-9x+22)$$

이때 $x^2-9x+22=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로

(i) $x\ge0$일 때, $f(x)+x\ge0$

(ii) $x<0$일 때, $f(x)+x<0$

(i), (ii)에서

$$g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$$
$$=\begin{cases}2f(x)-5x & (x\ge0)\\ -7x & (x<0)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}x^3-9x^2+15x & (x\ge0)\\ -7x & (x<0)\end{cases}$$

$h(x)=x^3-9x^2+15x\,(x\ge0)$라 하면

$h'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$h'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=1$ 또는 $x=5$

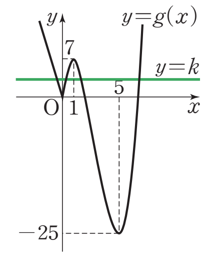
$x\ge0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 5 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + |
| $h(x)$ | 0 | ↗ | 7<br>극대 | ↘ | −25<br>극소 | ↗ |

함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와 만나는 점이 4개가 되도록 하는 $k$의 값의 범위는 $0<k<7$

따라서 모든 정수 $k$의 값의 합은

$1+2+3+\cdots+6=21$




**10** 주어진 곡선과 직선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $-x^3+6x^2=9x+k$, 즉 $-x^3+6x^2-9x=k$가 한 개의 실근을 가져야 한다.

$f(x)=-x^3+6x^2-9x$라 하면

$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

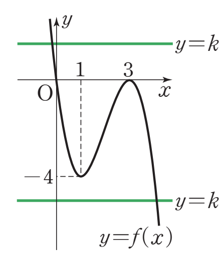
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↘ | −4<br>극소 | ↗ | 0<br>극대 | ↘ |

또 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나는 점이 1개가 되도록 하는 $k$의 값의 범위는

$k<-4$ 또는 $k>0$




다른 풀이

$-x^3+6x^2=9x+k$에서 $x^3-6x^2+9x+k=0$

$f(x)=x^3-6x^2+9x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)=k+4$, 극솟값은 $f(3)=k$이므로 방정식 $f(x)=0$이 한 개의 실근을 가지려면 (극댓값)×(극솟값)$>0$이어야 한다.

$k(k+4)>0$ $\quad\therefore k<-4$ 또는 $k>0$

**11** $f(x)=g(x)$에서 $2x^3-2x^2-a=x^2-1$

$\therefore 2x^3-3x^2+1=a$

$h(x)=2x^3-3x^2+1$이라 하면

$h'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$h'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $h(x)$ | ↗ | 1<br>극대 | ↘ | 0<br>극소 | ↗ |

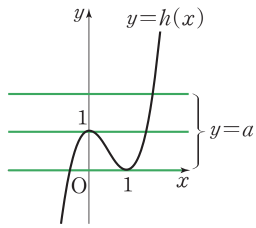
함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=a$와 만나는 점의 개수는

$n(0)=2$, $n(1)=2$,

$n(2)=\cdots=n(10)=1$

$\therefore n(0)+n(1)+n(2)+\cdots+n(10)$

$=2\times2+1\times9=13$




**12** $h(x)=f(x)-g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

주어진 그래프에서 $h'(x)=0$, 즉 $f'(x)=g'(x)$인 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $h(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

ㄱ. $0<x<2$에서 $f'(x)<g'(x)$이므로 $h'(x)<0$

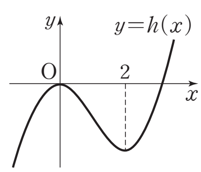
즉, 함수 $h(x)$는 감소한다.

ㄴ. 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $f(0)=g(0)$이므로 $h(0)=f(0)-g(0)=0$

즉, 함수 $h(x)$의 극댓값은 0이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

함수 $y=h(x)$의 그래프가 $x$축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.




따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

**13** 주어진 방정식에서 $-x^3+3x^2+9x+5=a$

$f(x)=-x^3+3x^2+9x+5$라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

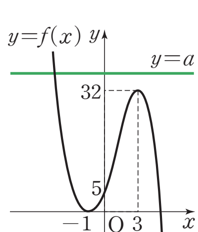
| $x$ | $\cdots$ | −1 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↘ | 0<br>극소 | ↗ | 32<br>극대 | ↘ |

또 $f(0)=5$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, 주어진 근의 조건을 만족시키는 $a$의 값의 범위는

$a>32$

따라서 정수 $a$의 최솟값은 33이다.




**14** 주어진 방정식에서 $x^3-6x^2+12=k$

$f(x)=x^3-6x^2+12$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

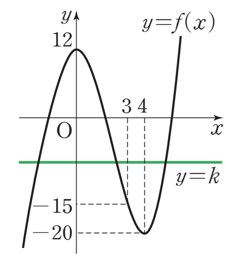
| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 4 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 12<br>극대 | ↘ | −20<br>극소 | ↗ |

$f(3)=27-54+12=-15$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, 주어진 근의 조건을 만족시키는 $k$의 값의 범위는

$-15<k<12$

따라서 정수 $k$는 $-14$, $-13$, $-12$, $\cdots$, 11의 26개이다.




**15** 주어진 방정식에서

$x^4+4x^3-2x^2-12x=k$

$f(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x$라 하면

$f'(x)=4x^3+12x^2-4x-12$

$=4(x+3)(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | −3 | $\cdots$ | −1 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | −9<br>극소 | ↗ | 7<br>극대 | ↘ | −9<br>극소 | ↗ |

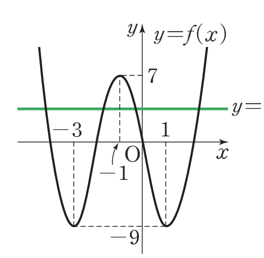
또 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, 주어진 근의 조건을 만족시키는 $k$의 값의 범위는

$0<k<7$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=7$이므로

$\alpha+\beta=7$




**16** $f(x)=2x^3-6x^2-18x+6+a$라 하면

$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

$f(-1)=a+16$, $f(3)=a-48$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면
(극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이어야 하므로
$(a+16)(a-48)=0 \qquad \therefore a=-16$ 또는 $a=48$
따라서 모든 실수 $a$의 값의 합은
$-16+48=32$

**17** 방정식 $f(x)=8$, 즉 $2x^3-6ax^2=8$에서
$2x^3-6ax^2-8=0$
$g(x)=2x^3-6ax^2-8$이라 하면
$g'(x)=6x^2-12ax=6x(x-2a)$
$g'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=2a$
$g(0)=-8,\ g(2a)=-8a^3-8$
삼차방정식 $g(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면
(극댓값)$\times$(극솟값)$>0$이어야 하므로
$-8(-8a^3-8)>0,\ a^3+1>0$
$(a+1)(a^2-a+1)>0$
이때 $a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로
$a+1>0$
$\therefore -1<a<0$ 또는 $a>0$ ($\because a\neq 0$)

**18** $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2ax+a$에서 $f'(x)=x^2-2a$
함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 할 때, $D>0$이어야 하므로
$8a>0 \qquad \therefore a>0$
$f'(x)=x^2-2a=(x+\sqrt{2a})(x-\sqrt{2a})$
$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-\sqrt{2a}$ 또는 $x=\sqrt{2a}$
$f(-\sqrt{2a})=\frac{4}{3}a\sqrt{2a}+a$
$f(\sqrt{2a})=-\frac{4}{3}a\sqrt{2a}+a$
삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면
(극댓값)$\times$(극솟값)$<0$이어야 하므로
$\left(\frac{4}{3}a\sqrt{2a}+a\right)\left(-\frac{4}{3}a\sqrt{2a}+a\right)<0$
$-\frac{32}{9}a^3+a^2<0,\ a^2\left(-\frac{32}{9}a+1\right)<0$
$-\frac{32}{9}a+1<0$ ($\because a^2>0$)
$\therefore a>\frac{9}{32}$

**19** $f(x)=x^4-4x-k^2+4k$라 하면
$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$
$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=1$ ($\because x$는 실수)
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-k^2+4k-3$ 극소 | $\nearrow$ |

따라서 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)>0$이 성립하려면
$-k^2+4k-3>0,\ k^2-4k+3<0$
$(k-1)(k-3)<0 \qquad \therefore 1<k<3$

**20** 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\leq g(x)$가 성립하려면
$f(x)-g(x)\leq 0$이어야 한다.
$F(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$F(x)=-x^4-x^3+2x^2-\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+a\right)$
$\quad =-x^4-\frac{4}{3}x^3+4x^2-a$
$\therefore F'(x)=-4x^3-4x^2+8x=-4x(x+2)(x-1)$
$F'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $F(x)$ | $\nearrow$ | $-a+\frac{32}{3}$ 극대 | $\searrow$ | $-a$ 극소 | $\nearrow$ | $-a+\frac{5}{3}$ 극대 | $\searrow$ |

모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)-g(x)\leq 0$, 즉 $F(x)\leq 0$이 성립하려면
$-a+\frac{32}{3}\leq 0 \qquad \therefore a\geq\frac{32}{3}$
따라서 실수 $a$의 최솟값은 $\frac{32}{3}$이다.

**21** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 $x$에 대하여
$f(x)>g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)>0$이어야 한다.
$F(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$F(x)=x^4+12-4k^3x=x^4-4k^3x+12$
$F'(x)=4x^3-4k^3=4(x-k)(x^2+kx+k^2)$
$F'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=k$ ($\because x$는 실수)
함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $k$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $F(x)$ | $\searrow$ | $-3k^4+12$ 극소 | $\nearrow$ |

모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)>g(x)$, 즉 $F(x)>0$이 성립하려면
$-3k^4+12>0,\ k^4-4<0$

$(k^2+2)(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})<0$
$(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})<0$ ($\because$ $k^2+2>0$)
$\therefore$ $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$
따라서 정수 $k$는 $-1$, $0$, $1$의 3개이다.

**22** $f(x)=x^3-6x^2+9x-k-4$라 하면
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$
$x\ge0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-k-4$ | $\nearrow$ | $-k$ 극대 | $\searrow$ | $-k-4$ 극소 | $\nearrow$ |

$x\ge0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-k-4$이므로
$f(x)\ge0$이 성립하려면
$-k-4\ge0$ $\therefore$ $k\le-4$
따라서 실수 $k$의 최댓값은 $-4$이다.

**23** $f(x)=4x^3-3x^2-6x+a$라 하면
$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=1$ ($\because$ $0\le x\le2$)
구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $a$ | $\searrow$ | $a-5$ 극소 | $\nearrow$ | $a+8$ |

따라서 구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $a-5$이므로 $f(x)>0$이 성립하려면
$a-5>0$ $\therefore$ $a>5$

**24** 닫힌구간 $[-1, 4]$에서 $f(x)\ge3g(x)$가 성립하려면
$f(x)-3g(x)\ge0$이어야 한다.
$F(x)=f(x)-3g(x)$라 하면
$F(x)=x^3+3x^2-k-3(2x^2+3x-10)$
$\quad=x^3-3x^2-9x+30-k$
$F'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
$F'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$
닫힌구간 $[-1, 4]$에서 함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $F(x)$ | $-k+35$ | $\searrow$ | $-k+3$ 극소 | $\nearrow$ | $-k+10$ |

닫힌구간 $[-1, 4]$에서 함수 $F(x)$의 최솟값은 $-k+3$이므로 $f(x)\ge3g(x)$, 즉 $F(x)\ge0$이 성립하려면
$-k+3\ge0$ $\therefore$ $k\le3$
따라서 실수 $k$의 최댓값은 3이다.

**25** $f(x)=x^3+3kx^2+4$라 하면
$f'(x)=3x^2+6kx=3x(x+2k)$
$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=-2k$
(i) $k>0$인 경우
$x\ge k$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.
$x\ge k$일 때, $f(x)\ge0$이 성립하려면 $f(k)\ge0$이어야 하므로
$k^3+3k^3+4\ge0$, $k^3+1\ge0$
$(k+1)(k^2-k+1)\ge0$
$k+1\ge0$ ($\because$ $k^2-k+1>0$)
$\therefore$ $k\ge-1$
그런데 $k>0$이므로 부등식 $f(x)\ge0$이 성립하도록 하는 $k$의 값의 범위는
$k>0$
(ii) $k=0$인 경우
$x>0$에서 $f'(x)>0$이고 $f'(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.
$x\ge0$일 때, $f(x)\ge0$이 성립하려면 $f(0)\ge0$이어야 하므로
$4\ge0$
즉, 부등식 $f(x)\ge0$이 성립하도록 하는 $k$의 값은
$k=0$
(iii) $k<0$인 경우
$x\ge k$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $k$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $-2k$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $4k^3+4$ | $\nearrow$ | $4$ 극대 | $\searrow$ | $4k^3+4$ 극소 | $\nearrow$ |

$x\ge k$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $4k^3+4$이므로
$f(x)\ge0$이려면 $4k^3+4\ge0$, $k^3+1\ge0$
$(k+1)(k^2-k+1)\ge0$
$k+1\ge0$ ($\because$ $k^2-k+1>0$)
$\therefore$ $k\ge-1$
그런데 $k<0$이므로 부등식 $f(x)\ge0$이 성립하도록 하는 $k$의 값의 범위는
$-1\le k<0$
(i)~(iii)에서 부등식 $f(x)\ge0$이 성립하도록 하는 $k$의 값의 범위는 $k\ge-1$

## 05 속도와 가속도 46~48쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** 7 | **2** 2 | **3** ③ | **4** 15 | **5** $-6$ |
| **6** ① | **7** $\frac{27}{2}$ | **8** ② | **9** $-20\,\text{m/s}$ | |
| **10** ④ | **11** ㄱ, ㄴ | **12** ㄱ, ㄹ | **13** ③ | **14** ④ |
| **15** 34 | **16** 192 | **17** ④ | **18** $\frac{81}{2}\pi$ | |

