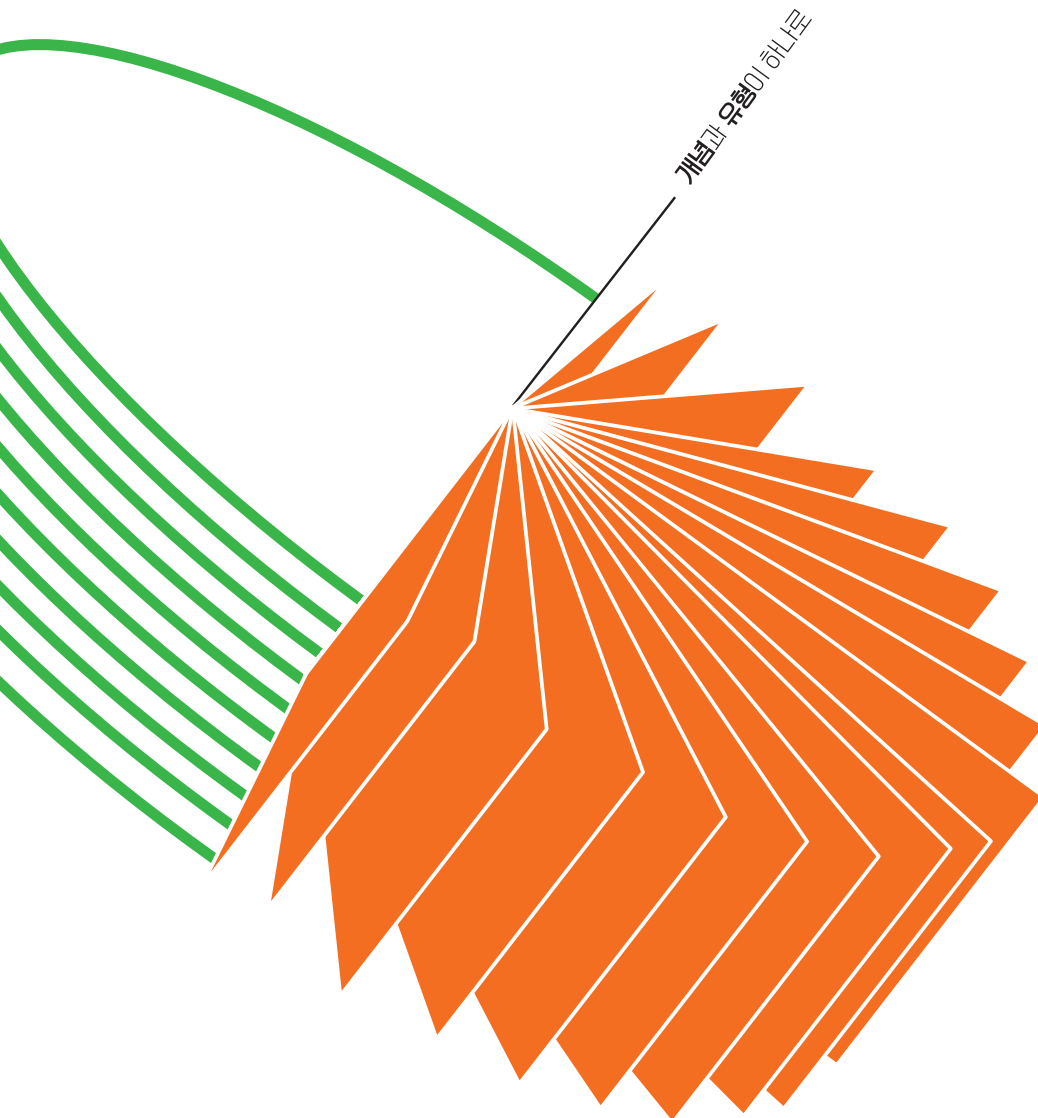


기하

정답과 해설



개념과 유형이 해설

개념편

정답과 해설

I-1 01 포물선

포물선의 방정식

개념 Check

10쪽

1 답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $y^2=4x$ 에서 $y^2=4 \times x$ 이므로

$$p=1$$

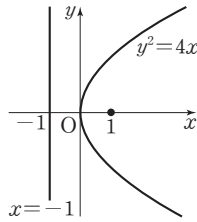
초점의 좌표는 (1, 0)

준선의 방정식은 $x=-1$

꼭짓점의 좌표는 (0, 0)

축의 방정식은 $y=0$

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $x^2=-8y$ 에서 $x^2=4 \times (-2)y$ 이므로

$$p=-2$$

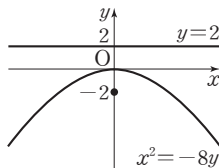
초점의 좌표는 (0, -2)

준선의 방정식은 $y=2$

꼭짓점의 좌표는 (0, 0)

축의 방정식은 $x=0$

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



2 답 (1) 2, -1

포물선의 방정식	$y^2=12x$	$(y+1)^2=12(x-2)$
초점의 좌표	(3, 0)	(5, -1)
준선의 방정식	$x=-3$	$x=-1$
꼭짓점의 좌표	(0, 0)	(2, -1)
축의 방정식	$y=0$	$y=-1$

(2) -2, 2

포물선의 방정식	$x^2=-4y$	$(x+2)^2=-4(y-2)$
초점의 좌표	(0, -1)	(-2, 1)
준선의 방정식	$y=1$	$y=3$
꼭짓점의 좌표	(0, 0)	(-2, 2)
축의 방정식	$x=0$	$x=-2$

문제

11~16쪽

01-1 답 (1) $y^2=16x$ (2) $x^2=-\frac{4}{3}y$

(1) 초점이 F(4, 0), 준선이 $x=-4$ 인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ 에서 $p=4$ 이므로

$$y^2=4 \times 4x$$

$$\therefore y^2=16x$$

(2) 초점이 F(0, $-\frac{1}{3}$), 준선이 $y=\frac{1}{3}$ 인 포물선의 방정식은 $x^2=4py$ 에서 $p=-\frac{1}{3}$ 이므로

$$x^2=4 \times \left(-\frac{1}{3}\right)y$$

$$\therefore x^2=-\frac{4}{3}y$$

다른 풀이

(1) 포물선 위의 점을 P(x, y)라 하고, 점 P에서 준선 $x=-4$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=|x+4|$$

양변을 제곱하면 구하는 포물선의 방정식은

$$(x-4)^2+y^2=(x+4)^2$$

$$\therefore y^2=16x$$

(2) 포물선 위의 점을 P(x, y)라 하고, 점 P에서 준선

$y=\frac{1}{3}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에

의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{x^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2}=\left|y-\frac{1}{3}\right|$$

양변을 제곱하면 구하는 포물선의 방정식은

$$x^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\left(y-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\therefore x^2=-\frac{4}{3}y$$

01-2 답 -2

꼭짓점이 원점이고 준선이 $y=2$ 인 포물선의 방정식은

$x^2=4py$ 에서 $p=-2$ 이므로

$$x^2=4 \times (-2)y \quad \therefore x^2=-8y$$

이 포물선이 점 (4, k)를 지나므로

$$4^2=-8k \quad \therefore k=-2$$

02-1 답 -5

포물선 $y^2=12(x-a)$ 는 포물선 $y^2=12x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=12x$, 즉 $y^2=4 \times 3x$ 의 초점의 좌표는

(3, 0)이므로 포물선 $y^2=12(x-a)$ 의 초점의 좌표는

(3+a, 0)이다.

또 포물선 $x^2 = -8(y-b)$ 는 포물선 $x^2 = -8y$ 를 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2 = -8y$, 즉 $x^2 = 4 \times (-2)y$ 의 초점의 좌표는 $(0, -2)$ 이므로 포물선 $x^2 = -8(y-b)$ 의 초점의 좌표는 $(0, -2+b)$ 이다.

주어진 두 포물선의 초점이 일치하므로

$$3+a=0, 0=-2+b$$

따라서 $a=-3, b=2$ 이므로

$$a-b=-5$$

02-2 **답** $2\sqrt{2}$

포물선 $(x+1)^2 = -4(y-4)$ 는 포물선 $x^2 = -4y$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2 = -4y$, 즉 $x^2 = 4 \times (-1)y$ 의 초점의 좌표는 $(0, -1)$ 이므로 $A(-1, 3)$

또 포물선 $(y-5)^2 = 12(x+2)$ 는 포물선 $y^2 = 12x$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = 12x$, 즉 $y^2 = 4 \times 3x$ 의 초점의 좌표는 $(3, 0)$ 이므로 $B(1, 5)$

따라서 선분 AB의 길이는

$$\sqrt{(1+1)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{2}$$

02-3 **답** $(x-1)^2 = -16(y-1)$

주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$$\left(1, \frac{-3+5}{2}\right) \quad \therefore (1, 1)$$

주어진 포물선은 꼭짓점이 원점인 포물선을 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

평행이동하기 전의 포물선의 초점의 좌표는

$(1-1, -3-1)$, 즉 $(0, -4)$ 이므로 평행이동하기 전의 포물선의 방정식은

$$x^2 = 4 \times (-4)y \quad \therefore x^2 = -16y$$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$$(x-1)^2 = -16(y-1)$$

다른 풀이

포물선 위의 점을 $P(x, y)$ 라 하고, 점 P에서 준선 $y=5$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PH} \text{이므로}$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} = |y-5|$$

양변을 제곱하면 구하는 포물선의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = (y-5)^2$$

$$\therefore (x-1)^2 = -16(y-1)$$

03-1 **답** (1) 초점의 좌표: $(2, -5)$,

준선의 방정식: $x=6$,

꼭짓점의 좌표: $(4, -5)$

(2) 초점의 좌표: $(-6, 0)$,

준선의 방정식: $y=-4$,

꼭짓점의 좌표: $(-6, -2)$

(1) $y^2 + 8x + 10y - 7 = 0$ 에서

$$y^2 + 10y + 25 = -8x + 32$$

$$\therefore (y+5)^2 = -8(x-4)$$

즉, 주어진 포물선은 포물선 $y^2 = -8x$ 를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = -8x$, 즉 $y^2 = 4 \times (-2)x$ 의 초점의 좌표는 $(-2, 0)$, 준선의 방정식은 $x=2$, 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$ 이다.

따라서 구하는 포물선의 초점의 좌표는 $(2, -5)$, 준선의 방정식은 $x=6$, 꼭짓점의 좌표는 $(4, -5)$ 이다.

(2) $x^2 + 12x - 8y + 20 = 0$ 에서

$$x^2 + 12x + 36 = 8y + 16$$

$$\therefore (x+6)^2 = 8(y+2)$$

즉, 주어진 포물선은 포물선 $x^2 = 8y$ 를 x 축의 방향으로 -6 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2 = 8y$, 즉 $x^2 = 4 \times 2y$ 의 초점의 좌표는 $(0, 2)$, 준선의 방정식은 $y=-2$, 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$ 이다.

따라서 구하는 포물선의 초점의 좌표는 $(-6, 0)$, 준선의 방정식은 $y=-4$, 꼭짓점의 좌표는 $(-6, -2)$ 이다.

03-2 **답** -28

$x^2 + 4x + 8y + a = 0$ 에서

$$x^2 + 4x + 4 = -8y - a + 4$$

$$\therefore (x+2)^2 = -8\left(y + \frac{a-4}{8}\right)$$

즉, 주어진 포물선은 포물선 $x^2 = -8y$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 $-\frac{a-4}{8}$ 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2 = -8y$, 즉 $x^2 = 4 \times (-2)y$ 의 초점의 좌표는 $(0, -2)$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$$\left(-2, -2 - \frac{a-4}{8}\right) \text{이다.}$$

따라서 $-2 - \frac{a-4}{8} = 2$ 이므로

$$\frac{a-4}{8} = -4, a-4 = -32 \quad \therefore a = -28$$

03-3 ㉔ 20

$$y^2 - 4x + 4y + a = 0$$

$$y^2 + 4y + 4 = 4x - a + 4$$

$$\therefore (y+2)^2 = 4\left(x - \frac{a-4}{4}\right)$$

즉, 주어진 포물선은 포물선 $y^2=4x$ 를 x 축의 방향으로 $\frac{a-4}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=4x$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$ 이므로 주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{a-4}{4}, -2\right)$ 이다.

따라서 점 $\left(\frac{a-4}{4}, -2\right)$ 가 포물선 $y^2=x$ 위의 점이므로

$$(-2)^2 = \frac{a-4}{4}, 16 = a-4 \quad \therefore a=20$$

04-1 ㉔ 7

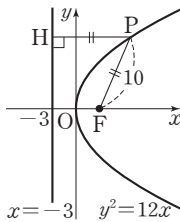
포물선 $y^2=12x$ 의 준선의 방정식은 $x=-3$

오른쪽 그림과 같이 포물선 위의 점 P에서 준선 $x=-3$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH} = \overline{PF} = 10$$

이때 점 P의 x 좌표를 a 라 하면

$$a+3=10 \quad \therefore a=7$$



04-2 ㉔ 3

포물선 $x^2=4y$ 의 준선의 방정식은 $y=-1$

오른쪽 그림과 같이 두 점

A, B에서 준선 $y=-1$

에 내린 수선의 발을 각각

A'', B''이라 하면 포물선

의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AA''}, \overline{BF} = \overline{BB''}$$

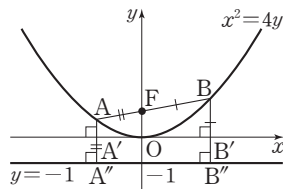
이때 $\overline{AF} + \overline{BF} = \overline{AB} = 5$ 이므로

$$\overline{AA''} + \overline{BB''} = 5$$

$$(\overline{AA'} + \overline{A'A''}) + (\overline{BB'} + \overline{B'B''}) = 5$$

$$\overline{AA'} + 1 + \overline{BB'} + 1 = 5$$

$$\therefore \overline{AA'} + \overline{BB'} = 3$$



04-3 ㉔ 22

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$, $\overline{QF} = \overline{QH}$

따라서 사각형 PHH'Q의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{PH} + \overline{HH'} + \overline{QH'} + \overline{PQ} &= \overline{PF} + \overline{HH'} + \overline{QF} + \overline{PQ} \\ &= (\overline{PF} + \overline{QF}) + \overline{HH'} + \overline{PQ} \\ &= \overline{PQ} + \overline{HH'} + \overline{PQ} \\ &= 8 + 6 + 8 = 22 \end{aligned}$$

05-1 ㉔ $\sqrt{26}$

포물선 $y^2=4x$ 의 초점을 F라 하면 $F(1, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x=-1$ 이다.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$

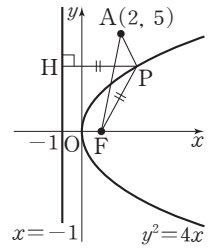
이고, 세 점 A, P, F가 한 직선

위에 있을 때 $\overline{AP} + \overline{PF}$ 의 값이 최

소이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{PH} &= \overline{AP} + \overline{PF} \\ &\geq \overline{AF} \\ &= \sqrt{(1-2)^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PH}$ 의 최솟값은 $\sqrt{26}$ 이다.



05-2 ㉔ $2\sqrt{3}$

포물선 $x^2=8y$ 의 초점을 F라 하면 $F(0, 2)$ 이고, 준선의 방정식은 $y=-2$ 이다.

포물선의 정의에 의하여

$\overline{PF} = \overline{PH}$ 이고, 세 점 A, P,

F가 한 직선 위에 있을 때

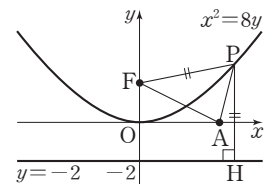
$\overline{AP} + \overline{PF}$ 의 값이 최소이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{PH} &= \overline{AP} + \overline{PF} \\ &\geq \overline{AF} \\ &= \sqrt{(-a)^2 + 2^2} \end{aligned}$$

즉, $\sqrt{a^2+4}=4$ 이므로 양변을 제곱하면

$$a^2+4=16, a^2=12$$

$$\therefore a=2\sqrt{3} (\because a>0)$$



06-1 ㉔ -3

점 P(x, y)에서 점 A(3, 0)까지의 거리와 y 축까지의 거리가 서로 같으므로

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = |x|$$

양변을 제곱하면 도형의 방정식은

$$(x-3)^2 + y^2 = x^2$$

$$\therefore y^2 = 6x - 9$$

따라서 $a=6, b=-9$ 이므로 $a+b=-3$

06-2 ㉔ $(x+3)^2=8(y-2)$

점 Q의 좌표를 (x, y)라 하면 점

Q는 선분 AP의 수직이등분선 위

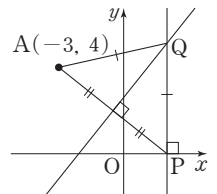
의 점이므로

$$\begin{aligned} \overline{AQ} &= \overline{PQ} \\ \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} &= |y| \end{aligned}$$

양변을 제곱하면 구하는 도형의 방정식은

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = y^2$$

$$\therefore (x+3)^2 = 8(y-2)$$



06-3 $y^2 = \frac{16}{3} \left(x - \frac{2}{3}\right)$

포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점이 F이므로 F(2, 0)
 포물선 위의 점 A의 좌표를 (a, b)라 하면
 $b^2 = 8a$ ㉠

선분 FA를 2:1로 내분하는 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면
 $x = \frac{2 \times a + 1 \times 2}{2+1} = \frac{2a+2}{3}$, $y = \frac{2 \times b + 1 \times 0}{2+1} = \frac{2}{3}b$

이 식을 각각 a, b에 대하여 풀면
 $a = \frac{3x-2}{2}$, $b = \frac{3}{2}y$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 도형의 방정식은
 $\left(\frac{3}{2}y\right)^2 = 8 \times \frac{3x-2}{2}$
 $\therefore y^2 = \frac{16}{3} \left(x - \frac{2}{3}\right)$

연습문제

17~18쪽

- 1 ㉠ 2 $\frac{3}{2}$ 3 ㉢ 4 $x=3$
 5 $(x-2)^2 = 4(y-2)$, $(x-2)^2 = -16(y-7)$ 6 -1
 7 ㉢ 8 ㉠ 9 18 10 ㉠
 11 $(y-1)^2 = 6(x+2)$ 12 ㉠ 13 12 14 $36\sqrt{3}$

- 1 꼭짓점이 원점이고 초점의 좌표가 (0, -4)인 포물선의 방정식은
 $x^2 = 4py$ 에서 $p = -4$ 이므로
 $x^2 = 4 \times (-4)y$
 $\therefore x^2 = -16y$
 이 포물선이 점 (8, a)를 지나므로
 $8^2 = -16a$
 $\therefore a = -4$
- 2 $y^2 = -12x$ 에서 $y^2 = 4 \times (-3)x$ 이므로 A(-3, 0)
 $x^2 = 4y$ 에서 $x^2 = 4 \times y$ 이므로 B(0, 1)
 따라서 삼각형 OAB의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{3}{2}$
- 3 포물선 $y^2 = 2(x-a)$ 는 포물선 $y^2 = 2x$ 를 x 축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.
 이때 포물선 $y^2 = 2x$ 의 준선의 방정식은 $x = -\frac{1}{2}$ 이므로
 포물선 $y^2 = 2(x-a)$ 의 준선의 방정식은 $x = -\frac{1}{2} + a$ 이다.

또 포물선 $y^2 = -8x - 16$, 즉 $y^2 = -8(x+2)$ 는 포물선 $y^2 = -8x$ 를 x 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
 이때 포물선 $y^2 = -8x$ 의 준선의 방정식은 $x=2$ 이므로
 포물선 $y^2 = -8(x+2)$ 의 준선의 방정식은 $x=0$ 이다.
 주어진 두 포물선의 준선이 일치하므로

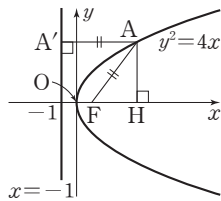
$$-\frac{1}{2} + a = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

- 4 포물선 $(y-2k)^2 = 12k(x-k-2)$ 는 포물선 $y^2 = 12kx$ 를 x 축의 방향으로 $k+2$ 만큼, y 축의 방향으로 $2k$ 만큼 평행이동한 것이다.
 이때 포물선 $y^2 = 12kx$ 의 초점의 좌표는 $(3k, 0)$, 준선의 방정식은 $x = -3k$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(4k+2, 2k)$, 준선의 방정식은 $x = -2k+2$ 이다.
 그런데 초점 $(4k+2, 2k)$ 가 y 축 위에 있으므로
 $4k+2=0$
 $\therefore k = -\frac{1}{2}$
 따라서 주어진 포물선의 준선의 방정식은
 $x = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2$
 $\therefore x = 3$
- 5 준선이 x 축에 평행하므로 주어진 포물선의 방정식을 $(x-m)^2 = 4p(y-n)$ ($p \neq 0$)이라 하면 이 포물선의 초점의 좌표는 $(m, p+n)$ 이므로
 $m=2$
 $p+n=3$ ㉠
 포물선 $(x-2)^2 = 4p(y-n)$ 이 점 (-2, 6)을 지나므로
 $(-2-2)^2 = 4p(6-n)$
 $\therefore 4 = p(6-n)$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $p=1, n=2$ 또는 $p=-4, n=7$
 따라서 구하는 포물선의 방정식은
 $(x-2)^2 = 4(y-2)$, $(x-2)^2 = -16(y-7)$
- 6 $y^2 - 8x - 6y - 7 = 0$ 에서
 $y^2 - 6y + 9 = 8x + 16$
 $\therefore (y-3)^2 = 8(x+2)$
 즉, 주어진 포물선은 포물선 $y^2 = 8x$ 를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
 이때 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점의 좌표는 (2, 0), 준선의 방정식은 $x = -2$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 (0, 3), 준선의 방정식은 $x = -4$ 이다.
 따라서 $a=0, b=3, c=-4$ 이므로
 $a+b+c = -1$

- 7 $y^2 - 2x + 2ay + 18 = 0$ 에서
 $y^2 + 2ay + a^2 = 2x - 18 + a^2$
 $\therefore (y+a)^2 = 2\left(x - \frac{18-a^2}{2}\right)$
 즉, 이 포물선의 꼭짓점은 $A\left(\frac{18-a^2}{2}, -a\right)$
 또 $x^2 + 2x - 12y + b = 0$ 에서
 $x^2 + 2x + 1 = 12y - b + 1$
 $\therefore (x+1)^2 = 12\left(y - \frac{b-1}{12}\right)$
 즉, 이 포물선의 꼭짓점은 $B\left(-1, \frac{b-1}{12}\right)$
 두 점 A, B가 y 축에 대하여 대칭이므로
 $\frac{18-a^2}{2} = 1, -a = \frac{b-1}{12}$
 $\therefore a = 4, b = -47 (\because a > 0)$
 $\therefore a - b = 51$

- 8 포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점이 F이므로 F(1, 0)이고, 준선의 방정식은 $x = -1$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 포물선 위의 점 A에서 준선 $x = -1$ 에 내린 수선의 발을 A'이라 하면 포물선의 정의에 의하여



$$\overline{AA'} = \overline{AF} = 5$$

이때 점 A의 x 좌표를 a 라 하면

$$a + 1 = 5 \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore \overline{FH} = \overline{OH} - \overline{OF} = 4 - 1 = 3$$

직각삼각형 AFH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AF}^2 - \overline{FH}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

따라서 삼각형 AFH의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

- 9 포물선 $x^2 = -16y$ 의 준선의 방정식은 $y = 4$

오른쪽 그림과 같이 두 점

A, B에서 준선 $y = 4$ 에 내린 수선의 발을 각각 P', Q'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AP'} = \overline{AP} + \overline{PP'}$$

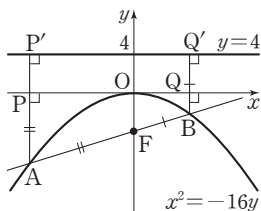
$$= 8 + 4 = 12$$

$$\overline{BF} = \overline{BQ'} = \overline{BQ} + \overline{QQ'}$$

$$= 2 + 4 = 6$$

따라서 선분 AB의 길이는

$$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = 12 + 6 = 18$$



- 10 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점이 F이므로 F(2, 0)이고, 준선의 방정식은 $x = -2$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A에서 준선 $x = -2$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

세 점 A, P, H가 한 직선 위에 있을 때

$$\overline{AP} + \overline{PH} = \overline{AH}$$

$$\geq \overline{AH'} = 5 - (-2) = 7$$

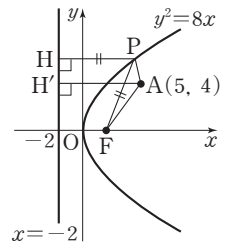
즉, 삼각형 APF의 둘레의 길이는

$$\overline{AP} + \overline{PF} + \overline{AF} \geq \overline{AH'} + \overline{AF}$$

$$= 7 + \sqrt{(2-5)^2 + (-4)^2}$$

$$= 7 + 5 = 12$$

따라서 구하는 최솟값은 12이다.



- 11 $y^2 - 12x - 2y - 23 = 0$ 에서 $y^2 - 2y + 1 = 12x + 24$

$$\therefore (y-1)^2 = 12(x+2)$$

즉, 주어진 포물선의 꼭짓점은 B(-2, 1)

포물선 위의 점 A의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$(b-1)^2 = 12(a+2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 AB의 중점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{a-2}{2}, y = \frac{b+1}{2}$$

이 식을 각각 a, b 에 대하여 풀면 $a = 2x + 2, b = 2y - 1$

이를 ①에 대입하면 구하는 도형의 방정식은

$$(2y-1-1)^2 = 12(2x+2+2)$$

$$\therefore (y-1)^2 = 6(x+2)$$

- 12 $y^2 = 4x + 4y + 4$ 에서 $y^2 - 4y + 4 = 4x + 8$

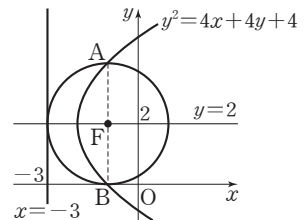
$$\therefore (y-2)^2 = 4(x+2)$$

즉, 주어진 포물선은 포물선 $y^2 = 4x$ 를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 초점의 좌표는 (-1, 2), 준선의 방정식은 $x = -3$, 축의 방정식은 $y = 2$ 이다.

초점 (-1, 2)를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원과 포물선이

만나는 두 점이 A, B이므로 원의 중심을 F라 하면 $\overline{AF} = \overline{BF} = 2$

즉, 두 점 A, B에서 초점 F까지의 거리는 모두 2이므로 포물선의 정의에 의하여 두 점 A, B에서 준선 $x = -3$ 까지의 거리도 모두 2이다.



$$|a - (-3)| = 2, |c - (-3)| = 2$$

이때 $a \geq -2, c \geq -2$ 이므로 $a = -1, c = -1$

또 두 점 A, B는 주어진 포물선의 축 $y=2$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{b+d}{2} = 2 \quad \therefore b+d=4$$

$$\therefore a+b+c+d = -1 + (-1) + 4 = 2$$

13 $\overline{AF} = k (k > 0)$ 라 하면

$$\overline{AF} : \overline{BF} = 1 : 2 \text{에서}$$

$$\overline{BF} = 2\overline{AF} = 2k$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = k + 2k = 3k$$

이때 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AC} = \overline{AF} = k, \overline{BD} = \overline{BF} = 2k$$

점 A에서 변 BD에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{HD} = \overline{AC} = k$ 이고 $\overline{BD} = 2k$ 이므로

$$\overline{BH} = \overline{BD} - \overline{HD} = 2k - k = k$$

직각삼각형 AHB에서

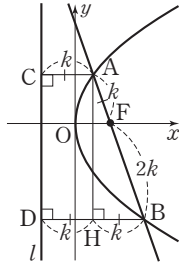
$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{(3k)^2 - k^2} = 2\sqrt{2}k \quad (\because k > 0)$$

이때 사다리꼴 ACDB의 넓이가 $48\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times (k + 2k) \times 2\sqrt{2}k = 48\sqrt{2}$$

$$k^2 = 16 \quad \therefore k = 4 \quad (\because k > 0)$$

따라서 변 AB의 길이는 $\overline{AB} = 3k = 3 \times 4 = 12$



14 포물선 $y^2 = 12x$ 의 초점이 F이므로 F(3, 0)이고, 준선의 방정식은 $x = -3$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 준선

$x = -3$ 과 선분 AP의 연장선

이 만나는 점을 B라 하면 삼각

형 BFP에서

$$\angle BPF = \angle APF = 60^\circ$$

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PB}$

즉, 삼각형 BFP는 정삼각형이다.

$$\therefore \overline{BP} = \overline{PF} = \overline{BF}$$

이때 선분 BP의 중점을 M이라 하면

$$\overline{BM} = \overline{BA} + \overline{AM} = \overline{BA} + \overline{OF} = 3 + 3 = 6$$

$$\overline{BP} = 2\overline{BM} = 12 \text{이므로}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} - \overline{BA} = 12 - 3 = 9$$

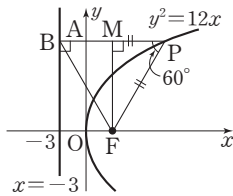
$\overline{PM} = \overline{BM} = 6$ 이므로 직각삼각형 PMF에서

$$\overline{FM} = \overline{PM} \tan 60^\circ = 6 \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{OA} = \overline{FM} = 6\sqrt{3}$$

따라서 사다리꼴 AOFP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (\overline{OF} + \overline{AP}) \times \overline{OA} = \frac{1}{2} \times (3 + 9) \times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$



I-1 02 타원

타원의 방정식

개념 Check

21쪽

1 $\textcircled{답}$ (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

$$(1) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{에서 } \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

$$a=3, b=2 \text{이므로 } c = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

초점의 좌표는 $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

꼭짓점의 좌표는

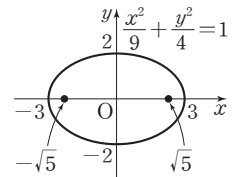
$$(3, 0), (-3, 0), (0, 2), (0, -2)$$

장축의 길이는 $2a = 2 \times 3 = 6$

단축의 길이는 $2b = 2 \times 2 = 4$

그래프는 오른쪽 그림과 같

다.



$$(2) \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{에서 } \frac{x^2}{(\sqrt{7})^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

$$a=\sqrt{7}, b=4 \text{이므로 } c = \sqrt{4^2 - (\sqrt{7})^2} = 3$$

초점의 좌표는 $(0, 3), (0, -3)$

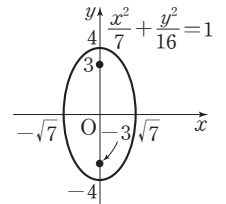
꼭짓점의 좌표는

$$(\sqrt{7}, 0), (-\sqrt{7}, 0), (0, 4), (0, -4)$$

장축의 길이는 $2b = 2 \times 4 = 8$

단축의 길이는 $2a = 2 \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



2 $\textcircled{답}$ -1, 2

타원의 방정식	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$	$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$
중심의 좌표	(0, 0)	(-1, 2)
초점의 좌표	(4, 0), (-4, 0)	(3, 2), (-5, 2)
꼭짓점의 좌표	(5, 0), (-5, 0), (0, 3), (0, -3)	(4, 2), (-6, 2), (-1, 5), (-1, -1)
장축의 길이	10	10
단축의 길이	6	6

01-1 ㉞ (1) $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{16} = 1$ (2) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{9} = 1$

(1) 중심이 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 이라 하자.

두 초점으로부터 거리의 합이 8이므로
 $2b = 8 \quad \therefore b = 4$

$a^2 = b^2 - (\sqrt{5})^2$ 이므로 $a^2 = 4^2 - (\sqrt{5})^2 = 11$

따라서 구하는 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{16} = 1$

(2) 중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라 하자.

단축의 길이가 6이므로 $2b = 6 \quad \therefore b = 3$

$b^2 = a^2 - 1^2$ 이므로 $a^2 = b^2 + 1^2 = 3^2 + 1^2 = 10$

따라서 구하는 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{9} = 1$

다른 풀이

(1) 두 초점 F, F'으로부터 거리의 합이 8인 점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$\sqrt{x^2 + (y - \sqrt{5})^2} + \sqrt{x^2 + (y + \sqrt{5})^2} = 8$

$\sqrt{x^2 + (y - \sqrt{5})^2} = 8 - \sqrt{x^2 + (y + \sqrt{5})^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4\sqrt{x^2 + (y + \sqrt{5})^2} = \sqrt{5}y + 16$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 구하는 타원의 방정식은

$16x^2 + 11y^2 = 176 \quad \therefore \frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{16} = 1$

01-2 ㉞ $\sqrt{5}$

중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라 하자.

두 초점으로부터 거리의 합이 6이므로 $2a = 6 \quad \therefore a = 3$

$b^2 = a^2 - 2^2$ 이므로 $b^2 = 3^2 - 2^2 = 5$

따라서 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

이 타원이 점 $(0, p)$ 를 지나므로

$\frac{0^2}{9} + \frac{p^2}{5} = 1, p^2 = 5 \quad \therefore p = \sqrt{5} (\because p > 0)$

02-1 ㉞ 36

타원 $\frac{(x+2)^2}{20} + \frac{(y-3)^2}{a} = 1$ 은 타원 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{a} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

타원의 중심은 선분 FF'의 중점이므로 중심의 좌표는

$(\frac{-2-2}{2}, \frac{7-1}{2}) \quad \therefore (-2, 3)$

두 초점 F, F'의 x 좌표가 같고 중심에서 초점까지의 거리가 4이므로

$20 = a - 4^2 \quad \therefore a = 36$

02-2 ㉞ $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

타원의 중심은 선분 FF'의 중점이므로 중심의 좌표는

$(\frac{2-4}{2}, \frac{3+3}{2}) \quad \therefore (-1, 3)$

즉, 구하는 타원은 중심이 원점인 타원을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

두 초점 F, F'의 y 좌표가 같으므로 구하는 타원의 방정식을 $\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라 하자.

두 초점으로부터 거리의 합이 10이므로

$2a = 10 \quad \therefore a = 5$

중심에서 초점까지의 거리가 3이므로

$b^2 = a^2 - 3^2 = 5^2 - 3^2 = 16$

따라서 구하는 타원의 방정식은 $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

다른 풀이

두 초점 F, F'으로부터 거리의 합이 10인 점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2} = 10$

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 10 - \sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$5\sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2} = 3x + 28$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 구하는 타원의 방정식은

$16(x+1)^2 + 25(y-3)^2 = 400$

$\therefore \frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

02-3 ㉞ 46

두 점 A, C의 y 좌표가 같으므로 선분 AC는 타원의 장축 또는 단축이다.

선분 AC의 중점은 타원의 중심과 같으므로 타원의 중심을 M이라 하면

$M(\frac{-2+8}{2}, \frac{2+2}{2}) \quad \therefore M(3, 2)$

이때 $\overline{AM} = 5, \overline{BM} = 4$ 이므로 선분 AC는 타원의 장축이다.

주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ 을 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

즉, 주어진 타원의 방정식은

$\frac{(x-3)^2}{5^2} + \frac{(y-2)^2}{4^2} = 1 \quad \therefore \frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

따라서 $a = 25, b = 16, m = 3, n = 2$ 이므로

$a + b + m + n = 46$

03-1 ㉞ 풀이 참조

$$9x^2 + 4y^2 + 18x - 32y + 37 = 0 \text{에서}$$

$$9(x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 - 8y + 16) = 36$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

즉, 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 을 x 축의 방향으로

-1만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{에서 } \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \text{이므로 이 타원의}$$

중심의 좌표는 $(0, 0)$,

초점의 좌표는 $(0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$,

꼭짓점의 좌표는 $(2, 0), (-2, 0), (0, 3), (0, -3)$,

장축의 길이는 $2 \times 3 = 6$, 단축의 길이는 $2 \times 2 = 4$

따라서 구하는 타원의

중심의 좌표는 $(-1, 4)$,

초점의 좌표는 $(-1, \sqrt{5}+4), (-1, -\sqrt{5}+4)$,

꼭짓점의 좌표는 $(1, 4), (-3, 4), (-1, 7), (-1, 1)$,

장축의 길이는 6, 단축의 길이는 4

03-2 ㉞ 6

$$11x^2 + 2y^2 - 44x - 12y + 40 = 0 \text{에서}$$

$$11(x^2 - 4x + 4) + 2(y^2 - 6y + 9) = 22$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-3)^2}{11} = 1$$

즉, 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{11} = 1$ 을 x 축의 방향으로

2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{11} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(0, 3), (0, -3)$

이므로 주어진 타원의 두 초점의 좌표는 $(2, 6), (2, 0)$

$$\therefore \overline{FF'} = 6 - 0 = 6$$

원점에서 직선 $x=2$ 까지의 거리는 $2-0=2$

따라서 삼각형 OFF' 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$$

04-1 ㉞ 8

타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(0, 1), (0, -1)$

이므로 두 점 F, C는 주어진 타원의 초점이다.

타원 위의 점에서 두 초점 C, F에 이르는 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로

$$\overline{AC} + \overline{AF} = 2 \times 2 = 4, \overline{BC} + \overline{BF} = 2 \times 2 = 4$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} &= (\overline{AF} + \overline{BF}) + \overline{BC} + \overline{AC} \\ &= (\overline{AC} + \overline{AF}) + (\overline{BC} + \overline{BF}) \\ &= 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

04-2 ㉞ 2

타원 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$

$$\therefore \overline{FF'} = \sqrt{3} - (-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

$\overline{PF} = m, \overline{PF'} = n$ 이라 하면 타원 위의 점 P에서 두 초점에 이르는 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로

$$m + n = 2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

삼각형 $PF'F$ 는 직각삼각형이므로

$$m^2 + n^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

이때 $(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$ 에서

$$(2\sqrt{5})^2 = 12 + 2mn$$

$$2mn = 8$$

$$\therefore mn = 4$$

따라서 삼각형 $PF'F$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2}mn = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

05-1 ㉞ 25

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(4, 0), (-4, 0)$

이므로 두 점 A, B는 주어진 타원의 초점이다.

타원 위의 점 P에서 두 초점 A, B에 이르는 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로

$$\overline{PA} + \overline{PB} = 2 \times 5 = 10$$

$\overline{PA} > 0, \overline{PB} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{PA} + \overline{PB} \geq 2\sqrt{\overline{PA} \times \overline{PB}}$$

$$10 \geq 2\sqrt{\overline{PA} \times \overline{PB}}$$

$$\therefore \sqrt{\overline{PA} \times \overline{PB}} \leq 5 \text{ (단, 등호는 } \overline{PA} = \overline{PB} \text{일 때 성립)}$$

양변을 제곱하면

$$\overline{PA} \times \overline{PB} \leq 25$$

따라서 $\overline{PA} \times \overline{PB}$ 의 최댓값은 25이다.

다른 풀이

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(4, 0), (-4, 0)$

이므로 두 점 A, B는 주어진 타원의 초점이다.

타원 위의 점 P에서 두 초점 A, B에 이르는 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로

$$\overline{PA} + \overline{PB} = 2 \times 5 = 10$$

$$\therefore \overline{PB} = 10 - \overline{PA}$$

이를 $\overline{PA} \times \overline{PB}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \overline{PA} \times \overline{PB} &= \overline{PA}(10 - \overline{PA}) \\ &= -\overline{PA}^2 + 10\overline{PA} \\ &= -(\overline{PA} - 5)^2 + 25 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{PA} = 5$ 일 때 최댓값은 25이다.

05-2 ㉔ 6

점 P(a, b)가 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{36} = 1$$

$\frac{a^2}{4} > 0, \frac{b^2}{36} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{36} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{4} \times \frac{b^2}{36}}$$

$$1 \geq \frac{ab}{6} \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$\therefore ab \leq 6 \quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{a^2}{4} = \frac{b^2}{36} \text{일 때 성립} \right)$$

따라서 ab의 최댓값은 6이다.

06-1 ㉔ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 P가 점 (1, 0)과 직선 x=4에 이르는 거리의 비가 1 : 2이므로

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} : |x-4| = 1 : 2$$

$$\therefore 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x-4|$$

양변을 제곱하면 구하는 도형의 방정식은

$$4(x-1)^2 + 4y^2 = (x-4)^2$$

$$3x^2 + 4y^2 = 12 \quad \therefore \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

06-2 ㉔ $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$$a^2 + b^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

H(a, 0)이므로 선분 PH의 중점 M의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x = \frac{a+a}{2} = a, y = \frac{b}{2}$$

이 식을 각각 a, b에 대하여 풀면

$$a = x, b = 2y$$

이를 ㉑에 대입하면 구하는 도형의 방정식은

$$x^2 + (2y)^2 = 4$$

$$\therefore \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

연습문제

28~29쪽

1 ㉓	2 26	3 4	4 ㉔	5 25
6 8	7 ㉓	8 50	9 6	10 ㉑
11 ㉔	12 11			

1 $5x^2 + y^2 = 20$ 에서 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{20} = 1$

이 타원의 두 초점의 좌표는 (0, 4), (0, -4)

이 두 점을 초점으로 하는 타원은 중심이 원점이고 두 초점이 y축 위에 있으므로 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > a > 0) \text{이라 하자.}$$

이 타원의 단축의 길이가 6이므로 $2a = 6 \quad \therefore a = 3$

$$a^2 = b^2 - 4^2 \text{이므로 } b^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$\text{즉, 타원의 방정식은 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

따라서 이 타원의 장축의 길이는 $2 \times 5 = 10$

2 중심이 원점이고 두 초점이 x축 위에 있으므로 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$ 이라 하자.

장축과 단축의 길이의 차가 2이므로

$$2a - 2b = 2 \quad \therefore a - b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$b^2 = a^2 - 5^2 \text{이므로}$$

$$a^2 - b^2 = 25 \quad \therefore (a+b)(a-b) = 25$$

이 식에 ㉑을 대입하면 $a + b = 25 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면 $a = 13, b = 12$

$$\text{즉, 타원의 방정식은 } \frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$$

이때 $\overline{PF} + \overline{PF}'$ 의 값은 타원의 장축의 길이와 같으므로 $\overline{PF} + \overline{PF}' = 2 \times 13 = 26$

3 타원 $\frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ 은 타원 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 (1, 0), (-1, 0)

이므로 주어진 타원의 두 초점의 좌표는

$$(2, -1), (0, -1) \quad \therefore \overline{FF}' = 2 - 0 = 2$$

점 A(0, 3)에서 직선 $y = -1$ 까지의 거리는

$$3 - (-1) = 4$$

따라서 삼각형 AFF'의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$

4 타원의 중심은 선분 FF'의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{3+3}{2}, \frac{3+7}{2} \right) \quad \therefore (3, 5)$$

즉, 주어진 타원은 중심이 원점인 타원을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

두 초점 F, F'의 x좌표가 같으므로 주어진 타원의 방정

$$\text{식을 } \frac{(x-3)^2}{a^2} + \frac{(y-5)^2}{b^2} = 1 \quad (b > a > 0) \text{이라 하자.}$$

장축의 길이가 8이므로 $2b = 8 \quad \therefore b = 4$

중심에서 초점까지의 거리가 2이므로

$$a^2 = b^2 - 2^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

즉, 주어진 타원의 방정식은 $\frac{(x-3)^2}{12} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$

이 식에 $x=0$ 을 대입하면

$$\frac{(0-3)^2}{12} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1, (y-5)^2 = 4$$

$$\therefore y=3 \text{ 또는 } y=7$$

따라서 주어진 타원은 y 축과 두 점 $(0, 3), (0, 7)$ 에서 만나므로 두 점 사이의 거리는 $7-3=4$

5 $9x^2 + 5y^2 + 18x - 36 = 0$ 에서

$$9(x^2 + 2x + 1) + 5y^2 = 45 \quad \therefore \frac{(x+1)^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

즉, 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(0, 2), (0, -2)$, 단축의 길이는 $2\sqrt{5}$ 이므로 주어진 타원의 두 초점의 좌표는 $(-1, 2), (-1, -2)$, 단축의 길이는 $2\sqrt{5}$ 이다.

$$\therefore p^2 + q^2 + l^2 = 1 + 4 + 20 = 25$$

6 타원 $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$ 은 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(1, 0), (-1, 0)$

이므로 주어진 타원의 두 초점의 좌표는 $(3, 1), (1, 1)$ 따라서 두 점 A, B는 주어진 타원의 초점이고, 타원 위의 두 점 C, D에서 두 초점 A, B에 이르는 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로

$$\overline{CA} + \overline{CB} = 2 \times 2 = 4, \overline{DA} + \overline{DB} = 2 \times 2 = 4$$

따라서 사각형 ADCB의 둘레의 길이는

$$\overline{CA} + \overline{CB} + \overline{DB} + \overline{DA} = 4 + 4 = 8$$

7 중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라 하자.

타원 위의 점 P에서 두 초점에 이르는 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$

$$F(c, 0), F'(-c, 0) (c > 0) \text{이라 하면 } \overline{FF'} = 2c$$

삼각형 PF'F의 둘레의 길이가 18이므로

$$\overline{PF'} + \overline{F'F} + \overline{PF} = 18, (\overline{PF} + \overline{PF'}) + \overline{F'F} = 18$$

$$2a + 2c = 18 \quad \therefore a + c = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 PA'A의 넓이가 삼각형 PF'F의 넓이의 2배이므로 $\overline{AA'} : \overline{FF'} = 2 : 1$

이때 $A(a, 0), A'(-a, 0)$ 이므로

$$2a : 2c = 2 : 1 \quad \therefore a = 2c \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=6, c=3$

$$b^2 = a^2 - c^2 \text{이므로 } b^2 = 6^2 - 3^2 = 27$$

즉, 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

따라서 이 타원의 단축의 길이는 $2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

8 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(3, 0), (-3, 0)$

이므로 두 점 A, B는 주어진 타원의 초점이다.

타원 위의 점 P에서 두 초점 A, B에 이르는 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로

$$\overline{PA} + \overline{PB} = 2 \times 5 = 10$$

$$\therefore \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = (\overline{PA} + \overline{PB})^2 - 2\overline{PA} \times \overline{PB} = 100 - 2\overline{PA} \times \overline{PB} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{PA} > 0, \overline{PB} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{PA} + \overline{PB} \geq 2\sqrt{\overline{PA} \times \overline{PB}}, 10 \geq 2\sqrt{\overline{PA} \times \overline{PB}}$$

$$\therefore \sqrt{\overline{PA} \times \overline{PB}} \leq 5 \text{ (단, 등호는 } \overline{PA} = \overline{PB} \text{일 때 성립)}$$

양변을 제곱하면 $\overline{PA} \times \overline{PB} \leq 25$

이때 $\textcircled{1}$ 에 의하여

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 100 - 2\overline{PA} \times \overline{PB} \geq 100 - 2 \times 25 = 50$$

따라서 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 의 최솟값은 50이다.

9 $A(a, 0), B(0, b)$ 라 하면 $\overline{AB} = 3$ 에서

$$\sqrt{(-a)^2 + b^2} = 3$$

양변을 제곱하면 $a^2 + b^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{2 \times 0 + 1 \times a}{2 + 1} = \frac{a}{3}, y = \frac{2 \times b + 1 \times 0}{2 + 1} = \frac{2}{3}b$$

이 식을 각각 a, b 에 대하여 풀면 $a = 3x, b = \frac{3}{2}y$

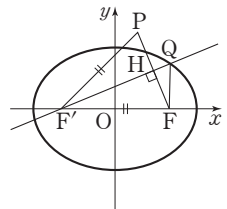
이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$(3x)^2 + \left(\frac{3}{2}y\right)^2 = 9 \quad \therefore x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

따라서 이 타원의 장축의 길이는 $2 \times 2 = 4$, 단축의 길이는 $2 \times 1 = 2$ 이므로 그 합은 $4 + 2 = 6$

10 오른쪽 그림과 같이 직선 F'Q와 선분 FP가 만나는 점을 H라 하면 직선 F'Q가 선분 FP를 수직이등분하므로

$$\overline{FH} = \frac{1}{2}\overline{FP} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$



$\overline{FF'} = \sqrt{7} - (-\sqrt{7}) = 2\sqrt{7}$ 이므로 직각삼각형 $F'FH$ 에서

$$\overline{FH} = \sqrt{\overline{FF'}^2 - \overline{F'H}^2} = \sqrt{(2\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2} = 5$$

이때 타원 위의 점 Q 에서 두 초점에 이르는 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로

$$\overline{FQ} + \overline{F'Q} = 8$$

$$\overline{F'Q} = 8 - \overline{FQ}$$
이므로

$$\overline{QH} = \overline{F'Q} - \overline{F'H} = (8 - \overline{FQ}) - 5 = 3 - \overline{FQ}$$

삼각형 QHF 가 직각삼각형이므로

$$\overline{FQ}^2 = \overline{QH}^2 + \overline{FH}^2, \overline{FQ}^2 = (3 - \overline{FQ})^2 + (\sqrt{3})^2$$

$$6\overline{FQ} = 12 \quad \therefore \overline{FQ} = 2$$

- 11 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ 의 두 초점이 F, F' 이므로

$$F(0, 4), F'(0, -4)$$

타원 위의 점 P 에서 두 초점에 이르는 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 5 = 10 \quad \therefore \overline{PF} = 10 - \overline{PF'}$$

이를 $\overline{AP} - \overline{PF}$ 에 대입하면

$$\overline{AP} - \overline{PF} = \overline{AP} - (10 - \overline{PF'})$$

$$= \overline{AP} + \overline{PF'} - 10$$

$$\geq \overline{AF'} - 10$$

즉, $\overline{AP} - \overline{PF}$ 의 최솟값은 $\overline{AF'} - 10$ 이므로

$$\overline{AF'} - 10 = 2 \quad \therefore \overline{AF'} = 12$$

두 점 $A(a, 0), F'(0, -4)$ 에 대하여 $\overline{AF'} = 12$ 이므로

$$\sqrt{(-a)^2 + (-4)^2} = 12$$

$$\text{양변을 제곱하면 } a^2 + 16 = 144$$

$$a^2 = 128 \quad \therefore a = 8\sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

- 12 타원 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{33} = 1$ 의 두 초점이 F, F' 이므로

$$F(7, 0), F'(-7, 0)$$

타원 위의 점 Q 에서 두 초점에 이르는 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로

$$\overline{QF} + \overline{QF'} = 2 \times 7 = 14$$

$$\overline{QF} + (\overline{PF'} + \overline{PQ}) = 14$$

$$\therefore \overline{PQ} + \overline{FQ} = 14 - \overline{PF'} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 원 $x^2 + (y-3)^2 = 4$ 의 중심

을 $C(0, 3)$ 이라 하면 직각삼각형

$CF'O$ 에서

$$\overline{CF'} = \sqrt{\overline{CO}^2 + \overline{OF'}^2}$$

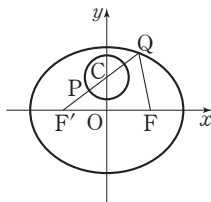
$$= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\therefore \overline{PF'} \geq \overline{CF'} - 2 = 5 - 2 = 3$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 의하여

$$\overline{PQ} + \overline{FQ} = 14 - \overline{PF'} \leq 14 - 3 = 11$$

따라서 $\overline{PQ} + \overline{FQ}$ 의 최댓값은 11이다.



I-1 03 쌍곡선

쌍곡선의 방정식

개념 Check

33쪽

- 1 $\textcircled{1}$ (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 에서

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

$$a=3, b=4 \text{이므로 } c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

초점의 좌표는

$$(5, 0), (-5, 0)$$

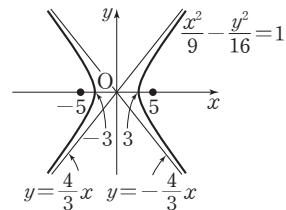
꼭짓점의 좌표는 $(3, 0), (-3, 0)$

주축의 길이는 $2a = 2 \times 3 = 6$

점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{4}{3}x$$

그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1$ 에서

$$\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} - \frac{y^2}{2^2} = -1$$

$$a = \sqrt{5}, b = 2 \text{이므로 } c = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = 3$$

초점의 좌표는

$$(0, 3), (0, -3)$$

꼭짓점의 좌표는 $(0, 2), (0, -2)$

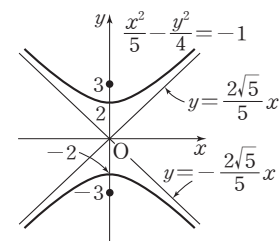
주축의 길이는 $2b = 2 \times 2 = 4$

점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}x$$

$$\therefore y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}x$$

그래프는 다음 그림과 같다.



2 ㉡ 1, -1

쌍곡선의 방정식	$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$	$(x-1)^2 - \frac{(y+1)^2}{3} = 1$
중심의 좌표	(0, 0)	(1, -1)
초점의 좌표	(2, 0), (-2, 0)	(3, -1), (-1, -1)
꼭짓점의 좌표	(1, 0), (-1, 0)	(2, -1), (0, -1)
주축의 길이	2	2
점근선의 방정식	$y = \pm\sqrt{3}x$	$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3} - 1,$ $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 1$

문제

34~39쪽

01-1 ㉡ (1) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = -1$ (2) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

(1) 중심이 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하자.

두 초점으로부터 거리의 차가 6이므로
 $2b = 6 \quad \therefore b = 3$

$a^2 = (2\sqrt{3})^2 - b^2$ 이므로 $a^2 = (2\sqrt{3})^2 - 3^2 = 3$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = -1$

(2) 중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하자.

주축의 길이가 4이므로 $2a = 4 \quad \therefore a = 2$

$b^2 = 4^2 - a^2$ 이므로 $b^2 = 4^2 - 2^2 = 12$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

다른 풀이

(1) 두 초점 F, F' 으로부터 거리의 차가 6인 점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$|\sqrt{x^2 + (y - 2\sqrt{3})^2} - \sqrt{x^2 + (y + 2\sqrt{3})^2}| = 6$

$\sqrt{x^2 + (y - 2\sqrt{3})^2} = \sqrt{x^2 + (y + 2\sqrt{3})^2} \pm 6$

양변을 제곱하여 정리하면

$-2\sqrt{3}y - 9 = \pm 3\sqrt{x^2 + (y + 2\sqrt{3})^2}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 구하는 쌍곡선의 방정식은

$9x^2 - 3y^2 = -27 \quad \therefore \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = -1$

01-2 ㉡ $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$

중심이 원점이고 두 꼭짓점이 x 축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하자.

두 꼭짓점의 좌표가 (1, 0), (-1, 0)이므로 $a = 1$

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 점 $(2, \sqrt{6})$ 을 지나므로

$2^2 - \frac{(\sqrt{6})^2}{b^2} = 1 \quad \therefore b^2 = 2$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$

02-1 ㉡ $2\sqrt{3}$

중심이 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하자.

$a^2 = (\sqrt{6})^2 - b^2$ 이므로 $a^2 = 6 - b^2 \quad \dots\dots \text{㉠}$

점근선의 방정식이 $y = \pm x$ 이므로

$\frac{b}{a} = 1 \quad \therefore b = a \quad \dots\dots \text{㉡}$

㉡을 ㉠에 대입하면 $a^2 = 6 - a^2 \quad \therefore a^2 = 3$

이를 ㉡에 대입하면 $3 = 6 - b^2 \quad \therefore b^2 = 3$

즉, 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = -1$

따라서 이 쌍곡선의 주축의 길이는 $2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

02-2 ㉡ 10

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 주축은 x 축 위에 있고 주축의 길이가 4이므로

$2a = 4 \quad \therefore a = 2$

한 점근선의 방정식이 $y = \frac{5}{2}x$ 이므로

$\frac{b}{a} = \frac{5}{2} \quad \therefore b = \frac{5}{2}a = \frac{5}{2} \times 2 = 5$

$\therefore ab = 2 \times 5 = 10$

02-3 ㉡ $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = -1$

쌍곡선이 점 $(0, \sqrt{5})$ 를 지나고 두 점근선의 교점이 원점 이므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하자.

점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{1}{2}x$ 이므로

$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \quad \therefore a = 2b \quad \dots\dots \text{㉠}$

쌍곡선이 점 $(0, \sqrt{5})$ 를 지나므로

$\frac{0^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{5})^2}{b^2} = -1 \quad \therefore b^2 = 5$

㉠에서 $a^2=4b^2$ 이므로 $a^2=4 \times 5=20$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = -1$$

03-1 ㉡ 7

쌍곡선 $\frac{(x-4)^2}{a^2} - \frac{(y+2)^2}{b^2} = 1$ 은 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선의 중심은 선분 FF'의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{9-1}{2}, \frac{-2-2}{2}\right) \quad \therefore (4, -2)$$

두 초점 F, F'의 y 좌표가 같고, 주축의 길이가 8이므로

$$2a=8 \quad \therefore a=4$$

중심에서 초점까지의 거리가 5이므로

$$b^2=5^2-a^2=5^2-4^2=9 \quad \therefore b=3 (\because b>0)$$

$$\therefore a+b=4+3=7$$

03-2 ㉢ $\frac{(x-4)^2}{20} - \frac{(y-3)^2}{16} = -1$

쌍곡선의 중심은 선분 FF'의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{4+4}{2}, \frac{9-3}{2}\right) \quad \therefore (4, 3)$$

즉, 구하는 쌍곡선은 중심이 원점인 쌍곡선을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

두 초점 F, F'의 x 좌표가 같으므로 구하는 쌍곡선의 방정식

$$\frac{(x-4)^2}{a^2} - \frac{(y-3)^2}{b^2} = -1 (a>0, b>0) \text{이라 하자.}$$

두 초점으로부터 거리의 차가 8이므로

$$2b=8 \quad \therefore b=4$$

중심에서 초점까지의 거리가 6이므로

$$a^2=6^2-b^2=6^2-4^2=20$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-4)^2}{20} - \frac{(y-3)^2}{16} = -1$$

다른 풀이

두 초점 F, F'으로부터 거리의 차가 8인 점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$|\sqrt{(x-4)^2+(y-9)^2}-\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2}|=8$$

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-9)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2}\pm 8$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$-3y+1=\pm 2\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2}$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$4(x-4)^2-5(y-3)^2=-80$$

$$\therefore \frac{(x-4)^2}{20} - \frac{(y-3)^2}{16} = -1$$

03-3 ㉣ $y=\frac{4}{3}x-3, y=-\frac{4}{3}x+5$

쌍곡선 $\frac{(x-3)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{k^2} = -1$ 은 쌍곡선

$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{k^2} = -1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{k^2} = -1$ 의 두 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{36+k^2}), (0, -\sqrt{36+k^2}) \text{이므로 쌍곡선}$$

$$\frac{(x-3)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{k^2} = -1 \text{의 두 초점의 좌표는}$$

$$(3, \sqrt{36+k^2}+1), (3, -\sqrt{36+k^2}+1)$$

이 두 초점 사이의 거리가 20이므로

$$|(\sqrt{36+k^2}+1)-(-\sqrt{36+k^2}+1)|=20$$

$$2\sqrt{36+k^2}=20$$

$$\sqrt{36+k^2}=10$$

양변을 제곱하면

$$36+k^2=100$$

$$k^2=64$$

$$\therefore k=8 (\because k>0)$$

즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = -1$ 의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{4}{3}x$ 이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y-1=\pm\frac{4}{3}(x-3)$$

$$\therefore y=\frac{4}{3}x-3, y=-\frac{4}{3}x+5$$

04-1 ㉤ 풀이 참조

$$9x^2-4y^2-54x-16y+101=0 \text{에서}$$

$$9(x^2-6x+9)-4(y^2+4y+4)=-36$$

$$\therefore \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = -1$$

즉, 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ 에서 $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = -1$ 이므로 이 쌍곡선의

중심의 좌표는 $(0, 0)$,

초점의 좌표는 $(0, \sqrt{13}), (0, -\sqrt{13})$,

꼭짓점의 좌표는 $(0, 3), (0, -3)$,

주축의 길이는 $2 \times 3 = 6$,

점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{3}{2}x$

따라서 구하는 쌍곡선의

중심의 좌표는 $(3, -2)$,

초점의 좌표는 $(3, \sqrt{13}-2), (3, -\sqrt{13}-2)$,

꼭짓점의 좌표는 (3, 1), (3, -5),
 주축의 길이는 6,
 점근선의 방정식은 $y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}, y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

04-2 ㉡ 3

$8x^2 - y^2 + 2y - 9 = 0$ 에서
 $8x^2 - (y^2 - 2y + 1) = 8$
 $\therefore x^2 - \frac{(y-1)^2}{8} = 1$
 즉, 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ 을 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 (3, 0), (-3, 0)
 이므로 주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는
 (3, 1), (-3, 1)
 $\therefore \overline{FF'} = 3 - (-3) = 6$
 원점에서 직선 $y=1$ 까지의 거리는 $1-0=1$
 따라서 삼각형 OFF' 의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 6 \times 1 = 3$

05-1 ㉡ 8

쌍곡선 $x^2 - 8y^2 = -8$, 즉 $\frac{x^2}{8} - y^2 = -1$ 의 두 초점의 좌표는 (0, 3), (0, -3)
 $\therefore \overline{FF'} = 3 - (-3) = 6$
 $\overline{PF} = m, \overline{PF'} = n$ 이라 하면 쌍곡선 위의 점 P에서 두 초점에 이르는 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로
 $|m - n| = 2 \times 1 = 2$
 양변을 제곱하면
 $m^2 - 2mn + n^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 삼각형 PFF'은 직각삼각형이므로
 $m^2 + n^2 = 36$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $36 - 2mn = 4 \quad \therefore mn = 16$
 따라서 삼각형 PFF'의 넓이는
 $\frac{1}{2}mn = \frac{1}{2} \times 16 = 8$

05-2 ㉡ 480

쌍곡선 $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ 의 두 초점의 좌표는
 (10, 0), (-10, 0)
 $\therefore \overline{FF'} = 10 - (-10) = 20$
 이때 삼각형 PFF'의 둘레의 길이가 50이므로
 $\overline{PF} + \overline{FF'} + \overline{PF'} = 50 \quad \therefore \overline{PF} + \overline{PF'} = 30$

한편 쌍곡선 위의 점 P에서 두 초점에 이르는 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로
 $\overline{PF} - \overline{PF'} = 2 \times 8 = 16 \quad (\because \overline{PF} > \overline{PF'})$
 $\therefore \overline{PF}^2 - \overline{PF'}^2 = (\overline{PF} + \overline{PF'}) (\overline{PF} - \overline{PF'})$
 $= 30 \times 16 = 480$

05-3 ㉡ 34

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ 의 두 초점의 좌표는
 (0, 5), (0, -5)
 $\therefore \overline{FF'} = 5 - (-5) = 10$
 한편 쌍곡선 위의 점 P에서 두 초점에 이르는 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로
 $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2 \times 4 = 8 \quad (\because \overline{PF'} > \overline{PF})$
 이때 $\overline{PF'} = 2\overline{PF}$ 이므로 $2\overline{PF} - \overline{PF} = 8$
 $\therefore \overline{PF} = 8, \overline{PF'} = 16$
 따라서 삼각형 PFF'의 둘레의 길이는
 $\overline{PF} + \overline{FF'} + \overline{PF'} = 8 + 10 + 16 = 34$

06-1 ㉡ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = -1$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 Q의 좌표는 (x, 0)
 $\overline{AQ} = \overline{PQ}$ 에서 $\sqrt{x^2 + (-4)^2} = |y|$
 양변을 제곱하면 구하는 도형의 방정식은
 $x^2 + 16 = y^2 \quad \therefore \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = -1$

06-2 ㉡ $x^2 - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면
 $\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{8} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 선분 AP의 중점 M의 좌표를 (x, y)라 하면
 $x = \frac{a}{2}, y = \frac{2+b}{2} \quad \therefore a = 2x, b = 2y - 2$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 도형의 방정식은
 $\frac{(2x)^2}{4} - \frac{(2y-2)^2}{8} = 1$
 $\therefore x^2 - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$

06-3 ㉡ 8

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면
 $A(-1, -3), B(5, -3)$ 이고 $|\overline{PA} - \overline{PB}| = 4$ 이므로
 $|\sqrt{(x+1)^2 + (y+3)^2} - \sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2}| = 4$
 $\sqrt{(x+1)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2} \pm 4$
 양변을 제곱하여 정리하면
 $3x - 10 = \pm 2\sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$5(x-2)^2 - 4(y+3)^2 = 20$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{5} = 1$$

따라서 $a=4, b=5, m=2, n=-3$ 이므로

$$a+b+m+n=8$$

2 이차곡선

개념 Check

40쪽

1 ㉠ (1) 쌍곡선 (2) 포물선 (3) 원 (4) 타원

(1) $x^2 - y^2 + 2x - 2y + 4 = 0$ 에서

$$(x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 2y + 1) = -4$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{4} = -1$$

따라서 주어진 방정식은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = -1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 쌍곡선을 나타낸다.

(2) $x^2 + 4x - 2y + 14 = 0$ 에서

$$x^2 + 4x + 4 = 2y - 10$$

$$\therefore (x+2)^2 = 2(y-5)$$

따라서 주어진 방정식은 포물선 $x^2 = 2y$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동한 포물선을 나타낸다.

(3) $x^2 + y^2 - 8x + 1 = 0$ 에서

$$(x^2 - 8x + 16) + y^2 = 15$$

$$\therefore (x-4)^2 + y^2 = 15$$

따라서 주어진 방정식은 중심의 좌표가 $(4, 0)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{15}$ 인 원을 나타낸다.

(4) $4x^2 + y^2 + 6y - 11 = 0$ 에서

$$4x^2 + (y^2 + 6y + 9) = 20$$

$$\therefore \frac{x^2}{5} + \frac{(y+3)^2}{20} = 1$$

따라서 주어진 방정식은 타원 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{20} = 1$ 을 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 타원을 나타낸다.

다른 풀이

- x^2 항과 y^2 항의 계수의 곱이 음수이므로 쌍곡선이다.
- y^2 항이 없고 x^2 항, y 항이 존재하므로 포물선이다.
- x^2 항과 y^2 항의 계수가 같으므로 원이다.
- x^2 항과 y^2 항의 계수의 곱이 양수이면서 서로 다르므로 타원이다.

문제

41쪽

07-1 ㉠ $0 < k < 1$ 또는 $k > 1$

$$kx^2 + y^2 + 4x = 0 \text{에서 } k\left(x + \frac{2}{k}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{k}$$

이 방정식이 나타내는 도형이 타원이 되려면

$$k \times 1 > 0, k \neq 1, \frac{4}{k} > 0$$

$$\therefore 0 < k < 1 \text{ 또는 } k > 1$$

07-2 ㉠ $-\frac{1}{2}$

$$x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + k(x^2 + 4y^2) = 0 \text{에서}$$

$$(k+1)x^2 + (4k-2)y^2 + 6x + 4y = 0$$

이 방정식이 나타내는 도형이 포물선이 되려면

$$k+1=0 \text{ 또는 } 4k-2=0$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=\frac{1}{2}$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

07-3 ㉠ $k < -3$ 또는 $k > 2$

$$3x^2 + 4y^2 - 5 + k(x^2 - 2y^2) = 0 \text{에서}$$

$$(k+3)x^2 + (-2k+4)y^2 = 5$$

이 방정식이 나타내는 도형이 쌍곡선이 되려면

$$(k+3)(-2k+4) < 0$$

$$(k+3)(k-2) > 0$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 2$$

연습문제

42~44쪽

1 26	2 40	3 ⑤	4 ③	5 ④
6 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{15} = -1$	7 ②	8 -4	9 ②	
10 ④	11 48	12 ②	13 16	14 ③
15 $\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{1200} = 1$	16 ③	17 7	18 ④	
19 $4\sqrt{3}$				

- 쌍곡선 $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{36} = -1$ 의 두 초점의 좌표는 $(0, 7), (0, -7)$
 $\therefore a = 7 - (-7) = 14$
 주축의 길이는 $b = 2 \times 6 = 12$
 $\therefore a + b = 14 + 12 = 26$

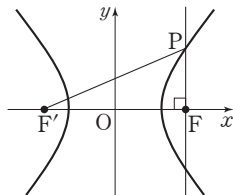
2 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{12} = 1$ 의 두 꼭짓점의 좌표는
 $(a, 0), (-a, 0)$
 이 두 점이 타원 $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점이고, 두 초점이 x 축 위에 있으므로
 $b^2 = 40 - a^2 \quad \therefore a^2 + b^2 = 40$

3 중심이 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하자.
 이 쌍곡선이 두 점 $(-4, 5), (6, -5\sqrt{2})$ 를 지나므로
 $\frac{(-4)^2}{a^2} - \frac{5^2}{b^2} = -1 \quad \therefore \frac{16}{a^2} - \frac{25}{b^2} = -1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 $\frac{6^2}{a^2} - \frac{(-5\sqrt{2})^2}{b^2} = -1 \quad \therefore \frac{36}{a^2} - \frac{50}{b^2} = -1 \quad \dots\dots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A} \times 2 - \textcircled{B}$ 을 하면
 $-\frac{4}{a^2} = -1 \quad \therefore a^2 = 4$
 이를 \textcircled{A} 에 대입하여 정리하면 $b^2 = 5$
 즉, 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = -1$ 이므로 두 초점의 좌표는
 $(0, 3), (0, -3)$
 따라서 두 초점 사이의 거리는 $3 - (-3) = 6$

4 초점 $F(c, 0)$ 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과 제1사분면에서 만나는 점 P에 대하여 점 P의 x 좌표는 c 이고, $\overline{PF} = 5$ 이므로 점 P의 y 좌표는 5이다.
 $\therefore P(c, 5)$
 이때 점 P가 쌍곡선 $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점이므로
 $\frac{c^2}{16} - \frac{5^2}{b^2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 한편 $b^2 = c^2 - 4^2$ 이므로 $c^2 = b^2 + 16$
 이를 \textcircled{A} 에 대입하면 $\frac{b^2 + 16}{16} - \frac{25}{b^2} = 1$
 $\frac{b^2}{16} = \frac{25}{b^2}, b^4 = 400 \quad \therefore b^2 = 20$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 다른 한 초점을 $F'(-c, 0)$ 이라 하면 두 초점 사이의 거리는 $\overline{FF'} = 2c$



쌍곡선 위의 점 P에서 두 초점에 이르는 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로
 $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2 \times 4 = 8$

이때 $\overline{PF} = 5$ 이므로
 $\overline{PF'} - \overline{PF} = \overline{PF'} - 5 = 8$
 $\therefore \overline{PF'} = 13$
 한편 삼각형 $PF'F$ 는 직각삼각형이므로
 $\overline{FF'} = \sqrt{\overline{PF'}^2 - \overline{PF}^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$
 즉, $\overline{FF'} = 2c = 12$ 이므로 $c = 6$
 $\therefore b^2 = c^2 - 4^2 = 6^2 - 4^2 = 20$

5 쌍곡선 $3x^2 - y^2 = -9$, 즉 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = -1$ 의 초점, 주축, 꼭짓점은 y 축 위에 있다.
 ① 초점의 좌표는 $(0, 2\sqrt{3}), (0, -2\sqrt{3})$ 이다.
 ② 주축의 길이는 $2 \times 3 = 6$ 이다.
 ③ 꼭짓점의 좌표는 $(0, 3), (0, -3)$ 이다.
 ④ 쌍곡선 위의 점에서 두 초점에 이르는 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로 6이다.
 ⑤ 점근선의 방정식은
 $y = \pm \frac{3}{\sqrt{3}}x \quad \therefore y = \pm \sqrt{3}x$
 따라서 옳은 것은 ④이다.

6 타원 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{25} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(0, 2\sqrt{5}), (0, -2\sqrt{5})$
 이 두 점을 초점으로 하는 쌍곡선은 중심이 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하자.
 $a^2 = (2\sqrt{5})^2 - b^2$ 이므로 $a^2 + b^2 = 20 \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 한 점근선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\frac{b}{a} = \tan 60^\circ, \frac{b}{a} = \sqrt{3} \quad \therefore b = \sqrt{3}a$$

이를 \textcircled{A} 에 대입하면
 $a^2 + 3a^2 = 20 \quad \therefore a^2 = 5$

이를 \textcircled{A} 에 대입하면
 $5 + b^2 = 20 \quad \therefore b^2 = 15$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은
 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{15} = -1$

7 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 이 점 $(2, -4)$ 를 지나므로
 $\frac{2^2}{a^2} - \frac{(-4)^2}{b^2} = -1 \quad \therefore \frac{4}{a^2} - \frac{16}{b^2} = -1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 의 점근선의 방정식은
 $y = \pm \frac{b}{a}x$

두 점근선이 서로 수직이므로

$$\frac{b}{a} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -1 \quad \therefore b^2 = a^2 \quad \dots \textcircled{C}$$

①을 ①에 대입하면

$$\frac{4}{a^2} - \frac{16}{a^2} = -1, a^2 = 12$$

$$\therefore a = 2\sqrt{3} \quad (\because a > 0)$$

이를 ①에 대입하면

$$b^2 = 12 \quad \therefore b = 2\sqrt{3} \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore ab = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 12$$

- 8 쌍곡선 $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{7} = 1$ 은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(4, 0), (-4, 0)$

이므로 주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는

$$(1, 1), (-7, 1)$$

$$\therefore a+b+c+d = 1+1+(-7)+1 = -4$$

- 9 쌍곡선의 중심은 선분 FF' 의 중점이므로 중심의 좌표는 $\left(\frac{-2-2}{2}, \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2}\right) \therefore (-2, 0)$

즉, 구하는 쌍곡선은 중심이 원점인 쌍곡선을 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

두 초점 F, F' 의 x 좌표가 같으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{(x+2)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0)$ 이라 하자.

주축의 길이가 4이므로

$$2b = 4 \quad \therefore b = 2$$

중심에서 초점까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$a^2 = (\sqrt{5})^2 - b^2 = (\sqrt{5})^2 - 2^2 = 1$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$(x+2)^2 - \frac{y^2}{4} = -1$$

- 10 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y-b)^2}{9} = 1$ 은 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ 을 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{3}{a}x$ 이므로

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y-b)^2}{9} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y - b = \pm \frac{3}{a}x$$

$$\therefore y = \frac{3}{a}x + b, y = -\frac{3}{a}x + b$$

이때 $a > 0$ 이므로 직선 $y = \frac{3}{a}x + b$, 즉 $3x - ay + ab = 0$

이 직선 $3x - 4y + 8 = 0$ 과 일치한다.