**1** 시각 $t$에서의 점 P의 가속도는 $a(t)=v'(t)=-2t+14$
가속도가 0이면 $a(t)=0$에서
$-2t+14=0 \qquad \therefore t=7$

**2** 시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-10t+6$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6t-10$
점 P가 원점을 지나면 위치가 0이므로 $x=0$에서
$t^3-5t^2+6t=0$, $t(t-2)(t-3)=0$
$\therefore t=2$ 또는 $t=3$ ($\because t>0$)
따라서 점 P가 출발 후 처음으로 원점을 지나는 시각은 2이므로 $t=2$에서의 가속도는 $a=12-10=2$

**3** 시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=2t^2+2kt$, $a=\dfrac{dv}{dt}=4t+2k$
$t=2$에서의 점 P의 속도가 20이므로 $v=20$에서
$8+4k=20 \qquad \therefore k=3$
따라서 $t=2$에서의 가속도는 $a=8+2k=8+6=14$

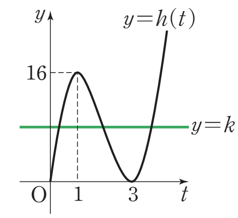
**4** 시각 $t$에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각
$f'(t)=4t^3-6t^2+24t$, $g'(t)=18t^2-12t+k$
두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간이 3번이려면 방정식 $f'(t)=g'(t)$, 즉 $f'(t)-g'(t)=0$이 서로 다른 세 개의 양의 실근을 가져야 한다.

$$\begin{aligned} f'(t)-g'(t)&=4t^3-6t^2+24t-(18t^2-12t+k)\\ &=4t^3-24t^2+36t-k \end{aligned}$$

$\therefore 4t^3-24t^2+36t=k$
$h(t)=4t^3-24t^2+36t$라 하면
$h'(t)=12t^2-48t+36=12(t-1)(t-3)$
$h'(t)=0$인 $t$의 값은 $t=1$ 또는 $t=3$
$t>0$에서 함수 $h(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(t)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $h(t)$ | | ↗ | 16<br>극대 | ↘ | 0<br>극소 | ↗ |

함수 $y=h(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와 만나는 점이 3개가 되도록 하는 $k$의 값의 범위는 $0<k<16$
따라서 정수 $k$는 $1, 2, \cdots, 15$의 15개이다.




**5** 시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=-3t^2+12t-9$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-6t+12$
점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로
$v=0$에서 $-3t^2+12t-9=0$
$t^2-4t+3=0$, $(t-1)(t-3)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=3$
따라서 점 P가 출발 후 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 3이므로 $t=3$에서의 가속도는
$a=-18+12=-6$

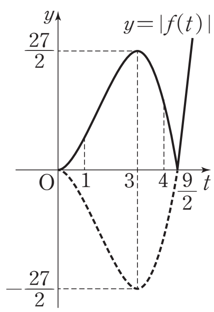
**6** 시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$라 하면
$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2+2at+b$
시각 $t$에서의 점 P의 가속도는 $\dfrac{dv}{dt}=6t+2a$
점 P가 $t=1$에서 운동 방향을 바꾸므로 $t=1$에서의 속도는 0이다.
즉, $v=0$에서 $3+2a+b=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$t=2$에서의 가속도는 0이므로
$12+2a=0 \qquad \therefore a=-6$
이를 ㉠에 대입하면
$3-12+b=0 \qquad \therefore b=9$
$\therefore a+b=-6+9=3$

**7** 시각 $t$에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_1$, $v_2$라 하면
$v_1=\dfrac{dx_1}{dt}=2t^2-8t$, $v_2=\dfrac{dx_2}{dt}=-t^2+t$
두 점 P, Q가 서로 같은 방향으로 움직이면 속도의 부호가 서로 같으므로 $v_1v_2>0$에서
$(2t^2-8t)(-t^2+t)>0$
$2t^2(t-1)(t-4)<0$
이때 $t^2>0$이므로 $(t-1)(t-4)<0$
$\therefore 1<t<4$
한편 두 점 P, Q사이의 거리는
$|x_1-x_2|=\left|\left(\dfrac{2}{3}t^3-4t^2\right)-\left(-\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{1}{2}t^2\right)\right|=\left|t^3-\dfrac{9}{2}t^2\right|$
이때 $f(t)=t^3-\dfrac{9}{2}t^2$이라 하면
$f'(t)=3t^2-9t=3t(t-3)$
$f'(t)=0$인 $t$의 값은 $t=0$ 또는 $t=3$

$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | 0 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(t)$ | | $\searrow$ | $-\frac{27}{2}$ 극소 | $\nearrow$ |

또 $f(t)=t^2\left(t-\frac{9}{2}\right)=0$인 $t$의 값은 $t=0$ 또는 $t=\frac{9}{2}$이므로 함수 $y=|f(t)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 $1<t<4$에서 함수 $|f(t)|$의 최댓값은 $\frac{27}{2}$이므로 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 $\frac{27}{2}$이다.

**8** 물체의 $t$초 후의 속도를 $v$ m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=30-10t$

최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$30-10t=0$ $\quad\therefore t=3$

**9** 물체의 $t$초 후의 속도를 $v$ m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=20-10t$

지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로 $x=0$에서

$20t-5t^2=0,\ -5t(t-4)=0$ $\quad\therefore t=4\ (\because t>0)$

따라서 $t=4$에서의 속도는 $v=20-40=-20$(m/s)

**10** 물체의 $t$초 후의 속도를 $v$ m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=a+2bt$

최고 높이에 도달할 때, 즉 $t=5$에서의 속도는 0이므로

$v=0$에서 $a+10b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$t=5$에서의 높이가 140 m이므로 $x=140$에서

$15+5a+25b=140$ $\quad\therefore a+5b=25$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=50,\ b=-5$

즉, $x=15+50t-5t^2$이므로 높이가 60 m 이상이려면

$15+50t-5t^2\ge 60,\ t^2-10t+9\le 0$

$(t-1)(t-9)\le 0$ $\quad\therefore 1\le t\le 9$

따라서 높이가 60 m 이상인 시간은 8초 동안이다.

**11** ㄱ. $t=1$인 점에서의 접선의 기울기는 0이므로 속도와 속력은 0이다.

즉, $t=1$일 때의 점 P의 속력이 최소이다.

ㄴ. $t=1,\ t=3,\ t=4,\ t=5$인 점에서의 접선의 기울기는 0이고 좌우에서 접선의 기울기의 부호가 바뀌므로 점 P는 운동 방향을 4번 바꾼다.

ㄷ. 점 P는 출발할 때 양의 방향으로 움직이고 $2<t<3$에서 음의 방향, $3<t<4$에서 양의 방향으로 움직인다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

**12** ㄱ. $t=a$인 점에서의 접선의 기울기는 0이므로 $t=a$에서의 점 P의 가속도는 0이다.

ㄴ. $v(a)<0,\ v(c)>0$이므로 $t=a$일 때와 $t=c$일 때 점 P의 운동 방향이 서로 반대이다.

ㄷ. $v(b)=0$이고 $t=b$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=b$에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

즉, $0<t<d$에서 점 P는 운동 방향을 한 번 바꾼다.

ㄹ. $b<t<c$에서 점 P의 속도는 증가한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

**13** $\frac{dl}{dt}=4t+3$

고무줄의 길이가 2배이면 10 cm이므로 $l=10$에서

$2t^2+3t+5=10,\ 2t^2+3t-5=0$

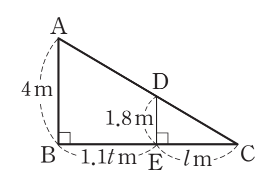
$(2t+5)(t-1)=0$ $\quad\therefore t=1\ (\because t>0)$

따라서 $t=1$에서의 고무줄의 길이의 변화율은

$4+3=7$(cm/s)

**14** 이 사람이 $t$초 동안 움직이는 거리는 $1.1t$ m

그림자의 길이를 $l$ m라 하면 오른쪽 그림에서 $\triangle$ABC$\backsim\triangle$DEC(AA 닮음)이므로




$4:(1.1t+l)=1.8:l$

$1.98t+1.8l=4l,\ 2.2l=1.98t$ $\quad\therefore l=0.9t$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 $\frac{dl}{dt}=0.9$(m/s)

**15** $t$초 후의 점 P의 좌표는 $(t,\ 0)$,

점 Q의 좌표는 $(0,\ 2(t-2))$ (단, $t>2$)

$\overline{PQ}^2=l$이라 하면

$l=t^2+4(t-2)^2=5t^2-16t+16$

$\therefore \frac{dl}{dt}=10t-16$

따라서 $t=5$에서의 $\overline{PQ}^2$의 변화율은 $50-16=34$

**16** $t$초 후의 정육면체의 한 모서리의 길이는 $5+t$

$t$초 후의 정육면체의 부피를 $V$라 하면

$V=(t+5)^3$ $\quad\therefore \frac{dV}{dt}=3(t+5)^2$

정육면체의 부피가 512가 될 때의 시각은 $v=512$에서
$(t+5)^3=512$, $(t+5)^3=8^3$ $\quad\therefore t=3$ ($\because$ $t$는 실수)
따라서 $t=3$에서의 부피의 변화율은 $3\times64=192$

**17** $t$초 후의 원뿔의 밑면의 반지름의 길이는 $10+t$, 높이는 $20-t$이므로 $0<t<20$
$t$초 후의 원뿔의 부피를 $V$라 하면

$$V=\frac{\pi}{3}(10+t)^2(20-t)$$

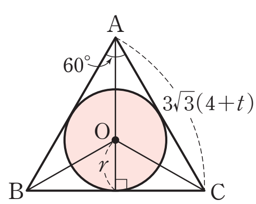
$$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{3}\times2(10+t)(20-t)+\frac{\pi}{3}(10+t)^2\times(-1)$$

$$=\frac{\pi}{3}(10+t)(30-3t)=-\pi(t+10)(t-10)$$

이때 원뿔의 부피가 증가에서 감소로 바뀌는 순간은 $\frac{dV}{dt}$의 부호가 양에서 음으로 바뀌는 순간이므로 $t=10$
따라서 $t=10$에서의 원뿔의 부피는

$$\frac{\pi}{3}\times400\times10=\frac{4000}{3}\pi$$

**18** $t$초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는
$12\sqrt{3}+3\sqrt{3}t=3\sqrt{3}(4+t)$
정삼각형의 세 꼭짓점을 각각 A, B, C라 하고, 내접하는 원의 중심을 O, 반지름의 길이를 $r$라 하면




△ABC
=△ABO+△BCO+△CAO
이므로

$$\frac{1}{2}\times\{3\sqrt{3}(4+t)\}^2\times\sin60°=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}(4+t)\times r\times3$$

$$\frac{27\sqrt{3}}{4}(4+t)^2=\frac{9\sqrt{3}}{2}(4+t)r \qquad \therefore r=\frac{3}{2}(4+t)$$

$t$초 후의 정삼각형에 내접하는 원의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\pi r^2=\pi\times\left\{\frac{3}{2}(4+t)\right\}^2=\frac{9}{4}\pi(4+t)^2$$

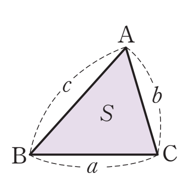
$$\therefore \frac{dS}{dt}=\frac{9}{2}\pi(4+t)$$

정삼각형의 한 변의 길이가 $27\sqrt{3}$이 될 때의 시각은
$3\sqrt{3}(4+t)=27\sqrt{3}$에서 $4+t=9$ $\quad\therefore t=5$
따라서 $t=5$에서의 원의 넓이의 변화율은

$$\frac{9}{2}\pi\times9=\frac{81}{2}\pi$$

**참고** 삼각형의 넓이
두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어진 삼각형 ABC의 넓이 $S$는

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$
$$=\frac{1}{2}ab\sin C$$




# III-1. 부정적분과 정적분

## 01 부정적분 50~54쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** 10 | **2** ④ | **3** $-3$ | **4** ③ | **5** ③ |
| **6** 8 | **7** ④ | **8** $-1$ | **9** 29 | **10** ① |
| **11** $\frac{1}{2}$ | **12** $-3$ | **13** ③ | **14** 20 | |
| **15** $f(x)=-2x^2+4x+3$ | | | **16** 8 | **17** ③ |
| **18** $-12$ | **19** ① | **20** 9 | **21** $-3$ | **22** ③ |
| **23** $-6$ | **24** 3 | **25** 6 | **26** 9 | **27** 3 |
| **28** $-7$ | **29** 1 | **30** ③ | **31** $-3$ | **32** 6 |
| **33** 0 | | | | |

**1** $f(x)=(x^3-2x^2+3x+C)'=3x^2-4x+3$
$\therefore f(-1)=3+4+3=10$

**2** $f(x)=F'(x)=x^2+a$
이때 $f(1)=2$에서
$1+a=2$ $\quad\therefore a=1$
따라서 $f(x)=x^2+1$이므로
$f(2)=4+1=5$

**3** $F'(x)=f(x)$이므로
$3x^2+2ax+2=3x^2-6x+2$
따라서 $2a=-6$이므로
$a=-3$

**4** $h(x)=\{f(x)g(x)\}'$
$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$=2x(3x^2+x)+(x^2-1)(6x+1)$
$=12x^3+3x^2-6x-1$
$\therefore h'(x)=36x^2+6x-6$
$\therefore h(1)+h'(1)=(12+3-6-1)+(36+6-6)$
$=44$

**5** $f(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int(x^3-x^2+1)\,dx\right\}$
$=x^3-x^2+1$
$\therefore f(2)=8-4+1=5$

**6** $\frac{d}{dx}\left\{\int(2x^2+3x+a)\,dx\right\}=2x^2+3x+a$이므로
$2x^2+3x+a=bx^2+cx+3$
따라서 $a=3$, $b=2$, $c=3$이므로
$a+b+c=8$

**7** $\frac{d}{dx}\int\{f(x)-x^2+4\}\,dx=f(x)-x^2+4$,
$\int\frac{d}{dx}\{2f(x)-3x+1\}\,dx=2f(x)-3x+1+C$
이므로
$f(x)-x^2+4=2f(x)-3x+1+C$
$\therefore f(x)=-x^2+3x+3-C$
이때 $f(1)=3$에서
$-1+3+3-C=3 \qquad \therefore C=2$
따라서 $f(x)=-x^2+3x+1$이므로
$f(0)=1$

**8** $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+4x-1)\right\}dx$
$=x^2+4x-1+C$
이때 $f(-1)=-4$에서
$1-4-1+C=-4 \qquad \therefore C=0$
$\therefore f(x)=x^2+4x-1$
따라서 방정식 $f(x)=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 근의 곱은 $-1$이다.