즉, $a = 4, ab = 8$ 이므로 $a = 4, b = 2$

$$\therefore a - b = 2$$

- 11 $9x^2 - y^2 - 72x - 2y + 107 = 0$ 에서 $9(x^2 - 8x + 16) - (y^2 + 2y + 1) = 36$
 $\therefore \frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1$

즉, 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$ 을 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$ 의 점근선의 방정식은 $y = \pm 3x$ 이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y + 1 = 3(x - 4), y + 1 = -3(x - 4)$$

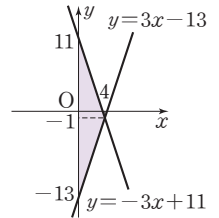
$$\therefore y = 3x - 13, y = -3x + 11$$

이때 두 점근선의 교점의 좌표는

$$(4, -1)$$

이므로 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{11 - (-13)\} \times 4 = 48$$



- 12 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1$ 위의 두 점 P, Q 에서 두 초점에 이르는 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a, \overline{QF} - \overline{QF'} = 2a$$

$$\therefore \overline{PF'} = \overline{PF} + 2a, \overline{QF'} = \overline{QF} - 2a$$

이때 $\overline{PF} = \overline{QF}$ 이므로 $\overline{QF'} = \overline{PF} - 2a$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PQ} &= \overline{PF'} - \overline{QF'} \\ &= (\overline{PF} + 2a) - (\overline{PF} - 2a) \\ &= 4a \end{aligned}$$

즉, $4a = 8$ 이므로 $a = 2$

한편 $16 = c^2 - a^2$ 이므로 $c^2 = 2^2 + 16 = 20$

$$\therefore c = 2\sqrt{5} \quad (\because c > 0)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 2c = 4\sqrt{5}$$

- 13 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$ 의 두 초점의 좌표는 $(0, 5), (0, -5)$

$$\therefore \overline{FF'} = 5 - (-5) = 10$$

$\overline{PF} = m, \overline{PF'} = n$ 이라 하면 쌍곡선의 위의 점 P 에서 두 초점에 이르는 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로

$$|m - n| = 2 \times 3 = 6$$

양변을 제곱하면

$$m^2 - 2mn + n^2 = 36 \quad \dots \textcircled{D}$$

점 P는 선분 FF'을 지름으로 하는 원 위의 점이므로
 $\angle FPF' = 90^\circ$

즉, 삼각형 PFF'은 직각삼각형이므로

$$m^2 + n^2 = 100 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

①을 ②에 대입하면

$$100 - 2mn = 36 \quad \therefore mn = 32$$

따라서 삼각형 PFF'의 넓이는

$$\frac{1}{2}mn = \frac{1}{2} \times 32 = 16$$

- 14 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 점 P가 점 $(0, -8)$ 과 x축에 이르는 거리의 비가 3 : 1이므로

$$\sqrt{x^2 + (y+8)^2} : |y| = 3 : 1$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + (y+8)^2} = 3|y|$$

양변을 제곱하면

$$x^2 + (y+8)^2 = 9y^2, \quad x^2 - 8y^2 + 16y + 64 = 0$$

$$x^2 - 8(y-1)^2 = -72 \quad \therefore \frac{x^2}{72} - \frac{(y-1)^2}{9} = -1$$

따라서 이 쌍곡선의 주축의 길이는 $2 \times 3 = 6$

- 15 A(-40, 0), B(40, 0)이고 배의 위치를 P(x, y)라 하면 $|\overline{PA} - \overline{PB}| = 40$ 이므로

$$|\sqrt{(x+40)^2 + y^2} - \sqrt{(x-40)^2 + y^2}| = 40$$

$$\sqrt{(x+40)^2 + y^2} = \sqrt{(x-40)^2 + y^2} \pm 40$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$2x - 20 = \pm \sqrt{(x-40)^2 + y^2}$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 구하는 곡선의 방정식은

$$3x^2 - y^2 = 1200 \quad \therefore \frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{1200} = 1$$

- 16 $x^2 - ay^2 + 2ay - 7 = 0$ 에서 $x^2 - a(y-1)^2 = 7 - a$ 이 방정식이 나타내는 도형이 x축에 평행한 주축을 가지는 쌍곡선이 되려면

$$1 \times (-a) < 0, \quad 7 - a > 0 \quad \therefore 0 < a < 7$$

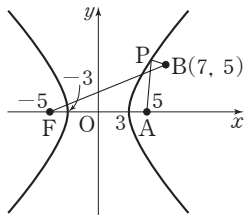
따라서 정수 a의 최댓값은 6이다.

- 17 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(5, 0), (-5, 0)$

오른쪽 그림과 같이 점 A는 쌍곡선의 한 초점이므로 나머지 초점을 F라 하자. 쌍곡선 위의 점 P에서 두 초점 A, F에 이르는 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로

$\overline{PF} - \overline{PA} = 2 \times 3 = 6$

$$\therefore \overline{PA} = \overline{PF} - 6$$



이를 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 에 대입하면

$$\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PF} + \overline{PB} - 6$$

$$\geq \overline{BF} - 6$$

이때 $\overline{BF} = \sqrt{(-5-7)^2 + (-5)^2} = 13$ 이므로

$$\overline{PA} + \overline{PB} \geq 13 - 6 = 7$$

따라서 구하는 최솟값은 7이다.

- 18 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = -1$ 위의 두 점 P, Q에서 두 초점에 이르는 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2 \times 2 = 4, \quad \overline{QF} - \overline{QF'} = 2 \times 2 = 4$$

$$\therefore \overline{PF'} = \overline{PF} + 4, \quad \overline{QF'} = \overline{QF} - 4$$

이때 $\overline{PF'} - \overline{QF'} = 5$ 이므로

$$(\overline{PF} + 4) - (\overline{QF} - 4) = 5$$

$$\therefore \overline{PF} - \overline{QF} = -3$$

한편 $\overline{PF} = \frac{2}{3}\overline{QF}$ 이므로

$$\frac{2}{3}\overline{QF} - \overline{QF} = -3$$

$$\therefore \overline{QF} = 9, \quad \overline{PF} = 6$$

$$\therefore \overline{PF} + \overline{QF} = 15$$

- 19 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점은 x축 위에 있으므로

$F(c, 0), F'(-c, 0) (c > 0)$ 이라 하면 $\overline{FF'} = 2c$

주어진 조건에 의하여 두 이등변삼각형 AF'F, BF'F는 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore \overline{AF'} = \overline{FF'} = 2c,$$

$$\overline{BF} = \overline{FF'} = 2c$$

쌍곡선 위의 두 점 A, B에서

두 초점에 이르는 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로

$$\overline{AF'} - \overline{AF} = 2a, \quad \overline{BF'} - \overline{BF} = 2a$$

$$\therefore \overline{AF} = \overline{AF'} - 2a = 2c - 2a, \quad \overline{BF'} = \overline{BF} + 2a = 2c + 2a$$

(타)에서 삼각형 AF'F의 둘레의 길이가 20이므로

$$\overline{AF} + \overline{FF'} + \overline{AF'} = 20$$

$$(2c - 2a) + 2c + 2c = 20$$

$$\therefore 3c - a = 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(타)에서 삼각형 BF'F의 둘레의 길이가 28이므로

$$\overline{BF} + \overline{FF'} + \overline{BF'} = 28$$

$$2c + 2c + (2c + 2a) = 28$$

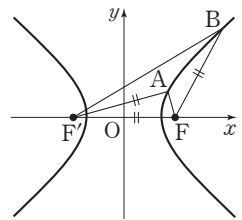
$$\therefore 3c + a = 14 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = 2, c = 4$

한편 $b^2 = c^2 - a^2$ 이므로

$$b^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \quad \therefore b = 2\sqrt{3} (\because b > 0)$$

$$\therefore ab = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$



I-2 01 이차곡선의 접선

I 이차곡선의 접선

개념 Check

46쪽

- 1 답 (1) 접선이다.
 (2) 접선이 아니다.
 (3) 접선이다.

문제

47쪽

01-1 답 $-\sqrt{17}, \sqrt{17}$

$y=2x+k$ 를 $x^2+4y^2=4$ 에 대입하면

$$x^2+4(2x+k)^2=4$$

$$\therefore 17x^2+16kx+4k^2-4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(8k)^2-17(4k^2-4)$$

$$=-4k^2+68$$

타원과 직선이 접하려면 $D=0$ 이어야 하므로

$$-4k^2+68=0$$

$$k^2=17 \quad \therefore k=\pm\sqrt{17}$$

01-2 답 $-\frac{1}{4}$

직선 $y=-2x$ 를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y=-2(x-k)$$

이를 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{9}=-1$ 에 대입하면

$$\frac{x^2}{2}-\frac{\{-2(x-k)\}^2}{9}=-1$$

$$\therefore x^2+16kx-8k^2+18=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(8k)^2-(-8k^2+18)$$

$$=72k^2-18$$

평행이동한 직선과 쌍곡선이 접하려면 $D=0$ 이어야 하므로

$$72k^2-18=0$$

$$k^2=\frac{1}{4}$$

$$\therefore k=\pm\frac{1}{2}$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

2 기울기가 주어진 이차곡선의 접선의 방정식

개념 Check

49쪽

1 답 (1) $y=-2x-1$ (2) $y=2x+2$

2 답 (1) $y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{10}$ (2) $y=-x\pm 3$

3 답 (1) $y=2x\pm 2\sqrt{6}$ (2) $y=-x\pm 2$

문제

50~52쪽

02-1 답 $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 인 직선의 기울기는

$$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

$y^2=4\times(-3)x$ 이므로 포물선 $y^2=-12x$ 에 접하고 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 접선의 방정식은

$$y=\sqrt{3}x+\frac{-3}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$$

다른 풀이 판별식 이용

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 인 직선의 기울기는 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ 이므로 직선의 방정식은

$$y=\sqrt{3}x+k \quad (k \text{는 상수}) \text{라 하자.}$$

이를 $y^2=-12x$ 에 대입하면

$$(\sqrt{3}x+k)^2=-12x$$

$$\therefore 3x^2+2(\sqrt{3}k+6)x+k^2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(\sqrt{3}k+6)^2-3k^2=0$$

$$12\sqrt{3}k+36=0$$

$$\therefore k=-\sqrt{3}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$$

02-2 답 -15

직선 $x-5y+5=0$, 즉 $y=\frac{1}{5}x+1$ 에 수직인 직선의 기울기는 -5

$x^2=4\times y$ 이므로 포물선 $x^2=4y$ 에 접하고 기울기가 -5 인 접선의 방정식은

$$y=-5x-(-5)^2\times 1$$

$$\therefore y=-5x-25$$

이 직선이 점 $(-2, k)$ 를 지나므로

$$k=-5\times(-2)-25=-15$$

03-1 **답** $\frac{14}{3}$

직선 $3x - y - 6 = 0$, 즉 $y = 3x - 6$ 과 평행한 직선의 기울기는 3

타원 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{5 \times 3^2 + 4}$$

$$\therefore y = 3x \pm 7$$

즉, 두 직선이 x 축과 만나는 점의 좌표는 각각

$$\left(-\frac{7}{3}, 0\right), \left(\frac{7}{3}, 0\right)$$

따라서 선분 AB의 길이는

$$\left| \frac{7}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) \right| = \frac{14}{3}$$

03-2 **답** $2\sqrt{3}$

타원 $x^2 + 4y^2 = 4$, 즉 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 에 접하고 기울기가 $\sqrt{2}$ 인 접선의 방정식은

$$y = \sqrt{2}x \pm \sqrt{4 \times (\sqrt{2})^2 + 1}$$

$$\therefore y = \sqrt{2}x \pm 3$$

따라서 두 접선 사이의 거리는 직선 $y = \sqrt{2}x + 3$ 위의 점 $(0, 3)$ 과 직선 $y = \sqrt{2}x - 3$, 즉 $\sqrt{2}x - y - 3 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-3 - 3|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{3}$$

다른 풀이 판별식 이용

기울기가 $\sqrt{2}$ 인 직선의 방정식을 $y = \sqrt{2}x + k$ (k 는 상수)라 하자.

이를 $x^2 + 4y^2 = 4$ 에 대입하면

$$x^2 + 4(\sqrt{2}x + k)^2 = 4$$

$$\therefore 9x^2 + 8\sqrt{2}kx + 4k^2 - 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (4\sqrt{2}k)^2 - 9(4k^2 - 4) = 0$$

$$k^2 = 9 \quad \therefore k = \pm 3$$

즉, 타원 $x^2 + 4y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가 $\sqrt{2}$ 인 접선의 방정식은

$$y = \sqrt{2}x \pm 3$$

따라서 두 접선 사이의 거리는 직선 $y = \sqrt{2}x + 3$ 위의 점 $(0, 3)$ 과 직선 $y = \sqrt{2}x - 3$, 즉 $\sqrt{2}x - y - 3 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-3 - 3|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{3}$$

04-1 **답** $y = 2x \pm 2\sqrt{3}$

직선 $x + 2y + 4 = 0$, 즉 $y = -\frac{1}{2}x - 2$ 에 수직인 직선의 기울기는 2

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 4$, 즉 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가 2

인 접선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{4 \times 2^2 - 4}$$

$$\therefore y = 2x \pm 2\sqrt{3}$$

다른 풀이 판별식 이용

직선 $x + 2y + 4 = 0$, 즉 $y = -\frac{1}{2}x - 2$ 에 수직인 직선의

기울기는 2이므로 직선의 방정식을 $y = 2x + k$ (k 는 상수)라 하자.

이를 $x^2 - y^2 = 4$ 에 대입하면

$$x^2 - (2x + k)^2 = 4$$

$$\therefore 3x^2 + 4kx + k^2 + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 3(k^2 + 4) = 0$$

$$k^2 = 12 \quad \therefore k = \pm 2\sqrt{3}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm 2\sqrt{3}$$

04-2 **답** $\frac{9}{2}$

쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = -1$ 에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{25 - 16 \times 1^2}$$

$$\therefore y = x \pm 3$$

이때 y 절편이 양수인 직선은

$$y = x + 3$$

이 직선이 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 각각

$$(-3, 0), (0, 3)$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$

3 이차곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식

개념 Check

55쪽

1 **답** $y = -x + 3$

2 **답** $y = \frac{1}{2}x + 3$

3 **답** $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

05-1 ㉠ 2

점 $(-2, a)$ 가 포물선 $x^2 = -2y$ 위의 점이므로

$$(-2)^2 = -2a \quad \therefore a = -2$$

$x^2 = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)y$ 이므로 포물선 $x^2 = -2y$ 위의 점

$(-2, -2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-2x = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (y-2)$$

$$\therefore y = 2x + 2$$

따라서 $a = -2, m = 2, n = 2$ 이므로

$$a + mn = -2 + 2 \times 2 = 2$$

다른 풀이 기울기가 주어진 접선의 방정식 이용

점 $(-2, a)$ 가 포물선 $x^2 = -2y$ 위의 점이므로

$$(-2)^2 = -2a \quad \therefore a = -2$$

$x^2 = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)y$ 이므로 접선의 기울기가 m 인 접선의 방

정식은

$$y = mx - m^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \therefore y = mx + \frac{1}{2}m^2$$

이 직선이 점 $(-2, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = m \times (-2) + \frac{1}{2}m^2$$

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$(m-2)^2 = 0 \quad \therefore m = 2$$

즉, 접선의 방정식은 $y = 2x + 2$

$$\therefore n = 2$$

$$\therefore a + mn = -2 + 2 \times 2 = 2$$

다른 풀이 판별식 이용

점 $(-2, a)$ 가 포물선 $x^2 = -2y$ 위의 점이므로

$$(-2)^2 = -2a \quad \therefore a = -2$$

점 $(-2, -2)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y + 2 = m(x + 2)$$

$$\therefore y = mx + 2m - 2$$

이를 $x^2 = -2y$ 에 대입하면

$$x^2 = -2(mx + 2m - 2)$$

$$\therefore x^2 + 2mx + 4m - 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = m^2 - (4m - 4) = 0$$

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$(m-2)^2 = 0$$

$$\therefore m = 2$$

즉, 접선의 방정식은 $y = 2x + 2$

$$\therefore n = 2$$

$$\therefore a + mn = -2 + 2 \times 2 = 2$$

05-2 ㉠ $y = x + 2$

점 $A(a, 2a)$ 가 포물선 $y^2 = 8x$ 위의 점이므로

$$(2a)^2 = 8a, a^2 - 2a = 0$$

$$a(a-2) = 0 \quad \therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 2$$

$y^2 = 4 \times 2x$ 이므로 초점의 좌표는 $(2, 0)$ 이고 점 A 에서 초점까지의 거리가 4이므로

$$A(2, 4)$$

따라서 포물선 $y^2 = 8x$ 위의 점 $A(2, 4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4y = 2 \times 2 \times (x + 2)$$

$$\therefore y = x + 2$$

06-1 ㉠ -2

타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{8} + \frac{y}{2} = 1 \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 2$$

이 직선이 점 $(k, 3)$ 을 지나므로

$$3 = -\frac{1}{2}k + 2 \quad \therefore k = -2$$

다른 풀이 판별식 이용

점 $(2, 1)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y - 1 = m(x - 2) \quad \therefore y = mx - 2m + 1$$

이를 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$, 즉 $x^2 + 4y^2 = 8$ 에 대입하면

$$x^2 + 4(mx - 2m + 1)^2 = 8$$

$$\therefore (4m^2 + 1)x^2 - 8(2m^2 - m)x + 16m^2 - 16m - 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{-4(2m^2 - m)\}^2 - (4m^2 + 1)(16m^2 - 16m - 4) = 0$$

$$4m^2 + 4m + 1 = 0, (2m + 1)^2 = 0$$

$$\therefore m = -\frac{1}{2}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

이 직선이 점 $(k, 3)$ 을 지나므로

$$3 = -\frac{1}{2}k + 2 \quad \therefore k = -2$$

06-2 ㉠ $\frac{9}{2}$

타원 $2x^2 + y^2 = 6$ 위의 점 $(1, -2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x - 2y = 6 \quad \therefore y = x - 3$$

이 직선이 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 각각

$$(3, 0), (0, -3)$$

따라서 $P(3, 0), Q(0, -3)$ 이므로 삼각형 POQ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$

07-1 ㉔ 2

점 (4, a)가 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{4^2}{12} - \frac{a^2}{3} = 1, a^2 = 1 \quad \therefore a = -1 \quad (\because a < 0)$$

즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점 (4, -1)에서의 접선의

방정식은

$$\frac{4x}{12} + \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore y = -x + 3$$

이 직선이 점 (b, 0)을 지나므로

$$0 = -b + 3 \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore a + b = -1 + 3 = 2$$

다른 풀이 판별식 이용

점 (4, a)가 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{4^2}{12} - \frac{a^2}{3} = 1, a^2 = 1 \quad \therefore a = -1 \quad (\because a < 0)$$

점 (4, -1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y + 1 = m(x - 4) \quad \therefore y = mx - 4m - 1$$

이를 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$, 즉 $x^2 - 4y^2 = 12$ 에 대입하면

$$x^2 - 4(mx - 4m - 1)^2 = 12$$

$$\therefore (4m^2 - 1)x^2 - 8(4m^2 + m)x + 64m^2 + 32m + 16 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{-4(4m^2 + m)\}^2 - (4m^2 - 1)(64m^2 + 32m + 16) = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 = 0, (m + 1)^2 = 0$$

$$\therefore m = -1$$

즉, 접선의 방정식은

$$y = -x + 3$$

이 직선이 점 (b, 0)을 지나므로

$$0 = -b + 3 \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore a + b = -1 + 3 = 2$$

07-2 ㉔ 5

점 (1, 3)이 쌍곡선 $ax^2 - by^2 = -3$ 위의 점이므로

$$a \times 1^2 - b \times 3^2 = -3$$

$$\therefore a - 9b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

쌍곡선 $ax^2 - by^2 = -3$ 위의 점 (1, 3)에서의 접선의 방정식은

$$ax - 3by = -3 \quad \therefore y = \frac{a}{3b}x + \frac{1}{b}$$

이때 접선의 기울기가 2이므로

$$\frac{a}{3b} = 2 \quad \therefore a = 6b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면

$$a = 6, b = 1 \quad \therefore a - b = 5$$

4 이차곡선 밖의 한 점에서 이차곡선에 그은 접선의 방정식

문제

60~62쪽

08-1 ㉔ $y = -2x - 6$ 또는 $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

$x^2 = 4 \times \frac{3}{2}y$ 이므로 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선

의 방정식은

$$x_1x = 2 \times \frac{3}{2} \times (y + y_1) \quad \therefore x_1x = 3(y + y_1)$$

이 직선이 점 (-2, -2)를 지나므로

$$-2x_1 = 3(-2 + y_1)$$

$$\therefore y_1 = -\frac{2}{3}x_1 + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 포물선 $x^2 = 6y$ 위의 점이므로

$$x_1^2 = 6y_1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉑을 ㉒에 대입하면

$$x_1^2 = 6\left(-\frac{2}{3}x_1 + 2\right), x_1^2 + 4x_1 - 12 = 0$$

$$(x_1 + 6)(x_1 - 2) = 0 \quad \therefore x_1 = -6 \text{ 또는 } x_1 = 2$$

㉑에서 $x_1 = -6$ 일 때 $y_1 = 6$, $x_1 = 2$ 일 때 $y_1 = \frac{2}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -2x - 6 \text{ 또는 } y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

다른 풀이 기울기가 주어진 접선의 방정식 이용

$x^2 = 4 \times \frac{3}{2}y$ 이므로 포물선 $x^2 = 6y$ 에 접하고 기울기가

m인 접선의 방정식은

$$y = mx - \frac{3}{2}m^2$$

이 직선이 점 (-2, -2)를 지나므로

$$-2 = -2m - \frac{3}{2}m^2$$

$$3m^2 + 4m - 4 = 0$$

$$(m + 2)(3m - 2) = 0 \quad \therefore m = -2 \text{ 또는 } m = \frac{2}{3}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -2x - 6 \text{ 또는 } y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

다른 풀이 판별식 이용

점 (-2, -2)를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y + 2 = m(x + 2) \quad \therefore y = mx + 2m - 2$$

이를 $x^2 = 6y$ 에 대입하면

$$x^2 = 6(mx + 2m - 2)$$

$$\therefore x^2 - 6mx - 12m + 12 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-3m)^2 - (-12m + 12) = 0$$

$$3m^2 + 4m - 4 = 0, (m+2)(3m-2) = 0$$

$$\therefore m = -2 \text{ 또는 } m = \frac{2}{3}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -2x - 6 \text{ 또는 } y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

09-1 **답** $y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}$ 또는 $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$2x_1x + y_1y = 1$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$2x_1 = 1 \quad \therefore x_1 = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 타원 $2x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$2x_1^2 + y_1^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y_1^2 = 1, y_1^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore y_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2} \text{ 또는 } y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$$

다른 풀이 판별식 이용

점 $(1, 0)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = m(x-1)$$

$$\therefore y = mx - m$$

이를 $2x^2 + y^2 = 1$ 에 대입하면

$$2x^2 + (mx - m)^2 = 1$$

$$\therefore (m^2 + 2)x^2 - 2m^2x + m^2 - 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-m^2)^2 - (m^2 + 2)(m^2 - 1) = 0$$

$$m^2 = 2 \quad \therefore m = \pm \sqrt{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2} \text{ 또는 } y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$$

09-2 **답** 5

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$4x_1x + 9y_1y = 36$$

이 직선이 점 $(3, 4)$ 를 지나므로

$$4 \times 3x_1 + 9 \times 4y_1 = 36$$

$$\therefore y_1 = -\frac{1}{3}x_1 + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 타원 $4x^2 + 9y^2 = 36$ 위의 점이므로

$$4x_1^2 + 9y_1^2 = 36 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$4x_1^2 + 9\left(-\frac{1}{3}x_1 + 1\right)^2 = 36$$

$$5x_1^2 - 6x_1 - 27 = 0, (5x_1 + 9)(x_1 - 3) = 0$$

$$\therefore x_1 = -\frac{9}{5} \text{ 또는 } x_1 = 3$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } x_1 = -\frac{9}{5} \text{ 일 때 } y_1 = \frac{8}{5}, x_1 = 3 \text{ 일 때 } y_1 = 0$$

즉, 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \text{ 또는 } x = 3$$

두 접선 중 직선 $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ 가 점 $(5, k)$ 를 지나므로

$$k = \frac{1}{2} \times 5 + \frac{5}{2} = 5$$

10-1 **답** $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$ 또는 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x - 4y_1y = 4$$

이 직선이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$-4y_1 = 4 \quad \therefore y_1 = -1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 $x^2 - 4y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$x_1^2 - 4y_1^2 = 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$x_1^2 - 4 \times (-1)^2 = 4, x_1^2 = 8 \quad \therefore x_1 = \pm 2\sqrt{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1 \text{ 또는 } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$$

다른 풀이 판별식 이용

점 $(0, 1)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y - 1 = mx \quad \therefore y = mx + 1$$

이를 $x^2 - 4y^2 = 4$ 에 대입하면

$$x^2 - 4(mx + 1)^2 = 4$$

$$\therefore (4m^2 - 1)x^2 + 8mx + 8 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (4m)^2 - 8(4m^2 - 1) = 0$$

$$m^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1 \text{ 또는 } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$$

10-2 **답** 1

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$2x_1x - y_1y = -2$$

이 직선이 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$y_1 = -2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 $2x^2 - y^2 = -2$ 위의 점이므로

$$2x_1^2 - y_1^2 = -2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉡에 대입하면
 $2x_1^2 - (-2)^2 = -2, x_1^2 = 1$
 $\therefore x_1 = \pm 1$
 즉, 접선의 방정식은
 $y = -x - 1$ 또는 $y = x - 1$
 이때 두 접선의 교점의 좌표는 $(0, -1)$ 이고 두 접선이 x 축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(-1, 0), (1, 0)$ 이므로 구하는 삼각형의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$

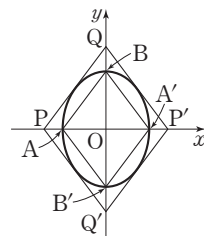
연습문제					64~66쪽
1 ㉢	2 -2	3 ㉠	4 $8\sqrt{2}$	5 48	
6 ㉡	7 ㉠	8 ㉠	9 ㉡	10 -15	
11 ㉢	12 -2	13 ㉠	14 ㉡	15 0	
16 32	17 8	18 4	19 ㉢		

- 1 $y = mx + 5$ 를 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에 대입하면
 $\frac{x^2}{4} + \frac{(mx+5)^2}{9} = 1$
 $\therefore (4m^2+9)x^2 + 40mx + 64 = 0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4} = (20m)^2 - 64(4m^2+9) = 0$
 $m^2 = 4 \quad \therefore m = \pm 2$
 따라서 모든 실수 m 의 값의 곱은
 $-2 \times 2 = -4$
- 2 직선 $2x + y + 4 = 0$, 즉 $y = -2x - 4$ 와 평행한 직선의 기울기는 -2
 $y^2 = 4 \times 4x$ 이므로 포물선 $y^2 = 16x$ 에 접하고 기울기가 -2 인 접선의 방정식은
 $y = -2x + \frac{4}{-2} \quad \therefore y = -2x - 2$
 따라서 이 직선의 y 절편은 -2 이다.
- 3 직선 $2x - y + 2 = 0$, 즉 $y = 2x + 2$ 와 평행한 직선의 기울기는 2
 $y^2 = 4 \times \frac{2}{3}x$ 이므로 포물선 $y^2 = \frac{8}{3}x$ 에 접하고 기울기가 2 인 접선의 방정식은
 $y = 2x + \frac{2}{3} \quad \therefore y = 2x + \frac{1}{3}$

따라서 포물선 $y^2 = \frac{8}{3}x$ 와 직선 $2x - y + 2 = 0$ 사이의 거리의 최솟값은 직선 $2x - y + 2 = 0$ 위의 점 $(0, 2)$ 와 직선 $y = 2x + \frac{1}{3}$, 즉 $6x - 3y + 1 = 0$ 사이의 거리와 같으므로
 $\frac{|-6+1|}{\sqrt{6^2+(-3)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

- 4 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 점 $(4, 0)$ 을 지나므로
 $\frac{16}{a^2} = 1, a^2 = 16 \quad \therefore a = 4 (\because a > 0)$
 직선 $x - 4y + 12 = 0$, 즉 $y = \frac{1}{4}x + 3$ 의 기울기는 $\frac{1}{4}$ 이므로 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{4}$ 인 접선의 방정식은
 $y = \frac{1}{4}x \pm \sqrt{16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + b^2} \quad \therefore y = \frac{1}{4}x \pm \sqrt{b^2 + 1}$
 이 직선이 직선 $y = \frac{1}{4}x + 3$ 과 일치하므로
 $\sqrt{b^2 + 1} = 3, b^2 + 1 = 9$
 $b^2 = 8 \quad \therefore b = 2\sqrt{2} (\because b > 0)$
 $\therefore ab = 4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

- 5 오른쪽 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 네 꼭짓점을 $A(-3, 0), A'(3, 0), B(0, 4), B'(0, -4)$ 라 하고, 마름모 $AB'A'B$ 와 각 변이 평행하고 타원에 외접하는 마름모를 $PQ'P'Q$ 라 하자.



직선 AB 의 기울기가 $\frac{4}{3}$ 이고 두 변 AB, PQ 가 평행하므로 직선 PQ 의 기울기도 $\frac{4}{3}$ 이다.
 이때 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{4}{3}$ 인 접선의 방정식은
 $y = \frac{4}{3}x \pm \sqrt{9 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 16} \quad \therefore y = \frac{4}{3}x \pm 4\sqrt{2}$
 그런데 직선 PQ 의 y 절편은 양수이므로 직선 PQ 의 방정식은
 $y = \frac{4}{3}x + 4\sqrt{2}$
 즉, $P(-3\sqrt{2}, 0), Q(0, 4\sqrt{2})$ 이므로
 $\overline{PP'} = 6\sqrt{2}, \overline{QQ'} = 8\sqrt{2}$
 따라서 구하는 마름모의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 8\sqrt{2} = 48$

6 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = -1$ 에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{6 - 2 \times 1^2} \quad \therefore y = x \pm 2$$

즉, 두 직선이 x 축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(-2, 0), (2, 0)$

따라서 선분 AB의 길이는

$$|2 - (-2)| = 4$$

7 $y^2 = 4 \times 3x$ 이므로 포물선 $y^2 = 12x$ 위의 점 $(3, -6)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-6y = 6(x+3) \quad \therefore y = -x - 3$$

이 직선이 포물선 $x^2 = ay$ 의 초점 $(0, \frac{a}{4})$ 를 지나므로

$$\frac{a}{4} = -3 \quad \therefore a = -12$$

8 타원 $x^2 + 2y^2 = 6$ 위의 점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x - 2y = 6 \quad \therefore y = x - 3$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -1 이므로 점

$(-3, 2)$ 를 지나고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y - 2 = -(x + 3) \quad \therefore x + y + 1 = 0$$

따라서 $a = 1, b = 1$ 이므로

$$a + b = 2$$

9 타원 $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{15} = 1$ 의 두 초점 중 x 좌표가 양수인 점 F는 $F(5, 0)$

$$\overline{OF} = \overline{FQ} \text{이므로 } Q(10, 0)$$

이때 점 P의 좌표를 $(x_1, y_1) (x_1 > 0, y_1 > 0)$ 이라 하면

타원 $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{15} = 1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{40} + \frac{y_1 y}{15} = 1$$

이 직선이 점 $Q(10, 0)$ 을 지나므로

$$\frac{10x_1}{40} = 1 \quad \therefore x_1 = 4$$

또 점 $P(4, y_1)$ 은 타원 $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{15} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{4^2}{40} + \frac{y_1^2}{15} = 1, y_1^2 = 9 \quad \therefore y_1 = 3 (\because y_1 > 0)$$

따라서 $P(4, 3), Q(10, 0)$ 이므로 삼각형 POQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 10 \times 3 = 15$$

10 점 $(2a, a)$ 가 쌍곡선 $4x^2 - y^2 = 15$ 위의 점이므로

$$4(2a)^2 - a^2 = 15, a^2 = 1$$

$$\therefore a = 1 (\because a > 0)$$

이때 쌍곡선 $4x^2 - y^2 = 15$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$8x - y = 15 \quad \therefore y = 8x - 15$$

이 직선이 점 $(0, b)$ 를 지나므로 $b = -15$

$$\therefore ab = 1 \times (-15) = -15$$

11 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 5$ 위의 점 $(3, 2)$ 에서의 접선의 방정식은 $3x - 2y = 5$

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 5$, 즉 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 초점은

$$F(\sqrt{10}, 0), F'(-\sqrt{10}, 0)$$

이때 선분 FP의 길이는 초점 $F(\sqrt{10}, 0)$ 과 직선

$3x - 2y = 5$, 즉 $3x - 2y - 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{FP} = \frac{|3\sqrt{10} - 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{3\sqrt{10} - 5}{\sqrt{13}}$$

또 선분 F'Q의 길이는 초점 $F'(-\sqrt{10}, 0)$ 과 직선

$3x - 2y - 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{F'Q} = \frac{|-3\sqrt{10} - 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{3\sqrt{10} + 5}{\sqrt{13}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{FP} \times \overline{F'Q} &= \frac{3\sqrt{10} - 5}{\sqrt{13}} \times \frac{3\sqrt{10} + 5}{\sqrt{13}} \\ &= \frac{(3\sqrt{10})^2 - 5^2}{13} = 5 \end{aligned}$$

12 $x^2 = 4 \times y$ 이므로 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점선의 방정식은

$$x_1 x = 2(y + y_1)$$

이 직선이 점 $(1, -2)$ 를 지나므로

$$x_1 = 2(-2 + y_1)$$

$$\therefore x_1 = 2y_1 - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 포물선 $x^2 = 4y$ 위의 점이므로

$$x_1^2 = 4y_1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$(2y_1 - 4)^2 = 4y_1, y_1^2 - 5y_1 + 4 = 0$$

$$(y_1 - 1)(y_1 - 4) = 0 \quad \therefore y_1 = 1 \text{ 또는 } y_1 = 4$$

①에서 $y_1 = 1$ 일 때 $x_1 = -2, y_1 = 4$ 일 때 $x_1 = 4$

즉, 점선의 방정식은

$$y = -x - 1 \text{ 또는 } y = 2x - 4$$

따라서 두 점선의 기울기의 곱은

$$-1 \times 2 = -2$$

13 점점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점선의 방정식은

$$5x_1 x + 9y_1 y = 45$$

이 직선이 점 $A(0, a)$ 를 지나므로

$$9ay_1 = 45 \quad \therefore y_1 = \frac{5}{a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $\overline{OP} = \overline{AP}$ 에서

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 + (y_1 - a)^2}$$

양변을 제곱하면

$$x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 - 2ay_1 + a^2$$

$$\therefore y_1 = \frac{a}{2} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{5}{a} = \frac{a}{2}, a^2 = 10 \quad \therefore a = \sqrt{10} \quad (\because a > 0)$$

- 14 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x - y_1y = 1$$

이 직선이 점 $P(1, 3)$ 을 지나므로

$$x_1 - 3y_1 = 1$$

$$\therefore x_1 = 3y_1 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$x_1^2 - y_1^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(3y_1 + 1)^2 - y_1^2 = 1, 4y_1^2 + 3y_1 = 0$$

$$y_1(4y_1 + 3) = 0 \quad \therefore y_1 = -\frac{3}{4} \text{ 또는 } y_1 = 0$$

㉠에서 $y_1 = -\frac{3}{4}$ 일 때 $x_1 = -\frac{5}{4}$, $y_1 = 0$ 일 때 $x_1 = 1$ 이므로

로 두 접선의 접점의 좌표는

$$\left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right), (1, 0)$$

따라서 삼각형 PAB의 무게중심의 x 좌표는

$$\frac{1 + \left(-\frac{5}{4}\right) + 1}{3} = \frac{1}{4}$$

- 15 쌍곡선 $x^2 - 3y^2 = 12$, 즉 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가

m 인 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{12m^2 - 4}$$

이 직선이 점 $(a, 1)$ 을 지나므로

$$1 = am \pm \sqrt{12m^2 - 4}$$

$$\therefore 1 - am = \pm \sqrt{12m^2 - 4}$$

양변을 제곱하면

$$1 - 2am + a^2m^2 = 12m^2 - 4$$

$$\therefore (a^2 - 12)m^2 - 2am + 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{F}$$

두 접선이 서로 수직이면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 m 에 대한 이차방정식 ㉢의 두 근의 곱이 -1 이므로

$$\frac{5}{a^2 - 12} = -1, a^2 = 7$$

$$\therefore a = \pm\sqrt{7}$$

따라서 모든 a 의 값의 합은 $-\sqrt{7} + \sqrt{7} = 0$

- 16 포물선 $y^2 = 12x$ 의 준선의 방정식은 $x = -3$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 준선 $x = -3$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AH}$$

이때 $\overline{AB} = 2\overline{AF}$ 에서

$$\overline{AB} = 2\overline{AH}$$

이므로 직각삼각형

$$\overline{AB} : \overline{AH} = 2 : 1$$

즉, $\angle BAH = 60^\circ$ 이므로 직선 AB가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 60° 이다.