**9** $f(x)=\int(4x^3+3x^2+2x+1)\,dx$
$=x^4+x^3+x^2+x+C$
이때 $f(-1)=-1$에서
$1-1+1-1+C=-1 \qquad \therefore C=-1$
따라서 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x-1$이므로
$f(2)=16+8+4+2-1=29$

**10** $f(x)=\int\left(\frac{1}{3}x^2+3x+2\right)dx-\int\left(\frac{1}{3}x^2+x\right)dx$
$=\int(2x+2)\,dx=x^2+2x+C$
이때 $f(1)=6$에서 $1+2+C=6 \qquad \therefore C=3$
따라서 $f(x)=x^2+2x+3$이므로
$f(-3)=9-6+3=6$

**11** (가)에서 $f(x)=\int(4x-2)\,dx=2x^2-2x+C$
(나)에서 모든 실수 $x$에 대하여 $2x^2-2x+C\geq0$이므로 이차방정식 $2x^2-2x+C=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D\leq0$이다.
$\frac{D}{4}=1-2C\leq0 \qquad \therefore C\geq\frac{1}{2}$
이때 $f(1)=C$이므로 $f(1)\geq\frac{1}{2}$
따라서 $f(1)$의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

**12** $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-4x+3)\,dx$
$=-2x^2+3x+C$
이때 $f(2)=0$에서 $-8+6+C=0$
$\therefore C=2$
따라서 $f(x)=-2x^2+3x+2$이므로
$f(-1)=-2-3+2=-3$

**13** $f'(x)=6x^2-4x+3$이므로
$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x^2-4x+3)\,dx$
$=2x^3-2x^2+3x+C_1$
이때 $f(0)=2$에서 $C_1=2$
따라서 $f(x)=2x^3-2x^2+3x+2$이므로 $f(x)$를 적분하면
$\int(2x^3-2x^2+3x+2)\,dx$
$=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+C$

**14** (나)에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서
$\lim_{x\to1}f(x)=0 \qquad \therefore f(1)=0$
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로
$f'(1)=2a-1$
(가)에서 $f'(1)=3+a$이므로
$2a-1=3+a \qquad \therefore a=4$
즉, $f'(x)=3x+4$이므로
$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x+4)\,dx$
$=\frac{3}{2}x^2+4x+C$
이때 $f(1)=0$에서 $\frac{3}{2}+4+C=0$
$\therefore C=-\frac{11}{2}$
따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+4x-\frac{11}{2}$이므로
$f(3)=\frac{27}{2}+12-\frac{11}{2}=20$

**15** $f'(x)=-4x+4$이므로
$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-4x+4)\,dx$
$=-2x^2+4x+C$
이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1,\ -3)$을 지나므로
$f(-1)=-3$에서 $-2-4+C=-3 \qquad \therefore C=3$
$\therefore f(x)=-2x^2+4x+3$

**16** $f'(x)=3x^2-6x+12$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (3x^2-6x+12)\,dx$

$\quad=x^3-3x^2+12x+C$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$f(1)=-2$에서

$1-3+12+C=-2 \qquad \therefore C=-12$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2+12x-12$

따라서 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2,\ k)$를 지나므로

$f(2)=k$에서

$8-12+24-12=k \qquad \therefore k=8$

**17** $f(x)=\int (3ax-4)\,dx$에서

$f'(x)=3ax-4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ -2)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1)=2$에서

$3a-4=2 \qquad \therefore a=2$

즉, $f'(x)=6x-4$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (6x-4)\,dx$

$\quad=3x^2-4x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ -2)$를 지나므로 $f(1)=-2$에서

$3-4+C=-2 \qquad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=3x^2-4x-1$이므로

$f(3)=27-12-1=14$

**18** (가)에서

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (6x^2-x)\,dx$

$\quad=2x^3-\frac{1}{2}x^2+C$

$f(1)=2-\frac{1}{2}+C=\frac{3}{2}+C$, $f'(1)=6-1=5$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{3}{2}+C\right)=5(x-1)$

$\therefore y=5x-\frac{7}{2}+C \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(나)에서 이 접선의 $x$절편이 $-\frac{1}{2}$이므로

㉠에 $x=-\frac{1}{2}$, $y=0$을 대입하면

$0=-\frac{5}{2}-\frac{7}{2}+C \qquad \therefore C=6$

따라서 $f(x)=2x^3-\frac{1}{2}x^2+6$이므로

$f(-2)=-16-2+6=-12$

**19** $F(x)=xf(x)+3x^4-4x^2+1$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+12x^3-8x$

$xf'(x)=-12x^3+8x=x(-12x^2+8)$

$\therefore f'(x)=-12x^2+8$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (-12x^2+8)\,dx$

$\quad=-4x^3+8x+C$

이때 $f(1)=4$에서 $-4+8+C=4 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=-4x^3+8x$이므로 $f(-1)=4-8=-4$

**20** $F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+2)f'(x)-3x^2+12$

$(x+2)f'(x)=3x^2-12=(x+2)(3x-6)$

$\therefore f'(x)=3x-6$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (3x-6)\,dx$

$\quad=\frac{3}{2}x^2-6x+C$

$F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$F(0)=2f(0)$

이때 $F(0)=30$이므로 $f(0)=15 \qquad \therefore C=15$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+15$이므로

$f(2)=6-12+15=9$

**21** $g(x)=\int xf(x)\,dx$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$g'(x)=xf(x)$

$f(x)$를 $n$차함수라 하면 $g(x)$는 $(n+2)$차함수이므로

$f(x)+g(x)=-x^3+2x^2-3x+1$에서 $g(x)$는 삼차함수, $f(x)$는 일차함수이다.

$f(x)=ax+b$ ($a$, $b$는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$g(x)=\int xf(x)\,dx=\int x(ax+b)\,dx$

$\quad=\int (ax^2+bx)\,dx=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+C$

$f(x)+g(x)=-x^3+2x^2-3x+1$에서

$ax+b+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+C=-x^3+2x^2-3x+1$

즉, $\frac{a}{3}=-1$, $\frac{b}{2}=2$, $a=-3$, $b+C=1$이므로

$a=-3$, $b=4$, $C=-3$

따라서 $g(x)=-x^3+2x^2-3$이므로

$g(2)=-8+8-3=-3$

**22** $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=2x$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int 2x\,dx$

$f(x)g(x)=x^2+C$

이때 $f(3)=2$, $g(3)=4$이므로

$f(3)g(3)=9+C$에서

$8=9+C \qquad \therefore C=-1$

$\therefore f(x)g(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$

따라서 $f(x)=x-1$, $g(x)=x+1$이므로

$f(-1)+g(1)=(-1-1)+(1+1)=0$

**23** $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+1$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int(2x+1)\,dx$

$f(x)+g(x)=x^2+x+C_1$

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2-4x+2$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(3x^2-4x+2)\,dx$

$f(x)g(x)=x^3-2x^2+2x+C_2$

이때 $f(0)=-2$, $g(0)=2$이므로

$f(0)+g(0)=C_1 \qquad \therefore C_1=0$

$f(0)g(0)=C_2 \qquad \therefore C_2=-4$

$\therefore f(x)+g(x)=x^2+x$,

$\quad f(x)g(x)=x^3-2x^2+2x-4=(x-2)(x^2+2)$

따라서 $f(x)=x-2$, $g(x)=x^2+2$이므로

$f(2)-g(-2)=(2-2)-(4+2)=-6$

**24** $g(x)=\int\{2x-f'(x)\}\,dx$에서

$g(x)=x^2-f(x)+C_1$

$\therefore f(x)+g(x)=x^2+C_1$

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=6x^2-6x-2$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(6x^2-6x-2)\,dx$

$f(x)g(x)=2x^3-3x^2-2x+C_2$

이때 $f(0)=1$, $g(0)=0$이므로

$f(0)+g(0)=C_1 \qquad \therefore C_1=1$

$f(0)g(0)=C_2 \qquad \therefore C_2=0$

$\therefore f(x)+g(x)=x^2+1$,

$\quad f(x)g(x)=2x^3-3x^2-2x$

$\qquad\qquad =(2x+1)(x^2-2x)$

따라서 $f(x)=2x+1$, $g(x)=x^2-2x$이므로

$f(1)+g(2)=(2+1)+(4-4)=3$

**25** (i) $x\ge1$일 때,

$f(x)=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C_1$

(ii) $x<1$일 때,

$f(x)=\int(3x^2-2x)\,dx=x^3-x^2+C_2$

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+C_1 & (x\ge1)\\ x^3-x^2+C_2 & (x<1)\end{cases}$

이때 $f(0)=2$에서 $C_2=2$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$1-1+C_2=\frac{1}{2}+C_1$

$2=\frac{1}{2}+C_1 \qquad \therefore C_1=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2} & (x\ge1)\\ x^3-x^2+2 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(3)=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=6$

**26** (i) $x<0$일 때,

$F(x)=\int(-2x)\,dx=-x^2+C_1$

(ii) $x\ge0$일 때,

$F(x)=\int k(2x-x^2)\,dx=\int(-kx^2+2kx)\,dx$

$\qquad =-\frac{k}{3}x^3+kx^2+C_2$

(i), (ii)에서 $F(x)=\begin{cases}-x^2+C_1 & (x<0)\\ -\frac{k}{3}x^3+kx^2+C_2 & (x\ge0)\end{cases}$

함수 $F(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to0-}F(x)=F(0)$에서 $C_1=C_2$

이때 $F(2)-F(-3)=21$에서

$-\frac{8}{3}k+4k+C_2-(-9+C_1)=21$

$\frac{4}{3}k+9=21$ ($\because C_1=C_2$)

$\therefore k=9$

**27** 함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)=\begin{cases}x-1 & (x\ge0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$

(i) $x\ge0$일 때,

$f(x)=\int(x-1)\,dx=\frac{1}{2}x^2-x+C_1$

(ii) $x<0$일 때,

$f(x)=\int(-1)\,dx=-x+C_2$

유형편

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-x+C_1 & (x\ge 0) \\ -x+C_2 & (x<0) \end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로 $f(0)=0$에서

$C_1=0$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$에서

$C_2=C_1 \qquad \therefore C_2=0$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-x & (x\ge 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$이므로

$f(2)+f(-3)=(2-2)+3=3$

**28** $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (2x^2-6x)\,dx$

$=\frac{2}{3}x^3-3x^2+C$

$f'(x)=2x^2-6x=2x(x-3)$이므로

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이므로

$f(0)=2$에서 $C=2 \qquad \therefore f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이므로 극솟값은

$f(3)=18-27+2=-7$

**29** 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표는 0, 2

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고,

$x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이다.

$f'(x)=ax(x-2)\ (a<0)$라 하면

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int ax(x-2)\,dx$

$=\int (ax^2-2ax)\,dx=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소, $x=2$에서 극대이므로

$f(0)=-1$에서 $C=-1$

$f(2)=3$에서 $\frac{8}{3}a-4a+C=3$

$-\frac{4}{3}a-1=3 \qquad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2-1$이므로

$f(1)=-1+3-1=1$

**30** $f(x)$의 최고차항이 $x^3$이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $3x^2$이다.

(가), (나)에서 $f'(-2)=f'(2)=0$

즉, $f'(x)=3(x+2)(x-2)=3x^2-12$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (3x^2-12)\,dx$

$=x^3-12x+C$

또 (나)에서 $f(2)=-3$이므로

$8-24+C=-3 \qquad \therefore C=13$

따라서 $f(x)=x^3-12x+13$이므로

$f(-3)=-27+36+13=22$

**31** $f(x+y)=f(x)+f(y)+1$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+1$

$\therefore f(0)=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

도함수의 정의에 의하여

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+1-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+1}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ ($\because$ ㉠)

$=f'(0)=2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 2\,dx$

$=2x+C$

이때 ㉠에서 $C=-1$

따라서 $f(x)=2x-1$이므로

$f(-1)=-2-1=-3$

**32** $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

미분계수의 정의에 의하여

$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2)+f(h)+2h(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)}{h}+2(2+h)\right\}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)-f(0)}{h}+2(2+h)\right\}$ ($\because$ ㉠)

$=f'(0)+4$

즉, $f'(0)+4=3$이므로 $f'(0)=-1$

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+xh(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)}{h}+x(x+h)\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)-f(0)}{h}+x(x+h)\right\}\ (\because ㉠)$$
$$=f'(0)+x^2$$
$$=x^2-1$$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (x^2-1)\,dx=\frac{1}{3}x^3-x+C$

이때 ㉠에서 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$이므로

$f(3)=9-3=6$

**33** $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)\qquad \therefore f(0)=0\qquad \cdots\cdots ㉠$

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+2xh}{h}$$
$$=2x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$
$$=2x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\ (\because ㉠)$$
$$=2x+f'(0)$$