이때 $y^2 = 4 \times 3x$ 이므로 포물선 $y^2 = 12x$ 에 접하고 기울기가 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 인 접선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x + \frac{3}{\sqrt{3}} \quad \therefore y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

이를 $y^2 = 12x$ 에 대입하면

$$(\sqrt{3}x + \sqrt{3})^2 = 12x, x^2 - 2x + 1 = 0$$

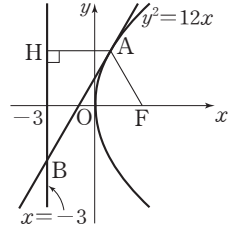
$$(x - 1)^2 = 0 \quad \therefore x = 1$$

따라서 점 A의 x 좌표가 1이므로

$$\overline{AF} = \overline{AH} = 1 - (-3) = 4$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AF} = 8$$

$$\therefore \overline{AB} \times \overline{AF} = 32$$



- 17 포물선 $y^2 = 8x$ 와 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{a} = 1$ 이 만나는 점의 좌표를

(x_1, y_1) 이라 하자.

포물선 $y^2 = 8x$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$y_1y = 4(x + x_1) \quad \therefore y = \frac{4}{y_1}x + \frac{4x_1}{y_1}$$

또 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{a} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{4} + \frac{y_1y}{a} = 1 \quad \therefore y = -\frac{ax_1}{4y_1}x + \frac{a}{y_1}$$

이때 두 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{4}{y_1} \times \left(-\frac{ax_1}{4y_1}\right) = -1$$

$$\therefore y_1^2 = ax_1 \quad \dots\dots \textcircled{G}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 포물선 $y^2 = 8x$ 위의 점이므로

$$y_1^2 = 8x_1 \quad \dots\dots \textcircled{H}$$

$$\textcircled{G}, \textcircled{H} \text{에서 } ax_1 = 8x_1 \quad \therefore a = 8 \quad (\because x_1 \neq 0)$$

- 18 타원 $x^2 + 16y^2 = 16$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$ax + 16by = 16 \quad \therefore y = -\frac{a}{16b}x + \frac{1}{b}$$

이 직선의 x 절편은 $\frac{16}{a}$, y 절편은 $\frac{1}{b}$ 이므로 접선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{16}{|a|} \times \frac{1}{|b|} = \frac{8}{|ab|}$$

또 점 (a, b) 는 타원 $x^2 + 16y^2 = 16$ 위의 점이므로 $a^2 + 16b^2 = 16$

$a^2 > 0, 16b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 + 16b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \times 16b^2}$$

$$16 \geq 8|ab|$$

$\therefore |ab| \leq 2$ (단, 등호는 $a^2 = 16b^2$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{8}{|ab|} \geq \frac{8}{2} = 4$ 이므로 구하는 최솟값은 4이다.

- 19 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(4, k)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1$$

이 직선이 x 축, y 축과 만나는 점은 각각

$$Q\left(\frac{a^2}{4}, 0\right), R\left(0, -\frac{b^2}{k}\right)$$

삼각형 QOR의 넓이 A_1 은

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \times \overline{OQ} \times \overline{OR} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{a^2}{4} \times \frac{b^2}{k} = \frac{a^2 b^2}{8k} \end{aligned}$$

삼각형 PRS의 넓이 A_2 는

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2} \times \overline{PS} \times \overline{OS} \\ &= \frac{1}{2} \times k \times 4 = 2k \end{aligned}$$

이때 $A_1 : A_2 = 9 : 4$ 이므로

$$\frac{a^2 b^2}{8k} : 2k = 9 : 4, 18k = \frac{a^2 b^2}{2k}$$

$$36k^2 = a^2 b^2 \quad \therefore k^2 = \frac{a^2 b^2}{36} \quad \dots \textcircled{1}$$

또 점 $P(4, k)$ 는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{16}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\frac{16}{a^2} - \frac{1}{b^2} \times \frac{a^2 b^2}{36} = 1, \frac{16}{a^2} - \frac{a^2}{36} = 1$$

$$a^4 + 36a^2 - 576 = 0, (a^2 + 48)(a^2 - 12) = 0$$

그런데 $a^2 + 48 > 0$ 이므로 $a^2 - 12 = 0$

$$a^2 = 12 \quad \therefore |a| = 2\sqrt{3}$$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는

$$2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

II-1 01 직선과 평면의 위치 관계

직선과 평면의 위치 관계

개념 Check

70쪽

- 1 답 (1) 직선 AB, 직선 AC, 직선 BE, 직선 CD
(2) 직선 BE
(3) 직선 CD, 직선 ED

- 2 답 (1) 평면 ABCD, 평면 AEHD
(2) 평면 AEHD, 평면 BFGC
(3) 평면 DHGC, 평면 EFGH
(4) 직선 EF, 직선 FG, 직선 HG, 직선 EH

- 3 답 (1) 직선 CI
(2) 평면 ABCDEF, 평면 GHIJKL, 평면 ABHG, 평면 BHIC, 평면 DJKE, 평면 FLKE
(3) 평면 DJKE

문제

71~72쪽

01-1 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

- ㄱ. 한 직선 위에 있지 않은 세 점은 한 평면을 결정하므로 세 점 B, C, D는 한 평면을 결정한다.
ㄴ. 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점은 한 평면을 결정하므로 점 A와 직선 CE는 한 평면을 결정한다.
ㄷ. 한 점에서 만나는 두 직선은 한 평면을 결정하므로 두 직선 CD, DE는 한 평면을 결정한다.
ㄹ. 두 직선 AC, EF는 꼬인 위치에 있으므로 한 평면을 결정할 수 없다.
따라서 보기에서 한 평면을 결정할 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

01-2 답 4

네 점으로 만들 수 있는 서로 다른 평면은 평면 ABC, 평면 ABD, 평면 ACD, 평면 BCD
따라서 구하는 평면의 개수는 4

다른 풀이

구하는 평면의 개수는 서로 다른 네 개에서 세 개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

01-3 ㉮ 6

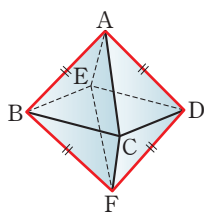
한 직선 위에 있지 않은 세 점으로 만들 수 있는 평면은 평면 DHF
 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점으로 만들 수 있는 평면은
 평면 AED, 평면 AEH, 평면 AEF, 평면 CDG, 평면 CHG, 평면 CFG
 그런데 네 점 A, E, H, D는 한 평면 위의 점이므로 평면 AED와 평면 AEH는 서로 같은 평면이다.
 또 네 점 C, D, H, G도 한 평면 위의 점이므로 평면 CDG와 평면 CHG는 서로 같은 평면이다.
 평행한 두 직선으로 만들 수 있는 평면은 평면 AEGC
 따라서 구하는 평면의 개수는
 $1+4+1=6$

02-1 ㉮ (1) 직선 CF, 직선 DF, 직선 EF

- (2) 평면 ABC, 평면 ABED
 - (3) 평면 ABC, 평면 DEF
 - (4) 평면 ABED, 평면 BCFE, 평면 ACFD
- (1) 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 CF, 직선 DF, 직선 EF
 (2) 직선 AB를 포함하는 평면은 평면 ABC, 평면 ABED
 (3) 직선 AD와 한 점에서 만나는 평면은 평면 ABC, 평면 DEF
 (4) 평면 DEF와 만나는 평면은 평면 ABED, 평면 BCFE, 평면 ACFD

02-2 ㉮ 8

오른쪽 그림과 같이 정팔면체는 모든 모서리의 길이가 같으므로 $\overline{AB}=\overline{BF}=\overline{DF}=\overline{AD}$
 즉, 사각형 ABFD는 마름모이므로 직선 AD와 평행한 직선은 직선 BF
 $\therefore a=1$
 직선 BC와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 AE, 직선 AD, 직선 EF, 직선 DF
 $\therefore b=4$
 평면 ABE와 평행한 직선은 직선 CD, 직선 CF, 직선 DF
 $\therefore c=3$
 $\therefore a+b+c=1+4+3=8$



2 직선과 평면의 평행과 수직

개념 Check

75쪽

1 ㉮ (1) 90° (2) 45° (3) 90°

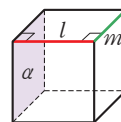
2 ㉮ (1) 90° (2) 45° (3) 90°

문제

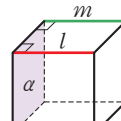
76~77쪽

03-1 ㉮ ㄱ, ㄴ

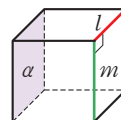
ㄱ. 오른쪽 그림에서 $l \perp \alpha, m \parallel \alpha$ 이면 $l \perp m$ 이다.



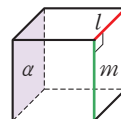
ㄴ. 오른쪽 그림에서 $l \perp \alpha, l \parallel m$ 이면 $m \perp \alpha$ 이다.



ㄷ. [반례] 오른쪽 그림에서 $l \parallel \alpha, m \parallel \alpha$ 이지만 $l \perp m$ 이다.



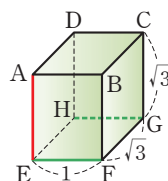
ㄹ. [반례] 오른쪽 그림에서 $l \perp m, m \parallel \alpha$ 이지만 $l \parallel \alpha$ 이다.



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

04-1 ㉮ (1) 90° (2) 45° (3) 60°

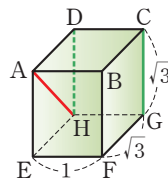
(1) 오른쪽 그림에서 $\overline{HG} \parallel \overline{EF}$ 이므로 두 직선 AE, HG가 이루는 각의 크기는 두 직선 AE, EF가 이루는 $\angle AEF$ 의 크기와 같다.



이때 사각형 AEFB는 직사각형이므로 $\angle AEF=90^\circ$

따라서 구하는 각의 크기는 90° 이다.

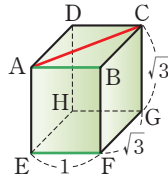
(2) 오른쪽 그림에서 $\overline{CG} \parallel \overline{DH}$ 이므로 두 직선 AH, CG가 이루는 각의 크기는 두 직선 AH, DH가 이루는 $\angle AHD$ 의 크기와 같다.



이때 삼각형 AHD는 $\overline{AD}=\overline{DH}$ 인 직각이등변삼각형이므로 $\angle AHD=45^\circ$

따라서 구하는 각의 크기는 45° 이다.

(3) 오른쪽 그림에서 $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ 이므로 두 직선 AC, EF가 이루는 각의 크기는 두 직선 AC, AB가 이루는 $\angle CAB$ 의 크기와 같다.



이때 직각삼각형 ABC에서

$$\tan(\angle CAB) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \angle CAB = 60^\circ$$

따라서 구하는 각의 크기는 60° 이다.

연습문제

78~79쪽

- | | | | | |
|-------|-----------------------|-------------------------|-----------------|-------------------------|
| 1 ③ | 2 7 | 3 ③ | 4 ㄱ, ㄷ | 5 ⑤ |
| 6 ② | 7 (가) \overline{BM} | (나) \overline{AM} | 8 $\frac{1}{2}$ | 9 $\frac{\sqrt{15}}{6}$ |
| 10 20 | 11 ⑤ | 12 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ | | |

1 ③ 꼬인 위치에 있는 두 직선은 한 평면을 결정할 수 없다.

2 주어진 사각뿔의 5개의 꼭짓점으로 만들 수 있는 서로 다른 평면은

평면 ABCD, 평면 OAB, 평면 OBC, 평면 ODC,
평면 OAD, 평면 OAC, 평면 ODB

따라서 구하는 평면의 개수는 7

다른 풀이

꼭짓점 O와 밑면의 두 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는

$${}_4C_2 = 6$$

밑면의 네 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는 1

따라서 구하는 평면의 개수는

$$6 + 1 = 7$$

3 직선 EH와 만나는 평면은

평면 AEFB, 평면 AEHD, 평면 DHGC, 평면 EFGH

$$\therefore a = 4$$

평면 ABCD와 만나지 않는 평면은

평면 EFGH

$$\therefore b = 1$$

$$\therefore a + b = 4 + 1 = 5$$

4 ㄱ. 직선 MN과 직선 AB는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.

ㄴ. 직선 MN과 직선 BC는 한 평면 위에 있고 평행하지 않으므로 한 점에서 만난다.

ㄷ. 직선 MN과 직선 AC는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.

ㄹ. 직선 MN과 직선 BE는 한 평면 위에 있고 평행하지 않으므로 한 점에서 만난다.

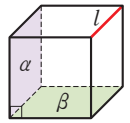
따라서 보기에서 직선 MN과 꼬인 위치에 있는 직선은 ㄱ, ㄷ이다.

5 ④ 평면 BFIE와 평행한 직선은 직선 CG, 직선 GH, 직선 DH, 직선 CD의 4개이다.

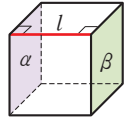
⑤ 직선 CD와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 AB, 직선 AE, 직선 BF, 직선 EI, 직선 FG, 직선 IH의 6개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

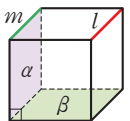
6 ㄱ. [반례] 오른쪽 그림에서 $l \parallel \alpha, l \parallel \beta$ 이지만 $\alpha \perp \beta$ 이다.



ㄴ. 오른쪽 그림에서 $l \perp \alpha, \alpha \parallel \beta$ 이면 $l \perp \beta$ 이다.



ㄷ. [반례] 오른쪽 그림에서 $l \parallel \alpha, m \parallel \beta, l \parallel m$ 이지만 $\alpha \perp \beta$ 이다.



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

7 오른쪽 그림과 같이 모서리 CD의 중점을 M이라 하자.

삼각형 BCD는 정삼각형이므로

$$\overline{BM} \perp \overline{CD} \quad \dots \textcircled{A}$$

삼각형 ACD는 정삼각형이므로

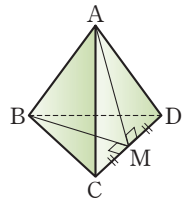
$$\overline{AM} \perp \overline{CD} \quad \dots \textcircled{B}$$

①, ②에 의하여

$$(\text{평면 } ABM) \perp \overline{CD}$$

따라서 직선 CD는 평면 ABM에 포함된 모든 직선과 수직이므로

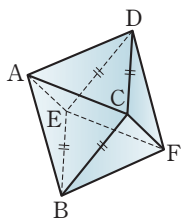
$$\overline{AB} \perp \overline{CD}$$



8 정팔면체는 모든 모서리의 길이가 같으므로 오른쪽 그림과 같이 사각형 BCDE는 $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EB}$

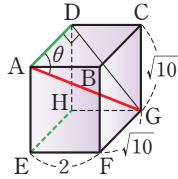
인 마름모이다.

$$\therefore \overline{DC} \parallel \overline{EB}$$



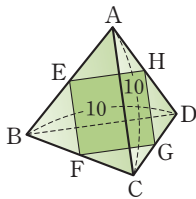
따라서 두 직선 AE, DC가 이루는 각의 크기는 두 직선 AE, EB가 이루는 $\angle AEB$ 의 크기와 같다.
 이때 삼각형 ABE는 정삼각형이므로
 $\angle AEB = 60^\circ$
 $\therefore \cos \theta = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

9 오른쪽 그림에서 $\overline{EH} \parallel \overline{AD}$ 이므로 두 직선 AG, EH가 이루는 각의 크기는 두 직선 AG, AD가 이루는 $\angle DAG$ 의 크기와 같다.
 $\therefore \angle DAG = \theta$



한편 $\overline{AD} \perp$ (평면 DHGC)이므로 삼각형 AGD는 $\angle GDA = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.
 직각삼각형 DGC에서
 $\overline{DG} = \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{CG}^2}$
 $= \sqrt{2^2 + (\sqrt{10})^2} = \sqrt{14}$
 직각삼각형 AGD에서
 $\overline{AG} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DG}^2}$
 $= \sqrt{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{14})^2} = 2\sqrt{6}$
 따라서 직각삼각형 AGD에서
 $\cos \theta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AG}} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$

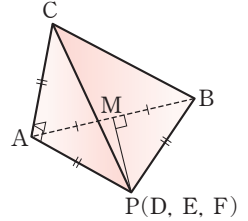
10 오른쪽 그림과 같이 네 모서리 AB, BC, CD, AD와 이 사면체를 자른 평면의 교점을 각각 E, F, G, H라 하자.



$\overline{EF} \parallel \overline{AC}$, $\overline{AC} \parallel \overline{HG}$ 이므로
 $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$
 $\overline{EH} \parallel \overline{BD}$, $\overline{BD} \parallel \overline{FG}$ 이므로
 $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$
 즉, 사각형 EFGH는 평행사변형이다.
 $\overline{AE} : \overline{EB} = m : n$ ($m > 0, n > 0$)이라 하면
 $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ 이므로
 $\overline{EF} : \overline{AC} = n : (m+n)$
 $\therefore \overline{EF} = \frac{n}{m+n} \overline{AC}$
 $= \frac{10n}{m+n}$
 또 $\overline{EH} \parallel \overline{BD}$ 이므로
 $\overline{EH} : \overline{BD} = m : (m+n)$
 $\therefore \overline{EH} = \frac{m}{m+n} \overline{BD}$
 $= \frac{10m}{m+n}$

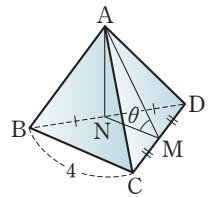
따라서 구하는 사각형의 둘레의 길이는
 $2(\overline{EF} + \overline{EH}) = 2\left(\frac{10n}{m+n} + \frac{10m}{m+n}\right)$
 $= 2 \times 10 = 20$

11 주어진 전개도로 만든 사면체는 오른쪽 그림과 같다.

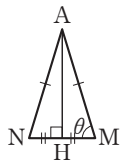


$\overline{AC} = \overline{AE} = \overline{BE}$ 이므로
 $\overline{AC} = \overline{AP} = \overline{BP}$
 $\angle DAC = 90^\circ$ 이므로
 $\angle PAC = 90^\circ$
 따라서 삼각형 APC는 직각이등변삼각형이므로
 $\overline{CP} = \sqrt{2} \overline{AP} = \sqrt{2} \overline{BP}$
 나. 직선 AB와 직선 CP는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.
 다. $\overline{AC} \perp \overline{AP}$, $\overline{AC} \perp \overline{AB}$ 이므로
 $\overline{AC} \perp$ (평면 APB)
 $\therefore \overline{AC} \perp \overline{PM}$ ㉠
 삼각형 APB가 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 인 이등변삼각형이므로
 $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ ㉡
 ㉠, ㉡에 의하여
 $\overline{PM} \perp$ (평면 ABC)
 $\therefore \overline{PM} \perp \overline{BC}$
 따라서 직선 PM과 직선 BC는 서로 수직이다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 가, 나, 다이다.

12 오른쪽 그림과 같이 모서리 BD의 중점을 N이라 하면 모서리 CD의 중점은 M이므로
 $\overline{BC} \parallel \overline{NM}$
 $\therefore \overline{NM} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 2$



두 직선 AM, BC가 이루는 각의 크기는 두 직선 AM, NM이 이루는 $\angle AMN$ 의 크기와 같으므로
 $\angle AMN = \theta$
 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ANM은 $\overline{AN} = \overline{AM}$ 인 이등변삼각형이므로 점 A에서 변 NM에 내린 수선의 발을 H라 하면
 $\overline{HM} = \frac{1}{2} \overline{NM} = 1$
 정삼각형 ACD에서
 $\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$
 따라서 직각삼각형 AHM에서
 $\cos \theta = \frac{\overline{HM}}{\overline{AM}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$



II-1 02 삼수선 정리와 정사영

삼수선 정리

문제

81~82쪽

01-1 ㉠ 2√3

$\overline{PO} \perp \alpha$ 이고 \overline{OH} 가 평면 α 위에 있으므로

$$\overline{PO} \perp \overline{OH}$$

오른쪽 그림과 같이 선분 PH를

그으면 직각삼각형 POH에서

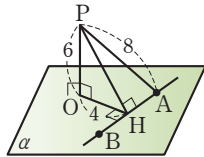
$$\begin{aligned} \overline{PH} &= \sqrt{\overline{PO}^2 + \overline{OH}^2} \\ &= \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

이때 $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{PH} \perp \overline{AB}$$

따라서 직각삼각형 PHA에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{PA}^2 - \overline{PH}^2} = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{13})^2} = 2\sqrt{3}$$



01-2 ㉡ 3

오른쪽 그림과 같이 선분 PH를

그으면 $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로

삼수선 정리에 의하여

$$\overline{PH} \perp \overline{AB}$$

직각삼각형 PAH에서

$$\angle PAH = 60^\circ \text{이므로}$$

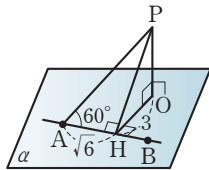
$$\overline{PH} = \overline{AH} \tan 60^\circ = \sqrt{6} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{2}$$

이때 $\overline{PO} \perp \alpha$ 이고 \overline{OH} 가 평면 α 위에 있으므로

$$\overline{PO} \perp \overline{OH}$$

따라서 직각삼각형 PHO에서

$$\overline{PO} = \sqrt{\overline{PH}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 3^2} = 3$$



02-1 ㉢ 6√5

오른쪽 그림과 같이 선분 HI를 그으

면 $\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{DI} \perp \overline{GM}$

이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{HI} \perp \overline{GM}$$

직각삼각형 MFG에서

$$\overline{GM} = \sqrt{\overline{MF}^2 + \overline{GF}^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$$

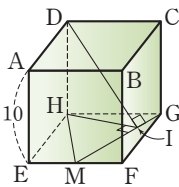
삼각형 HMG의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{HG} \times \overline{HE} = \frac{1}{2} \times \overline{GM} \times \overline{HI}$$

$$\frac{1}{2} \times 10 \times 10 = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{5} \times \overline{HI} \quad \therefore \overline{HI} = 4\sqrt{5}$$

따라서 직각삼각형 DHI에서

$$\overline{DI} = \sqrt{\overline{DH}^2 + \overline{HI}^2} = \sqrt{10^2 + (4\sqrt{5})^2} = 6\sqrt{5}$$



02-2 ㉣ 1

$\overline{OC} \perp \overline{OA}$, $\overline{OB} \perp \overline{OC}$ 이므로

$\overline{OC} \perp$ (평면 OAB)

오른쪽 그림과 같이 선분 OH를

그으면 $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선

정리에 의하여 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$

직각삼각형 OAB에서

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

삼각형 OAB의 넓이에서

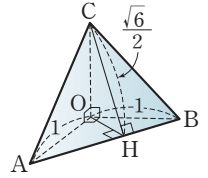
$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OH}$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \overline{OH}$$

$$\therefore \overline{OH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 직각삼각형 OHC에서

$$\overline{OC} = \sqrt{\overline{CH}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$



2 이면각

개념 Check

84쪽

1 ㉠ (1) 90° (2) 45°

(1) 평면 ABCD와 평면 BFGC의 교선 BC에 대하여

$$\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{BF} \perp \overline{BC} \text{이고, } \angle ABF = 90^\circ \text{이다.}$$

따라서 평면 ABCD와 평면 BFGC가 이루는 각의 크기는 90°이다.

(2) 평면 AEFB와 평면 AEGC의 교선 AE에 대하여

$$\overline{AB} \perp \overline{AE}, \overline{AC} \perp \overline{AE} \text{이고, } \angle CAB = 45^\circ \text{이다.}$$

따라서 평면 AEFB와 평면 AEGC가 이루는 각의 크기는 45°이다.

2 ㉡ 30°

평면 ABCD와 평면 AFGD의 교선 AD에 대하여

$$\overline{AB} \perp \overline{AD}, \overline{AF} \perp \overline{AD}$$

평면 ABCD와 평면 AFGD가 이루는 각의 크기는 직선 AB와 직선 AF가 이루는 각의 크기와 같으므로 직각삼각형 AFB에서

$$\tan(\angle BAF) = \frac{\overline{BF}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \angle BAF = 30^\circ$$

따라서 평면 ABCD와 평면 AFGD가 이루는 각의 크기는 30°이다.

03-1 $\frac{3}{5}$

오른쪽 그림에서 $\overline{MF} \perp \overline{FG}$ 이고, 점 M에서 모서리 EF에 내린 수선의 발을 P라 하면

$\overline{PF} \perp \overline{FG}$

평면 MFGN과 평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 직선 MF와 직선 PF가 이루는 각의 크기와 같으므로

$\angle MFP = \theta$

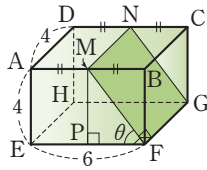
점 P는 모서리 EF의 중점이므로

$\overline{PF} = \frac{1}{2}\overline{EF} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

직각삼각형 MPF에서

$\overline{MF} = \sqrt{\overline{MP}^2 + \overline{PF}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{PF}}{\overline{MF}} = \frac{3}{5}$



03-2 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

오른쪽 그림과 같이 선분 HF의 중점을 I라 하면 두 삼각형 CHF, GHF는 이등변삼각형이므로

$\overline{CI} \perp \overline{HF}, \overline{GI} \perp \overline{HF}$

평면 CHF와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 직선 CI와 직선 GI가 이루는 각의 크기와 같으므로

$\angle CIG = \theta$

직각삼각형 EFG에서

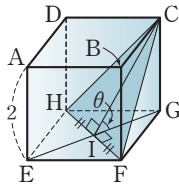
$\overline{EG} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{FG}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{GI} = \frac{1}{2}\overline{EG} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

직각삼각형 CIG에서

$\overline{CI} = \sqrt{\overline{GI}^2 + \overline{CG}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{GI}}{\overline{CI}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



3 정사영

개념 Check

- 1 $\frac{1}{2}$ (1) 점 E (2) 선분 DG
(3) 삼각형 EFH (4) 선분 AF

2 $\frac{1}{2}$

$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 60^\circ = 10 \times \frac{1}{2} = 5$

3 $3\sqrt{2}$

$6 \cos 45^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

문제

04-1 $\frac{\sqrt{30}}{6}$

오른쪽 그림과 같이 점 F에서 평면 AEHD에 내린 수선의 발은 점 E이다. 직선 DF와 평면 AEHD가 이루는 각의 크기는 직선 DF와 직선 DE가 이루는 각의 크기와 같으므로

$\angle FDE = \theta$

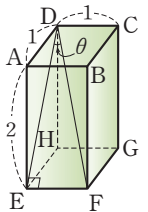
직각삼각형 AED에서

$\overline{DE} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

직각삼각형 DEF에서

$\overline{DF} = \sqrt{\overline{DE}^2 + \overline{EF}^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$



04-2 45°

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H, 직선 AB와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기를 θ 라 하자.

직선 AB와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기는 직선 AB와 직선 BH가 이루는 각의 크기와 같으므로

$\angle ABH = \theta$

직각삼각형 BCD에서

$\overline{BD} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

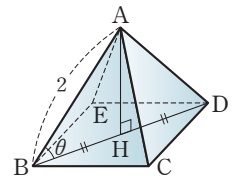
삼각형 ABD는 $\overline{AB} = \overline{AD}$ 인 이등변삼각형이므로

$\overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

따라서 직각삼각형 ABH에서

$\cos \theta = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \theta = 45^\circ$



05-1 ㉠ (1) $3\sqrt{2}$ (2) 60°

(1) 직선 AB와 평면 α 가 이루는 각의 크기가 45° 이므로

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 45^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

(2) $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 에서

$$5 = 10 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

05-2 ㉠ $3+3\sqrt{3}$

직선 AB와 평면 β 가 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$\overline{BC} \parallel \beta$ 이므로 직선 BC와 평면 β 가 이루는 각의 크기는 0° 이다.

$$\therefore \overline{B'C'} = \overline{BC} \cos 0^\circ = 3 \times 1 = 3$$

이때 삼각형 $A'B'C'$ 은 $\angle B' = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{A'C'} = \sqrt{\overline{A'B'}^2 + \overline{B'C'}^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$$

따라서 삼각형 $A'B'C'$ 의 둘레의 길이는

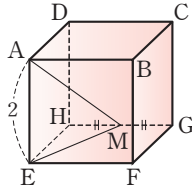
$$\sqrt{3} + 3 + 2\sqrt{3} = 3 + 3\sqrt{3}$$

05-3 ㉠ $\sqrt{5}$

오른쪽 그림에서 선분 AM의 평면 EFGH 위로의 정사영은 선분 EM이다.

직각삼각형 HEM에서

$$\begin{aligned} \overline{EM} &= \sqrt{\overline{EH}^2 + \overline{HM}^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$



06-1 ㉠ 8

삼각기둥의 단면의 밑면을 포함한 평면 위로의 정사영은 삼각기둥의 밑면이다.

삼각기둥의 밑면인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$$

단면과 밑면이 이루는 각의 크기가 30° 이므로 단면의 넓이를 S라 하면

$$4\sqrt{3} = S \cos 30^\circ$$

$$4\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} S \quad \therefore S = 8$$

06-2 ㉠ $2\sqrt{3}$

직육면체의 단면의 밑면을 포함한 평면 위로의 정사영은 직육면체의 밑면이다.

직육면체의 밑면인 정사각형의 한 변의 길이를 a라 하면 그 넓이는 a^2 이다.

단면과 밑면이 이루는 각의 크기가 45° 이고, 단면의 넓이가 $12\sqrt{2}$ 이므로

$$a^2 = 12\sqrt{2} \cos 45^\circ = 12\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12$$

$$\therefore a = 2\sqrt{3} \quad (\because a > 0)$$

06-3 ㉠ $\frac{72\sqrt{5}}{5}$

오른쪽 그림에서 $\overline{AM} \perp \overline{AD}$,

$\overline{AE} \perp \overline{AD}$ 이므로 평면 AEHD와

평면 AMND가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\angle EAM = \theta$$

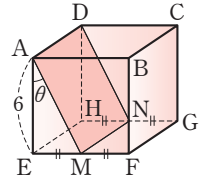
직각삼각형 AEM에서

$$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EM}^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{AE}}{\overline{AM}} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서 사각형 AEHD의 평면 AMND 위로의 정사영의 넓이는

$$\square AEHD \cos \theta = 6^2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{72\sqrt{5}}{5}$$



07-1 ㉠ (1) 4 (2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

(1) 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 정사각형 BCDE의 두 대각선의 교점이므로 삼각형 ABC의 평면 BCDE 위로의 정사영은 삼각형 HBC이다.

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$\triangle HBC = \frac{1}{4} \square BCDE = \frac{1}{4} \times 4^2 = 4$$

(2) 점 A에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{BM} = \overline{CM} = 2$

직각삼각형 ABM에서

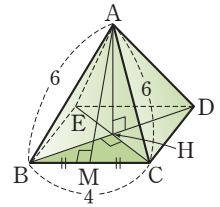
$$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BM}^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AM} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

따라서 $\triangle HBC = \triangle ABC \cos \theta$ 이므로

$$4 = 8\sqrt{2} \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



다른 풀이

(2) 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H, 모서리 BC의 중점을 M이라 하면

$$\overline{AM} \perp \overline{BC}, \overline{HM} \perp \overline{BC}$$

평면 ABC와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기는 직선 AM과 직선 HM이 이루는 각의 크기와 같으므로 $\angle AMH = \theta$

따라서 $\overline{AM} = 4\sqrt{2}$, $\overline{HM} = \frac{1}{2}\overline{BE} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ 이므로

직각삼각형 AMH에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{HM}}{\overline{AM}} = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

07-2 **답** $\frac{\sqrt{6}}{6}$

오른쪽 그림과 같이 모서리 AB의 중점을 N'이라 하면 $\overline{NN'} \perp \overline{AB}$ 이고 점 G에서 평면 ABCD 위에 내린 수선의 발이 점 C이므로 사각형 ANGМ의 평면 ABCD 위로의 정사영은 평행사변형 AN'CM이다.

직각삼각형 AEN에서

$$\overline{AN} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EN}^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

즉, $\overline{AM} = \overline{AN} = \overline{NG} = \overline{MG}$ 이므로 사각형 ANGМ은 마름모이다.

마름모 ANGМ의 두 대각선의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AG} &= \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EF}^2 + \overline{FG}^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{MN} &= \sqrt{\overline{MN}^2 + \overline{N'N}^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

마름모 ANGМ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AG} \times \overline{MN} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{6}$$

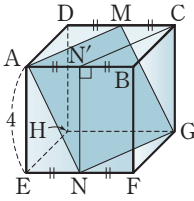
평행사변형 AN'CM의 넓이는

$$\overline{AN'} \times \overline{BC} = 2 \times 4 = 8$$

따라서 $\square AN'CM = \square ANGМ \cos \theta$ 이므로

$$8 = 8\sqrt{6} \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

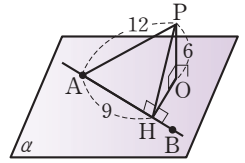


연습문제

92~94쪽

- | | | | | |
|------------------------|----------------|-------------------------|------------------------|--------------------------|
| 1 $3\sqrt{3}$ | 2 ② | 3 $100\sqrt{3}\text{m}$ | 4 ② | 5 ① |
| 6 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ | 7 $2\sqrt{6}$ | 8 $\frac{4}{5}$ | 9 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ | 10 $5\sqrt{6}$ |
| 11 $\sqrt{13}$ | 12 $4\sqrt{2}$ | 13 $\sqrt{2}\pi$ | 14 ④ | 15 $\frac{\sqrt{3}}{12}$ |
| 16 ② | 17 ⑤ | 18 $40 + 8\sqrt{3}\pi$ | 19 40 | |

- 1 오른쪽 그림과 같이 선분 PH를 그으면 $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{PH} \perp \overline{AB}$



직각삼각형 PAH에서

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{PA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{12^2 - 9^2} = 3\sqrt{7}$$

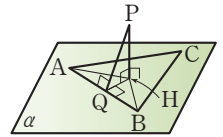
이때 $\overline{PO} \perp \alpha$ 이고 \overline{OH} 가 평면 α 위에 있으므로

$$\overline{PO} \perp \overline{OH}$$

따라서 직각삼각형 PHO에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{PH}^2 - \overline{PO}^2} = \sqrt{(3\sqrt{7})^2 - 6^2} = 3\sqrt{3}$$

- 2 오른쪽 그림과 같이 선분 HQ를 그으면 $\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{HQ} \perp \overline{AB}$



이때 삼각형 ABC의 넓이가 24이고, 점 H가 삼각형 ABC의 무게중심이므로 삼각형 ABH의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{HQ} = \frac{1}{3} \triangle ABC$$

$$\frac{1}{2} \times 8 \times \overline{HQ} = \frac{1}{3} \times 24 \quad \therefore \overline{HQ} = 2$$

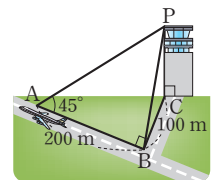
이때 $\overline{PH} \perp \alpha$ 이고 \overline{HQ} 가 평면 α 위에 있으므로

$$\overline{PH} \perp \overline{HQ}$$

따라서 직각삼각형 PQH에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{HQ}^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

- 3 오른쪽 그림과 같이 선분 PB를 그으면 $\overline{PC} \perp$ (평면 ABC), $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{PB} \perp \overline{AB}$



직각삼각형 PAB에서 $\angle PAB = 45^\circ$ 이므로

$$\overline{PB} = \overline{AB} \tan 45^\circ = 200(\text{m})$$

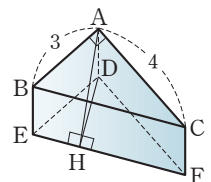
이때 $\overline{PC} \perp$ (평면 ABC)이고 \overline{BC} 가 평면 ABC 위에 있으므로 $\overline{PC} \perp \overline{BC}$

따라서 직각삼각형 PBC에서

$$\overline{PC} = \sqrt{\overline{PB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{200^2 - 100^2} = 100\sqrt{3}(\text{m})$$

따라서 이 관제탑의 높이는 $100\sqrt{3}\text{m}$ 이다.

- 4 오른쪽 그림과 같이 선분 DH를 그으면 $\overline{AD} \perp$ (평면 DEF), $\overline{AH} \perp \overline{EF}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{DH} \perp \overline{EF}$



직각삼각형 DEF에서

$$\overline{EF} = \sqrt{\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

삼각형 DEF의 넓이에서

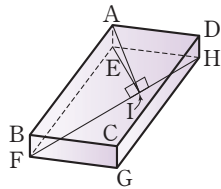
$$\frac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{DF} = \frac{1}{2} \times \overline{EF} \times \overline{DH}$$

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times \overline{DH} \quad \therefore \overline{DH} = \frac{12}{5}$$

따라서 직각삼각형 AHD에서

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AH}^2 - \overline{DH}^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{5}\right)^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = 1$$

- 5 오른쪽 그림과 같이 점 E에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\overline{AE} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{EI} \perp \overline{FH}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여



$$\overline{AI} \perp \overline{FH}$$

직각삼각형 EFH에서

$$\overline{FH} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{EH}^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$$

삼각형 EFH의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{EF} \times \overline{EH} = \frac{1}{2} \times \overline{FH} \times \overline{EI}$$

$$\frac{1}{2} \times 10 \times 5 = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{5} \times \overline{EI}$$

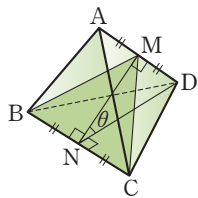
$$\therefore \overline{EI} = 2\sqrt{5}$$

직각삼각형 AEI에서

$$\overline{AI} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EI}^2} = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{21}$$

따라서 점 A와 직선 FH 사이의 거리는 $\sqrt{21}$ 이다.