이때 $f'(0)=k$($k$는 상수)로 놓으면 $f'(x)=2x+k$이므로

$F(x)=\int (x-2)(2x+k)\,dx$

$\therefore F'(x)=(x-2)(2x+k)=2x^2+(k-4)x-2k$

이때 함수 $F(x)$의 극값이 존재하지 않으려면 방정식 $F'(x)=0$은 중근 또는 허근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $2x^2+(k-4)x-2k=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$D=(k-4)^2+16k\le 0$, $k^2+8k+16\le 0$

$(k+4)^2\le 0\qquad \therefore k=-4$

즉, $f'(x)=2x-4$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (2x-4)\,dx=x^2-4x+C$

이때 $f(0)=0$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=x^2-4x$이므로

$f(4)=16-16=0$

## 02 정적분 (1)

55~59쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ④ | **2** 2 | **3** 4 | **4** 30 | **5** 12 |
| **6** ② | **7** ① | **8** ③ | **9** ⑤ | **10** ② |
| **11** ① | **12** 20 | **13** 12 | **14** 44 | **15** 2 |
| **16** $-2$ | **17** ① | **18** 4 | **19** ④ | **20** $\frac{28}{3}$ |
| **21** ② | **22** 24 | **23** $2\sqrt{2}$ | **24** ⑤ | **25** 2 |
| **26** 9 | **27** ② | **28** $-20$ | **29** ① | **30** 4 |
| **31** $-2$ | **32** ② | | | |

유형편

**1** $\int_3^1 (x-1)(-3x+1)\,dx+\int_2^2 (5y-2)(y+4)\,dy$

$$=\int_3^1 (-3x^2+4x-1)\,dx+0$$
$$=\Big[-x^3+2x^2-x\Big]_3^1$$
$$=(-1+2-1)-(-27+18-3)=12$$

**2** $\int_0^a (-2x^3+8x)\,dx=\Big[-\frac{1}{2}x^4+4x^2\Big]_0^a=-\frac{1}{2}a^4+4a^2$

즉, $-\frac{1}{2}a^4+4a^2=8$이므로

$a^4-8a^2+16=0$, $(a^2-4)^2=0$

$a^2=4\qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$

**3** $f(x)=4x^3-9x^2+k$이므로

$$\int_{-1}^2 f(x)\,dx=\int_{-1}^2 (4x^3-9x^2+k)\,dx$$
$$=\Big[x^4-3x^3+kx\Big]_{-1}^2$$
$$=(16-24+2k)-(1+3-k)$$
$$=3k-12$$

따라서 $3k-12=0$이므로 $k=4$

**4** 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-4$

$$\therefore \int_{-\alpha}^{\beta} (3x^2-1)\,dx=\Big[x^3-x\Big]_{-\alpha}^{\beta}$$
$$=(\beta^3-\beta)-(-\alpha^3+\alpha)$$
$$=\alpha^3+\beta^3-\alpha-\beta$$
$$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)$$
$$=8+24-2=30$$

**5** 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 함수 $f(x)$의 부정적분이므로 $F(x)=G(x)+C$ ($C$는 상수)라 하면

㈎에서 $C=1\qquad \therefore F(x)=G(x)+1$

㈏에서 $G(5)=15$이므로 $F(5)=G(5)+1=16$

$\therefore \int_3^5 f(x)\,dx=F(5)-F(3)=16-4=12$

**6** $f(x)=x^3+ax^2+bx$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

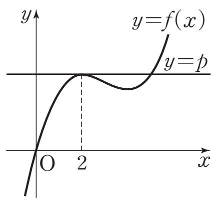
$f'(x)=3x^2+2ax+b$

㈎에서 $f(2)=f(5)$이므로

$8+4a+2b=125+25a+5b$

$\therefore\ 7a+b=-39$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㈏에서 삼차방정식 $f(x)-p=0$, 즉 $f(x)=p$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=p$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.




이때 실수 $p$의 최댓값이 $f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.

즉, $f'(2)=0$이므로 $12+4a+b=0$

$\therefore\ 4a+b=-12$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-9$, $b=24$

따라서 $f(x)=x^3-9x^2+24x$이므로

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2(x^3-9x^2+24x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-3x^3+12x^2\right]_0^2$$
$$=4-24+48=28$$

**7** $$\int_{-1}^2(3x^2+x)\,dx-3\int_{-1}^2(x^2-x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^2(3x^2+x)\,dx-\int_{-1}^2(3x^2-3x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^2\{(3x^2+x)-(3x^2-3x)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^2 4x\,dx=\left[2x^2\right]_{-1}^2$$
$$=8-2=6$$

**8** $$\int_2^3\frac{x^3}{x-1}\,dx+\int_3^2\frac{1}{t-1}\,dt$$
$$=\int_2^3\frac{x^3}{x-1}\,dx-\int_2^3\frac{1}{x-1}\,dx$$
$$=\int_2^3\frac{x^3-1}{x-1}\,dx$$
$$=\int_2^3\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\,dx$$
$$=\int_2^3(x^2+x+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_2^3$$
$$=\left(9+\frac{9}{2}+3\right)-\left(\frac{8}{3}+2+2\right)=\frac{59}{6}$$

**9** $$\int_0^2(x^2+2x+k)\,dx-2\int_2^0(x^2-2x)\,dx$$
$$=\int_0^2(x^2+2x+k)\,dx+\int_0^2(2x^2-4x)\,dx$$
$$=\int_0^2(3x^2-2x+k)\,dx=\left[x^3-x^2+kx\right]_0^2$$
$$=8-4+2k=2k+4$$

따라서 $2k+4=20$이므로 $k=8$

**10** $$2\int_1^k(x-1)\,dx-\int_1^k 4\,dx$$
$$=\int_1^k(2x-2)\,dx-\int_1^k 4\,dx=\int_1^k(2x-6)\,dx$$
$$=\left[x^2-6x\right]_1^k=(k^2-6k)-(1-6)$$
$$=k^2-6k+5=(k-3)^2-4$$

따라서 주어진 정적분의 값은 $k=3$일 때 최소이다.

**11** $$\int_{-1}^2\{2f(x)-3g(x)\}\,dx=5 \quad\cdots\cdots ㉠$$
$$\int_{-1}^2\{2f(x)-g(x)\}\,dx=-1 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉡$-$㉠을 하면

$$\int_{-1}^2\{2f(x)-g(x)\}\,dx-\int_{-1}^2\{2f(x)-3g(x)\}\,dx$$
$$=-6$$
$$\int_{-1}^2[\{2f(x)-g(x)\}-\{2f(x)-3g(x)\}]\,dx=-6$$
$$2\int_{-1}^2 g(x)\,dx=-6$$
$$\therefore\ \int_{-1}^2 g(x)\,dx=-3$$

이 식을 ㉠에 대입하여 정리하면 $\displaystyle\int_{-1}^2 f(x)\,dx=-2$

$$\therefore\ \int_{-1}^2\{f(x)-g(x)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^2 f(x)\,dx-\int_{-1}^2 g(x)\,dx$$
$$=-2-(-3)=1$$

**12** $$\int_0^1 x\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2dx+\frac{1}{3}\int_0^1 x^3\,dx+\cdots+\frac{1}{n}\int_0^1 x^n\,dx$$
$$=\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{1}{n}x^n\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}x^4+\cdots+\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

즉, $1-\frac{1}{n+1}=\frac{20}{21}$이므로 $\frac{1}{n+1}=\frac{1}{21}$

$n+1=21$ $\quad\therefore n=20$

**13** $\int_0^2 (3x^2-4x+1)\,dx+\int_2^3 (3t^2-4t+1)\,dt$

$=\int_0^2 (3x^2-4x+1)\,dx+\int_2^3 (3x^2-4x+1)\,dx$

$=\int_0^3 (3x^2-4x+1)\,dx=\Big[x^3-2x^2+x\Big]_0^3$

$=27-18+3=12$

**14** $\int_2^3 (\sqrt{x}-3)^2dx-\int_2^1 (\sqrt{x}-3)^2dx+\int_1^3 (\sqrt{x}+3)^2dx$

$=\int_2^3 (\sqrt{x}-3)^2dx+\int_1^2 (\sqrt{x}-3)^2dx+\int_1^3 (\sqrt{x}+3)^2dx$

$=\int_1^3 (\sqrt{x}-3)^2dx+\int_1^3 (\sqrt{x}+3)^2dx$

$=\int_1^3 (2x+18)\,dx=\Big[x^2+18x\Big]_1^3$

$=(9+54)-(1+18)=44$

**15** $\int_3^4 f(x)\,dx$

$=\int_3^{-2} f(x)\,dx+\int_{-2}^4 f(x)\,dx$

$=-\int_{-2}^3 f(x)\,dx+\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx+\int_{-1}^4 f(x)\,dx$

$=-6+3+5=2$

**16** $\int_{-2}^2 f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx$에서

$\int_{-2}^0 f(x)\,dx+\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx$

$\therefore \int_{-2}^0 f(x)\,dx=0$

$\therefore \int_0^2 f(x)\,dx=\int_{-2}^0 f(x)\,dx=0$

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f(0)=1$에서 $c=1$

$f(x)=ax^2+bx+1$이므로 $\int_0^2 f(x)\,dx=0$에서

$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 (ax^2+bx+1)\,dx$

$=\Big[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+x\Big]_0^2$

$=\frac{8}{3}a+2b+2$

즉, $\frac{8}{3}a+2b+2=0$이므로

$4a+3b=-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\int_{-2}^0 f(x)\,dx=0$에서

$\int_{-2}^0 f(x)\,dx=\int_{-2}^0 (ax^2+bx+1)\,dx$

$=\Big[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+x\Big]_{-2}^0$

$=-\left(-\frac{8}{3}a+2b-2\right)$

$=\frac{8}{3}a-2b+2$

즉, $\frac{8}{3}a-2b+2=0$이므로

$4a-3b=-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{3}{4}$, $b=0$

따라서 $f(x)=-\frac{3}{4}x^2+1$이므로

$f(2)=-3+1=-2$

**17** $\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^1 (x^2+1)\,dx+\int_1^3 2x\,dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3+x\Big]_0^1+\Big[x^2\Big]_1^3$

$=\left(\frac{1}{3}+1\right)+(9-1)=\frac{28}{3}$

**18** $a>1$이므로

$\int_{-a}^a f(x)\,dx$

$=\int_{-a}^1 (2x-1)\,dx+\int_1^a (-x^2+2x)\,dx$

$=\Big[x^2-x\Big]_{-a}^1+\Big[-\frac{1}{3}x^3+x^2\Big]_1^a$

$=(1-1)-(a^2+a)+\left(-\frac{1}{3}a^3+a^2\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)$

$=-\frac{1}{3}a^3-a-\frac{2}{3}$

즉, $-\frac{1}{3}a^3-a-\frac{2}{3}=-26$이므로

$a^3+3a-76=0$, $(a-4)(a^2+4a+19)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>1$)

**19** $f(x)=x^3-3x$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

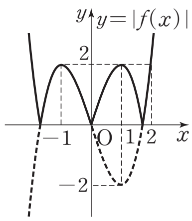
$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $2$ 극대 | $\searrow$ | $-2$ 극소 | $\nearrow$ |

유형편

즉, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.




(i) $-1\le t\le 2$일 때, $-1\le x\le t$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 2이므로

$g(t)=2$

(ii) $t\ge 2$일 때, $-1\le x\le t$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 $f(t)$이므로 $g(t)=t^3-3t$

(i), (ii)에서 $g(t)=\begin{cases} t^3-3t & (t\ge 2) \\ 2 & (-1\le t\le 2) \end{cases}$

$$\therefore \int_{-1}^{4} g(t)\,dt=\int_{-1}^{2} 2\,dt+\int_{2}^{4}(t^3-3t)\,dt$$

$$=\Big[2t\Big]_{-1}^{2}+\Big[\frac{1}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2\Big]_{2}^{4}$$

$$=4-(-2)+(64-24)-(4-6)=48$$

**20** $|x^2-2x|=\begin{cases} x^2-2x & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -x^2+2x & (0\le x\le 2) \end{cases}$이므로

$$\int_{-2}^{3}|x^2-2x|\,dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x)\,dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x)\,dx$$

$$=\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2\Big]_{-2}^{0}+\Big[-\frac{1}{3}x^3+x^2\Big]_{0}^{2}+\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2\Big]_{2}^{3}$$

$$=-\Big(-\frac{8}{3}-4\Big)+\Big(-\frac{8}{3}+4\Big)+(9-9)-\Big(\frac{8}{3}-4\Big)=\frac{28}{3}$$