- 6 오른쪽 그림과 같이 모서리 BC의 중점을 N이라 하면 삼각형 BCM은 이등변삼각형이고 삼각형 DBC는 정삼각형이므로



$$\overline{MN} \perp \overline{BC}, \overline{DN} \perp \overline{BC}$$

평면 BCM과 평면 BCD가 이루

는 각의 크기는 직선 MN과 직선 DN이 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle \text{MND} = \theta$$

정사면체의 한 모서리의 길이를 $2a$ 라 하면

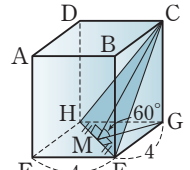
$$\overline{DN} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a = \sqrt{3}a$$

이때 $\overline{DM} = a$ 이고 삼각형 MND는 직각삼각형이므로

$$\overline{MN} = \sqrt{\overline{DN}^2 - \overline{DM}^2} = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 - a^2} = \sqrt{2}a \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{MN}}{\overline{DN}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

- 7 오른쪽 그림과 같이 선분 HF의 중점을 M이라 하면 두 삼각형 CHF, GHF는 이등변삼각형이므로



$$\overline{CM} \perp \overline{HF}, \overline{GM} \perp \overline{HF}$$

평면 CHF와 평면 FGH가 이루는

각의 크기는 직선 CM과 직선 GM이 이루는 각의 크기와 같으므로 $\angle \text{CMG} = 60^\circ$

직각삼각형 EFG에서

$$\overline{EG} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{FG}^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{MG} = \frac{1}{2} \overline{EG} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 CMG에서

$$\overline{CG} = \overline{MG} \tan 60^\circ = 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{6}$$

- 8 $\overline{AB} \perp \overline{AD}$, $\overline{AC} \perp \overline{AD}$ 이므로 평면 ABED와 평면 ADCF가 이루는 각의 크기는 직선 AB와 직선 AC가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \angle \text{BAC} = \theta$$

오른쪽 그림과 같이 두 꼭짓점 A, B에서 두 모서리 BC, AC에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하자.

삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이므로 $\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

직각삼각형 ABM에서

$$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BM}^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4$$

삼각형 ABC의 넓이에서

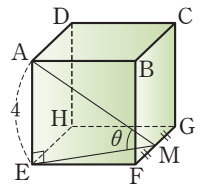
$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AM} = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BN}$$

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \overline{BN} \quad \therefore \overline{BN} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

따라서 직각삼각형 ABN에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{BN}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{8\sqrt{5}}{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

- 9 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발은 점 E이다.



직선 AM과 평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 직선 AM과 직선 EM이 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle \text{AME} = \theta$$

직각삼각형 EFM에서

$$\overline{EM} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{FM}^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

직각삼각형 AEM에서

$$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EM}^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{5})^2} = 6$$

따라서 직각삼각형 AEM에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{EM}}{\overline{AM}} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

- 10 오른쪽 그림과 같이 선분 BD의 중점을 M이라 하면

$\overline{CM} \perp$ (평면 DHFB)이므로 선분 CF의 평면 DHFB 위로의 정사영은 선분 MF이다.

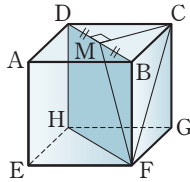
직각삼각형 ABD에서

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 BMF에서

$$\overline{MF} = \sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BM}^2} = \sqrt{10^2 + (5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{6}$$



- 11 오른쪽 그림과 같이 점 A

에서 평면 β 에 내린 수선의 발을 A' , 점 A' 에서 교선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하고 선분 AH 를 그으면 $\overline{AA'} \perp \beta$, $\overline{A'H} \perp l$ 이므로

삼수선 정리에 의하여 $\overline{AH} \perp l$

정삼각형 ABC에서

$$\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

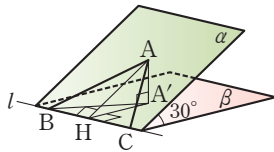
또 두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기가 30° 이므로 $\angle AHA' = 30^\circ$

직각삼각형 AHA'에서

$$\overline{A'H} = \overline{AH} \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

따라서 선분 AB의 평면 β 위로의 정사영은 선분 A'B이므로 직각삼각형 A'BH에서

$$\overline{A'B} = \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{A'H}^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$



- 12 도형 B의 넓이는

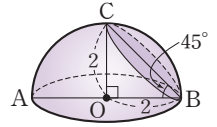
$$2 \times 2 \times \sin 45^\circ = 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

도형 A의 넓이를 S라 하면

$$2\sqrt{2} = S \cos 60^\circ$$

$$2\sqrt{2} = S \times \frac{1}{2} \quad \therefore S = 4\sqrt{2}$$

- 13 오른쪽 그림과 같이 밑면과 이루는 각의 크기가 45° 인 평면으로 자른 단면은 원이다.



단면인 원의 지름을 선분 BC라

하면 삼각형 OBC는 $\overline{OB} = \overline{OC} = 2$ 인 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

즉, 단면의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{2})^2 = 2\pi$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$2\pi \cos 45^\circ = 2\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\pi$$

- 14 두 점 M, N에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발이 각각 H, F이므로 삼각형 MEN의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 HEF이다.

직각삼각형 ABD에서

$$\overline{DB} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{MN} = \overline{DB} = 2\sqrt{5}$$

직각삼각형 EFN에서

$$\overline{EN} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{NF}^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

직각삼각형 EHM에서

$$\overline{EM} = \sqrt{\overline{EH}^2 + \overline{MH}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

즉, 삼각형 MEN은 $\overline{MN} = \overline{EN}$ 인 이등변삼각형이다.

오른쪽 그림과 같이 점 N에서 변 EM

에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\overline{MI} = \frac{1}{2}\overline{EM} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

직각삼각형 MIN에서

$$\begin{aligned} \overline{IN} &= \sqrt{\overline{MN}^2 - \overline{MI}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

삼각형 MEN의 넓이는

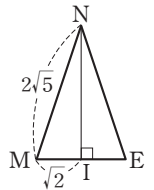
$$\frac{1}{2} \times \overline{EM} \times \overline{IN} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$$

삼각형 HEF의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{EH} \times \overline{EF} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

따라서 $\triangle HEF = \triangle MEN \cos \theta$ 이므로

$$4 = 6 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{2}{3}$$



- 15 평면 OAB와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 삼각형 OAB의 평면 ABCD 위로의 정사영은 삼각형 EAB이므로

$$\triangle EAB = \triangle OAB \cos \theta$$

이때 $\triangle OAB = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

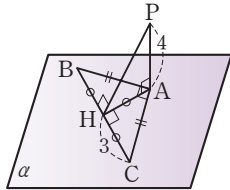
$\triangle EAB = \frac{1}{4} \square ABCD = \frac{1}{4} \times 1^2 = \frac{1}{4}$ 이므로

$\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 삼각형 EAB의 평면 OAB 위로의 정사영의 넓이는

$\triangle EAB \cos \theta = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}$

- 16 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고 선분 AH를 그으면 $\overline{PA} \perp \alpha$, $\overline{PH} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$



직각이등변삼각형 ABC에서 점 H는 빗변 BC의 중점이므로 삼각형 ABC의 외심이다.

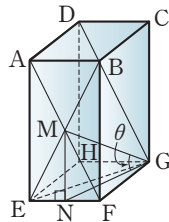
$\therefore \overline{AH} = \overline{BH} = \overline{CH} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

직각삼각형 PHA에서

$\overline{PH} = \sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

따라서 점 P에서 직선 BC까지의 거리는 5이다.

- 17 오른쪽 그림과 같이 선분 AF와 선분 BE의 교점을 M이라 하면 평면 AFGD와 평면 BEG의 교선은 선분 GM이다.



이때 점 M에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 N이라 하면

$\angle MGN = \theta$

$\overline{NF} = \frac{1}{2} \overline{EF} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ 이므로

직각삼각형 NFG에서

$\overline{GN} = \sqrt{\overline{NF}^2 + \overline{FG}^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AE} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ 이므로

직각삼각형 MNG에서

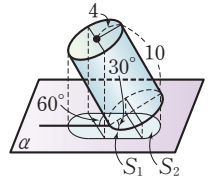
$\overline{GM} = \sqrt{\overline{MN}^2 + \overline{GN}^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{10})^2} = \sqrt{14}$

따라서 직각삼각형 MNG에서

$\cos \theta = \frac{\overline{GN}}{\overline{GM}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}}$

$\therefore \cos^2 \theta = \frac{5}{7}$

- 18 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 평면 α 위로의 정사영 중 직사각형 부분의 넓이를 S_1 , 원기둥의 한 밑면의 반인 반원의 정사영의 넓이를 S_2 라 하면 원기둥의 정사영의 넓이는 $S_1 + 2S_2$ 이다.



원기둥의 옆면은 평면 α 와 60° 의 각을 이루므로

$S_1 = 8 \times 10 \times \cos 60^\circ = 40$

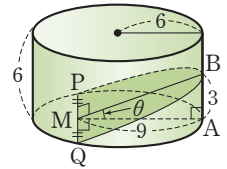
원기둥의 밑면은 평면 α 와 30° 의 각을 이루므로

$S_2 = \frac{1}{2} \times \pi \times 4^2 \times \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}\pi$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$S_1 + 2S_2 = 40 + 2 \times 4\sqrt{3}\pi = 40 + 8\sqrt{3}\pi$

- 19 $\overline{AB} \perp$ (밑면), $\overline{AM} \perp \overline{PQ}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여



$\overline{BM} \perp \overline{PQ}$

$\overline{AM} \perp \overline{PQ}$, $\overline{BM} \perp \overline{PQ}$ 이므로

잘린 단면과 밑면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

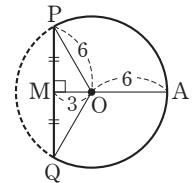
$\angle BMA = \theta$

직각삼각형 BMA에서

$\overline{BM} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AM}^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}$

$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{9}{3\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

오른쪽 그림과 같이 밑면인 원의 중심을 O라 하면 직각삼각형 PMO에서



$\overline{PM} = \sqrt{\overline{PO}^2 - \overline{MO}^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$

$\cos(\angle POM) = \frac{\overline{MO}}{\overline{PO}} = \frac{1}{2}$ 이므로

$\angle POM = 60^\circ$

이때 구하는 단면의 넓이를 S, 단면의 밑면 위로의 정사영의 넓이를 S' 이라 하면

$S' = \pi \times 6^2 \times \frac{360^\circ - 60^\circ \times 2}{360^\circ} + \left(\frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3\right) \times 2 = 24\pi + 9\sqrt{3}$

즉, $S' = S \cos \theta$ 이므로

$24\pi + 9\sqrt{3} = S \times \frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore S = 8\sqrt{10}\pi + 3\sqrt{30}$

따라서 $a = 10$, $b = 30$ 이므로

$a + b = 40$

II-2 01 공간에서 점의 좌표

공간에서 점의 좌표

개념 Check 98쪽

- 1 답 (1) P(2, 4, 3), Q(2, 0, 0), R(0, 0, 3)
 (2) P(5, -6, -2), Q(5, 0, 0), R(0, -6, 0)
 (3) P(0, -6, 5), Q(3, -6, 0), R(3, 0, 0)
 (4) P(4, 6, 0), Q(4, 0, -3), R(0, 6, 0)
- 2 답 (1) (2, 0, 0) (2) (0, -3, 0) (3) (0, 0, 4)
- 3 답 (1) (-1, 5, 0) (2) (0, 5, 7) (3) (-1, 0, 7)
- 4 답 (1) (3, -6, 2) (2) (-3, 6, 2)
 (3) (-3, -6, -2)
- 5 답 (1) (-4, 1, 8) (2) (4, 1, -8)
 (3) (-4, -1, -8) (4) (4, -1, 8)

문제 99쪽

01-1 답 (-3, -1, -7)
 점 P(-3, 1, 7)을 원점에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 (3, -1, -7)
 점 Q(3, -1, -7)을 yz평면에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는 (-3, -1, -7)

01-2 답 -2
 점 P(a, 2, b)를 y축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 (-a, 2, -b)
 점 Q(-a, 2, -b)에서 zx평면에 내린 수선의 발 R의 좌표는 (-a, 0, -b)
 이 점이 점 (5, c, -3)과 일치하므로
 $-a=5, 0=c, -b=-3$
 $\therefore a=-5, b=3, c=0 \quad \therefore a+b+c=-2$

01-3 답 3
 점 A는 점 B(2, 4, a)에서 zx평면에 내린 수선의 발이므로 A(2, 0, a)
 점 A(2, 0, a)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (2, 0, -a)
 이 점이 점 (b, 0, -5)와 일치하므로 $2=b, -a=-5$
 $\therefore a=5, b=2 \quad \therefore a-b=3$

2 두 점 사이의 거리

개념 Check 100쪽

- 1 답 (1) $\sqrt{34}$ (2) 7

문제 101~104쪽

02-1 답 $\sqrt{17}$
 점 P(1, -2, 6)에서 yz평면에 내린 수선의 발 Q의 좌표는 (0, -2, 6)
 점 P(1, -2, 6)을 z축에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는 (-1, 2, 6)
 $\therefore QR = \sqrt{(-1)^2 + (2+2)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{17}$

02-2 답 2
 $AB=9$ 이므로 $\sqrt{(-a-2)^2 + (-3-5)^2 + (1-a)^2} = 9$
 양변을 제곱하여 정리하면
 $a^2 + a - 6 = 0, (a+3)(a-2) = 0$
 $\therefore a=2 (\because a > 0)$

02-3 답 $\angle A=90^\circ$ 인 직각삼각형
 $AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2+4)^2 + (2-2)^2} = 2\sqrt{5}$
 $BC = \sqrt{(5+1)^2 + 2^2 + (3-2)^2} = \sqrt{41}$
 $CA = \sqrt{(3-5)^2 + (-4)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{21}$
 따라서 $BC^2 = AB^2 + CA^2$ 이므로 삼각형 ABC는 $\angle A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

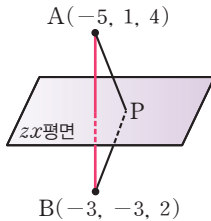
03-1 답 (1) (0, -1, 0) (2) (0, -4, -1)
 (1) y축 위의 점 P의 좌표를 (0, b, 0)이라 하면
 $AP=BP$ 에서 $AP^2=BP^2$ 이므로
 $(-4)^2 + (b+3)^2 + (-1)^2 = 1^2 + (b-3)^2 + 2^2$
 $b^2 + 6b + 26 = b^2 - 6b + 14$
 $12b = -12 \quad \therefore b = -1$
 $\therefore P(0, -1, 0)$
 (2) yz평면 위의 점 Q의 좌표를 (0, b, c)라 하면
 $OQ=AQ$ 에서 $OQ^2=AQ^2$ 이므로
 $b^2 + c^2 = (-2)^2 + (b+1)^2 + (c-1)^2$
 $2b - 2c = -6 \quad \therefore b - c = -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $OQ=BQ$ 에서 $OQ^2=BQ^2$ 이므로
 $b^2 + c^2 = (b+5)^2 + (c-3)^2$
 $10b - 6c = -34 \quad \therefore 5b - 3c = -17 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $b=-4, c=-1$
 $\therefore Q(0, -4, -1)$

03-2 ㉞ $(-\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5}), (1, 0, 2)$

zx 평면 위의 점 C의 좌표를 $(a, 0, c)$ 라 하자.
 이때 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$
 $\overline{AB}=\overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$ 이므로
 $2^2+(1-2)^2+(-1)^2=(a-2)^2+(-1)^2+c^2$
 $\therefore a^2+c^2-4a-1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\overline{BC}=\overline{CA}$ 에서 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$ 이므로
 $(a-2)^2+(-1)^2+c^2=(-a)^2+2^2+(1-c)^2$
 $-4a=-2c \quad \therefore c=2a$
 이를 ㉞에 대입하여 정리하면
 $5a^2-4a-1=0, (5a+1)(a-1)=0$
 $\therefore a=-\frac{1}{5}$ 또는 $a=1$
 따라서 $a=-\frac{1}{5}$ 일 때 $c=-\frac{2}{5}$, $a=1$ 일 때 $c=2$ 이므로 구
 하는 점 C의 좌표는 $(-\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5}), (1, 0, 2)$

04-1 ㉞ (1) $2\sqrt{6}$ (2) $2\sqrt{21}$

(1) 두 점 A, B의 y 좌표의 부호
 가 다르므로 두 점 A, B는
 zx 평면을 기준으로 서로 반
 대쪽에 있다.
 점 P가 선분 AB 위에 있을
 때 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 값이 최소이
 므로



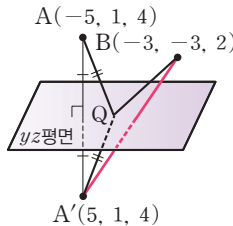
$$\overline{AP}+\overline{BP} \geq \overline{AB}$$

$$= \sqrt{(-3+5)^2+(-3-1)^2+(2-4)^2}$$

$$= 2\sqrt{6}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{6}$ 이다.

(2) 두 점 A, B의 x 좌표의 부
 호가 같으므로 두 점 A, B
 는 yz 평면을 기준으로 같
 은 쪽에 있다.



점 A를 yz 평면에 대하여
 대칭이동한 점을 A'이라
 하면 A'(5, 1, 4)
 이때 $\overline{AQ}=\overline{A'Q}$ 이므로 점 Q가 선분 A'B 위에 있을
 때 $\overline{AQ}+\overline{BQ}$ 의 값이 최소이다.

$$\therefore \overline{AQ}+\overline{BQ}=\overline{A'Q}+\overline{BQ}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

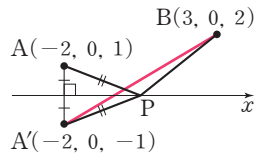
$$= \sqrt{(-3-5)^2+(-3-1)^2+(2-4)^2}$$

$$= 2\sqrt{21}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{21}$ 이다.

04-2 ㉞ $\sqrt{34}$

두 점 A, B의 y 좌표가 0이
 고 z 좌표의 부호가 같으므
 로 두 점 A, B는 zx 평면
 위에 있고 x 축을 기준으로
 같은 쪽에 있다.



점 A를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면
 A'(-2, 0, -1)

이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$ 이므로 점 P가 선분 A'B 위에 있을 때
 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 값이 최소이다.

$$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{(3+2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{34}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{34}$ 이다.

05-1 ㉞ $\sqrt{41}$

두 점 A, B의 yz 평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라
 하면

$$A'(0, -2, -1), B'(0, 2, 4)$$

따라서 구하는 정사영의 길이는

$$\overline{A'B'}=\sqrt{(2+2)^2+(4+1)^2}=\sqrt{41}$$

05-2 ㉞ $3\sqrt{2}+2\sqrt{10}$

점 P(3, -1, -3)의 xy 평면, yz 평면, zx 평면 위로의 정
 사영은 각각 A(3, -1, 0), B(0, -1, -3), C(3, 0, -3)
 이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(-3)^2+(-1+1)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{3^2+1^2+(-3+3)^2}=\sqrt{10}$$

$$\overline{CA}=\sqrt{(3-3)^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$3\sqrt{2}+\sqrt{10}+\sqrt{10}=3\sqrt{2}+2\sqrt{10}$$

05-3 ㉞ 45°

$$\overline{AB}=\sqrt{(5-2)^2+(8-3)^2+(8-4)^2}=5\sqrt{2}$$

두 점 A, B의 zx 평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라
 하면

$$A'(2, 0, 4), B'(5, 0, 8)$$

$$\therefore \overline{A'B'}=\sqrt{(5-2)^2+(8-4)^2}=5$$

직선 AB와 zx 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\overline{A'B'}=\overline{AB} \cos \theta$$

$$5=5\sqrt{2} \cos \theta \quad \therefore \cos \theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore \theta=45^\circ$

3 선분의 내분점

문제

106~109쪽

06-1 ㉞ 21

점 P(-1, 6, 7)을 yz평면에 대하여 대칭이동한 점은 Q(1, 6, 7)

따라서 선분 PQ를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표는
 $\left(\frac{3 \times 1 + 1 \times (-1)}{3+1}, \frac{3 \times 6 + 1 \times 6}{3+1}, \frac{3 \times 7 + 1 \times 7}{3+1}\right)$
 $\therefore \left(\frac{1}{2}, 6, 7\right)$

따라서 $a = \frac{1}{2}, b = 6, c = 7$ 이므로
 $abc = 21$

06-2 ㉞ $\left(\frac{7}{6}, -\frac{13}{6}, -\frac{1}{6}\right)$

선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{1 \times (-1) + 3 \times 3}{1+3}, \frac{1 \times 0 + 3 \times (-4)}{1+3}, \frac{1 \times 2 + 3 \times (-2)}{1+3}\right)$

$\therefore (2, -3, -1)$

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{2 \times (-1) + 1 \times 3}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times (-4)}{2+1}, \frac{2 \times 2 + 1 \times (-2)}{2+1}\right)$

$\therefore \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2 + \frac{1}{3}}{2}, \frac{-3 - \frac{4}{3}}{2}, \frac{-1 + \frac{2}{3}}{2}\right)$
 $\therefore \left(\frac{7}{6}, -\frac{13}{6}, -\frac{1}{6}\right)$

06-3 ㉞ 11

선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2 \times 0 + 3 \times (-2)}{2+3}, \frac{2 \times a + 3 \times (-3)}{2+3}, \frac{2 \times b + 3 \times 4}{2+3}\right)$
 $\therefore \left(-\frac{6}{5}, \frac{2a-9}{5}, \frac{2b+12}{5}\right)$

이 점이 점 $\left(-\frac{6}{5}, -1, 6\right)$ 과 일치하므로

$$\frac{2a-9}{5} = -1, \frac{2b+12}{5} = 6$$

$$2a-9 = -5, 2b+12 = 30$$

$$\therefore a=2, b=9$$

$$\therefore a+b=11$$

07-1 ㉞ 15

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a-8}{2}, \frac{b+6}{2}, \frac{-5+c}{2}\right)$$

yz평면 위의 점의 x좌표는 0이므로

$$\frac{a-8}{2} = 0 \quad \therefore a=8$$

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-8) + 2 \times a}{1+2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times b}{1+2}, \frac{1 \times c + 2 \times (-5)}{1+2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{-8+2a}{3}, \frac{6+2b}{3}, \frac{c-10}{3}\right)$$

x축 위의 점의 y좌표, z좌표는 모두 0이므로

$$\frac{6+2b}{3} = 0, \frac{c-10}{3} = 0$$

$$\therefore b = -3, c = 10$$

$$\therefore a+b+c = 8 + (-3) + 10 = 15$$

07-2 ㉞ 3

$\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ 이므로 점 P는 선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점이다.

즉, 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{m \times 1 + n \times (-2)}{m+n}, \frac{m \times (-4) + n \times 2}{m+n}, \frac{m \times 5 + n \times (-3)}{m+n}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{m-2n}{m+n}, \frac{-4m+2n}{m+n}, \frac{5m-3n}{m+n}\right)$$

zx평면 위의 점 P의 y좌표는 0이므로

$$\frac{-4m+2n}{m+n} = 0 \quad \therefore 2m = n$$

따라서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 이므로

$$m=1, n=2 \quad \therefore m+n=3$$

08-1 ㉞ $\left(5, 2, \frac{8}{3}\right)$

점 A(5, 3, 4)의 xy평면, zx평면 위로의 정사영은 각각 B(5, 3, 0), C(5, 0, 4)이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{5+5+5}{3}, \frac{3+3+0}{3}, \frac{4+0+4}{3}\right)$$

$$\therefore \left(5, 2, \frac{8}{3}\right)$$

08-2 ㉞ (2, 0, 3)

점 C의 좌표를 (a, b, c)라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3+4+a}{3}, \frac{-1-2+b}{3}, \frac{4-1+c}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+7}{3}, \frac{b-3}{3}, \frac{c+3}{3}\right)$$

이 점이 점 $(3, -1, 2)$ 와 일치하므로

$$\frac{a+7}{3}=3, \frac{b-3}{3}=-1, \frac{c+3}{3}=2$$

$$\therefore a=2, b=0, c=3 \quad \therefore C(2, 0, 3)$$

08-3 $\textcircled{\text{답}} \left(\frac{4}{3}, 1, -\frac{2}{3}\right)$

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-4) + 1 \times 6}{2+1}, \frac{2 \times (-3) + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times 2 + 1 \times (-3)}{2+1}\right)$$

$$\therefore \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 2 + 1 \times (-4)}{2+1}, \frac{2 \times 5 + 1 \times (-3)}{2+1}, \frac{2 \times (-1) + 1 \times 2}{2+1}\right)$$

$$\therefore \left(0, \frac{7}{3}, 0\right)$$

선분 CA를 2 : 1로 내분하는 점 R의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 6 + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times 1 + 1 \times 5}{2+1}, \frac{2 \times (-3) + 1 \times (-1)}{2+1}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{14}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-\frac{2}{3} + 0 + \frac{14}{3}}{3}, \frac{-\frac{5}{3} + \frac{7}{3} + \frac{7}{3}}{3}, \frac{\frac{1}{3} + 0 - \frac{7}{3}}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{4}{3}, 1, -\frac{2}{3}\right)$$

다른 풀이

삼각형 PQR의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{6-4+2}{3}, \frac{1-3+5}{3}, \frac{-3+2-1}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{4}{3}, 1, -\frac{2}{3}\right)$$

참고 삼각형의 세 변을 각각 $m:n (m>0, n>0)$ 으로 내분하는 점을 연결한 삼각형의 무게중심은 원래 삼각형의 무게중심과 일치한다.

09-1 $\textcircled{\text{답}} a=5, b=4, c=12$

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치한다.

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+1}{2}, \frac{-1+b}{2}, \frac{6+8}{2}\right)$$

$$\therefore \left(2, \frac{-1+b}{2}, 7\right) \quad \dots \textcircled{1}$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a-1}{2}, \frac{-3+6}{2}, \frac{2+c}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a-1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2+c}{2}\right) \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 일치하므로

$$2 = \frac{a-1}{2}, \frac{-1+b}{2} = \frac{3}{2}, 7 = \frac{2+c}{2}$$

$$\therefore a=5, b=4, c=12$$

09-2 $\textcircled{\text{답}} C(7, -1, 3), D(3, 2, 11)$

평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점은 두 대각선 AC, BD의 중점과 일치한다.

대각선 AC의 중점의 좌표가 $(2, 0, 4)$ 이므로 점 C의 좌표를 (a, b, c) 라 하면

$$\frac{-3+a}{2}=2, \frac{1+b}{2}=0, \frac{5+c}{2}=4$$

$$\therefore a=7, b=-1, c=3 \quad \therefore C(7, -1, 3)$$

대각선 BD의 중점의 좌표가 $(2, 0, 4)$ 이므로 점 D의 좌표를 (d, e, f) 라 하면

$$\frac{1+d}{2}=2, \frac{-2+e}{2}=0, \frac{-3+f}{2}=4$$

$$\therefore d=3, e=2, f=11 \quad \therefore D(3, 2, 11)$$

09-3 $\textcircled{\text{답}} 5$

마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 마름모 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치한다.

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+0}{2}, \frac{-4+7}{2}, \frac{-2+3}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \dots \textcircled{1}$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{b+3}{2}, \frac{0+3}{2}, \frac{3-2}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{b+3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 일치하므로

$$\frac{a}{2} = \frac{b+3}{2} \quad \therefore a=b+3 \quad \dots \textcircled{3}$$

또 마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로

$$\overline{AD} = \overline{CD} \text{에서 } \overline{AD}^2 = \overline{CD}^2$$

$$(3-a)^2 + (3+4)^2 + (-2+2)^2$$

$$= 3^2 + (3-7)^2 + (-2-3)^2$$

$$a^2 - 6a + 8 = 0, (a-2)(a-4) = 0$$

$$\therefore a=4 (\because a>2)$$

이를 $\textcircled{3}$ 에 대입하여 풀면 $b=1$

$$\therefore a+b=5$$

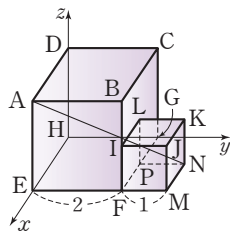
연습문제

110~112쪽

- 1 -3 2 ① 3 ② 4 ⑤ 5 $3\sqrt{2}$
 6 ② 7 -30 8 6 9 ④
 10 $(\frac{1}{2}, 1, 2)$ 11 1 12 ① 13 -8
 14 (2, 2, 0) 15 ④ 16 $(-\frac{2}{3}, -3, \frac{4}{3})$
 17 $2+2\sqrt{3}$ 18 $5\sqrt{2}$ 19 ② 20 $2\sqrt{3}+2\sqrt{11}$
 21 45° 22 ①

- 1 점 A(3, a, b)를 x축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 (3, -a, -b)
 점 B(3, -a, -b)에서 yz평면에 내린 수선의 발 C의 좌표는 (0, -a, -b)
 이 점이 점 (0, -1, 4)와 일치하므로
 $-a = -1, -b = 4 \quad \therefore a = 1, b = -4$
 $\therefore a + b = -3$
- 2 점 (a, 5, -1)을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (-a, -5, 1) ㉠
 점 (2, b, c)를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (2, b, -c) ㉡
 ㉠, ㉡이 일치하므로
 $-a = 2, -5 = b, 1 = -c$
 $\therefore a = -2, b = -5, c = -1$
 $\therefore a + b + c = -8$

- 3 오른쪽 그림과 같이 점 H가 원점, 세 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축 위에 있도록 두 정육면체를 좌표 공간에 놓으면
 A(2, 0, 2), N(1, 3, 0)



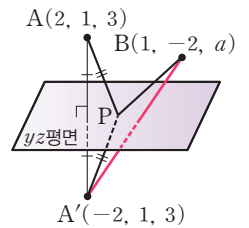
따라서 두 꼭짓점 A, N 사이의 거리는
 $\overline{AN} = \sqrt{(1-2)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$

- 4 x축 위의 점 C의 좌표를 (a, 0, 0)이라 하면
 $\overline{AB}^2 = (-2-1)^2 + (-2+4)^2 + 1^2 = 14$
 $\overline{BC}^2 = (a+2)^2 + 2^2 + (-1)^2 = a^2 + 4a + 9$
 $\overline{CA}^2 = (1-a)^2 + (-4)^2 = a^2 - 2a + 17$
 이때 삼각형 ABC가 변 CA를 빗변으로 하는 직각삼각형이므로 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$
 $a^2 - 2a + 17 = 14 + (a^2 + 4a + 9)$
 $-6a = 6 \quad \therefore a = -1$
 따라서 점 C의 x좌표는 -1

- 5 $\overline{AB} = \sqrt{(b-2)^2 + (-a)^2 + (-4-b)^2}$
 $= \sqrt{a^2 + 2b^2 + 4b + 20}$
 $= \sqrt{a^2 + 2(b+1)^2 + 18}$
 따라서 $a=0, b=-1$ 일 때 두 점 A, B 사이의 거리의 최솟값은 $3\sqrt{2}$ 이다.

- 6 주어진 y축 위의 점 (0, a, 0)을 P라 하면
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로
 $(-2)^2 + a^2 + (-1)^2 = (-3)^2 + (a-2)^2$
 $4a = 8 \quad \therefore a = 2$
- 7 점 P가 xy평면 위에 있으므로 $c=0 \quad \therefore P(a, b, 0)$
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로
 $(a-1)^2 + (b+1)^2 + (-1)^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 + 4^2$
 $2a + 4b = 18 \quad \therefore a + 2b = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\overline{BP} = \overline{CP}$ 에서 $\overline{BP}^2 = \overline{CP}^2$ 이므로
 $(a-2)^2 + (b-1)^2 + 4^2 = a^2 + (b+1)^2 + (-6)^2$
 $-4a - 4b = 16 \quad \therefore a + b = -4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $a = -17, b = 13$
 $\therefore a - b + c = -17 - 13 + 0 = -30$

- 8 두 점 A, B의 x좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 yz평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.
 점 A를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면



- A'(-2, 1, 3)
 이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로
 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$
 $\geq \overline{A'B}$
 $= \sqrt{(1+2)^2 + (-2-1)^2 + (a-3)^2}$
 $= \sqrt{a^2 - 6a + 27}$
 따라서 $\sqrt{a^2 - 6a + 27} = 3\sqrt{3}$ 이므로 양변을 제곱하여 정리하면
 $a^2 - 6a = 0, a(a-6) = 0 \quad \therefore a = 6 (\because a > 0)$

- 9 $\overline{AB} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (a-4)^2 + (4-1)^2}$
 $= \sqrt{a^2 - 8a + 28}$
 두 점 A, B의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라 하면
 $A'(\sqrt{3}, 4, 0), B'(0, a, 0)$
 $\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (a-4)^2} = \sqrt{a^2 - 8a + 19}$

이때 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 60^\circ$ 이므로

$$\sqrt{a^2 - 8a + 19} = \sqrt{a^2 - 8a + 28} \times \frac{1}{2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 8a + 16 = 0, (a-4)^2 = 0$$

$$\therefore a = 4$$

- 10 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 0 + 1 \times 4}{3+1}, \frac{3 \times 1 + 1 \times 5}{3+1}, \frac{3 \times 3 + 1 \times 7}{3+1} \right)$$

$$\therefore (1, 2, 4)$$

따라서 선분 OP의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{4}{2} \right) \quad \therefore \left(\frac{1}{2}, 1, 2 \right)$$

- 11 점 A는 선분 PP'의 중점이므로 점 A의 좌표는

$$\left(\frac{4-6}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{6-3}{2} \right) \quad \therefore \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

따라서 $a = -1, b = \frac{1}{2}, c = \frac{3}{2}$ 이므로

$$a + b + c = 1$$

- 12 점 A(3, -1, a)를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 (3, -1, -a)

선분 BC를 1 : 2로 내분하는 점이 x축 위에 있으므로 내분점의 y좌표, z좌표는 모두 0이다.

$$\text{즉, } \frac{1 \times b + 2 \times (-1)}{1+2} = 0, \frac{1 \times 4 + 2 \times (-a)}{1+2} = 0 \text{이므로}$$

$$b - 2 = 0, 4 - 2a = 0 \quad \therefore a = 2, b = 2$$

$$\therefore a + b = 4$$

- 13 선분 AB의 중점이 z축 위에 있으므로 중점의 x좌표, y좌표는 모두 0이다.

$$\text{즉, } \frac{a+6}{2} = 0, \frac{b+4}{2} = 0 \text{이므로}$$

$$a = -6, b = -4$$

선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점이 xy평면 위에 있으므로 내분점의 z좌표는 0이다.

$$\text{즉, } \frac{2 \times c + 3 \times (-4)}{2+3} = 0 \text{이므로}$$

$$2c - 12 = 0 \quad \therefore c = 6$$

$$\therefore a - b - c = -6 - (-4) - 6 = -8$$

- 14 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n (m > 0, n > 0)$ 이라 하면 점 P는 선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점이고, xy평면 위에 있으므로 점 P의 z좌표는 0이다.

$$\text{즉, } \frac{m \times 4 + n \times (-1)}{m+n} = 0 \text{이므로 } 4m = n$$

$$\therefore \overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 4$$

따라서 점 P는 선분 AB를 1 : 4로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-2) + 4 \times 3}{1+4}, \frac{1 \times 2 + 4 \times 2}{1+4}, 0 \right)$$

$$\therefore (2, 2, 0)$$

- 15 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+1+1}{3}, \frac{0+b+1}{3}, \frac{5-3+1}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+2}{3}, \frac{b+1}{3}, 1 \right)$$

이 점이 점 (2, 2, 1)과 일치하므로

$$\frac{a+2}{3} = 2, \frac{b+1}{3} = 2 \quad \therefore a = 4, b = 5$$

$$\therefore a + b = 9$$

- 16 점 A(2, 3, 4)를 zx평면에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 (2, -3, 4)

점 A(2, 3, 4)를 z축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 (-2, -3, 4)

점 A(2, 3, 4)를 원점에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는 (-2, -3, -4)

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2-2-2}{3}, \frac{-3-3-3}{3}, \frac{4+4-4}{3} \right)$$

$$\therefore \left(-\frac{2}{3}, -3, \frac{4}{3} \right)$$

- 17 점 A의 좌표를 (a, b, c)라 하면 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{a-3+3}{3}, \frac{b+0+0}{3}, \frac{c+0+0}{3} \right) \quad \therefore \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3} \right)$$

삼각형 ACD의 무게중심 H의 좌표는

$$\left(\frac{a+3+0}{3}, \frac{b+0+3}{3}, \frac{c+0+3}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+3}{3}, \frac{b+3}{3}, \frac{c+3}{3} \right)$$

삼각형 ABD의 무게중심 I의 좌표는

$$\left(\frac{a-3+0}{3}, \frac{b+0+3}{3}, \frac{c+0+3}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a-3}{3}, \frac{b+3}{3}, \frac{c+3}{3} \right)$$

삼각형 GHI에서

$$\begin{aligned} \overline{GH} &= \sqrt{\left(\frac{a+3}{3} - \frac{a}{3} \right)^2 + \left(\frac{b+3}{3} - \frac{b}{3} \right)^2 + \left(\frac{c+3}{3} - \frac{c}{3} \right)^2} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{GI} &= \sqrt{\left(\frac{a-3}{3} - \frac{a}{3} \right)^2 + \left(\frac{b+3}{3} - \frac{b}{3} \right)^2 + \left(\frac{c+3}{3} - \frac{c}{3} \right)^2} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\overline{IH} = \left| \frac{a+3}{3} - \frac{a-3}{3} \right| = 2$$

따라서 삼각형 GHI의 둘레의 길이는 $\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2 = 2 + 2\sqrt{3}$

- 18 점 B의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 평행사변형 ABCD의 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+8}{2} \right)$$

이때 대각선 BD의 중점은 두 대각선의 교점 $(2, 0, 4)$ 와 일치하므로

$$\frac{a+3}{2} = 2, \frac{b+2}{2} = 0, \frac{c+8}{2} = 4$$

$$\therefore a=1, b=-2, c=0$$

따라서 $B(1, -2, 0)$ 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(1+3)^2 + (-2-1)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$$

- 19 점 $P(a, 2a, a+1)$ 을 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(a, 2a, -a-1)$

점 $P(a, 2a, a+1)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는 $(-a, 2a, -a-1)$

삼각형 PQR에서

$$\overline{PQ} = |-a-1-(a+1)|$$

$$= |-2a-2| = 2a+2 \quad (\because a > 0)$$

$$\overline{QR} = |-a-a| = |-2a| = 2a \quad (\because a > 0)$$

$$\overline{RP} = \sqrt{(a+a)^2 + (2a-2a)^2 + (a+1+a+1)^2} = \sqrt{8a^2 + 8a + 4}$$

이때 $\overline{RP}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2$ 이므로 삼각형 PQR는 $\angle Q = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\begin{aligned} \therefore \triangle PQR &= \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{QR} = \frac{1}{2} \times (2a+2) \times 2a \\ &= 2a^2 + 2a \end{aligned}$$

따라서 $2a^2 + 2a = 40$ 이므로

$$a^2 + a - 20 = 0, (a+5)(a-4) = 0$$

$$\therefore a=4 \quad (\because a > 0)$$

- 20 두 점 A, B의 y 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 zx 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A를 zx 평면에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 $A'(1, -4, 3)$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로 삼각형 ABP의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{AP} + \overline{PB} &= \overline{AB} + \overline{A'P} + \overline{PB} \\ &\geq \overline{AB} + \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(3-1)^2 + (2-4)^2 + (1-3)^2} \\ &\quad + \sqrt{(3-1)^2 + (2+4)^2 + (1-3)^2} \\ &= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{11} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{3} + 2\sqrt{11}$ 이다.