**21** $|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x\ge 1) \\ -x+1 & (x\le 1) \end{cases}$이므로

$$\int_{0}^{a}|x-1|\,dx$$

$$=\int_{0}^{1}(-x+1)\,dx+\int_{1}^{a}(x-1)\,dx$$

$$=\Big[-\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{0}^{1}+\Big[\frac{1}{2}x^2-x\Big]_{1}^{a}$$

$$=\Big(-\frac{1}{2}+1\Big)+\Big(\frac{1}{2}a^2-a\Big)-\Big(\frac{1}{2}-1\Big)$$

$$=\frac{1}{2}a^2-a+1$$

즉, $\frac{1}{2}a^2-a+1=5$이므로 $a^2-2a-8=0$

$(a+2)(a-4)=0 \qquad \therefore a=4\ (\because a>1)$

**22** $2x^3+6|x|=\begin{cases} 2x^3+6x & (x\ge 0) \\ 2x^3-6x & (x\le 0) \end{cases}$이므로

$$\int_{-3}^{2}(2x^3+6|x|)\,dx-\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)\,dx$$

$$=\int_{-3}^{0}(2x^3-6x)\,dx+\int_{0}^{2}(2x^3+6x)\,dx-\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)\,dx$$

$$=\int_{-3}^{0}(2x^3-6x)\,dx+\int_{-2}^{-3}(2x^3-6x)\,dx+\int_{0}^{2}(2x^3+6x)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(2x^3-6x)\,dx+\int_{0}^{2}(2x^3+6x)\,dx \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$$=\Big[\frac{1}{2}x^4-3x^2\Big]_{-2}^{0}+\Big[\frac{1}{2}x^4+3x^2\Big]_{0}^{2}$$

$$=-(8-12)+(8+12)$$

$$=24$$

**다른 풀이**

㉠에서

$n$이 홀수일 때, $\int_{-a}^{0}x^n\,dx=-\int_{0}^{a}x^n\,dx$이므로

$$\int_{-2}^{0}(2x^3-6x)\,dx+\int_{0}^{2}(2x^3+6x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{2}(-2x^3+6x)\,dx+\int_{0}^{2}(2x^3+6x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{2}12x\,dx$$

$$=\Big[6x^2\Big]_{0}^{2}$$

$$=24$$

**23** $x|x-a|=\begin{cases} x^2-ax & (x\ge a) \\ -x^2+ax & (x\le a) \end{cases}$이므로

$$\int_{0}^{4}x|x-a|\,dx$$

$$=\int_{0}^{a}(-x^2+ax)\,dx+\int_{a}^{4}(x^2-ax)\,dx$$

$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\Big]_{0}^{a}+\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\Big]_{a}^{4}$$

$$=\Big(-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^3\Big)+\Big(\frac{64}{3}-8a\Big)-\Big(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3\Big)$$

$$=\frac{1}{3}a^3-8a+\frac{64}{3}$$

$f(a)=\frac{1}{3}a^3-8a+\frac{64}{3}$라 하면

$f'(a)=a^2-8$

$\quad\ =(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})$

$f'(a)=0$인 $a$의 값은

$a=2\sqrt{2}\ (\because 0<a<4)$

$0<a<4$에서 함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $a$ | 0 | $\cdots$ | $2\sqrt{2}$ | $\cdots$ | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(a)$ | | $\searrow$ | 극소 | $\nearrow$ | |

따라서 함수 $f(a)$는 $a=2\sqrt{2}$일 때 최소이다.

**24** $\int_{-2}^{2}(4x^3+3x^2-2x+1)\,dx$

$=\int_{-2}^{2}(4x^3-2x)\,dx+\int_{-2}^{2}(3x^2+1)\,dx$

$=0+2\int_{0}^{2}(3x^2+1)\,dx$

$=2\Big[x^3+x\Big]_0^2=2(8+2)=20$

**25** $\int_{-a}^{a}(4x^7+5x^5+3x^2+x-2)\,dx$

$=\int_{-a}^{a}(4x^7+5x^5+x)\,dx+\int_{-a}^{a}(3x^2-2)\,dx$

$=0+2\int_{0}^{a}(3x^2-2)\,dx$

$=2\Big[x^3-2x\Big]_0^a=2(a^3-2a)$

즉, $2(a^3-2a)=8$이므로

$a^3-2a-4=0$, $(a-2)(a^2+2a+2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because$ $a$는 실수)

**26** $\int_{-1}^{7}f(x)\,dx=\int_{-1}^{5}f(x)\,dx+\int_{5}^{7}f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{5}f(x)\,dx-\int_{7}^{5}f(x)\,dx$

$=7-(-2)=9$

한편 $f(-x)=-f(x)$이면 $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=0$

$\therefore \int_{1}^{7}f(x)\,dx=\int_{1}^{-1}f(x)\,dx+\int_{-1}^{7}f(x)\,dx$

$=-\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\int_{-1}^{7}f(x)\,dx$

$=0+9=9$

**27** $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2\,dx=\int_{-1}^{1}(x-2)^2\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^2-4x+4)\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^2+4)\,dx+\int_{-1}^{1}(-4x)\,dx$

$=2\int_{0}^{1}(x^2+4)\,dx+0$

$=2\Big[\frac{1}{3}x^3+4x\Big]_0^1=2\left(\frac{1}{3}+4\right)=\frac{26}{3}$

$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(x-2)\,dx$

$=\int_{-1}^{1}x\,dx+\int_{-1}^{1}(-2)\,dx$

$=0+2\int_{0}^{1}(-2)\,dx$

$=2\Big[-2x\Big]_0^1$

$=2\times(-2)$

$=-4$

따라서 $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=k\left\{\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\right\}^2-2$에서

$\frac{26}{3}=k(-4)^2-2$

$16k=\frac{32}{3}\qquad \therefore k=\frac{2}{3}$

**28** $f(-x)+f(x)=0$에서 $f(-x)=-f(x)$이므로

$(-x)^2f(-x)=-x^2f(x)$

$-xf(-x)=xf(x)$

$\therefore \int_{-1}^{1}(3x^2-2x+4)f(x)\,dx$

$=3\int_{-1}^{1}x^2f(x)\,dx-2\int_{-1}^{1}xf(x)\,dx+4\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$

$=0-2\times2\int_{0}^{1}xf(x)\,dx+0$

$=-4\int_{0}^{1}xf(x)\,dx$

$=-4\times5$

$=-20$

**29** 모든 실수 $x$에 대하여

$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$

즉, 함수 $h(x)$는 홀수 차수의 항만 있으므로 함수 $h'(x)$는 짝수 차수의 항 또는 상수항만 있고 $xh'(x)$는 홀수 차수의 항만 있다.

$\therefore \int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)\,dx$

$=\int_{-3}^{3}xh'(x)\,dx+5\int_{-3}^{3}h'(x)\,dx$

$=0+5\times2\int_{0}^{3}h'(x)\,dx$

$=10\Big[h(x)\Big]_0^3$

$=10\{h(3)-h(0)\}$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 $f(0)=-f(0)$에서 $f(0)=0$이므로

$h(0)=f(0)g(0)=0$

따라서 ㉠에서 $10h(3)=10$이므로

$h(3)=1$

**30** $f(x+3)=f(x)$이므로

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_3^6 f(x)\,dx=\int_6^9 f(x)\,dx=\int_9^{12} f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_0^{12} f(x)\,dx=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^6 f(x)\,dx+\int_6^9 f(x)\,dx+\int_9^{12} f(x)\,dx$$

$$=4\int_0^3 f(x)\,dx=4\times1=4$$

**31** $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_1^3 f(x)\,dx=\int_3^5 f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_{-1}^5 f(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^1 f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^5 f(x)\,dx$$

$$=3\int_{-1}^1 f(x)\,dx$$

$$=3\int_{-1}^1 (-x^2)\,dx=3\times2\int_0^1 (-x^2)\,dx$$

$$=6\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=6\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-2$$

**32** (가)에서

$$\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$

$$\int_{-1}^0 g(x)dx=\int_{-1}^0 \{-f(x+1)+1\}\,dx$$

$$=-\int_{-1}^0 f(x+1)\,dx+\int_{-1}^0 dx$$

$$=-\int_0^1 f(x)\,dx+\Big[x\Big]_{-1}^0$$

적분 구간과 함수를 모두 $x$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$$=-\frac{1}{6}-(-1)=\frac{5}{6}$$

$$\therefore \int_{-1}^1 g(x)\,dx=\int_{-1}^0 g(x)\,dx+\int_0^1 g(x)\,dx$$

$$=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$$

(나)에서

$$\int_{-3}^{-1} g(x)\,dx=\int_{-1}^1 g(x)\,dx,$$

$$\int_1^2 g(x)\,dx=\int_{-1}^0 g(x)\,dx$$이므로

$$\int_{-3}^2 g(x)\,dx$$

$$=\int_{-3}^{-1} g(x)\,dx+\int_{-1}^1 g(x)\,dx+\int_1^2 g(x)\,dx$$

$$=2\int_{-1}^1 g(x)\,dx+\int_{-1}^0 g(x)\,dx$$

$$=2\times1+\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$$

## 03 정적분(2)

60~62쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** ① | **2** 9 | **3** ② | **4** 8 | **5** 18 |
| **6** ⑤ | **7** $-6$ | **8** $-4$ | **9** ③ | **10** $-2$ |
| **11** $\frac{45}{2}$ | **12** 0 | **13** $\frac{1}{2}$ | **14** 16 | **15** 8 |
| **16** ② | **17** 0 | **18** $-\frac{1}{3}$ | **19** ④ | **20** 3 |
| **21** ⑤ | | | | |

**1** $\int_{-1}^1 f(t)\,dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면

$f(x)=3x^2-2x+k$

이를 $\int_{-1}^1 f(t)\,dt=k$에 대입하면

$$\int_{-1}^1 (3t^2-2t+k)\,dt=k$$

$$2\int_0^1 (3t^2+k)\,dt=k$$

$$2\Big[t^3+kt\Big]_0^1=k,\ 2(1+k)=k \qquad \therefore k=-2$$

따라서 $f(x)=3x^2-2x-2$이므로

$f(-2)=12+4-2=14$

**2** $\int_0^3 tf'(t)\,dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면

$f(x)=6x+k \qquad \therefore f'(x)=6$

이를 $\int_0^3 tf'(t)\,dt=k$에 대입하면

$$\int_0^3 6t\,dt=k,\ \Big[3t^2\Big]_0^3=k \qquad \therefore k=27$$

따라서 $f(x)=6x+27$이므로

$f(-3)=-18+27=9$

**3** $\int_0^1 |f(t)|\,dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면

$f(x)=x^3-4kx$

$f(1)>0$에서 $1-4k>0 \qquad \therefore k<\frac{1}{4}$

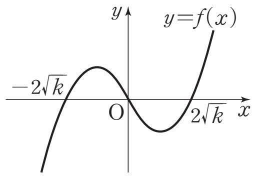
이때 $k>0$이므로 $0<k<\frac{1}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

곡선 $y=f(x)$와 $x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면

$x^3-4kx=0,\ x(x+2\sqrt{k})(x-2\sqrt{k})=0$

$\therefore x=-2\sqrt{k}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2\sqrt{k}$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$0<x<2\sqrt{k}$일 때, $f(x)<0$
$x\geq 2\sqrt{k}$일 때, $f(x)\geq 0$
이때 ㉠에서 $2\sqrt{k}<1$이므로

$$\int_0^1 |f(t)|\,dt$$
$$=\int_0^{2\sqrt{k}}\{-f(t)\}\,dt+\int_{2\sqrt{k}}^1 f(t)\,dt$$
$$=\int_0^{2\sqrt{k}}(-t^3+4kt)\,dt+\int_{2\sqrt{k}}^1(t^3-4kt)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{4}t^4+2kt^2\right]_0^{2\sqrt{k}}+\left[\frac{1}{4}t^4-2kt^2\right]_{2\sqrt{k}}^1$$
$$=(-4k^2+8k^2)+\left(\frac{1}{4}-2k\right)-(4k^2-8k^2)$$
$$=8k^2-2k+\frac{1}{4}$$

즉, $8k^2-2k+\frac{1}{4}=k$이므로
$32k^2-12k+1=0$, $(8k-1)(4k-1)=0$
$\therefore k=\frac{1}{8}$ ($\because$ ㉠)
따라서 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x$이므로
$f(2)=8-1=7$

**4** 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면
$f(x)=3x^2+2ax+3$
주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면
$0=a^3+a^3+3a-5$
$2a^3+3a-5=0$
$(a-1)(2a^2+2a+5)=0$
$\therefore a=1$ ($\because a$는 실수)
따라서 $f(x)=3x^2+2x+3$이므로
$f(a)=f(1)=3+2+3=8$

**5** 주어진 함수 $f(x)$를 $x$에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\{(x+1)^3+(x+1)\}-(x^3+x)$$
$$=3x^2+3x+2$$
$$\therefore \int_0^2 f'(x)\,dx=\int_0^2(3x^2+3x+2)\,dx$$
$$=\left[x^3+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^2$$
$$=8+6+4$$
$$=18$$

**6** 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면
$3f(x)+3xf'(x)=9f(x)+2$
$\therefore f(x)=\frac{1}{2}xf'(x)-\frac{1}{3}$ ...... ㉠
주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$3f(1)=0+2$ $\quad\therefore f(1)=\frac{2}{3}$
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f(1)=\frac{1}{2}f'(1)-\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}f'(1)-\frac{1}{3}$
$\therefore f'(1)=2$

**7** 함수 $f(x)$의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f(1)=0$ ...... ㉠

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{f(x)}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{x-1}{f(x)-f(1)}\times(x+1)\right\}\ (\because ㉠)$$
$$=\frac{2}{f'(1)}$$

즉, $\frac{2}{f'(1)}=\frac{1}{3}$이므로 $f'(1)=6$
주어진 함수 $f(x)$를 $x$에 대하여 미분하면
$f'(x)=3x^2+ax+2$
이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f'(1)=3+a+2=a+5$
즉, $f'(1)=6$이므로 $a+5=6$ $\quad\therefore a=1$

$$\therefore f(x)=\int_1^x(3t^2+t+2)\,dt=\left[t^3+\frac{1}{2}t^2+2t\right]_1^x$$
$$=x^3+\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{7}{2}$$
$$\therefore f(-1)=-1+\frac{1}{2}-2-\frac{7}{2}=-6$$

**8** 주어진 등식에서
$x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt=x^3-2x^2+x$
양변을 $x$에 대하여 미분하면
$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-4x+1$
$\therefore \int_1^x f(t)\,dt=3x^2-4x+1$
양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면
$f(x)=6x-4$
$\therefore f(0)=-4$