21 $\overline{AB} = |5-2| = 3$

$$\overline{BC} = \sqrt{(1+1)^2 + (5-5)^2 + (-1+3)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-5)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{17}$$

이때 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 이므로 삼각형 ABC는 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

세 점 A, B, C의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A', B', C'이라 하면

$$A'(-1, 2, 0), B'(-1, 5, 0), C'(1, 5, 0)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = |5-2| = 3,$$

$$\overline{B'C'} = |1+1| = 2,$$

$$\overline{C'A'} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{13}$$

이때 $\overline{C'A'}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{B'C'}^2$ 이므로 삼각형 A'B'C'은 $\angle B' = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\begin{aligned} \therefore \triangle A'B'C' &= \frac{1}{2} \times \overline{A'B'} \times \overline{B'C'} \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3 \end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC와 xy 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\triangle A'B'C' = \triangle ABC \cos \theta$ 이므로

$$3 = 3\sqrt{2} \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

- 22 점 A가 원점 O와 일치하도록 선분 AB를 평행이동할 때, 점 B를 평행이동한 점을 $P(a, b, c)$ 라 하자.

점 $P(a, b, c)$ 의 xy 평면, yz 평면, zx 평면 위로의 정사영은 각각

$$(a, b, 0), (0, b, c), (a, 0, c)$$

선분 AB의 xy 평면 위로의 정사영의 길이가 3이므로

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 3$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 AB의 yz 평면 위로의 정사영의 길이가 2이므로

$$\sqrt{b^2 + c^2} = 2$$

$$\therefore b^2 + c^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

선분 AB의 zx 평면 위로의 정사영의 길이가 3이므로

$$\sqrt{a^2 + c^2} = 3$$

$$\therefore a^2 + c^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}$ 을 하면

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 22$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 11$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{11}$$

II-2 02 구의 방정식

구의 방정식(1)

개념 Check

114쪽

- 1 ㉠ (1) 중심의 좌표: $(0, -1, 2)$, 반지름의 길이: 1
 (2) 중심의 좌표: $(-2, -4, 3)$, 반지름의 길이: 4
- 2 ㉠ (1) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$
 (2) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- 3 ㉠ (1) 중심의 좌표: $(0, 1, -1)$, 반지름의 길이: 1
 (2) 중심의 좌표: $(-1, 3, -2)$, 반지름의 길이: $\sqrt{17}$
 (1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z + 1 = 0$ 에서
 $x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$
 따라서 구의 중심의 좌표는 $(0, 1, -1)$, 반지름의 길이는 1이다.
 (2) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 3 = 0$ 에서
 $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 17$
 따라서 구의 중심의 좌표는 $(-1, 3, -2)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{17}$ 이다.

문제

115~117쪽

- 01-1 ㉠ (1) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 22$
 (2) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 29$
 (1) 구의 반지름의 길이는 두 점 $(3, -2, 1)$, $(0, 1, 3)$ 사이의 거리와 같으므로
 $\sqrt{(-3)^2 + (1+2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{22}$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 22$
 (2) 구의 중심은 선분 AB의 중점과 같으므로 구의 중심의 좌표는
 $(\frac{-2+4}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{5-3}{2})$
 $\therefore (1, 2, 1)$
 구의 반지름의 길이는 구의 중심과 점 A 사이의 거리와 같으므로
 $\sqrt{(-2-1)^2 + (-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{29}$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 29$

다른 풀이

- (1) 구의 반지름의 길이를 r 라 하면 구의 방정식은
 $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = r^2$
 점 $(0, 1, 3)$ 을 지나므로
 $(0-3)^2 + (1+2)^2 + (3-1)^2 = r^2$
 $\therefore r^2 = 22$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 22$
- (2) 구의 중심은 선분 AB의 중점과 같으므로 구의 중심의 좌표는
 $(\frac{-2+4}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{5-3}{2}) \quad \therefore (1, 2, 1)$
 구의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}AB$ 와 같으므로
 $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2 + 4^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{29}$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 29$

01-2 ㉠ $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 51$

- 구 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$ 의 중심의 좌표는 $(1, -2, 3)$
 구의 반지름의 길이는 두 점 $(1, -2, 3)$, $(2, 5, 2)$ 사이의 거리와 같으므로
 $\sqrt{(2-1)^2 + (5+2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{51}$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 51$

02-1 ㉠ (1) $a=21, b=-3, c=6$

- (2) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - y - 3z = 0$
 (1) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 12z + a = 0$ 에서
 $(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 46 - a$
 이 구의 중심의 좌표는 $(-1, -3, 6)$ 이므로
 $b = -3, c = 6$
 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{46-a}$ 이므로
 $\sqrt{46-a} = 5, 46-a = 25$
 $\therefore a = 21$
 (2) 구하는 구의 방정식을
 $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$
 이라 하자.
 점 $(0, 0, 0)$ 을 지나므로 $D = 0$
 점 $(0, 1, 0)$ 을 지나므로
 $1 + B = 0 \quad \therefore B = -1$
 점 $(0, 2, 2)$ 를 지나므로
 $6 + 2C = 0 \quad \therefore C = -3$

점 $(-4, 0, 3)$ 을 지나므로
 $16 - 4A = 0 \quad \therefore A = 4$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - y - 3z = 0$

02-2 **답** $k > -21$

$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 2y + 4z - k = 0$ 에서
 $(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = k+21$
 주어진 방정식이 구를 나타내려면 $k+21 > 0$ 이어야 하므로 $k > -21$

03-1 **답** $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 16 = 0$

$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$ 이므로 $3\overline{BP} = \overline{AP}$
 $\therefore 9\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$
 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면
 $9\{(x+4)^2 + y^2 + z^2\} = (x-4)^2 + y^2 + z^2$
 $\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 16 = 0$

03-2 **답** 72π

$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \sqrt{3}$ 이므로 $\sqrt{3}\overline{BP} = \overline{AP}$
 $\therefore 3\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$
 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면
 $3\{(x-2)^2 + y^2 + z^2\} = x^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2$
 $\therefore (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 18$
 따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $(3, -2, -1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$ 인 구이므로 구하는 도형의 겹넓이는
 $4\pi \times (3\sqrt{2})^2 = 72\pi$

03-3 **답** 3

점 B의 좌표를 (x_1, y_1, z_1) 이라 하면 점 B는 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 위의 점이므로
 $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 선분 AB의 중점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면
 $x = \frac{4+x_1}{2}, y = \frac{-3+y_1}{2}, z = \frac{3+z_1}{2}$
 $\therefore x_1 = 2x-4, y_1 = 2y+3, z_1 = 2z-3$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $(2x-4)^2 + (2y+3)^2 + (2z-3)^2 = 4$
 $\therefore (x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = 1$
 따라서 $a=2, b=-\frac{3}{2}, c=\frac{3}{2}, r=1$ 이므로
 $a+b+c+r=3$

2 구의 방정식(2)

개념 Check

119쪽

- 1 **답** (1) $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$
 (2) $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$
 (3) $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 1$
 (1) 주어진 구가 xy 평면에 접하므로 반지름의 길이는 $|-2|=2$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$
 (2) 주어진 구가 yz 평면에 접하므로 반지름의 길이는 $|3|=3$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$
 (3) 주어진 구가 zx 평면에 접하므로 반지름의 길이는 $|1|=1$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 1$
- 2 **답** (1) $(x-5)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 17$
 (2) $(x-5)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 26$
 (3) $(x-5)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 41$
 (1) 주어진 구가 x 축에 접하므로 반지름의 길이는 $\sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x-5)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 17$
 (2) 주어진 구가 y 축에 접하므로 반지름의 길이는 $\sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x-5)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 26$
 (3) 주어진 구가 z 축에 접하므로 반지름의 길이는 $\sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x-5)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 41$
- 3 **답** (1) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 12$
 (2) $(y+3)^2 + (z-2)^2 = 15$
 (3) $(x-1)^2 + (z-2)^2 = 7$
 (1) 주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면
 $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (0-2)^2 = 16$
 $\therefore (x-1)^2 + (y+3)^2 = 12$
 (2) 주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면
 $(0-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 16$
 $\therefore (y+3)^2 + (z-2)^2 = 15$

- (3) 주어진 구의 방정식에 $y=0$ 을 대입하면
 $(x-1)^2+(0+3)^2+(z-2)^2=16$
 $\therefore (x-1)^2+(z-2)^2=7$

문제

120~123쪽

04-1 ㉠ (1) 3 (2) 29

- (1) $x^2+y^2+z^2-4x+2ky+2z+10=0$ 에서
 $(x-2)^2+(y+k)^2+(z+1)^2=k^2-5$
 이 구가 yz 평면에 접하므로 반지름의 길이는 중심의 x 좌표의 절댓값과 같다.
 즉, $\sqrt{k^2-5}=|2|$ 이므로 양변을 제곱하면
 $k^2-5=4, k^2=9$
 $\therefore k=3 (\because k>0)$
- (2) 구의 중심 $C(3, -2, 5)$ 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $H(3, 0, 0)$
 $\therefore \overline{CH}=\sqrt{(3-3)^2+2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$
 이때 선분 CH 의 길이는 구의 반지름의 길이와 같으므로
 $r=\sqrt{29} \quad \therefore r^2=29$

04-2 ㉠ $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9,$
 $(x-7)^2+(y-7)^2+(z-7)^2=49$

구가 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 동시에 접하고
 점 $(5, 1, 4)$ 를 지나므로 반지름의 길이를 r 라 하면 중심
 의 좌표는 (r, r, r)
 즉, 구의 방정식은 $(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2$
 이 구가 점 $(5, 1, 4)$ 를 지나므로
 $(5-r)^2+(1-r)^2+(4-r)^2=r^2$
 $r^2-10r+21=0, (r-3)(r-7)=0$
 $\therefore r=3$ 또는 $r=7$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9,$
 $(x-7)^2+(y-7)^2+(z-7)^2=49$

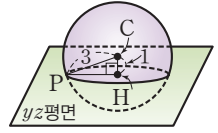
05-1 ㉠ 8π

주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면
 $y^2+z^2-2y-4z-3=0$
 $\therefore (y-1)^2+(z-2)^2=8$
 따라서 주어진 구와 yz 평면이 만나서 생기는 도형은 반지
 림의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는
 $\pi \times (2\sqrt{2})^2=8\pi$

다른 풀이

$x^2+y^2+z^2+2x-2y-4z-3=0$ 에서
 $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C 라 하고 점 C 에서 yz 평면에 내
 린 수선의 발을 H , 구와 yz 평면
 이 만나서 생기는 원 위의 한 점
 을 P 라 하면 $C(-1, 1, 2), H(0, 1, 2)$ 이므로



$\overline{CP}=3, \overline{CH}=1$

이때 직각삼각형 CPH 에서

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CH}^2}$
 $=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

따라서 주어진 구와 yz 평면이 만나서 생기는 도형은 반지
 림의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는
 $\pi \times (2\sqrt{2})^2=8\pi$

05-2 ㉠ 8

구의 중심의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 반지름의 길이가 5이
 므로 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=25$

이 방정식에 $y=0$ 을 대입하면

$(x-a)^2+(0-b)^2+(z-c)^2=25$

$\therefore (x-a)^2+(z-c)^2=25-b^2$

이 방정식이 $(x-3)^2+(z-4)^2=9$ 와 일치하므로

$a=3, c=4, 25-b^2=9$

$25-b^2=9$ 에서 $b^2=16$

$\therefore b=\pm 4$

즉, 두 구의 중심의 좌표는

$(3, -4, 4), (3, 4, 4)$

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

$|4-(-4)|=8$

06-1 ㉠ $\sqrt{7}$

$x^2+y^2+z^2-2x-10y+22=0$ 에서

$(x-1)^2+(y-5)^2+z^2=4$

이 구의 중심을 C 라 하면 $C(1, 5, 0)$ 이므로

$\overline{AC}=\sqrt{(1+2)^2+(5-6)^2+1^2}=\sqrt{11}$

오른쪽 그림과 같이 점 A

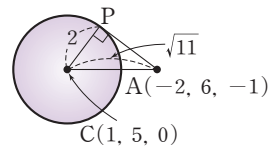
에서 구에 그은 접선의 접

점을 P 라 하면

$\overline{CP}=2$

따라서 직각삼각형 APC 에서 구하는 접선의 길이는

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CP}^2}$
 $=\sqrt{(\sqrt{11})^2-2^2}=\sqrt{7}$



06-2 **답** $\sqrt{10}$

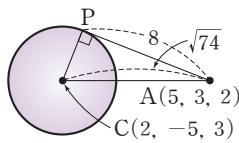
$$\overline{AC} = \sqrt{(2-5)^2 + (-5-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{74}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 구에 그은 접선의 접점을 P라 하면

$$\overline{AP} = 8$$

따라서 직각삼각형 APC에서 구하는 구의 반지름의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{CP} &= \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AP}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{74})^2 - 8^2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$



06-3 **답** 29

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 12z + k = 0 \text{에서}$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2 = 46 - k$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(-1, 3, 6)$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(-1-3)^2 + (3-2)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{42}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 구에 그은 접선의 접점을 P라 하면

$$\overline{AP} = 5, \overline{CP} = \sqrt{46 - k}$$

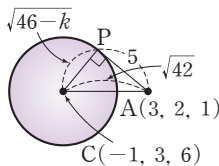
직각삼각형 APC에서

$$\begin{aligned} \overline{CP} &= \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AP}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{42})^2 - 5^2} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{46 - k} = \sqrt{17}$ 이므로 양변을 제곱하면

$$46 - k = 17$$

$$\therefore k = 29$$



07-1 **답** 22

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 12y - 4z + 25 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + (y-6)^2 + (z-2)^2 = 16$$

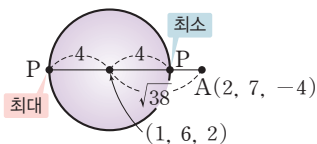
점 A(2, 7, -4)에서 구의 중심 (1, 6, 2)까지의 거리를 d라 하면

$$d = \sqrt{(1-2)^2 + (6-7)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{38}$$

한편 구의 반지름의 길이를 r라 하면

$$r = 4$$

이때 선분 AP의 길이가 최대 또는 최소가 되는 경우의 점 P의 위치는 다음 그림과 같다.



따라서 두 점 A, P 사이의 거리의 최댓값 M, 최솟값 m은

$$M = d + r = \sqrt{38} + 4$$

$$m = d - r = \sqrt{38} - 4$$

$$\therefore Mm = 38 - 16 = 22$$

07-2 **답** 최댓값: 6, 최솟값: 2

구의 중심을 C라 하고 점 C에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H, 구의 반지름의 길이를 r라 하면

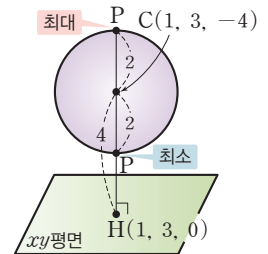
$$C(1, 3, -4), H(1, 3, 0), r = 2$$

이때 $\overline{CH} = 4$ 이므로 구 위의 점 P에서 xy 평면에 이르는 거리가 최대 또는 최소가 되는 경우의 점 P의 위치는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구 위의 점 P에서 xy 평면에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값은

$$\begin{aligned} (\text{최댓값}) &= \overline{CH} + r \\ &= 4 + 2 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{최솟값}) &= \overline{CH} - r \\ &= 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$



연습문제

124~126쪽

- | | | | |
|----|------------------------------------|----|------------------------------------|
| 1 | $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 14$ | 2 | ④ |
| 3 | ④ | 4 | 2 |
| | | 5 | 40 |
| | | 6 | 96π |
| | | 7 | 32 |
| 8 | ③ | 9 | $(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 = 50$ |
| 10 | ③ | 11 | 20 |
| | | 12 | ⑤ |
| | | 13 | 6 |
| | | 14 | -21 |
| 15 | -12 | 16 | 45 |
| | | 17 | $\frac{3}{4}$ |
| | | 18 | ⑤ |
| | | 19 | ② |
| 20 | $\sqrt{10}$ | | |

- 구 $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$ 의 중심의 좌표는 (3, -1, 2)
구의 반지름의 길이는 두 점 (3, -1, 2), (2, 1, -1) 사이의 거리와 같으므로
$$\sqrt{(2-3)^2 + (1+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{14}$$

따라서 구하는 구의 방정식은
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 14$$
- 점 Q의 좌표를 (x_1, y_1, z_1) 이라 하면
점 A는 선분 PQ의 중점이므로
$$A\left(\frac{4+x_1}{2}, \frac{1+y_1}{2}, \frac{3+z_1}{2}\right)$$

즉, $\frac{4+x_1}{2} = -2, \frac{1+y_1}{2} = 3, \frac{3+z_1}{2} = -1$ 이므로
 $x_1 = -8, y_1 = 5, z_1 = -5$
 $\therefore Q(-8, 5, -5)$

구의 중심은 선분 AQ의 중점과 같으므로 구의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2-8}{2}, \frac{3+5}{2}, \frac{-1-5}{2}\right)$$

$$\therefore (-5, 4, -3)$$

구의 반지름의 길이는 구의 중심과 점 A 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(-2+5)^2+(3-4)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{14}$$

즉, 구의 방정식은

$$(x+5)^2+(y-4)^2+(z+3)^2=14$$

따라서 $a=5, b=-4, c=3, d=14$ 이므로

$$a+b+c+d=18$$

3 구의 방정식을

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

이라 하자.

점 $(0, 0, 0)$ 을 지나므로

$$D=0$$

점 $(6, 0, 0)$ 을 지나므로

$$36+6A=0 \quad \therefore A=-6$$

점 $(1, 1, 0)$ 을 지나므로

$$-4+B=0 \quad \therefore B=4$$

점 $(-3, 0, 3)$ 을 지나므로

$$36+3C=0 \quad \therefore C=-12$$

즉, 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2-6x+4y-12z=0$$

$$\therefore (x-3)^2+(y+2)^2+(z-6)^2=49$$

따라서 구의 반지름의 길이는 7이다.

4 $x^2+y^2+z^2-2x-4y+kz=k$ 에서

$$(x-1)^2+(y-2)^2+\left(z+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}+k+5$$

이때 구의 부피가 최소이려면 구의 반지름의 길이

$$\sqrt{\frac{k^2}{4}+k+5}$$

가 최소이어야 한다.

$$\frac{k^2}{4}+k+5=\frac{1}{4}(k+2)^2+4$$

이므로 $k=-2$ 일 때 반지름

의 길이가 최소이고 이때의 구의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$$

따라서 $a=1, b=2, c=1, r=2$ 이므로

$$a+b+c-r=2$$

5 $x^2+y^2+z^2-12x-14y-16z-20=0$ 에서

$$(x-6)^2+(y-7)^2+(z-8)^2=169$$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(6, 7, 8)$

이때 구의 중심은 선분 AB의 중점과 같으므로

$$\frac{3+a}{2}=6, \frac{3+b}{2}=7, \frac{-4+c}{2}=8$$

따라서 $a=9, b=11, c=20$ 이므로 $a+b+c=40$

6 $\overline{AP}=2\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$(x+6)^2+y^2+(z-3)^2=4\{x^2+(y-3)^2+z^2\}$$

$$\therefore (x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=24$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $(2, 4, -1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{6}$ 인 구이므로 구하는 도형의 겹넓이는

$$4\pi \times (2\sqrt{6})^2=96\pi$$

7 $x^2+y^2+z^2-8x+4y-8z+k=0$ 에서

$$(x-4)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=36-k$$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(4, -2, 4)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{36-k}$ 이다.

이 구가 zx 평면에 접하므로

$$\sqrt{36-k}=|-2|$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 36-k=4 \quad \therefore k=32$$

8 구가 xy 평면에 접하므로

$$r=|a|=a \quad (\because a>0)$$

구의 중심 $C(3, 4, a)$ 에서 z 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$H(0, 0, a)$$

이때 선분 CH의 길이는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$r=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+(a-a)^2}=5$$

$$\therefore a=5$$

$$\therefore a+r=10$$

9 구가 x 축, y 축, z 축에 동시에 접하므로 구의 중심에서 x 축, y 축, z 축에 이르는 거리는 모두 구의 반지름의 길이와 같다.

구의 중심을 $C(a, a, a)$ ($a>0$)라 하고 점 C에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$H(a, 0, 0)$$

$$\overline{CH}=5\sqrt{2}$$

이므로

$$\sqrt{(a-a)^2+(-a)^2+(-a)^2}=5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2a^2}=5\sqrt{2}, a\sqrt{2}=5\sqrt{2} \quad (\because a>0) \quad \therefore a=5$$

따라서 구의 중심의 좌표는 $(5, 5, 5)$ 이고 반지름의 길이는 $5\sqrt{2}$ 이므로 구하는 구의 방정식은

$$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=50$$

10 주어진 구의 방정식에 $y=0, z=0$ 을 대입하면

$$(x-1)^2 + (0+2)^2 + (0-3)^2 = r^2$$

$$(x-1)^2 = r^2 - 13$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{r^2 - 13}$$

즉, 주어진 구와 x 축이 만나는 두 점의 좌표는

$$(1 + \sqrt{r^2 - 13}, 0, 0), (1 - \sqrt{r^2 - 13}, 0, 0) \text{ 이고 두 점 사이의 거리가 } 6 \text{ 이므로}$$

$$|(1 + \sqrt{r^2 - 13}) - (1 - \sqrt{r^2 - 13})| = 6$$

$$|2\sqrt{r^2 - 13}| = 6, \sqrt{r^2 - 13} = 3$$

양변을 제곱하면

$$r^2 - 13 = 9, r^2 = 22$$

$$\therefore r = \sqrt{22} (\because r > 0)$$

11 주어진 구의 방정식에 $x=0, z=0$ 을 대입하면

$$y^2 - 6y - 7 = 0$$

$$(y+1)(y-7) = 0$$

$$\therefore y = -1 \text{ 또는 } y = 7$$

즉, 주어진 구와 y 축의 두 교점의 좌표는 $(0, -1, 0),$

$$(0, 7, 0) \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB} = |7 - (-1)| = 8$$

또 $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z - 7 = 0$ 에서

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 36$$

이때 두 점 A, B는 구 위의 점이므로 두 선분 AC, BC의 길이는 구의 반지름의 길이와 같다.

$$\therefore \overline{AC} = \overline{BC} = 6$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 8 + 6 + 6 = 20$$

12 구의 중심은 선분 AB의 중점과 같으므로 구의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{4-8}{2}, \frac{-5-1}{2}, \frac{7+1}{2} \right)$$

$$\therefore (-2, -3, 4)$$

구의 반지름의 길이는 구의 중심과 점 A 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(4+2)^2 + (-5+3)^2 + (7-4)^2} = 7$$

즉, 구의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 49$$

위의 방정식에 $y=0$ 을 대입하면

$$(x+2)^2 + (0+3)^2 + (z-4)^2 = 49$$

$$\therefore (x+2)^2 + (z-4)^2 = 40$$

따라서 주어진 구와 zx 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 $2\sqrt{10}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi \times (2\sqrt{10})^2 = 40\pi$$

13 주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$y^2 + z^2 + 6y - 2z + k = 0$$

$$\therefore (y+3)^2 + (z-1)^2 = 10 - k$$

이때 주어진 구와 yz 평면이 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 2이므로

$$\sqrt{10 - k} = 2$$

양변을 제곱하면

$$10 - k = 4$$

$$\therefore k = 6$$

14 주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$$x^2 + y^2 - 2kx - 6y + 10 = 0$$

$$\therefore (x-k)^2 + (y-3)^2 = k^2 - 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

주어진 구의 방정식에 $y=0$ 을 대입하면

$$x^2 + z^2 - 2kx - 4z + 10 = 0$$

$$\therefore (x-k)^2 + (z-2)^2 = k^2 - 6 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

두 원 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하면

$$S_1 = \pi(k^2 - 1), S_2 = \pi(k^2 - 6)$$

한편 $S_1 : S_2 = 4 : 3$ 에서 $4S_2 = 3S_1$ 이므로

$$4\pi(k^2 - 6) = 3\pi(k^2 - 1)$$

$$k^2 = 21$$

$$\therefore k = \pm\sqrt{21}$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$-\sqrt{21} \times \sqrt{21} = -21$$

15 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + k = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2 - k$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(1, 0, -1)$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(1+2)^2 + (-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{29}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 구

에 그은 접선의 접점이 P이므로

$$\overline{AP} = \sqrt{15}, \overline{CP} = \sqrt{2-k}$$

직각삼각형 ACP에서 구의 반지

름의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{CP} &= \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AP}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{29})^2 - (\sqrt{15})^2} = \sqrt{14} \end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{2-k} = \sqrt{14}$ 이므로 양변을 제곱하면

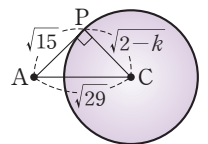
$$2 - k = 14$$

$$\therefore k = -12$$

16 원점에서 구의 중심 $(-2, 3, -6)$ 까지의 거리를 d 라 하면

$$d = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-6)^2} = 7$$

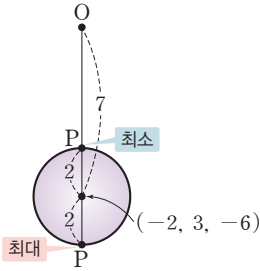
한편 구의 반지름의 길이를 r 라 하면 $r=2$



이때 선분 OP의 길이가 최대 또는 최소가 되는 경우의 점 P의 위치는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 선분 OP의 길이의 최댓값 M, 최솟값 m은
 $M = d + r = 7 + 2 = 9$
 $m = d - r = 7 - 2 = 5$

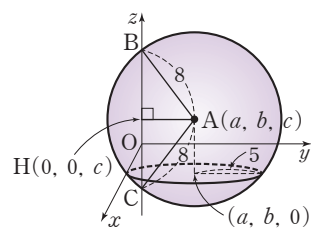
$\therefore Mm = 45$



17 $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 8z + 25 = 0$ 에서
 $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 1$
 이 구의 중심의 좌표는 (3, 1, 4)이고 반지름의 길이는 1
 이므로 구의 xy 평면 위로의 정사영 T의 방정식은
 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$
 xy 평면에서 이 원과 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 이 접하므로 원의 중심 (3, 1, 0)과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같다.

즉, $\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 1$ 이므로 $|3m-1| = \sqrt{m^2+1}$
 양변을 제곱하면 직선 $y=mx$ 와 정사영 T가 xy 평면 위에 있으므로 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계로 생각한다.
 $9m^2 - 6m + 1 = m^2 + 1, 4m^2 - 3m = 0$
 $m(4m-3) = 0 \quad \therefore m = \frac{3}{4} (\because m \neq 0)$

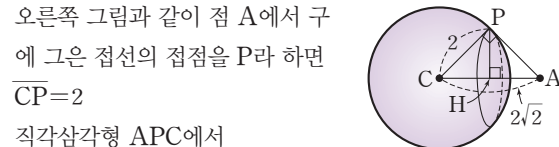
18



점 A의 좌표를 (a, b, c)라 하면 $\overline{OA} = 7$ 이므로
 $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 7 \quad \therefore a^2 + b^2 + c^2 = 49 \quad \dots \textcircled{1}$
 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 8인 구 S의 방정식은 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 64$
 이때 구 S와 xy 평면이 만나서 생기는 원을 C라 하자.
 구 S의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면 원 C의 방정식은
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (0-c)^2 = 64$
 $\therefore (x-a)^2 + (y-b)^2 = 64 - c^2$
 원 C의 넓이가 25π 이므로 $\pi(64 - c^2) = 25\pi$
 $\therefore c^2 = 39$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a^2 + b^2 + 39 = 49$
 $\therefore a^2 + b^2 = 10$

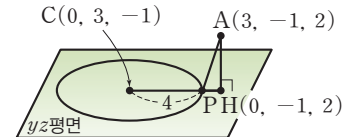
점 A에서 z 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(0, 0, c)$
 $\therefore \overline{AH} = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2 + (c-c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10}$
 한편 점 B는 구 S 위의 점이므로 $\overline{AB} = 8$
 따라서 직각삼각형 ABH에서
 $\overline{BH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{8^2 - (\sqrt{10})^2} = 3\sqrt{6}$
 $\therefore \overline{BC} = 2\overline{BH} = 2 \times 3\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$

19 주어진 구의 중심을 C라 하면 $C(1, 0, -1)$ 이므로
 $\overline{AC} = \sqrt{(1-1)^2 + (-2)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2}$



오른쪽 그림과 같이 점 A에서 구에 그은 접선의 접점을 P라 하면
 $\overline{CP} = 2$
 직각삼각형 APC에서
 $\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2$
 직각삼각형 APC의 꼭짓점 P에서 변 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 APC의 넓이에서
 $\frac{1}{2} \times \overline{CP} \times \overline{AP} = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{PH}$
 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \overline{PH} \quad \therefore \overline{PH} = \sqrt{2}$
 따라서 접점이 나타내는 도형은 중심이 점 H이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는
 $\pi \times (\sqrt{2})^2 = 2\pi$

20 주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면 구와 yz 평면이 만나서 생기는 원 C의 방정식은
 $(0-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 41$
 $\therefore (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$
 다음 그림과 같이 원 C의 중심을 C, 점 A에서 yz 평면에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 CH와 원이 만나는 점을 P라 하면 점 A에서 원 C에 이르는 거리의 최솟값은 선분 AP의 길이와 같다.



이때 $C(0, 3, -1), H(0, -1, 2)$ 이므로
 $\overline{CH} = \sqrt{(-1-3)^2 + (2+1)^2} = 5$
 $\overline{PH} = \overline{CH} - \overline{CP} = 5 - 4 = 1$
 $\overline{AH} = 3$
 즉, 직각삼각형 APH에서
 $\overline{AP} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$
 따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{10}$ 이다.

III-1 01 벡터의 연산

|| 벡터의 뜻

개념 Check

129쪽

1 답 (1) 1 (2) $\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{3}$

(1) $|\overrightarrow{AD}| = \overline{AD} = 1$

(2) $|\overrightarrow{BG}| = \overline{BG} = \sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{FG}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

(3) $|\overrightarrow{CE}| = \overline{CE} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{FG}^2 + \overline{CG}^2}$
 $= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

2 답 (1) \overrightarrow{EF} (2) $\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{BA}$

문제

130쪽

01-1 답 (1) \overrightarrow{DG} (2) $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{HF}$

(3) $|\overrightarrow{AC}| = 5, |\overrightarrow{DF}| = \sqrt{29}$

(1) 서로 같은 벡터는 시점의 위치에 관계없이 크기와 방향이 각각 같은 벡터이므로 \overrightarrow{AF} 와 같은 벡터는 \overrightarrow{DG}

(2) \overrightarrow{BD} 와 크기는 같지만 방향이 반대인 벡터는 $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{HF}$

(3) $|\overrightarrow{AC}| = \overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
 $|\overrightarrow{DF}| = \overline{DF} = \sqrt{\overline{DH}^2 + \overline{HE}^2 + \overline{EF}^2}$
 $= \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$

01-2 답 ㄷ

ㄱ. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$

ㄴ. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b}$

ㄷ. $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -\vec{c}$

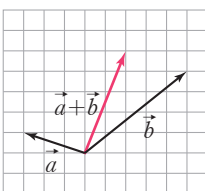
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

2 벡터의 덧셈과 뺄셈

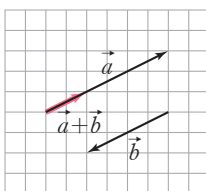
개념 Check

132쪽

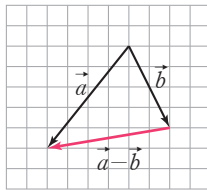
1 답 (1)



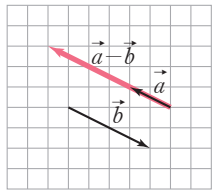
(2)



2 답 (1)



(2)



3 답 (1) $\vec{0}$ (2) \overrightarrow{AD} (3) \overrightarrow{AE} (4) $\vec{0}$

(1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

(2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD}$
 $= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

(3) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD}$
 $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$
 $= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE})$
 $= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$

(4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}$
 $= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$
 $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$
 $= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})$
 $= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

문제

133쪽

02-1 답 (1) $\vec{a} + \vec{b}$ (2) $-\vec{a} - \vec{c}$ (3) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

(1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$

(2) $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EA}$
 $= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = -\vec{a} - \vec{c}$

(3) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AE}$
 $= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = -\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}$
 $= \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

다른 풀이

(1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$

(2) $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} - \vec{c}$

(3) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{AD}$
 $= -(-\vec{a} - \vec{c}) - \vec{b} (\because (2))$
 $= \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

02-2 답 $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$
 $= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{b} - \vec{a} + \vec{c}$
 $= -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

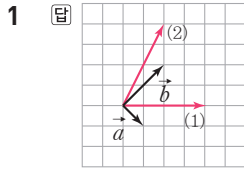
02-3 답 ③

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$
 $= \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

3 벡터의 실수배

개념 Check

135쪽



- 2 (1) $7\vec{a} + \vec{b}$ (2) $\vec{a} - \frac{7}{4}\vec{b}$
 (3) $8\vec{a} - 5\vec{b} + 7\vec{c}$ (4) $4\vec{a} + 9\vec{b} - 5\vec{c}$

문제

136~141쪽

- 03-1 (1) $\vec{x} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ (2) $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$
 (3) $\vec{x} = -3\vec{a} + 9\vec{b} - 8\vec{c}$ (4) $\vec{x} = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b} - \frac{4}{5}\vec{c}$

(1) $4\vec{x} - \vec{a} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ 에서 $4\vec{x} = 4\vec{a} + 2\vec{b}$
 $\therefore \vec{x} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

(2) $3(2\vec{a} + \vec{x}) + 5(\vec{b} - \vec{x}) = \vec{x} + 2\vec{b}$ 에서
 $6\vec{a} + 3\vec{x} + 5\vec{b} - 5\vec{x} = \vec{x} + 2\vec{b}$
 $-3\vec{x} = -6\vec{a} - 3\vec{b} \quad \therefore \vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$

(3) $3(\vec{a} + \vec{b} + \vec{x}) = 4(3\vec{b} - 2\vec{c}) + 2\vec{x}$ 에서
 $3\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{x} = 12\vec{b} - 8\vec{c} + 2\vec{x}$
 $\therefore \vec{x} = -3\vec{a} + 9\vec{b} - 8\vec{c}$

(4) $3(\vec{a} - \vec{x}) - 2(\vec{b} + \vec{c}) = 2(\vec{x} + \vec{c})$ 에서
 $3\vec{a} - 3\vec{x} - 2\vec{b} - 2\vec{c} = 2\vec{x} + 2\vec{c}$
 $-5\vec{x} = -3\vec{a} + 2\vec{b} + 4\vec{c}$
 $\therefore \vec{x} = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b} - \frac{4}{5}\vec{c}$

- 03-2 $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{y} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$

$2\vec{x} - \vec{y} = \vec{a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$-3\vec{x} + 2\vec{y} = -\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2}$ 을 하면 $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$2(2\vec{a} - \vec{b}) - \vec{y} = \vec{a}$

$4\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{y} = \vec{a} \quad \therefore \vec{y} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$

- 03-3 $-3\vec{a} + 11\vec{b}$

$2\vec{x} + \vec{y} = 4\vec{a} + 2\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$\vec{x} - 3\vec{y} = -5\vec{a} + 15\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} \times 3 + \textcircled{2}$ 을 하면

$7\vec{x} = 7\vec{a} + 21\vec{b} \quad \therefore \vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b}$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$2(\vec{a} + 3\vec{b}) + \vec{y} = 4\vec{a} + 2\vec{b}$

$2\vec{a} + 6\vec{b} + \vec{y} = 4\vec{a} + 2\vec{b} \quad \therefore \vec{y} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$

$\therefore \vec{x} - 2\vec{y} = (\vec{a} + 3\vec{b}) - 2(2\vec{a} - 4\vec{b})$

$= \vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{a} + 8\vec{b} = -3\vec{a} + 11\vec{b}$

- 04-1 (1) $-\vec{a} + 2\vec{b}$ (2) $-2\vec{a} + \vec{b}$

(1) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + 2\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
 $= -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -2\vec{a} + \vec{b}$

- 04-2 $\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

- 04-3 $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$

$= \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}) = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

$= \vec{c} + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

- 04-4 $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{DH} + (\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GM})$

$= \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$= \vec{c} + \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

- 04-5 $4\sqrt{2}$

$\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + 3\overrightarrow{AC}$
 $= \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AC}$

이때 $|\overrightarrow{AC}| = \overrightarrow{AC} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ 이므로

$|\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}| = |4\overrightarrow{AC}| = 4|\overrightarrow{AC}| = 4\sqrt{2}$

- 04-6 $2\sqrt{3}$

$2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 2\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}$

$= (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH})$

$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

$= \overrightarrow{CE}$

이때 $|\overrightarrow{CE}| = \overrightarrow{CE} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$ 이므로

$|2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}| = |\overrightarrow{CE}| = 2\sqrt{3}$

05-1 ㉞ (1) $m=1, n=-1$ (2) $m=2, n=1$

(1) $(2m+n-1)\vec{a}+(3m-2n-5)\vec{b}=\vec{0}$ 에서

$$2m+n-1=0, 3m-2n-5=0$$

$$\therefore 2m+n=1, 3m-2n=5$$

두 식을 연립하여 풀면

$$m=1, n=-1$$

(2) $2m\vec{a}+3n\vec{b}=(m+2n)\vec{a}+(2m-1)\vec{b}$ 에서

$$2m=m+2n, 3n=2m-1$$

$$\therefore m-2n=0, 2m-3n=1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$m=2, n=1$$

05-2 ㉞ -1

$$m\vec{a}+2n\vec{b}=(2\vec{a}+\vec{b})m+(\vec{a}+\vec{b})n+2\vec{b}$$

$$m\vec{a}+2n\vec{b}=2m\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{a}+n\vec{b}+2\vec{b}$$

$$m\vec{a}+2n\vec{b}=(2m+n)\vec{a}+(m+n+2)\vec{b}$$

따라서 $m=2m+n, 2n=m+n+2$ 이므로

$$m+n=0, m-n=-2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$m=-1, n=1$$

$$\therefore mn=-1$$

05-3 ㉞ $k=-1, m=-2$

$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{b}-\vec{a}$$

$$\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=(2\vec{a}+k\vec{b})-\vec{a}=\vec{a}+k\vec{b}$$

이때 $m\vec{AB}=2\vec{AC}$ 에서

$$m(\vec{b}-\vec{a})=2(\vec{a}+k\vec{b})$$

$$\therefore -m\vec{a}+m\vec{b}=2\vec{a}+2k\vec{b}$$

따라서 $-m=2, m=2k$ 이므로

$$k=-1, m=-2$$

06-1 ㉞ -1

두 벡터 $4\vec{a}+8\vec{b}, m\vec{a}-2\vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$m\vec{a}-2\vec{b}=k(4\vec{a}+8\vec{b}) \quad (\text{단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

$$\therefore m\vec{a}-2\vec{b}=4k\vec{a}+8k\vec{b}$$

따라서 $m=4k, -2=8k$ 이므로

$$k=-\frac{1}{4}, m=-1$$

06-2 ㉞ -3

두 벡터 $\vec{q}-\vec{p}, \vec{q}+\vec{r}$ 가 서로 평행하려면

$$\vec{q}+\vec{r}=k(\vec{q}-\vec{p}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.

$$\vec{q}-\vec{p}=(\vec{a}+2\vec{b})-(3\vec{a}+4\vec{b})=2\vec{a}-2\vec{b}$$

$$\vec{q}+\vec{r}=(\vec{a}+2\vec{b})+(m\vec{a}+2\vec{b})=(m+1)\vec{a}+4\vec{b}$$

이를 ①에 대입하면

$$(m-1)\vec{a}+4\vec{b}=k(2\vec{a}-2\vec{b})$$

$$\therefore (m-1)\vec{a}+4\vec{b}=2k\vec{a}-2k\vec{b}$$

따라서 $m-1=2k, 4=-2k$ 이므로

$$k=-2, m=-3$$

06-3 ㉞ \perp, \parallel

ㄱ. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{a}+(3\vec{a}+2\vec{b})=4\vec{a}+2\vec{b}=2(2\vec{a}+\vec{b})$

즉, 두 벡터 $\vec{a}+\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}$ 는 서로 평행하지 않다.

ㄴ. $\vec{a}-\vec{c}=\vec{a}-(3\vec{a}+2\vec{b})=-2\vec{a}-2\vec{b}=-2(\vec{a}+\vec{b})$

즉, 두 벡터 $\vec{a}-\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}$ 는 서로 평행하다.

ㄷ. $\vec{b}+\vec{c}=\vec{b}+(3\vec{a}+2\vec{b})=3\vec{a}+3\vec{b}=3(\vec{a}+\vec{b})$

즉, 두 벡터 $\vec{b}+\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}$ 는 서로 평행하다.

ㄹ. $\vec{b}-\vec{c}=\vec{b}-(3\vec{a}+2\vec{b})=-3\vec{a}-\vec{b}=-(3\vec{a}+\vec{b})$

즉, 두 벡터 $\vec{b}-\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}$ 는 서로 평행하지 않다.

따라서 보기에서 $\vec{a}+\vec{b}$ 와 서로 평행한 벡터인 것은 \perp, \parallel 이다.

07-1 ㉞ $\frac{1}{2}$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\vec{AC}=k\vec{AB} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.

$$\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=(2\vec{a}+m\vec{b})-\vec{a}=\vec{a}+m\vec{b}$$

$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(3\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}=2\vec{a}+\vec{b}$$

이를 ①에 대입하면

$$\vec{a}+m\vec{b}=k(2\vec{a}+\vec{b})$$

$$\therefore \vec{a}+m\vec{b}=2k\vec{a}+k\vec{b}$$

따라서 $1=2k, m=k$ 이므로

$$k=\frac{1}{2}, m=\frac{1}{2}$$

07-2 ㉞ 1

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\vec{AC}=k\vec{AB} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.

$$\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}$$

$$=(3\vec{a}+4\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})=2\vec{a}+6\vec{b}$$

$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$$

$$=(2m\vec{a}+m\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})=(2m-1)\vec{a}+(m+2)\vec{b}$$

이를 ①에 대입하면

$$2\vec{a}+6\vec{b}=k\{(2m-1)\vec{a}+(m+2)\vec{b}\}$$

$$\therefore 2\vec{a}+6\vec{b}=(2km-k)\vec{a}+(km+2k)\vec{b}$$

따라서 $2=2km-k, 6=km+2k$ 이므로

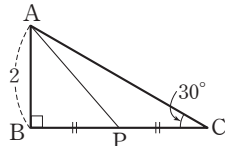
$$km=2, k=2 \quad \therefore m=1$$

- | | | | | |
|---------------------|---------------|--------------|------------------------------------|--------|
| 1 ② | 2 4 | 3 ③ | 4 ④ | 5 ㄱ, ㄴ |
| 6 ① | 7 ② | 8 $\sqrt{6}$ | 9 $-2\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ | |
| 10 5 | 11 5 | 12 4 | 13 ④ | 14 12 |
| 15 ⑤ | 16 $\sqrt{2}$ | 17 ② | 18 ⑤ | 19 12 |
| 20 $\frac{2}{3}\pi$ | | | | |

1 $BD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이므로 $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{5}{2}$
 $\therefore |\vec{BO}| = BO = \frac{5}{2}$

2 서로 같은 벡터는 시점의 위치에 관계없이 크기와 방향이 각각 같은 벡터이므로 \vec{AD} 와 같은 벡터는 \vec{BE}, \vec{CF} 이다.
 $\therefore a=2$
 또 \vec{BC} 와 크기는 같지만 방향이 반대인 벡터는 \vec{CB}, \vec{FE} 이므로 $b=2$
 $\therefore a+b=2+2=4$

3 $\vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$ 에서 $\vec{PB} = -\vec{PC}$ 이므로 두 벡터 \vec{PB}, \vec{PC} 는 크기는 같지만 방향이 반대이다.
 즉, 점 P는 변 BC의 중점이므로
 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC에서



$BC = \frac{2}{\tan 30^\circ} = 2\sqrt{3}$

$\therefore BP = \frac{1}{2}BC = \sqrt{3}$

따라서 $PA = \sqrt{AB^2 + BP^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$ 이므로

$|\vec{PA}|^2 = PA^2 = 7$

- 4 ① $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = -\vec{a} + \vec{c}$
 ② $\vec{BF} = \vec{OF} - \vec{OB} = \vec{CO} - \vec{OB} = -\vec{OC} - \vec{OB} = -\vec{b} - \vec{c}$
 ③ $\vec{DE} = \vec{CO} = -\vec{OC} = -\vec{c}$
 ④ $\vec{EA} = \vec{OA} - \vec{OE} = \vec{OA} - \vec{BO} = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$
 ⑤ $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{BA} + \vec{OC} = \vec{CO} + \vec{OC} = \vec{CC} = \vec{0}$
 $\therefore |\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}| = 0$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

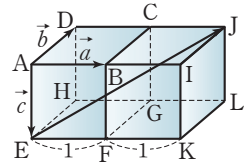
- 5 ㄱ. $\vec{AC} = \vec{AD}$ 이므로 $|\vec{AC}| = |\vec{AD}|$
 ㄴ. $\vec{BF} = \vec{AD} = -\vec{DA}$

ㄷ. $\vec{BE} + \vec{FC} = \vec{BE} + \vec{EA} = \vec{BA}$
 ㄹ. $\vec{AB} - \vec{DE} = \vec{AB} - \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} = \vec{EF}$
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

6 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC} + \vec{BA} = \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC}$
 $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$ 이므로
 $|\vec{BC}| = 3 \quad \therefore \vec{BC} = 3$
 $\vec{a} - \vec{c} = \vec{AC} - \vec{DC} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$
 $|\vec{a} - \vec{c}| = 2$ 이므로 $|\vec{AD}| = 2 \quad \therefore \vec{AD} = 2$
 따라서 삼각형 ABC의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \vec{BC} \times \vec{AD} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$

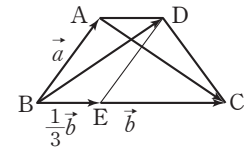
7 $2(\vec{x} - \vec{y}) + 3\vec{y} = 2\vec{x} + \vec{y} = 2(7\vec{a} - 3\vec{b}) + (-2\vec{a} + 5\vec{b})$
 $= 12\vec{a} - \vec{b}$

8 오른쪽 그림과 같이 합동인 두 정육면체가 한 면을 공유하도록 놓으면



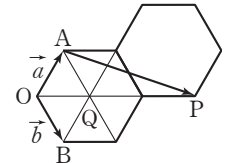
$2\vec{a} = \vec{AI}$
 $\therefore 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{AI} + \vec{AD} - \vec{AE} = \vec{AJ} - \vec{AE} = \vec{EJ}$
 이때 $|\vec{EJ}| = \vec{EJ} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ 이므로
 $|2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = |\vec{EJ}| = \sqrt{6}$

9 $\vec{AC} = \vec{BC} - \vec{BA} = \vec{b} - \vec{a}$
 오른쪽 그림과 같이 변 BC를 1:2로 내분하는 점을 E라 하면



$\vec{BE} = \frac{1}{3}\vec{BC} = \frac{1}{3}\vec{b}$
 이때 $3\vec{AD} = \vec{BC}$ 이므로
 $\vec{AD} = \vec{BE}$
 따라서 사각형 ABED는 평행사변형이므로
 $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BE} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$
 $\therefore \vec{AC} - \vec{BD} = (\vec{b} - \vec{a}) - (\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}) = -2\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

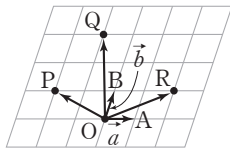
10 오른쪽 그림과 같이 한 정육각형의 세 대각선의 교점을 Q라 하면



$\vec{OQ} = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$
 $\therefore \vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = 3\vec{OQ} - \vec{OA} = 3(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$
 따라서 $m=2, n=3$ 이므로 $m+n=5$

- 11 $(m+n)(\vec{a}+\vec{b})=3(\vec{a}+n\vec{b})+6\vec{b}$ 에서
 $(m+n)\vec{a}+(m+n)\vec{b}=3\vec{a}+(3n+6)\vec{b}$
 따라서 $m+n=3$, $m+n=3n+6$ 이므로
 $m+n=3$, $m-2n=6$
 두 식을 연립하여 풀면
 $m=4$, $n=-1$
 $\therefore m-n=5$

- 12 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에 대하여 $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$ 라 하면



$$\vec{OP}=-2\vec{a}+\vec{b}$$

$$\vec{OQ}=-\vec{a}+3\vec{b}$$

$$\vec{OR}=2\vec{a}+\vec{b}$$

- 이를 $\vec{OQ}=t\vec{OP}+s\vec{OR}$ 에 대입하면
 $-\vec{a}+3\vec{b}=t(-2\vec{a}+\vec{b})+s(2\vec{a}+\vec{b})$
 $\therefore -\vec{a}+3\vec{b}=(-2t+2s)\vec{a}+(t+s)\vec{b}$
 따라서 $-1=-2t+2s$, $3=t+s$ 이므로
 두 식을 연립하여 풀면
 $t=\frac{7}{4}$, $s=\frac{5}{4}$
 $\therefore 3t-s=3\times\frac{7}{4}-\frac{5}{4}=4$

- 13 $2\vec{AB}+p\vec{BC}=q\vec{CA}$ 에서
 $2\vec{AB}+p(\vec{AC}-\vec{AB})=-q\vec{AC}$
 $\therefore (2-p)\vec{AB}=(-p-q)\vec{AC}$
 이때 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않으므로 두 벡터 \vec{AB} , \vec{AC} 는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않다.
 따라서 $2-p=0$, $-p-q=0$ 이므로
 $p=2$, $q=-2 \quad \therefore p-q=4$

- 14 두 벡터 $\vec{x}+\vec{y}$, $m\vec{a}+3\vec{b}$ 가 서로 평행하려면
 $m\vec{a}+3\vec{b}=k(\vec{x}+\vec{y}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.
 $m\vec{a}+3\vec{b}=m(\vec{x}+2\vec{y})+3(3\vec{x}-\vec{y})$
 $= (m+9)\vec{x}+(2m-3)\vec{y}$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $(m+9)\vec{x}+(2m-3)\vec{y}=k(\vec{x}+\vec{y})$
 $\therefore (m+9)\vec{x}+(2m-3)\vec{y}=k\vec{x}+k\vec{y}$
 따라서 $m+9=k$, $2m-3=k$ 이므로
 $m-k=-9$, $2m-k=3$
 두 식을 연립하여 풀면
 $k=21$, $m=12$

- 15 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면
 $\vec{AC}=k\vec{AB} \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.

$$\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=(m\vec{a}+3\vec{b})-(3\vec{a}+\vec{b})$$

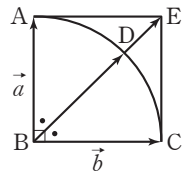
$$= (m-3)\vec{a}+2\vec{b}$$

$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(\vec{a}-\vec{b})-(3\vec{a}+\vec{b})$$

$$= -2\vec{a}-2\vec{b}$$

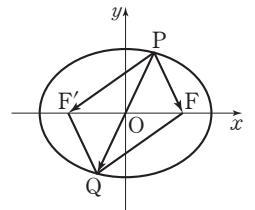
- 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $(m-3)\vec{a}+2\vec{b}=k(-2\vec{a}-2\vec{b})$
 $\therefore (m-3)\vec{a}+2\vec{b}=-2k\vec{a}-2k\vec{b}$
 따라서 $m-3=-2k$, $2=-2k$ 이므로
 $k=-1$, $m=5$

- 16 오른쪽 그림과 같이 두 선분 AB, BC를 이웃하는 두 변으로 하는 정사각형의 나머지 꼭짓점을 E라 하면
 $\vec{BE}=\vec{BA}+\vec{BC}=\vec{a}+\vec{b}$
 세 점 B, D, E가 한 직선 위에 있음



- 므로
 $\vec{BE}=\sqrt{2}\vec{BD}$
 즉, $\vec{a}+\vec{b}=\sqrt{2}\vec{BD}$ 이므로
 $\vec{BD}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b}$
 따라서 $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $n=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로
 $m+n=\sqrt{2}$

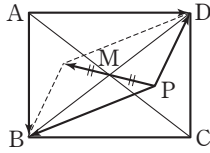
- 17 오른쪽 그림과 같이 사각형 PF'QF가 두 선분 PF, PF'을 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형이 되도록 점 Q를 잡으면



- $\vec{PF}=\vec{QF}'$, $\vec{PF}'=\vec{QF}$
 즉, $\vec{PF}+\vec{PF}'=\vec{QF}+\vec{QF}'$ 이므로 타원의 정의에 의하여 점 Q는 주어진 타원 위의 점이다.
 이때 $\vec{PF}+\vec{PF}'=\vec{PQ}$ 이므로
 $|\vec{PF}+\vec{PF}'|=|\vec{PQ}|=|\vec{PQ}|$
 선분 PQ가 타원의 장축이 될 때 그 길이가 최대이다.
 따라서 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 의 장축의 길이는 $2\times 3=6$ 이므로
 $|\vec{PF}+\vec{PF}'|$ 의 최댓값은 6이다.

- 18 $\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}+\vec{PD}=\vec{CA}$ 에서
 $\vec{PA}+\vec{PB}-\vec{CP}+\vec{PD}=\vec{CP}+\vec{PA}$
 $\therefore \vec{PB}+\vec{PD}=2\vec{CP} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 M이라 하면



$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PM}$$

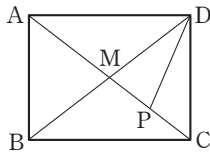
이를 ㉑에 대입하면

$$2\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{CP} \quad \therefore \overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{PC}$$

따라서 점 P는 선분 CM의 중점이므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \quad \dots\dots \text{㉒}$$

ㄷ. ㉒에서 $|\overrightarrow{AP}| = \left|\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right|$ 이므로



$$\text{로 } \overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} : \overrightarrow{AC} = 3 : 4$$

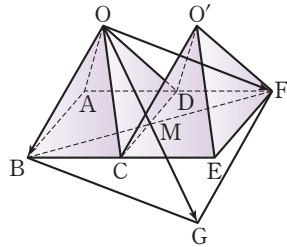
$$\therefore \triangle ADC = \frac{4}{3}\triangle ADP$$

$$= \frac{4}{3} \times 3 = 4$$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는 $4 \times 2 = 8$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19 오른쪽 그림과 같이 두 선분 OB, OF를 이루는 두 변으로 하는 평행사변형의 나머지 꼭짓점을 G라 하면



$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OG}$$

이때 선분 OG의 중점을

M이라 하면 점 M은 선분 BF의 중점이므로 선분 CD의 중점이다.

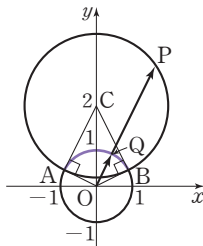
$$\therefore \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OM}$$

한편 삼각형 OCD는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

$$\therefore |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}|^2 = |2\overrightarrow{OM}|^2 = 4\overrightarrow{OM}^2 = 4 \times (\sqrt{3})^2 = 12$$

20 \overrightarrow{OQ} 는 \overrightarrow{OP} 와 방향이 같은 단위벡터이므로 점 Q가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴의 호이다.



원점 O에서 중심이 C(0, 2)이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 원에 그은

두 접선의 접점을 각각 A, B라 하면 $\angle AOC = 60^\circ$ 따라서 $\angle AOB = 120^\circ$ 이므로 구하는 도형의 길이는

$$2\pi \times 1 \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{2}{3}\pi$$

III-2 01 벡터의 성분

위치벡터

개념 Check

147쪽

1 ㉑ (1) $-\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ (2) $-4\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$

$$(1) \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ = (\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{c} - \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$$

$$(2) \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{CA} \\ = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) - 3(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) \\ = (\vec{b} - \vec{a}) + 2(\vec{c} - \vec{b}) - 3(\vec{a} - \vec{c}) = -4\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$$

2 ㉑ (1) $\frac{5}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}$ (2) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

문제

148~150쪽

01-1 ㉑ $\frac{3}{10}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

점 M은 변 OA의 중점이므로

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

점 N은 선분 BM을 3:2로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{ON} = \frac{3\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OB}}{3+2} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OM} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} \\ = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} = \frac{3}{10}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

01-2 ㉑ $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$

점 P는 모서리 AD를 1:2로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\vec{c}$$

점 Q는 모서리 BC를 2:1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}{2+1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

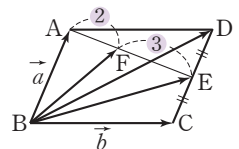
$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$$

01-3 ㉑ $\frac{6}{5}$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b} \text{ 이고}$$

점 E는 변 CD의 중점이므로

$$\overrightarrow{BE} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}}{2} \\ = \frac{\vec{b} + (\vec{a} + \vec{b})}{2} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$$



점 F는 선분 AE를 2:3으로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BF} &= \frac{2\overrightarrow{BE} + 3\overrightarrow{BA}}{2+3} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BE} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} \\ &= \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) + \frac{3}{5}\vec{a} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\end{aligned}$$

따라서 $m = \frac{4}{5}$, $n = \frac{2}{5}$ 이므로 $m+n = \frac{6}{5}$

02-1 **답 풀이 참조**

네 점 A, B, C, G의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{g}$ 라 하면

$$\begin{aligned}\vec{g} &= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \text{이므로} \\ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= (\vec{a} - \vec{g}) + (\vec{b} - \vec{g}) + (\vec{c} - \vec{g}) \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{g} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3 \times \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \vec{0}\end{aligned}$$

02-2 **답** $-2\vec{a} - \vec{b}$

점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= \vec{0} \text{에서 } \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = -\vec{a} - \vec{b} \\ \therefore \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA} = (-\vec{a} - \vec{b}) - \vec{a} = -2\vec{a} - \vec{b}\end{aligned}$$

02-3 **답** $\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$

점 P는 변 AB를 2:1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\vec{a}$$

변 BC의 중점을 M이라 하면

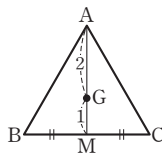
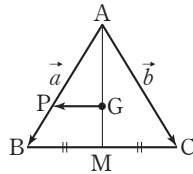
$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

무게중심 G는 선분 AM을 2:1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \times \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} - \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$$

참고 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 하면 무게중심 G는 선분 AM을 2:1로 내분하는 점이다.



03-1 **답** 변 BC를 5:3으로 내분하는 점

네 점 A, B, C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$ 라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{CA} \text{에서} \\ (\vec{a} - \vec{p}) + 3(\vec{b} - \vec{p}) + 4(\vec{c} - \vec{p}) &= \vec{a} - \vec{c} \\ 3\vec{b} + 5\vec{c} = 8\vec{p} \quad \therefore \vec{p} &= \frac{3\vec{b} + 5\vec{c}}{8} = \frac{5 \times \vec{c} + 3 \times \vec{b}}{5+3}\end{aligned}$$

따라서 점 P는 변 BC를 5:3으로 내분하는 점이다.

다른 풀이

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{CA} \text{에서} \\ \overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC} \\ \therefore 3\overrightarrow{PB} &= -5\overrightarrow{PC}\end{aligned}$$

따라서 점 P는 변 BC를 5:3으로 내분하는 점이다.

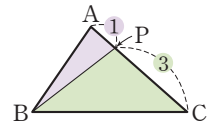
03-2 **답** 1:3

네 점 A, B, C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$ 라 하면

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{AB} \text{에서} \\ 2(\vec{a} - \vec{p}) + (\vec{b} - \vec{p}) + (\vec{c} - \vec{p}) &= \vec{b} - \vec{a} \\ 3\vec{a} + \vec{c} &= 4\vec{p} \\ \therefore \vec{p} &= \frac{3\vec{a} + \vec{c}}{4} \\ &= \frac{1 \times \vec{c} + 3 \times \vec{a}}{1+3}\end{aligned}$$

따라서 점 P는 변 AC를 1:3으로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned}\triangle ABP : \triangle BCP &= \overline{AP} : \overline{PC} \\ &= 1:3\end{aligned}$$

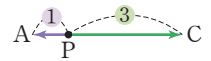


다른 풀이

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{AB} \text{에서} \\ 2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} \\ \therefore 3\overrightarrow{PA} &= -\overrightarrow{PC}\end{aligned}$$

따라서 점 P는 변 AC를 1:3으로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned}\triangle ABP : \triangle BCP &= \overline{AP} : \overline{PC} \\ &= 1:3\end{aligned}$$



2 평면벡터의 성분

개념 Check

153쪽

1 **답** (1) (-11, 14) (2) (6, -14)

문제

154~157쪽

04-1 **답** 성분: (-10, 15), 크기: $5\sqrt{13}$

$$\begin{aligned}2(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) - 3(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) \\ &= -\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c} \\ &= -(2, 1) - (3, -6) + 5(-1, 2) \\ &= (-10, 15) \\ \therefore |2(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) - 3(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})| &= \sqrt{(-10)^2 + 15^2} \\ &= 5\sqrt{13}\end{aligned}$$

04-2 ㉠ $\sqrt{17}$

$$\begin{aligned} 2(\vec{x}+\vec{a}) &= 3\vec{a}-\vec{b}+\vec{x} \text{에서} \\ 2\vec{x}+2\vec{a} &= 3\vec{a}-\vec{b}+\vec{x} \\ \therefore \vec{x} &= \vec{a}-\vec{b} = (4, 2) - (3, -2) = (1, 4) \\ \therefore |\vec{x}| &= \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

04-3 ㉠ $-\frac{9}{5}$

$$\begin{aligned} \vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} &= \left(\frac{1}{5}, k\right) + \frac{1}{5}(2, 5) = \left(\frac{3}{5}, k+1\right) \\ \text{이때 } \vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} &\text{가 단위벡터이므로 } \left|\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}\right| = 1 \\ \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + (k+1)^2} &= 1 \\ \text{양변을 제곱하면} \\ \frac{9}{25} + k^2 + 2k + 1 &= 1, \quad 25k^2 + 50k + 9 = 0 \\ (5k+9)(5k+1) &= 0 \quad \therefore k = -\frac{9}{5} \text{ 또는 } k = -\frac{1}{5} \\ \text{그런데 } k < -1 &\text{이므로 } k = -\frac{9}{5} \end{aligned}$$

05-1 ㉠ $\sqrt{10}$

$$\begin{aligned} \vec{a} = \vec{b} &\text{를 성분으로 나타내면} \\ (x-1, y+2) &= (2-y, 2x-1) \\ \text{두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여} \\ x-1 &= 2-y, \quad y+2 = 2x-1 \\ \therefore x+y &= 3, \quad 2x-y = 3 \\ \text{두 식을 연립하여 풀면 } x &= 2, \quad y = 1 \\ \text{따라서 } \vec{a} &= (1, 3) \text{이므로} \\ |\vec{a}| &= \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

05-2 ㉠ (1) $-6\vec{a}-4\vec{b}$ (2) $2\vec{a}+4\vec{b}$

$$\begin{aligned} (1) \vec{c} &= k\vec{a} + l\vec{b} \text{를 성분으로 나타내면} \\ (8, 6) &= k(-2, 1) + l(1, -3) \\ &= (-2k+l, k-3l) \\ \text{두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여} \\ 8 &= -2k+l, \quad 6 = k-3l \\ \text{두 식을 연립하여 풀면} \\ k &= -6, \quad l = -4 \quad \therefore \vec{c} = -6\vec{a} - 4\vec{b} \\ (2) \vec{d} &= k\vec{a} + l\vec{b} \text{를 성분으로 나타내면} \\ (0, -10) &= k(-2, 1) + l(1, -3) \\ &= (-2k+l, k-3l) \\ \text{두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여} \\ 0 &= -2k+l, \quad -10 = k-3l \\ \text{두 식을 연립하여 풀면} \\ k &= 2, \quad l = 4 \quad \therefore \vec{d} = 2\vec{a} + 4\vec{b} \end{aligned}$$

05-3 ㉠ $p=-2, q=4$

$$\begin{aligned} \vec{c} &= 2\vec{a} - \vec{b} \text{를 성분으로 나타내면} \\ (5, q) &= 2(-p, 3) - (-1, p+q) \\ &= (-2p+1, 6-p-q) \\ \text{두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여} \\ 5 &= -2p+1, \quad q = 6-p-q \\ \therefore p &= -2, \quad q = 4 \end{aligned}$$

06-1 ㉠ $-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} &\text{가 서로 평행하므로} \\ \vec{a} &= k\vec{b} \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)} \\ (2, 2x-1) &= k(x+1, 1) \\ &= (k(x+1), k) \\ \text{두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여} \\ 2 &= k(x+1), \quad 2x-1 = k \\ k &= 2x-1 \text{을 } 2 = k(x+1) \text{에 대입하면} \\ 2 &= (2x-1)(x+1), \quad 2x^2+x-3 = 0 \\ (2x+3)(x-1) &= 0 \\ \therefore x &= -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = 1 \\ \text{따라서 모든 } x &\text{의 값의 합은} \\ -\frac{3}{2} + 1 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

06-2 ㉠ 6

$$\begin{aligned} \text{두 벡터 } \vec{a}-\vec{b}, \vec{a}+\vec{b} &\text{를 각각 성분으로 나타내면} \\ \vec{a}-\vec{b} &= (3, t) - (2, 4) = (1, t-4) \\ \vec{a}+\vec{b} &= (3, t) + (2, 4) = (5, t+4) \\ \text{두 벡터 } \vec{a}-\vec{b}, \vec{a}+\vec{b} &\text{가 서로 평행하므로} \\ \vec{a}-\vec{b} &= k(\vec{a}+\vec{b}) \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)} \\ (1, t-4) &= k(5, t+4) \\ &= (5k, k(t+4)) \\ \text{두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여} \\ 1 &= 5k, \quad t-4 = k(t+4) \\ \therefore k &= \frac{1}{5}, \quad t = 6 \end{aligned}$$

06-3 ㉠ $-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{두 벡터 } \vec{a}+t\vec{c}, \vec{b}-\vec{a} &\text{를 각각 성분으로 나타내면} \\ \vec{a}+t\vec{c} &= (5, 4) + t(3, 7) = (5+3t, 4+7t) \\ \vec{b}-\vec{a} &= (-2, 3) - (5, 4) = (-7, -1) \\ \text{두 벡터 } \vec{a}+t\vec{c}, \vec{b}-\vec{a} &\text{가 서로 평행하려면} \\ \vec{a}+t\vec{c} &= k(\vec{b}-\vec{a}) \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)} \\ (5+3t, 4+7t) &= k(-7, -1) \\ &= (-7k, -k) \end{aligned}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$5+3t=-7k, 4+7t=-k$$

두 식을 연립하여 풀면

$$k=-\frac{1}{2}, t=-\frac{1}{2}$$

07-1 ㉠ (6, 4)

점 C의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\vec{OB}=(4, -1), \vec{AC}=(x-2, y-5)$$

$\vec{OB}=\vec{AC}$ 이므로

$$(4, -1)=(x-2, y-5)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$4=x-2, -1=y-5 \quad \therefore x=6, y=4$$

따라서 점 C의 좌표는 (6, 4)

07-2 ㉠ -2, 4

$\vec{AB}=(-2-x, x-4)$ 이고 $|\vec{AB}|=6$ 이므로

$$\sqrt{(-2-x)^2+(x-4)^2}=6$$

양변을 제곱하면

$$x^2+4x+4+x^2-8x+16=36$$

$$x^2-2x-8=0, (x+2)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=4$$

07-3 ㉠ (2, 2)

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\vec{AP}=(x+1, y-2), \vec{BP}=(x-4, y-3),$$

$$\vec{CP}=(x-3, y-1)$$

$$\therefore \vec{AP}+\vec{BP}+\vec{CP}$$

$$=(x+1, y-2)+(x-4, y-3)+(x-3, y-1)$$

$$=(3x-6, 3y-6)$$

$\vec{AP}+\vec{BP}+\vec{CP}=\vec{0}$ 이므로

$$(3x-6, 3y-6)=(0, 0)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$3x-6=0, 3y-6=0 \quad \therefore x=2, y=2$$

따라서 점 P의 좌표는 (2, 2)

07-4 ㉠ $x+y-2=0$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\vec{AP}=(x, y-1), \vec{BP}=(x-1, y-2)$$

$|\vec{AP}|=|\vec{BP}|$ 이므로

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

양변을 제곱하면

$$x^2+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2-4y+4$$

$$\therefore x+y-2=0$$

3 공간벡터의 성분

개념 Check

159쪽

1 (1) $(1, 2, -3)$ (2) $(-2, 0, 5)$

2 (1) $(13, -8, 11)$ (2) $(-3, 1, -11)$

3 (1) $\vec{AB}=(0, -4, 4), |\vec{AB}|=4\sqrt{2}$
 (2) $\vec{AB}=(-1, -2, -7), |\vec{AB}|=3\sqrt{6}$

문제

160~163쪽

08-1 ㉠ 성분: $(-10, 5, 7)$, 크기: $\sqrt{174}$

$$7\vec{a}+3(\vec{b}-2\vec{a})=\vec{a}+3\vec{b}$$

$$=(2, -1, 4)+3(-4, 2, 1)$$

$$=(-10, 5, 7)$$

$$\therefore |7\vec{a}+3(\vec{b}-2\vec{a})|=\sqrt{(-10)^2+5^2+7^2}=\sqrt{174}$$

08-2 ㉠ -7

$$3(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})-2(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$

$$=\vec{a}+5\vec{b}-\vec{c}$$

$$=(-4, 1, 2)+5(0, -1, 1)-(2, -1, 5)$$

$$=(-6, -3, 2)$$

따라서 구하는 벡터의 모든 성분의 합은

$$-6+(-3)+2=-7$$

08-3 ㉠ $2\sqrt{19}$

$$3(\vec{x}+\vec{b})=2(\vec{a}+2\vec{x})+\vec{b} \text{에서 } 3\vec{x}+3\vec{b}=2\vec{a}+4\vec{x}+\vec{b}$$

$$\therefore \vec{x}=-2\vec{a}+2\vec{b}=-2(3, -1, 6)+2(2, -4, 3)$$

$$=(-2, -6, -6)$$

$$\therefore |\vec{x}|=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2+(-6)^2}=2\sqrt{19}$$

09-1 ㉠ $x=-1, y=5$

$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ 를 성분으로 나타내면

$$(0, 3, -1)=x(5, 2, -4)+y(1, 1, -1)$$

$$=(5x+y, 2x+y, -4x-y)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$0=5x+y, 3=2x+y, -1=-4x-y$$

세 식 중 두 식을 연립하여 풀면 $x=-1, y=5$

09-2 ㉠ 8

$\vec{d}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ 를 성분으로 나타내면

$$(5, 2, -3)=l(1, 0, 1)+m(0, 1, 1)+n(1, 1, 0)$$

$$=(l+n, m+n, l+m)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$5=l+n, 2=m+n, -3=l+m \quad \dots \textcircled{7}$$