**9** 주어진 등식에서
$x\int_{-1}^x f(t)\,dt-\int_{-1}^x tf(t)\,dt=ax^3+x^2+bx-3$
양변을 $x$에 대하여 미분하면
$\int_{-1}^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3ax^2+2x+b$
$\therefore \int_{-1}^x f(t)\,dt=3ax^2+2x+b$ ...... ㉠

유형편

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-a+1-b-3$

$\therefore a+b=-2$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=3a-2+b$

$\therefore 3a+b=2$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-4$

$\therefore \int_{-1}^{x} f(t)\,dt=6x^2+2x-4$

$\therefore \int_{-1}^{2} f(x)\,dx=24+4-4=24$

**10** 주어진 등식에서

$3xf(x)=7x\int_{1}^{x} f(t)\,dt-7\int_{1}^{x} tf(t)\,dt-6x^2$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$3f(x)+3xf'(x)$

$=7\int_{1}^{x} f(t)\,dt+7xf(x)-7xf(x)-12x$

$\therefore 3f(x)+3xf'(x)=7\int_{1}^{x} f(t)\,dt-12x$ …… ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$3f(1)=0-6 \quad \therefore f(1)=-2$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$3f(1)+3f'(1)=0-12$

$\therefore f(1)+f'(1)=-4$

㉡을 대입하면

$-2+f'(1)=-4$

$\therefore f'(1)=-2$

**11** 주어진 함수 $f(x)$를 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-5x-6=(x+1)(x-6)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은

$x=-1$ 또는 $x=6$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $6$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로 극댓값은

$f(-1)=\int_{2}^{-1} (t^2-5t-6)\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2-6t\right]_{2}^{-1}$

$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+6\right)-\left(\frac{8}{3}-10-12\right)=\frac{45}{2}$

**12** 주어진 함수 $f(x)$를 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+ax+b$

이때 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 $\frac{4}{3}$를 가지므로

$f'(1)=0$에서

$1+a+b=0 \quad \therefore a+b=-1$ …… ㉠

$f(1)=\frac{4}{3}$에서

$f(1)=\int_{0}^{1} (t^2+at+b)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_{0}^{1}$

$=\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b$

즉, $\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b=\frac{4}{3}$이므로 $a+2b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=3$

$\therefore f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이므로 극솟값은

$f(3)=\int_{0}^{3} (t^2-4t+3)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_{0}^{3}$

$=9-18+9=0$

**13** 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f(x)=\begin{cases} -x+3 & (x\ge 2) \\ x-1 & (x\le 2) \end{cases}$

$F(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,dt$에서 $F'(x)=f(x)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 1, 3이므로 $f(x)$, 즉 $F'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $F(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ |

따라서 함수 $F(x)$는 $x=3$에서 극대이므로 극댓값은

$F(3)=\int_{0}^{3} f(t)\,dt$

$=\int_{0}^{2} (t-1)\,dt+\int_{2}^{3} (-t+3)\,dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^2-t\right]_{0}^{2}+\left[-\frac{1}{2}t^2+3t\right]_{2}^{3}$

$=(2-2)+\left(-\frac{9}{2}+9\right)-(-2+6)=\frac{1}{2}$

**14** $F(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,dt$에서 $F'(x)=f(x)$

함수 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면 방정식 $F'(x)=0$, 즉 $f(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

함수 $f(x)=x^3-12x+a$에서

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 극값이 $f(-2)$, $f(2)$이므로 방정식

$f(x)=0$이 중근 또는 허근을 가지려면

$f(-2)f(2)\geq 0$에서

$(a+16)(a-16)\geq 0$

$\therefore\ a\leq -16$ 또는 $a\geq 16$

그런데 $a>0$이므로 $a\geq 16$

따라서 양수 $a$의 최솟값은 16이다.

**15** 주어진 함수 $f(x)$를 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+2)^2-2(x+2)\}-(x^2-2x)=4x$

$f'(x)=0$인 $x$의 값은 $x=0$

$-2\leq x\leq 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ | |

이때 $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$의 값을 각각 구하면

$$f(-2)=\int_{-2}^{0}(t^2-2t)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{-2}^{0}$$
$$=-\left(-\frac{8}{3}-4\right)=\frac{20}{3}$$
$$f(0)=\int_{0}^{2}(t^2-2t)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{8}{3}-4=-\frac{4}{3}$$
$$f(1)=\int_{1}^{3}(t^2-2t)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{1}^{3}$$
$$=(9-9)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{2}{3}$$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{20}{3}$, 최솟값은 $-\frac{4}{3}$이므로

$M=\frac{20}{3}$, $m=-\frac{4}{3}$

$\therefore\ M-m=8$

**16** 주어진 등식에서

$$\int_{0}^{x}tf(t)\,dt-x\int_{0}^{x}f(t)\,dt=x^4-2x^3+2x^2$$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$xf(x)-\int_{0}^{x}f(t)\,dt-xf(x)=4x^3-6x^2+4x$$
$$\therefore\ \int_{0}^{x}f(t)\,dt=-4x^3+6x^2-4x$$

양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면

$$f(x)=-12x^2+12x-4=-12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-1$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 최댓값 $-1$을 갖는다.

**17** $F(x)=\int_{1}^{x}f(t)\,dt$에서 $F'(x)=f(x)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 1, 4이므로 $f(x)$, 즉 $F'(x)$의 부호를 조사하여 구간 $[0, 4]$에서 함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $F(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | |

따라서 함수 $F(x)$의 최댓값은

$$F(1)=\int_{1}^{1}f(t)\,dt=0$$

**18** $f(x)=\int_{0}^{x}2t(x-t)dt$에서

$$f(x)=2x\int_{0}^{x}t\,dt-2\int_{0}^{x}t^2\,dt$$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2\int_{0}^{x}t\,dt+2x^2-2x^2$$
$$\therefore\ f'(x)=2\int_{0}^{x}t\,dt=2\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{x}=2\times\frac{1}{2}x^2=x^2$$

모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 $-1\leq x\leq 3$에서 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 가지므로 최솟값은

$$f(-1)=\int_{0}^{-1}2t(-1-t)\,dt=\int_{0}^{-1}(-2t^2-2t)\,dt$$
$$=\left[-\frac{2}{3}t^3-t^2\right]_{0}^{-1}=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$$

**19** 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x^2}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_{1}^{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{F(x^2)-F(1)}{(x-1)(x+1)}\times(x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times\lim_{x\to 1}(x+1)$$
$$=2F'(1)=2f(1)=2(3-2+1)=4$$

**20** 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-3h}^{1+h}f(x)\,dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{1-3h}^{1+h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)+F(1)-F(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$$
$$-\lim_{h\to0}\frac{F(1-3h)-F(1)}{-3h}\times(-3)$$
$$=F'(1)+3F'(1)$$
$$=4F'(1)=4f(1)$$

즉, $4f(1)=8$이므로 $f(1)=2$

$2-3+a=2$

$\therefore a=3$

**21** $g(x)=\int_{1}^{x}(x-t)f(t)\,dt$라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{g(x)}{x-2}=3$$

$x\to2$일 때 (분모) $\to$ 0이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\to$ 0에서

$\lim_{x\to2}g(x)=0 \qquad \therefore g(2)=0$

$$\lim_{x\to2}\frac{g(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$$

$\therefore g'(2)=3$

$g(x)=\int_{1}^{x}(x-t)f(t)\,dt$에서

$$g(x)=x\int_{1}^{x}f(t)\,dt-\int_{1}^{x}tf(t)\,dt \qquad \cdots\cdots ㉠$$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$g'(x)=\int_{1}^{x}f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)$$
$$\therefore g'(x)=\int_{1}^{x}f(t)\,dt$$

양변에 $x=2$를 대입하면

$$g'(2)=\int_{1}^{2}f(t)\,dt \qquad \therefore \int_{1}^{2}f(t)\,dt=3$$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

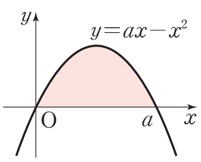
$$g(2)=2\int_{1}^{2}f(t)\,dt-\int_{1}^{2}tf(t)\,dt$$
$$0=2\times3-\int_{1}^{2}tf(t)\,dt \qquad \therefore \int_{1}^{2}tf(t)\,dt=6$$
$$\therefore \int_{1}^{2}(4x+1)f(x)\,dx$$
$$=4\int_{1}^{2}xf(x)\,dx+\int_{1}^{2}f(x)\,dx$$
$$=4\times6+3=27$$

# III-2. 정적분의 활용

## 01 정적분의 활용 64~70쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** 3 | **2** ③ | **3** 3 | **4** $\frac{71}{6}$ | **5** ③ |
| **6** ④ | **7** 14 | **8** ① | **9** 9 | **10** 24 |
| **11** $\frac{3}{4}$ | **12** ② | **13** ④ | **14** $\frac{4}{3}$ | **15** ④ |
| **16** $\frac{\sqrt{6}}{9}$ | **17** $\frac{1}{2}$ | **18** $-16$ | **19** 4 | **20** $\frac{4}{3}$ |
| **21** 8 | **22** $\frac{9}{4}$ | **23** 2 | **24** 1 | **25** $\frac{1}{3}$ |
| **26** $\frac{11}{2}$ | **27** ③ | **28** 10 | **29** ③ | **30** 2 |
| **31** ㄱ, ㄷ | **32** ③ | **33** 100 m | **34** $\frac{26}{3}$ | **35** $\frac{7}{2}$ |
| **36** ⑤ | **37** 144 m | **38** ③ | **39** ④ | **40** ② |
| **41** 4 | **42** ㄴ, ㄷ | **43** ㄱ, ㄹ | **44** ③ | |

**1** 곡선 $y=ax-x^2$과 $x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면




$ax-x^2=0,\ x(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$

$a>0$이므로 곡선과 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{0}^{a}(ax-x^2)\,dx=\left[\frac{a}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{a}=\frac{a^3}{6}$$

따라서 $\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2}$이므로 $a^3=27 \qquad \therefore a=3\ (\because a>0)$

**2** $0\le x\le2$에서 $x^2-2x\le0$이므로

$y=|x^2-2x|+1=-(x^2-2x)+1=-x^2+2x+1$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{0}^{2}(-x^2+2x+1)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{0}^{2}=\frac{10}{3}$$

**3** $S_2=\int_{0}^{1}x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}=\frac{1}{4}$

$S_1+S_2=1\times1=1$이므로

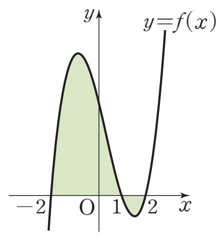
$S_1=1-S_2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3$$

**4** $f(x)=\int(3x^2-2x-4)\,dx=x^3-x^2-4x+C$

$f(1)=0$에서 $C=4 \qquad \therefore f(x)=x^3-x^2-4x+4$

곡선 $y=f(x)$와 $x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x^3-x^2-4x+4=0$

$(x+2)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

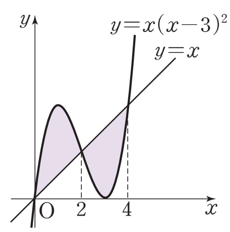
따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-2}^{1}(x^3-x^2-4x+4)\,dx+\int_{1}^{2}(-x^3+x^2+4x-4)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{-2}^{1}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+2x^2-4x\right]_{1}^{2}$$

$$=\frac{71}{6}$$

**5** 곡선 $y=x(x-3)^2$과 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x(x-3)^2=x$

$x(x-2)(x-4)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

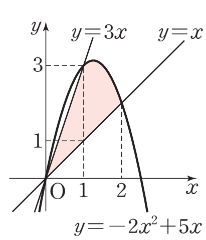
$$S=\int_{0}^{2}\{x(x-3)^2-x\}\,dx+\int_{2}^{4}\{x-x(x-3)^2\}\,dx$$

$$=\int_{0}^{2}(x^3-6x^2+8x)\,dx+\int_{2}^{4}(-x^3+6x^2-8x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2\right]_{0}^{2}+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-4x^2\right]_{2}^{4}$$

$$=8$$

**6** 곡선 $y=-2x^2+5x$와 두 직선 $y=3x$, $y=x$의 교점의 $x$좌표를 각각 구하면




$-2x^2+5x=3x$에서

$2x(x-1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

$-2x^2+5x=x$에서 $2x(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times2\times1+\int_{1}^{2}\{(-2x^2+5x)-x\}\,dx$$

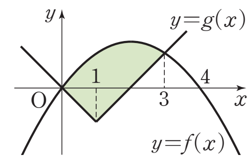
$$=1+\int_{1}^{2}(-2x^2+4x)\,dx$$

$$=1+\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_{1}^{2}$$

$$=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$$

**7** $g(x)=\begin{cases}x-2 & (x\ge1)\\ -x & (x\le1)\end{cases}$

(i) $x\ge1$일 때, 곡선 $y=\frac{1}{3}x(4-x)$와 직선 $y=x-2$의 교점의 $x$좌표를 구하면




$\frac{1}{3}x(4-x)=x-2$

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=3\ (\because\ x\ge1)$

(ii) $x\le1$일 때, 곡선 $y=\frac{1}{3}x(4-x)$와 직선 $y=-x$의 교점의 $x$좌표를 구하면

$\frac{1}{3}x(4-x)=-x$

$x^2-7x=0$, $x(x-7)=0$

$\therefore\ x=0\ (\because\ x\le1)$

$$\therefore\ S=\int_{0}^{1}\left\{\frac{1}{3}x(4-x)-(-x)\right\}dx+\int_{1}^{3}\left\{\frac{1}{3}x(4-x)-(x-2)\right\}dx$$

$$=\int_{0}^{1}\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{3}x\right)dx+\int_{1}^{3}\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{7}{6}x^2\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2+2x\right]_{1}^{3}$$

$$=\frac{7}{2}$$

$\therefore\ 4S=4\times\frac{7}{2}=14$

**8** 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{0}^{2}\{-x^2+2x-(x^2-4x)\}\,dx+\int_{2}^{4}\{-x^2+6x-8-(x^2-4x)\}\,dx$$

$$=\int_{0}^{2}(-2x^2+6x)\,dx+\int_{2}^{4}(-2x^2+10x-8)\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_{0}^{2}+\left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x\right]_{2}^{4}$$

$$=\frac{40}{3}$$

**9** 곡선 $y=x^2$을 $x$축에 대하여 대칭이동하면

$y=-x^2$

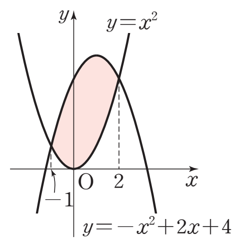
이 곡선을 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 5만큼 평행이동하면

$y-5=-(x-1)^2$

$\therefore\ y=-x^2+2x+4$

$\therefore\ g(x)=-x^2+2x+4$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x^2=-x^2+2x+4$

$2(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x+4)-x^2\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=9$$

**10** 두 삼차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 $x$좌표가 $-1$, $0$, $1$이므로 $f(x)-g(x)=ax(x+1)(x-1)$ $(a\neq0)$이라 하자.

$-1\leq x\leq 0$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-1}^{0}\{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_{-1}^{0}ax(x+1)(x-1)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(ax^3-ax)\,dx=\left[\frac{a}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{a}{4}$$

즉, $\frac{a}{4}=1$이므로 $a=4$

따라서 $f(x)-g(x)=4x(x+1)(x-1)$이므로

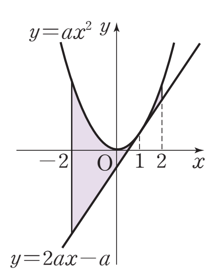
$f(2)-g(2)=4\times2\times3\times1=24$

**11** $f(x)=ax^2$이라 하면 $f'(x)=2ax$

점 $(1,\ a)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2a$이므로 접선의 방정식은

$y-a=2a(x-1)\qquad \therefore\ y=2ax-a$

곡선 $y=ax^2$과 접선 $y=2ax-a$ 및 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S$라 하면




$$S=\int_{-2}^{2}\{ax^2-(2ax-a)\}\,dx$$

$$=2\int_{0}^{2}(ax^2+a)\,dx$$

$$=2\left[\frac{a}{3}x^3+ax\right]_{0}^{2}=\frac{28}{3}a$$

따라서 $\frac{28}{3}a=7$이므로 $a=\frac{3}{4}$

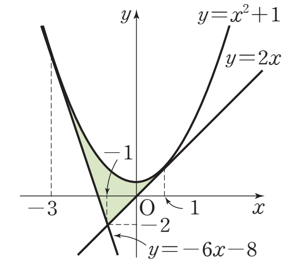
**12** $f(x)=x^2+1$이라 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+1)=2t(x-t)\qquad \therefore\ y=2tx-t^2+1$

이 직선이 점 $(-1,\ -2)$를 지나므로

$-2=-2t-t^2+1$




$t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0$

$\therefore\ t=-3$ 또는 $t=1$

즉, 접선의 방정식은

$y=-6x-8$ 또는 $y=2x$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-3}^{-1}\{(x^2+1)-(-6x-8)\}\,dx+\int_{-1}^{1}\{(x^2+1)-2x\}\,dx$$

$$=\int_{-3}^{-1}(x^2+6x+9)\,dx+2\int_{0}^{1}(x^2+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x\right]_{-3}^{-1}+2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}=\frac{16}{3}$$

**13** $x>0$일 때, 점 B에서 두 함수 $y=ax^2+2$, $y=2x$의 그래프가 접하므로 이차방정식 $ax^2+2=2x$, 즉 $ax^2-2x+2=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=1-2a=0\qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}$

점 B의 $x$좌표를 구하면

$\frac{1}{2}x^2+2=2x$, $\frac{1}{2}x^2-2x+2=0$

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0\qquad \therefore\ x=2$

두 함수 $y=\frac{1}{2}x^2+2$, $y=2|x|$의 그래프로 둘러싸인 부분이 $y$축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=2\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2+2-2x\right)dx=2\left[\frac{1}{6}x^3+2x-x^2\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}$$

**14** 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$\int_{0}^{2}(x^2-k)\,dx=0$, $\left[\frac{1}{3}x^3-kx\right]_{0}^{2}=0$

$\frac{8}{3}-2k=0\qquad \therefore\ k=\frac{4}{3}$

**15** 두 도형 $A$, $B$의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{0}^{2}\{(-x^2+k)-(x^3+x^2)\}\,dx=0$$

$$\int_{0}^{2}(-x^3-2x^2+k)\,dx=0$$

$$\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+kx\right]_{0}^{2}=0$$

$-4-\frac{16}{3}+2k=0\qquad \therefore\ k=\frac{14}{3}$

**16** $x^3-x+k=0$의 근 중에서 가장 큰 값을 $\alpha\,(\alpha>0)$라 하면

$\alpha^3-\alpha+k=0$ $\quad\therefore\ k=-\alpha^3+\alpha$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 두 도형 $A$, $B$의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^{\alpha}(x^3-x+k)\,dx=0$

$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+kx\right]_0^{\alpha}=0$

$\frac{1}{4}\alpha^4-\frac{1}{2}\alpha^2+k\alpha=0$

$\alpha^4-2\alpha^2+4k\alpha=0$

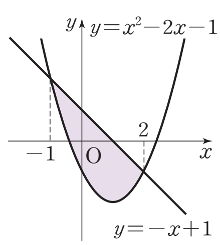
㉠을 대입하여 정리하면

$3\alpha^4-2\alpha^2=0$, $\alpha^2(3\alpha^2-2)=0$

$\therefore\ \alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ $(\because\ \alpha>0)$

이를 ㉠에 대입하면 $k=-\frac{6\sqrt{6}}{27}+\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{9}$

**17** 곡선 $y=x^2-2x-1$과 직선 $y=-x+1$의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x^2-2x-1=-x+1$

$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

곡선 $y=x^2-2x-1$과 직선 $y=-x+1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면

$S_1=\int_{-1}^{2}\{(-x+1)-(x^2-2x-1)\}\,dx$

$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$

곡선 $y=x^2-2x-1$과 두 직선 $y=-x+1$, $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면

$S_2=\int_{-1}^{k}\{(-x+1)-(x^2-2x-1)\}\,dx$

$=\int_{-1}^{k}(-x^2+x+2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{k}$

$=-\frac{k^3}{3}+\frac{k^2}{2}+2k+\frac{7}{6}$

주어진 조건에서 $S_1=2S_2$이므로

$\frac{9}{2}=2\left(-\frac{k^3}{3}+\frac{k^2}{2}+2k+\frac{7}{6}\right)$

$4k^3-6k^2-24k+13=0$

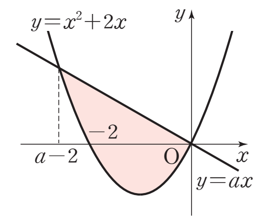
$(2k-1)(2k^2-2k-13)=0$

$\therefore\ k=\frac{1}{2}$ $(\because\ -1<k<2)$

**18** 곡선 $y=x^2+2x$와 $x$축의 교점의 $x$좌표를 구하면

$x^2+2x=0$, $x(x+2)=0$ $\quad\therefore\ x=-2$ 또는 $x=0$

곡선 $y=x^2+2x$와 직선 $y=ax$의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x^2+2x=ax$

$x\{x-(a-2)\}=0$

$\therefore\ x=a-2$ 또는 $x=0$

곡선 $y=x^2+2x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면

$S_1=\int_{a-2}^{0}\{ax-(x^2+2x)\}\,dx$

$=\int_{a-2}^{0}\{-x^2+(a-2)x\}\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a-2}{2}x^2\right]_{a-2}^{0}$

$=-\frac{(a-2)^3}{6}$

곡선 $y=x^2+2x$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면

$S_2=\int_{-2}^{0}(-x^2-2x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}=\frac{4}{3}$

주어진 조건에서 $S_1=2S_2$이므로

$-\frac{(a-2)^3}{6}=2\times\frac{4}{3}$

$\therefore\ (a-2)^3=-16$

**19** 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=1$의 교점의 $x$좌표를 구하면

$x^2=1$ $\quad\therefore\ x=1$ $(\because\ x\geq 0)$

곡선 $y=ax^2$과 직선 $y=1$의 교점의 $x$좌표를 구하면

$ax^2=1$ $\quad\therefore\ x=\frac{1}{\sqrt{a}}$ $(\because\ x\geq 0)$

곡선 $y=x^2$과 $y$축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면

$S_1=\int_0^1(1-x^2)\,dx$

$=\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$

곡선 $y=ax^2$과 $y$축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면

$S_2=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(1-ax^2)\,dx$

$=\left[x-\frac{a}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}=\frac{2}{3\sqrt{a}}$

주어진 조건에서 $S_1=2S_2$이므로

$\frac{2}{3}=2\times\frac{2}{3\sqrt{a}}$, $\sqrt{a}=2$

$\therefore\ a=4$

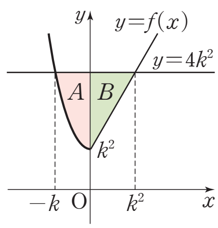
**20** (i) $x<0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4k^2$의 교점의 $x$좌표를 구하면

$3x^2+k^2=4k^2 \qquad \therefore\ x=-k\ (\because\ x<0)$

(ii) $x\geq 0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4k^2$의 교점의 $x$좌표를 구하면

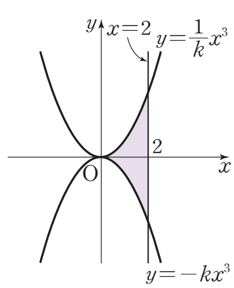
$3x+k^2=4k^2 \qquad \therefore\ x=k^2$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4k^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $y$축에 의하여 이등분되므로 오른쪽 그림에서 $A=B$이다.




$$\int_{-k}^{0}\{4k^2-(3x^2+k^2)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{k^2}\{4k^2-(3x+k^2)\}\,dx$$
$$\int_{-k}^{0}(-3x^2+3k^2)\,dx=\int_{0}^{k^2}(-3x+3k^2)\,dx$$
$$\Big[-x^3+3k^2x\Big]_{-k}^{0}=\Big[-\frac{3}{2}x^2+3k^2x\Big]_{0}^{k^2}$$
$$2k^3=\frac{3}{2}k^4$$
$$\frac{3}{2}k^4-2k^3=0,\ \frac{3}{2}k^3\left(k-\frac{4}{3}\right)=0$$
$$\therefore\ k=\frac{4}{3}\ (\because\ k>0)$$

**21** 두 곡선 $y=\frac{1}{k}x^3$, $y=-kx^3$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S$라 하면




$$S=\int_{0}^{2}\left\{\frac{1}{k}x^3-(-kx^3)\right\}dx$$
$$=\left(k+\frac{1}{k}\right)\int_{0}^{2}x^3\,dx$$
$$=\left(k+\frac{1}{k}\right)\Big[\frac{1}{4}x^4\Big]_{0}^{2}$$
$$=4\left(k+\frac{1}{k}\right)$$

이때 $k>0$, $\frac{1}{k}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$k+\frac{1}{k}\geq 2\sqrt{k\times\frac{1}{k}}=2$ (단, 등호는 $k=1$일 때 성립)

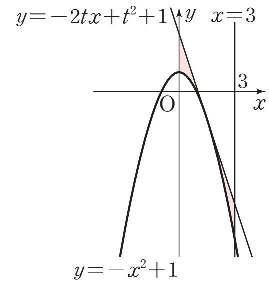
따라서 구하는 최솟값은 $4\times 2=8$

**22** $f(x)=-x^2+1$이라 하면 $f'(x)=-2x$

점 $(t,\ -t^2+1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+1)=-2t(x-t) \qquad \therefore\ y=-2tx+t^2+1$

이때 $0<t<3$이므로 곡선 $y=-x^2+1$과 직선 $y=-2tx+t^2+1$ 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S$라 하면



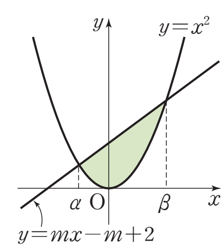

$$S=\int_{0}^{3}\{(-2tx+t^2+1)-(-x^2+1)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{3}(x^2-2tx+t^2)\,dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x\Big]_{0}^{3}$$
$$=3t^2-9t+9=3\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

따라서 $0<t<3$에서 구하는 최솟값은 $\frac{9}{4}$이다.

**23** 점 (1, 2)를 지나는 직선의 기울기를 $m$이라 하면

$y-2=m(x-1) \qquad \therefore\ y=mx-m+2$

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=mx-m+2$의 교점의 $x$좌표를 $\alpha$, $\beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 $\alpha$, $\beta$는 이차방정식 $x^2=mx-m+2$, 즉 $x^2-mx+m-2=0$의 두 실근이다.




이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m,\ \alpha\beta=m-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=mx-m+2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S$라 하면

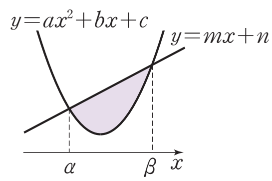
$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{(mx-m+2)-x^2\}\,dx$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}(-x^2+mx-m+2)\,dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{m}{2}x^2-(m-2)x\Big]_{\alpha}^{\beta}$$
$$=-\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{m}{2}(\beta^2-\alpha^2)-(m-2)(\beta-\alpha)$$
$$=-\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{\alpha+\beta}{2}(\beta^2-\alpha^2)-\alpha\beta(\beta-\alpha)$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

이때 ㉠에서 $\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{m^2-4m+8}$

$$\therefore\ S=\frac{1}{6}(\sqrt{m^2-4m+8})^3$$
$$=\frac{1}{6}\{\sqrt{(m-2)^2+4}\}^3$$

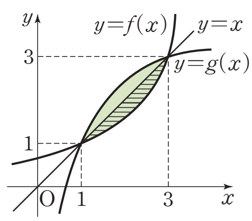
따라서 도형의 넓이는 $m=2$일 때, 즉 직선의 기울기가 2일 때 최소이다.

참고 곡선 $y=ax^2+bx+c$와 직선 $y=mx+n$의 교점의 $x$좌표를 $\alpha$, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하면 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$는




$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{(ax^2+bx+c)-(mx+n)\}\,dx$$
$$=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

**24** 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는



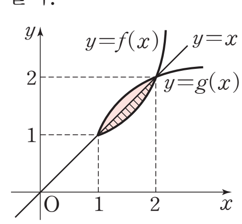

$$\frac{1}{2}\times(1+3)\times2-\int_1^3 f(x)\,dx$$
$$=4-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}$$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 빗금 친 부분의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\times\frac{1}{2}=1$$

**25** 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음 그림에서 빗금 친 부분의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표를 구하면




$x^2-2x+2=x$

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

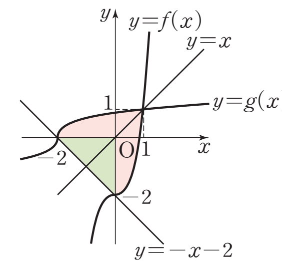
$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=2\int_1^2\{x-(x^2-2x+2)\}\,dx$$
$$=2\int_1^2(-x^2+3x-2)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{3}$$

**26** 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$ 및 $y$축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$ 및 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표를 구하면




$3x^3-2=x$

$(x-1)(3x^2+3x+2)=0$

$\therefore\ x=1$

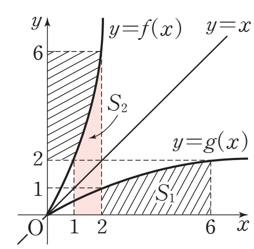
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$ 및 $y$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_0^1\{x-(3x^3-2)\}\,dx$$
$$=\int_0^1(-3x^3+x+2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^1$$
$$=\frac{7}{4}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\times2\times2+2\times\frac{7}{4}=\frac{11}{2}$$

**27** 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

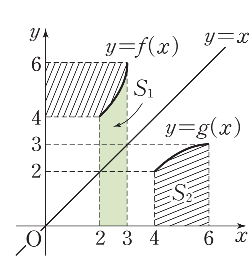



$\int_2^6 g(x)\,dx=S_1$, $\int_1^2 f(x)\,dx=S_2$라 하면 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$S_1+S_2=2\times6-1\times2=10$

$$\therefore\ \int_2^6 g(x)\,dx=S_1=10-S_2=10-\int_1^2(x^2+x)\,dx$$
$$=10-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_1^2=\frac{37}{6}$$

**28** 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.




$\int_2^3 f(x)\,dx=S_1$, $\int_4^6 g(x)\,dx=S_2$라 하면 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

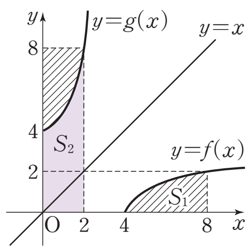
$$\int_2^3 f(x)\,dx+\int_4^6 g(x)\,dx=S_1+S_2$$
$$=3\times6-2\times4=10$$

유형편

**29** 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\int_4^8 f(x)\,dx=S_1$,

$\int_0^2 g(x)\,dx=S_2$라 하면 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로




$$\int_4^8 f(x)\,dx+\int_0^2 g(x)\,dx=S_1+S_2=2\times8=16$$

**30** $$\int_1^3 |2t-t^2|\,dt=\int_1^2 (2t-t^2)\,dt+\int_2^3 (-2t+t^2)\,dt$$
$$=\left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_1^2+\left[-t^2+\frac{1}{3}t^3\right]_2^3$$
$$=2$$

**31** ㄱ. $t=1$에서의 위치는

$$2+\int_0^1 (12-3t^2)\,dt=2+\left[12t-t^3\right]_0^1=13$$

ㄴ. $t=0$에서 $t=3$까지 위치의 변화량은

$$\int_0^3 (12-3t^2)\,dt=\left[12t-t^3\right]_0^3=9$$

ㄷ. $t=1$에서 $t=3$까지 움직인 거리는

$$\int_1^3 |12-3t^2|\,dt$$
$$=\int_1^2 (12-3t^2)\,dt+\int_2^3 (-12+3t^2)\,dt$$
$$=\left[12t-t^3\right]_1^2+\left[-12t+t^3\right]_2^3=12$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

**32** 자동차가 5 km를 달리는 데 걸린 시간을 $a$분이라 하면

$\int_0^a \frac{2}{5}t\,dt=5$, $\left[\frac{1}{5}t^2\right]_0^a=5$

$\frac{1}{5}a^2=5$ $\quad\therefore a=5$ ($\because a>0$)

즉, 자동차가 출발하여 5분 동안은 $\frac{2}{5}t$(km/m)의 속도로 달리고, 그 이후로는 일정한 속도로 달린다.

이때 $t=5$일 때 속도는 $\frac{2}{5}\times5=2$(km/m)이므로 출발한 지 5분 이후로는 2 km/m의 일정한 속도로 달린다.

$$\therefore v(t)=\begin{cases}\frac{2}{5}t & (0\le t\le5)\\ 2 & (5<t\le10)\end{cases}$$

따라서 이 자동차가 출발한 후 10분 동안 달린 거리는

$$\int_0^5 \frac{2}{5}t\,dt+\int_5^{10} 2\,dt=\left[\frac{1}{5}t^2\right]_0^5+\left[2t\right]_5^{10}=15(\text{km})$$

**33** 자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서

$20-2t=0$ $\quad\therefore t=10$

따라서 브레이크를 밟고 10초 후까지 자동차가 움직인 거리는

$$\int_0^{10} |20-2t|\,dt=\int_0^{10} (20-2t)\,dt$$
$$=\left[20t-t^2\right]_0^{10}$$
$$=100(\text{m})$$

**34** 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서

$-t^2+7t-10=0$

$t^2-7t+10=0$

$(t-2)(t-5)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=5$

따라서 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |-t^2+7t-10|\,dt=\int_0^2 (t^2-7t+10)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{2}t^2+10t\right]_0^2$$
$$=\frac{26}{3}$$

**35** 두 점 P, Q의 $t=a$에서의 위치를 각각 $x_P(a)$, $x_Q(a)$라 하면

$$x_P(a)=0+\int_0^a (3t^2-4t-4)\,dt$$
$$=\left[t^3-2t^2-4t\right]_0^a$$
$$=a^3-2a^2-4a$$

$$x_Q(a)=0+\int_0^a (3-t)\,dt$$
$$=\left[3t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^a$$
$$=3a-\frac{1}{2}a^2$$

이때 두 점 P, Q가 만날 때는 $x_P(a)=x_Q(a)$이므로

$a^3-2a^2-4a=3a-\frac{1}{2}a^2$

$2a^3-3a^2-14a=0$

$a(a+2)(2a-7)=0$

$\therefore a=\frac{7}{2}$ ($\because a>0$)

따라서 출발 후 두 점 P, Q가 만나는 시각은

$t=\frac{7}{2}$

**36** 점 P가 원점을 출발하여 다시 원점으로 돌아오는 시각을 $t=a$라 하면 $t=0$에서 $t=a$까지의 점 P의 위치의 변화량은 0이다.

즉, $\int_0^a v_1(t)\,dt=0$에서

$\int_0^a (2-t)dt=0$

$\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^a=0$, $2a-\frac{1}{2}a^2=0$

$a^2-4a=0$, $a(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

따라서 $t=0$에서 $t=4$까지 점 Q가 움직인 거리는

$\int_0^4 |v_2(t)|\,dt=\int_0^4 3t\,dt=\left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^4=24$

**37** $\int_0^4 7t\,dt+\int_4^8 (40-3t)\,dt=\left[\frac{7}{2}t^2\right]_0^4+\left[40t-\frac{3}{2}t^2\right]_4^8$
$=144(\mathrm{m})$

**38** 물체가 최고 지점에 도달할 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서

$20-10t=0$ $\quad\therefore t=2$

따라서 $t=2$일 때 최고 지점에 도달하므로 물체의 높이는

$10+\int_0^2 (20-10t)\,dt=10+\left[20t-5t^2\right]_0^2=30(\mathrm{m})$

**39** 공이 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서

$5a-10t=0$ $\quad\therefore t=\frac{a}{2}$

따라서 $t=\frac{a}{2}$일 때 공의 높이가 80 m이므로

$\int_0^{\frac{a}{2}} (5a-10t)\,dt=80$

$\left[5at-5t^2\right]_0^{\frac{a}{2}}=80$

$\frac{5}{2}a^2-\frac{5}{4}a^2=80$, $a^2=64$

$\therefore a=8$ ($\because a>0$)

**40** 공이 처음 쏘아 올린 위치로 다시 돌아오는 것은 4초 후이므로

$\int_0^4 (a-10t)\,dt=0$

$\left[at-5t^2\right]_0^4=0$

$4a-80=0$ $\quad\therefore a=20$

공이 지면에 떨어지는 시각을 $t=k$라 하면 공이 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로

$60+\int_0^k (20-10t)\,dt=0$

$60+\left[20t-5t^2\right]_0^k=0$

$60+20k-5k^2=0$

$k^2-4k-12=0$, $(k+2)(k-6)=0$

$\therefore k=6$ ($\because k>0$)

따라서 공이 지면에 떨어질 때까지 걸리는 시간은 6초이다.

**41** $v(t)=0$인 $t$의 값은

$t=1$ 또는 $t=4$

따라서 움직인 거리는

$\int_1^4 |v(t)|\,dt=\frac{1}{2}\times(1+3)\times2=4$

**42** ㄱ. $|v(t)|$의 값은 $t=3$일 때 최대이다.

ㄴ. $v(t)=0$인 $t$의 값은 $t=2$

즉, $t=2$일 때 운동 방향을 바꾼다.

ㄷ. $\int_0^2 v(t)\,dt=\int_2^3 |v(t)|\,dt$에서

$\int_0^2 v(t)\,dt=-\int_2^3 v(t)\,dt$

$t=3$에서의 점 P의 위치는

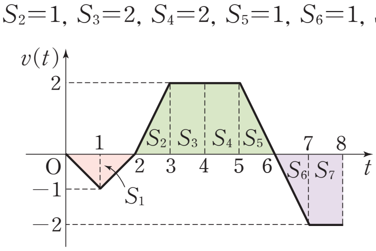
$$0+\int_0^3 v(t)\,dt=\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^3 v(t)\,dt$$
$$=-\int_2^3 v(t)\,dt+\int_2^3 v(t)\,dt$$
$$=0$$

즉, $t=3$일 때 점 P는 원점에 있다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**43** 다음 그림에서 속도 $v(t)$의 그래프와 $t$축이 이루는 각 부분의 넓이를 $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, $S_5$, $S_6$, $S_7$이라 하면

$S_1=1$, $S_2=1$, $S_3=2$, $S_4=2$, $S_5=1$, $S_6=1$, $S_7=2$




ㄱ. $v(t)=0$인 $t$의 값은 $t=2$ 또는 $t=6$

즉, $0<t<8$에서 운동 방향을 두 번 바꾼다.

ㄴ. $t=0$에서 $t=4$까지 움직인 거리는

$\int_0^4 |v(t)|\,dt=S_1+S_2+S_3=1+1+2=4$

ㄷ. $t=3$에서의 위치는

$$0+\int_0^3 v(t)\,dt=-S_1+S_2$$

$$=-1+1=0$$

즉, $t=3$일 때 원점에 있다.

ㄹ. $t=4$에서의 위치는

$$0+\int_0^4 v(t)\,dt=-S_1+S_2+S_3$$

$$=-1+1+2=2$$

$t=8$에서의 위치는

$$0+\int_0^8 v(t)\,dt$$

$$=-S_1+S_2+S_3+S_4+S_5-S_6-S_7$$

$$=-1+1+2+2+1-1-2=2$$

즉, $t=4$일 때와 $t=8$일 때의 위치는 같다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

**44** 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 출발 후 시각 $t=a$에서 처음으로 운동 방향을 바꾼다.

즉, 시각 $t=a$에서의 점 P의 위치는 $-8$이므로

$$0+\int_0^a v(t)\,dt=-8$$

$$\therefore \int_0^a v(t)\,dt=-8$$

시각 $t=c$에서의 점 P의 위치는 $-6$이므로

$$0+\int_0^c v(t)\,dt=-6$$

$$\therefore \int_0^c v(t)\,dt=-6$$

$\int_0^b v(t)\,dt=\int_b^c v(t)\,dt$에서

$$\int_0^b v(t)\,dt=\int_b^0 v(t)\,dt+\int_0^c v(t)\,dt$$

$$\int_0^b v(t)\,dt=-\int_0^b v(t)\,dt+\int_0^c v(t)\,dt$$

$$2\int_0^b v(t)\,dt=\int_0^c v(t)\,dt$$

$$\therefore \int_0^b v(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^c v(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\times(-6)=-3$$

$a\le t\le b$에서 $v(t)\ge 0$이므로 $t=a$부터 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_a^b |v(t)|\,dt=\int_a^b v(t)\,dt$$

$$=\int_a^0 v(t)\,dt+\int_0^b v(t)\,dt$$

$$=-\int_0^a v(t)\,dt+\int_0^b v(t)\,dt$$

$$=-(-8)+(-3)$$

$$=5$$

MEMO

MEMO