세 식을 변끼리 더하면

$$4=2(l+m+n) \quad \therefore l+m+n=2$$

①을 이 식에 각각 대입하여 풀면

$$l=0, m=-3, n=5$$

$$\therefore l-m+n=8$$

09-3 $\textcircled{\text{㉠}} \sqrt{59}$

$\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$ 를 성분으로 나타내면

$$\begin{aligned} (-6, 8, z+3) &= 2(x-2, 1, 5) - 3(4, y-1, 1) \\ &= (2x-16, -3y+5, 7) \end{aligned}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-6=2x-16, 8=-3y+5, z+3=7$$

$$\therefore x=5, y=-1, z=4$$

$$\text{따라서 } \vec{a}=(3, 1, 5), \vec{b}=(4, -2, 1), \vec{c}=(-6, 8, 7)$$

이므로

$$\begin{aligned} -\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} &= -(3, 1, 5) + (4, -2, 1) + (-6, 8, 7) \\ &= (-5, 5, 3) \end{aligned}$$

$$\therefore |-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{(-5)^2+5^2+3^2} = \sqrt{59}$$

10-1 $\textcircled{\text{㉠}} -\frac{1}{4}$

두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 서로 평행하므로

$$\vec{a}=k\vec{b} \quad (\text{단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

$$\begin{aligned} (-2, 5, 3) &= k(1, x-2, -5y+1) \\ &= (k, k(x-2), k(-5y+1)) \end{aligned}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-2=k, 5=k(x-2), 3=k(-5y+1)$$

$$k=-2 \text{를 } 5=k(x-2) \text{에 대입하면}$$

$$5=-2(x-2), 2x=-1 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}$$

$$k=-2 \text{를 } 3=k(-5y+1) \text{에 대입하면}$$

$$3=-2(-5y+1), 10y=5 \quad \therefore y=\frac{1}{2}$$

$$\therefore xy = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

10-2 $\textcircled{\text{㉠}} -\frac{7}{3}$

두 벡터 $t\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}+\vec{c}$ 를 각각 성분으로 나타내면

$$\begin{aligned} t\vec{a}-\vec{b} &= t(1, 1, -1) - (-1, -2, 0) \\ &= (t+1, t+2, -t) \end{aligned}$$

$$\vec{a}+\vec{c} = (1, 1, -1) + (3, 0, -6)$$

$$= (4, 1, -7)$$

두 벡터 $t\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}+\vec{c}$ 가 서로 평행하려면

$$t\vec{a}-\vec{b}=k(\vec{a}+\vec{c}) \quad (\text{단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

$$(t+1, t+2, -t) = k(4, 1, -7) = (4k, k, -7k)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$t+1=4k, t+2=k, -t=-7k$$

세 식 중 두 식을 연립하여 풀면

$$k = -\frac{1}{3}, t = -\frac{7}{3}$$

10-3 $\textcircled{\text{㉠}} m=8, n=4$

두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{c}$ 를 각각 성분으로 나타내면

$$\begin{aligned} \vec{a}+\vec{b} &= (1, 3, 2) + (-5, 1-m, n+6) \\ &= (-4, 4-m, n+8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}-\vec{c} &= (1, 3, 2) - (2, 4, -1) \\ &= (-1, -1, 3) \end{aligned}$$

두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{c}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{a}+\vec{b}=k(\vec{a}-\vec{c}) \quad (\text{단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

$$\begin{aligned} (-4, 4-m, n+8) &= k(-1, -1, 3) \\ &= (-k, -k, 3k) \end{aligned}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-4=-k, 4-m=-k, n+8=3k$$

$$\therefore k=4, m=8, n=4$$

11-1 $\textcircled{\text{㉠}} 5$

$$\overrightarrow{AB}=(6, -3, -3), \overrightarrow{CD}=(a-2, b+2, c-1)$$

$$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} (6, -3, -3) &= 3(a-2, b+2, c-1) \\ &= (3a-6, 3b+6, 3c-3) \end{aligned}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$6=3a-6, -3=3b+6, -3=3c-3$$

$$\therefore a=4, b=-3, c=0$$

따라서 $D(4, -3, 0)$ 이므로

$$|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{4^2+(-3)^2+0^2} = 5$$

11-2 $\textcircled{\text{㉠}} (2, 1, 3)$

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\overrightarrow{PA}=(4-x, -2-y, 5-z)$$

$$\overrightarrow{PB}=(-3-x, 7-y, -4-z)$$

$$\overrightarrow{CP}=(x-5, y+2, z-8)$$

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{CP} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} (4-x, -2-y, 5-z) &+ (-3-x, 7-y, -4-z) \\ &= (x-5, y+2, z-8) \end{aligned}$$

$$(1-2x, 5-2y, 1-2z) = (x-5, y+2, z-8)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$1-2x=x-5, 5-2y=y+2, 1-2z=z-8$$

$$\therefore x=2, y=1, z=3$$

따라서 점 P의 좌표는 $(2, 1, 3)$

11-3 ㉠ $x=3, y=-2$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$\vec{AC}=k\vec{AB}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)

$$\begin{aligned} \vec{AC} &= (-2, y-1, -4), \vec{AB} = (2, 3, x+1) \text{이므로} \\ (-2, y-1, -4) &= k(2, 3, x+1) \\ &= (2k, 3k, k(x+1)) \end{aligned}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-2=2k, y-1=3k, -4=k(x+1)$$

$$\therefore k=-1, x=3, y=-2$$

11-4 ㉠ $\frac{32}{3}\pi$

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\vec{PA} = (1-x, 2-y, -1-z)$$

$$\vec{PB} = (4-x, -1-y, 2-z)$$

$$\vec{PC} = (-2-x, 5-y, -1-z)$$

$$\therefore \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}$$

$$\begin{aligned} &= (1-x, 2-y, -1-z) + (4-x, -1-y, 2-z) \\ &\quad + (-2-x, 5-y, -1-z) \\ &= (3-3x, 6-3y, -3z) \end{aligned}$$

$$|\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}| = 6 \text{이므로}$$

$$\sqrt{(3-3x)^2 + (6-3y)^2 + (-3z)^2} = 6$$

양변을 제곱하면

$$9(x-1)^2 + 9(y-2)^2 + 9z^2 = 36$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $(1, 2, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구이므로 구하는 도형의 부피는

$$\frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi$$

연습문제

164~166쪽

- | | | | |
|--------------------------------|------|--|-----------------|
| 1 ⑤ | 2 ① | 3 $-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$ | 4 10 |
| 5 ② | 6 24 | 7 $2\sqrt{17}$ | 8 ④ |
| 9 $(\frac{9}{4}, \frac{7}{4})$ | 10 ② | 11 ① | 12 $(3, 6, -2)$ |
| 13 ③ | 14 ⑤ | 15 $(2, -1, 0)$ | 16 ④ |
| 17 $\frac{9}{7}$ | 18 ② | 19 2 | 20 30 |

1 점 M은 변 AB의 중점이므로 $\vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{BA}$

점 N은 선분 CM을 4:3으로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned} \vec{BN} &= \frac{4\vec{BM} + 3\vec{BC}}{4+3} = \frac{4}{7}\vec{BM} + \frac{3}{7}\vec{BC} \\ &= \frac{4}{7} \times \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{3}{7}\vec{BC} = \frac{2}{7}\vec{BA} + \frac{3}{7}\vec{BC} \end{aligned}$$

따라서 $m = \frac{2}{7}, n = \frac{3}{7}$ 이므로 $m+n = \frac{5}{7}$

2 점 A, B, C, D, E, F, G의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ 라 하면

$$\vec{d} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \vec{e} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \vec{f} = \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2}, \vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{DG} + \vec{EG} + \vec{FG} &= (\vec{g} - \vec{d}) + (\vec{g} - \vec{e}) + (\vec{g} - \vec{f}) \\ &= 3\vec{g} - (\vec{d} + \vec{e} + \vec{f}) \\ &= 3 \times \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} - \left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2} \right) \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0} \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} \vec{DG} + \vec{EG} + \vec{FG} &= -(\vec{GD} + \vec{GE} + \vec{GF}) \\ &= -\left(\frac{\vec{GA} + \vec{GB}}{2} + \frac{\vec{GB} + \vec{GC}}{2} + \frac{\vec{GC} + \vec{GA}}{2} \right) \\ &= -(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) = \vec{0} \end{aligned}$$

3 $\vec{AG}_1 = \frac{2}{3} \times \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$
 $\vec{AG}_2 = \frac{2}{3} \times \frac{\vec{AC} + \vec{AD}}{2} = \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$
 $\therefore \vec{G}_1\vec{G}_2 = \vec{AG}_2 - \vec{AG}_1 = \left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) - \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}\right)$
 $= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$

4 네 점 A, B, C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$ 라 하면

$$\vec{PA} + 2\vec{PB} + 3\vec{PC} = \vec{CA} \text{에서}$$

$$(\vec{a} - \vec{p}) + 2(\vec{b} - \vec{p}) + 3(\vec{c} - \vec{p}) = \vec{a} - \vec{c}$$

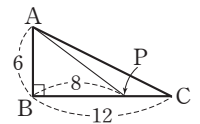
$$2\vec{b} + 4\vec{c} = 6\vec{p} \quad \therefore \vec{p} = \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3} = \frac{2 \times \vec{c} + 1 \times \vec{b}}{2+1}$$

즉, 점 P는 변 BC를 2:1로 내분하는 점이므로

$$\vec{PB} = \frac{2}{3}\vec{BC} = \frac{2}{3} \times 12 = 8$$

따라서 직각삼각형 ABP에서

$$|\vec{PA}| = PA = \sqrt{AB^2 + BP^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$



5 $(\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c})-(2\vec{c}-\vec{a})$
 $=2\vec{a}+3\vec{b}-3\vec{c}$
 $=2(2, 1)+3(-1, 3)-3(0, 4)$
 $= (1, -1)$
 $\therefore |(\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c})-(2\vec{c}-\vec{a})| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

6 $\vec{a}+\vec{b}=(4t-2, -1)+\left(2, 1+\frac{3}{t}\right)=\left(4t, \frac{3}{t}\right)$
 $\therefore |\vec{a}+\vec{b}|^2=(4t)^2+\left(\frac{3}{t}\right)^2=16t^2+\frac{9}{t^2}$
 $t^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $16t^2+\frac{9}{t^2}\geq 2\sqrt{16t^2\times\frac{9}{t^2}}=24$
 $\left(\text{단, 등호는 } 16t^2=\frac{9}{t^2}, \text{ 즉 } t=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{일 때 성립}\right)$
따라서 $|\vec{a}+\vec{b}|^2$ 의 최솟값은 24이다.

7 $\vec{a}=\vec{b}$ 를 성분으로 나타내면
 $(x+2, y-1)=(4-y, 2x-5)$
두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여
 $x+2=4-y, y-1=2x-5$
 $\therefore x+y=2, 2x-y=4$
두 식을 연립하여 풀면 $x=2, y=0$
따라서 $\vec{a}=\vec{b}=(4, -1)$ 이므로 $\vec{a}+\vec{b}=(8, -2)$
 $\therefore |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{8^2+(-2)^2} = 2\sqrt{17}$

8 두 벡터 $\vec{a}-\vec{b}, 2\vec{a}+\vec{b}$ 를 각각 성분으로 나타내면
 $\vec{a}-\vec{b}=(1, -2)-(3, t)=(-2, -2-t)$
 $2\vec{a}+\vec{b}=2(1, -2)+(3, t)=(5, -4+t)$
두 벡터 $\vec{a}-\vec{b}, 2\vec{a}+\vec{b}$ 가 서로 평행하므로
 $\vec{a}-\vec{b}=k(2\vec{a}+\vec{b})$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $(-2, -2-t)=k(5, -4+t)=(5k, k(-4+t))$
두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여
 $-2=5k, -2-t=k(-4+t) \quad \therefore k=-\frac{2}{5}, t=-6$

9 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
 $\vec{AP}=(x+1, y-2), \vec{BP}=(x-4, y-3),$
 $\vec{PC}=(3-x, 1-y)$
 $\vec{AP}+\vec{BP}=2\vec{PC}$ 이므로
 $(x+1, y-2)+(x-4, y-3)=2(3-x, 1-y)$
 $(2x-3, 2y-5)=(6-2x, 2-2y)$
두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여
 $2x-3=6-2x, 2y-5=2-2y$
 $\therefore x=\frac{9}{4}, y=\frac{7}{4}$
따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{9}{4}, \frac{7}{4}\right)$

10 직선 $y=-x+2$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, -a+2)$ 라 하면
 $\vec{AP}=(a, -a+1), \vec{BP}=(a-2, -a-1)$
 $\therefore \vec{AP}+\vec{BP}=(a, -a+1)+(a-2, -a-1)$
 $= (2a-2, -2a)$
 $\therefore |\vec{AP}+\vec{BP}| = \sqrt{(2a-2)^2+(-2a)^2}$
 $= \sqrt{8a^2-8a+4}$
 $= \sqrt{8\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$ 일 때 $|\vec{AP}+\vec{BP}|$ 의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

11 $|\vec{OP}-\vec{OA}| = |\vec{AB}|$ 에서 $|\vec{AP}| = |\vec{AB}|$
점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
 $\vec{AP}=(x-1, y-2), \vec{AB}=(4, 3)$ 이므로
 $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+3^2}$
양변을 제곱하면
 $(x-1)^2+(y-2)^2=25$
따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 A(1, 2)를 중심으로
하고 반지름의 길이가 5인 원이므로 구하는 도형의 길이는
 $2\pi \times 5 = 10\pi$

12 $3(\vec{a}+3\vec{x})+2\vec{a}=-2(5\vec{b}-2\vec{x})$ 에서
 $3\vec{a}+9\vec{x}+2\vec{a}=-10\vec{b}+4\vec{x}, 5\vec{x}=-5\vec{a}-10\vec{b}$
 $\therefore \vec{x}=-\vec{a}-2\vec{b}$
 $= -(1, 2, 0)-2(-2, -4, 1)$
 $= (3, 6, -2)$

13 $\vec{OA}=(1, 1, 0), \vec{OB}=(0, 1, 1), \vec{OC}=(1, 0, 1),$
 $\vec{OD}=(3, 4, 5)$ 이므로
 $\vec{OD}=l\vec{OA}+m\vec{OB}+n\vec{OC}$ 를 성분으로 나타내면
 $(3, 4, 5)=l(1, 1, 0)+m(0, 1, 1)+n(1, 0, 1)$
 $= (l+n, l+m, m+n)$
두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여
 $3=l+n, 4=l+m, 5=m+n$
세 식을 변끼리 더하면
 $12=2(l+m+n) \quad \therefore l+m+n=6$

14 $\vec{AB}=(3, -2, -2), \vec{CD}=(b+2, 4, a)$
 $\vec{AB}\parallel\vec{CD}$ 이므로
 $\vec{CD}=k\vec{AB}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $(b+2, 4, a)=k(3, -2, -2)=(3k, -2k, -2k)$
두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여
 $b+2=3k, 4=-2k, a=-2k$
따라서 $k=-2, a=4, b=-8$ 이므로 $a-b=12$

15 xy 평면 위의 점 P의 좌표를 $(x, y, 0)$ 이라 하면
 $\overrightarrow{PA}=(1-x, -1-y, 2), \overrightarrow{PB}=(3-x, 2-y, -2),$
 $\overrightarrow{PC}=(2-x, -4-y, 3)$
 $\therefore \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$
 $= (1-x, -1-y, 2) + (3-x, 2-y, -2)$
 $\qquad\qquad\qquad + (2-x, -4-y, 3)$
 $= (6-3x, -3-3y, 3)$
 $\therefore |\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$
 $= \sqrt{(6-3x)^2 + (-3-3y)^2 + 3^2}$
 $= 3\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + 1}$
 따라서 $x=2, y=-1$ 일 때 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$ 의 최솟값은 3이므로 구하는 점 P의 좌표는 $(2, -1, 0)$

16 구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$ 의 중심을 A라 하면
 $A(1, 2, 1)$
 $x^2+y^2+z^2+6x+2ay+2bz=0$ 에서
 $(x+3)^2+(y+a)^2+(z+b)^2=a^2+b^2+9$
 이 구의 중심을 B라 하면 $B(-3, -a, -b)$
 두 구가 원점 O에서 서로 접하면 세 점 O, A, B가 한 직선 위에 있으므로
 $\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $(-3, -a, -b)=k(1, 2, 1)=(k, 2k, k)$
 두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여
 $-3=k, -a=2k, -b=k$
 따라서 $k=-3, a=6, b=3$ 이므로
 $a+b=9$

17 점 D는 변 AB를 2:1로 내분하는 점이므로
 $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\vec{a}$
 점 E는 변 AC를 1:2로 내분하는 점이므로
 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AE}=3\vec{b}$
 세 점 B, P, E가 한 직선 위에 있으므로
 $\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{BE}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=k(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})$
 $\therefore \overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AE}+(1-k)\overrightarrow{AB}$
 $= \frac{3}{2}(1-k)\vec{a}+k\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 또 세 점 C, P, D가 한 직선 위에 있으므로
 $\overrightarrow{CP}=l\overrightarrow{CD}$ (단, l 은 0이 아닌 실수)
 $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=l(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})$
 $\therefore \overrightarrow{AP}=l\overrightarrow{AD}+(1-l)\overrightarrow{AC}$
 $= l\vec{a}+3(1-l)\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $\frac{3}{2}(1-k)\vec{a}+k\vec{b}=l\vec{a}+3(1-l)\vec{b}$

두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 는 서로 평행하지 않으므로
 $\frac{3}{2}(1-k)=l, k+3l=3$
 $\therefore 3k+2l=3, k+3l=3$
 두 식을 연립하여 풀면 $k=\frac{3}{7}, l=\frac{6}{7}$

따라서 $\overrightarrow{AP}=\frac{6}{7}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}$ 이므로
 $x=\frac{6}{7}, y=\frac{3}{7} \quad \therefore x+y=\frac{9}{7}$

다른 풀이

삼각형 ABE에서 점 P가 변 BE를 $m:(1-m)$ 으로 내분하는 점이라 하면

$$\overrightarrow{AP}=\frac{m\overrightarrow{AE}+(1-m)\overrightarrow{AB}}{m+(1-m)}=m\overrightarrow{AE}+(1-m)\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{3}{2}(1-m)\vec{a}+m\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 삼각형 ADC에서 점 P가 변 CD를 $n:(1-n)$ 으로 내분하는 점이라 하면

$$\overrightarrow{AP}=\frac{n\overrightarrow{AD}+(1-n)\overrightarrow{AC}}{n+(1-n)}=n\overrightarrow{AD}+(1-n)\overrightarrow{AC}$$

$$= n\vec{a}+3(1-n)\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{3}{2}(1-m)\vec{a}+m\vec{b}=n\vec{a}+3(1-n)\vec{b}$$

두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 는 서로 평행하지 않으므로
 $\frac{3}{2}(1-m)=n, m+3n=3$
 $\therefore 3m+2n=3, m+3n=3$
 두 식을 연립하여 풀면 $m=\frac{3}{7}, n=\frac{6}{7}$

따라서 $\overrightarrow{AP}=\frac{6}{7}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}$ 이므로
 $x=\frac{6}{7}, y=\frac{3}{7} \quad \therefore x+y=\frac{9}{7}$

18 $3\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ 에서 $3\overrightarrow{PA}=-3\overrightarrow{PB}-4\overrightarrow{PC}$
 $\therefore 3\overrightarrow{PA}=-7\times\frac{4\overrightarrow{PC}+3\overrightarrow{PB}}{7}$

이때 변 BC를 4:3으로 내분하는 점을 D라 하면

$$\overrightarrow{PD}=\frac{4\overrightarrow{PC}+3\overrightarrow{PB}}{7} \text{이므로 } 3\overrightarrow{PA}=-7\overrightarrow{PD}$$

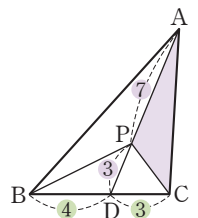
즉, 점 P는 선분 AD를 7:3으로 내분하는 점이다.

$$\therefore \triangle APC=\frac{7}{10}\triangle ADC$$

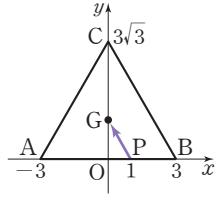
$$= \frac{7}{10} \times \frac{3}{7} \triangle ABC$$

$$= \frac{7}{10} \times \frac{3}{7} \times 90$$

$$= 27$$



19 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발이 원점, 두 직선 AB, CO가 각각 x축, y축이 되도록 정삼각형 ABC를 좌표평면에 놓으면



$A(-3, 0), B(3, 0)$

이때 정삼각형 ABC의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$ 이므로

$C(0, 3\sqrt{3})$

점 P는 변 AB를 2:1로 내분하는 점이므로

$$P\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times (-3)}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 0}{2+1}\right)$$

$\therefore P(1, 0)$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} = \sqrt{3} \text{이므로 } G(0, \sqrt{3})$$

$$\therefore \overrightarrow{PG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OP} = (0, \sqrt{3}) - (1, 0) = (-1, \sqrt{3})$$

$$\therefore |\overrightarrow{PG}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

다른 풀이

점 P는 변 AB를 2:1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

변 BC의 중점을 M이라 하면

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \times \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{PG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$\therefore |\overrightarrow{PG}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

20 선분 AP를 1:2로 내분하는 점을 Q라 하면

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OP}$$

이때 $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$,

$|\overrightarrow{OP}| = 3$ 으로 일정하므로 오른쪽

그림과 같이 $|\overrightarrow{OQ}|$ 의 값이 최대하려면 두 벡터 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}$ 의 방향이 같아야 한다.

$$\therefore |\overrightarrow{OQ}| \leq |\overrightarrow{OP}| + |\overrightarrow{PQ}|$$

$$= |\overrightarrow{OP}| + \frac{2}{3}|\overrightarrow{PA}|$$

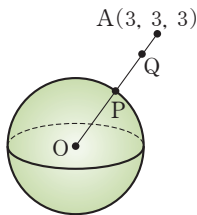
$$= 3 + \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 3)$$

$$= 1 + 2\sqrt{3}$$

따라서 $|\overrightarrow{OQ}|$ 의 최댓값은 $1 + 2\sqrt{3}$ 이므로

$a=1, b=2$

$$\therefore 10(a+b) = 30$$



III-2 02 벡터의 내적

|| 벡터의 내적

개념 Check

168쪽

1 답 (1) 4 (2) $-4\sqrt{2}$

2 답 (1) 10 (2) 4

문제

169~171쪽

01-1 답 (1) 2 (2) 3 (3) 0

(1) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos 60^\circ = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$

(2) 직각삼각형 OMA에서

$$\overrightarrow{OM} = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OM}| \cos 30^\circ$$

$$= 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

(3) $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{OM}| |\overrightarrow{AB}| \cos 90^\circ$

$$= \sqrt{3} \times 2 \times 0 = 0$$

01-2 답 -8

오른쪽 그림과 같이 정사면체의 면 OBC에서 $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{OC'}$,

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC'}$ 이 되도록 점 C'을 잡으면 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC'}$

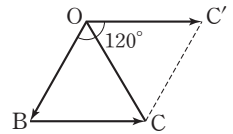
두 벡터 $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC'}$ 이 이루는 각의 크기가 120° 이고

$|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC'}| = 4$ 이므로

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC'}$$

$$= -|\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OC'}| \cos(180^\circ - 120^\circ)$$

$$= -4 \times 4 \times \frac{1}{2} = -8$$



02-1 답 (1) 5 (2) 2

(1) $\vec{a} + 3\vec{b}$ 를 성분으로 나타내면

$$\vec{a} + 3\vec{b} = (-5, 3, 2) + 3(1, -2, -1)$$

$$= (-2, -3, -1)$$

$$\therefore (\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot \vec{b} = (-2, -3, -1) \cdot (1, -2, -1)$$

$$= (-2) \times 1 + (-3) \times (-2)$$

$$+ (-1) \times (-1)$$

$$= 5$$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 를 k에 대한 식으로 나타내면

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, k-1) \cdot (-3, k+2)$$

$$= 2 \times (-3) + (k-1)(k+2)$$

$$= k^2 + k - 8$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= -2 \text{이므로} \\ k^2 + k - 8 &= -2, k^2 + k - 6 = 0 \\ (k+3)(k-2) &= 0 \\ \therefore k &= -3 \text{ 또는 } k = 2 \\ \text{그런데 } k > 0 \text{이므로 } k &= 2 \end{aligned}$$

02-2 ㉡ 3

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (-3, 2) - (-1, 3) = (-2, -1) \\ \overrightarrow{CD} &= (0, -2) - (-1, 3) = (1, -5) \\ \therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= (-2, -1) \cdot (1, -5) \\ &= (-2) \times 1 + (-1) \times (-5) = 3 \end{aligned}$$

02-3 ㉡ 12

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= 7 \text{이므로 } \sqrt{(k-2)^2 + (-3)^2 + (k+2)^2} = 7 \\ \text{양변을 제곱하면} \\ k^2 - 4k + 4 + 9 + k^2 + 4k + 4 &= 49 \\ k^2 &= 16 \quad \therefore k = \pm 4 \\ \text{그런데 } k < 0 \text{이므로 } k &= -4 \\ \text{따라서 } \vec{a} &= (-6, -3, -2), \vec{b} = (3, -8, -3) \text{이므로} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= (-6, -3, -2) \cdot (3, -8, -3) \\ &= (-6) \times 3 + (-3) \times (-8) + (-2) \times (-3) = 12 \end{aligned}$$

03-1 ㉡ (1) $\sqrt{29}$ (2) -3

$$\begin{aligned} (1) |2\vec{a} - \vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ |\vec{a}| &= 3, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \text{이므로} \\ |2\vec{a} - \vec{b}|^2 &= 4 \times 3^2 - 4 \times 2 + 1^2 = 29 \\ \text{그런데 } |2\vec{a} - \vec{b}| \geq 0 \text{이므로 } |2\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{29} \\ (2) |\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{7} \text{의 양변을 제곱하면} \\ |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 7 \\ |\vec{a}| &= \sqrt{5}, |\vec{b}| = 2\sqrt{2} \text{이므로} \\ (\sqrt{5})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (2\sqrt{2})^2 &= 7 \\ 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= -6 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \end{aligned}$$

03-2 ㉡ $\sqrt{7}$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - 3\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 \\ \text{두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} \text{가 이루는 각의 크기가 } 60^\circ \text{이고} \\ |\vec{a}| &= 3, |\vec{b}| = \frac{1}{3} \text{이므로} \\ |\vec{a} - 3\vec{b}|^2 &= 3^2 - 6 \times 3 \times \frac{1}{3} \times \cos 60^\circ + 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 7 \\ \text{그런데 } |\vec{a} - 3\vec{b}| \geq 0 \text{이므로 } |\vec{a} - 3\vec{b}| &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

03-3 ㉡ 65

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}| &= 4 \text{의 양변을 제곱하면} \\ |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 16 \quad \dots \textcircled{㉠} \\ |\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{10} \text{의 양변을 제곱하면} \\ |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 10 \quad \dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} \text{을 하면} \\ 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) &= 26 \quad \therefore |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 13 \\ \therefore |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 + |2\vec{a} - \vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 5(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) = 5 \times 13 = 65 \end{aligned}$$

2 두 벡터가 이루는 각의 크기

개념 Check

172쪽

1 ㉡ (1) 30° (2) 120°

$$\begin{aligned} (1) \vec{a} \cdot \vec{b} &= (\sqrt{3}, 1) \cdot (1, 0) = \sqrt{3} \times 1 + 1 \times 0 = \sqrt{3} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \text{이므로 두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} \text{가 이루는 각의 크기를} \\ \theta (0^\circ \leq \theta < 90^\circ) \text{라 하면} \\ \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore \theta &= 30^\circ \\ (2) \vec{a} \cdot \vec{b} &= (2, -1, 1) \cdot (-1, 2, 1) \\ &= 2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 1 \times 1 = -3 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \text{이므로 두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} \text{가 이루는 각의 크기를} \\ \theta (90^\circ < \theta \leq 180^\circ) \text{라 하면} \\ \cos(180^\circ - \theta) &= -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= -\frac{-3}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} \\ &= \frac{1}{2} \\ \text{따라서 } 180^\circ - \theta &= 60^\circ \text{이므로 } \theta = 120^\circ \end{aligned}$$

2 ㉡ (1) $\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} (1) \text{ 두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} \text{가 서로 수직이면} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \text{이므로} \\ (1, k) \cdot (-2, 3) &= 0, -2 + 3k = 0 \\ \therefore k &= \frac{2}{3} \\ (2) \text{ 두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} \text{가 서로 평행하면} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \pm |\vec{a}| |\vec{b}| \text{이므로} \\ (1, 2, -4) \cdot (k+1, 1, -2) \\ &= \pm \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2} \sqrt{(k+1)^2 + 1^2 + (-2)^2} \\ k+1 &= \pm \sqrt{21} \sqrt{k^2 + 2k + 6} \\ \text{양변을 제곱하여 정리하면} \\ 4k^2 + 4k + 1 &= 0, (2k+1)^2 = 0 \\ \therefore k &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

04-1 ㉞ (1) 60° (2) 2

$$\begin{aligned} (1) \quad & -\vec{a}-\vec{b} = -(1, \sqrt{3}) - (0, -\sqrt{3}) = (-1, 0) \\ & -\vec{a}-2\vec{b} = -(1, \sqrt{3}) - 2(0, -\sqrt{3}) = (-1, \sqrt{3}) \\ & \therefore (-\vec{a}-\vec{b}) \cdot (-\vec{a}-2\vec{b}) = (-1, 0) \cdot (-1, \sqrt{3}) \\ & \quad = (-1) \times (-1) + 0 \times \sqrt{3} \\ & \quad = 1 \\ & (-\vec{a}-\vec{b}) \cdot (-\vec{a}-2\vec{b}) > 0 \text{이므로 두 벡터 } -\vec{a}-\vec{b}, \\ & -\vec{a}-2\vec{b} \text{가 이루는 각의 크기를 } \theta (0^\circ \leq \theta < 90^\circ) \text{라 하면} \\ \cos \theta &= \frac{(-\vec{a}-\vec{b}) \cdot (-\vec{a}-2\vec{b})}{|-\vec{a}-\vec{b}| |-\vec{a}-2\vec{b}|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+0^2} \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= 60^\circ \end{aligned}$$

(2) 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 135° 이므로

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - 135^\circ) &= -\frac{(-1) \times 1 + 1 \times (-2) + 0 \times k}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2} \sqrt{1^2+(-2)^2+k^2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} &= -\frac{-3}{\sqrt{2} \sqrt{k^2+5}}, \sqrt{k^2+5} = 3 \\ \text{양변을 제곱하면} & \\ k^2+5=9, k^2=4 & \quad \therefore k=2 (\because k>0) \end{aligned}$$

05-1 ㉞ 150°

$$\begin{aligned} |\vec{a}-2\vec{b}| &= \sqrt{13} \text{의 양변을 제곱하면} \\ |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 &= 13 \\ |\vec{a}| &= \sqrt{3}, |\vec{b}| = 1 \text{이므로} \\ (\sqrt{3})^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \times 1^2 &= 13 \\ -4\vec{a} \cdot \vec{b} &= 6 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \text{이므로 두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} \text{가 이루는 각의 크기를} & \\ \theta (90^\circ < \theta \leq 180^\circ) \text{라 하면} & \\ \cos(180^\circ - \theta) &= -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = -\frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{따라서 } 180^\circ - \theta = 30^\circ \text{이므로 } \theta &= 150^\circ \end{aligned}$$

05-2 ㉞ 90°

$$\begin{aligned} |4\vec{a}+\vec{b}| &= |4\vec{a}-\vec{b}| \text{의 양변을 제곱하면} \\ 16|\vec{a}|^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 16|\vec{a}|^2 - 8\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ 16\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0 \text{이므로 두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} \text{가 이루는 각의 크기를} & \\ \theta (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ) \text{라 하면} & \\ \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = 0 \\ \therefore \theta &= 90^\circ \end{aligned}$$

05-3 ㉞ 45°

$$\begin{aligned} \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} &= \vec{0} \text{에서 } \vec{a}+\vec{b} = -\vec{c} \\ \text{즉, } |\vec{a}+\vec{b}| &= |-\vec{c}| \text{이므로 양변을 제곱하면} \\ |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= |\vec{c}|^2 \\ |\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 6\sqrt{2}, |\vec{c}| = 6\sqrt{5} \text{이므로} & \\ 6^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (6\sqrt{2})^2 &= (6\sqrt{5})^2 \\ 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= 72 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 36 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \text{이므로 두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} \text{가 이루는 각의 크기를} & \\ \theta (0^\circ \leq \theta < 90^\circ) \text{라 하면} & \\ \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{36}{6 \times 6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \therefore \theta &= 45^\circ \end{aligned}$$

06-1 ㉞ $x=-9, y=-3$

$$\begin{aligned} \text{두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} \text{가 서로 평행하면 } \vec{a} \cdot \vec{b} &= \pm |\vec{a}| |\vec{b}| \text{이므로} \\ (x, 6, 3) \cdot (-6, 4, 2) & \\ = \pm \sqrt{x^2+6^2+3^2} \sqrt{(-6)^2+4^2+2^2} & \\ -6x+30 &= \pm 2\sqrt{14} \sqrt{x^2+45} \\ \text{양변을 제곱하여 정리하면} & \\ x^2+18x+81=0, (x+9)^2=0 & \quad \therefore x=-9 \\ \text{두 벡터 } \vec{b}, \vec{c} \text{가 서로 수직이면 } \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \text{이므로} \\ (-6, 4, 2) \cdot (-2, y, 0) &= 0 \\ 12+4y=0 & \quad \therefore y=-3 \end{aligned}$$

06-2 ㉞ 풀이 참조

$$\begin{aligned} \vec{BC} &= \vec{OC} - \vec{OB} = \vec{c} - \vec{b} \\ \text{이때 } |\vec{a}| &= |\vec{b}| = |\vec{c}| \text{이고} \\ \angle AOC &= \angle AOB = 60^\circ \text{이므로} \\ \vec{OA} \cdot \vec{BC} &= \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}| |\vec{c}| \cos 60^\circ - |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} |\vec{a}|^2 - \frac{1}{2} |\vec{a}|^2 = 0 \\ \therefore \vec{OA} &\perp \vec{BC} \end{aligned}$$

따라서 두 모서리 OA, BC는 서로 수직이다.

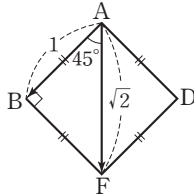
연습문제

1 ④	2 ②	3 1	4 14	5 6
6 4	7 15	8 ②	9 ③	10 $\frac{11}{16}$
11 ④	12 135°	13 $\frac{3}{5}$	14 5	15 60°
16 ②	17 -1	18 7	19 12	20 ⑤
21 ③				

1 삼각형 ABP는 $\angle BPA=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로
 $AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$
 두 벡터 \vec{AB} , \vec{AP} 가 이루는 각의 크기를 $\theta (0^\circ < \theta < 90^\circ)$
 라 하면 직각삼각형 ABP에서
 $\cos \theta = \frac{AP}{AB} = \frac{4}{5}$
 $\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AP} = |\vec{AB}| |\vec{AP}| \cos \theta = 10 \times 8 \times \frac{4}{5} = 64$

2 두 벡터 \vec{BA} , \vec{BC} 가 이루는 각의 크기를 $\theta (0^\circ < \theta < 90^\circ)$
 라 하면 직각삼각형 ABH에서
 $|\vec{BA}| \cos \theta = |\vec{BH}|$
 $\therefore \vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| |\vec{BC}| \cos \theta = |\vec{BC}| |\vec{BA}| \cos \theta$
 $= |\vec{BC}| |\vec{BH}| = 7 \times 4 = 28$

3 오른쪽 그림과 같이 사각형 ABFD
 는 정사각형이므로 두 벡터 \vec{AB} ,
 \vec{AF} 가 이루는 각의 크기가 45° 이고
 $|\vec{AB}| = 1$, $|\vec{AF}| = \sqrt{2}$
 $\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AF} = |\vec{AB}| |\vec{AF}| \cos 45^\circ$
 $= 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$



4 $\vec{a} + \vec{b} = (3, -2) + (-2, 5) = (1, 3)$
 $\vec{b} + \vec{c} = (-2, 5) + (-2, 1) = (-4, 6)$
 $\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (1, 3) \cdot (-4, 6)$
 $= 1 \times (-4) + 3 \times 6 = 14$

5 $\vec{AC} = (7, 0, 2) - (x, -2, 1) = (7-x, 2, 1)$
 $\vec{BD} = (1, x+2, 0) - (4, 1, -1) = (-3, x+1, 1)$
 $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 12$ 이므로
 $(7-x, 2, 1) \cdot (-3, x+1, 1) = 12$
 $-3(7-x) + 2(x+1) + 1 \times 1 = 12$
 $5x = 30 \quad \therefore x = 6$

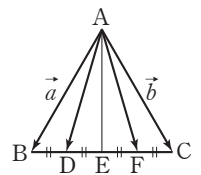
6 $|\vec{a}| = 2\sqrt{10}$ 이므로
 $\sqrt{6^2 + (3k-4)^2} = 2\sqrt{10}$
 양변을 제곱하면
 $36 + 9k^2 - 24k + 16 = 40, 3k^2 - 8k + 4 = 0$
 $(3k-2)(k-2) = 0 \quad \therefore k = \frac{2}{3} \text{ 또는 } k = 2$
 그런데 k 는 정수이므로 $k = 2$
 따라서 $\vec{a} = (6, 2)$, $\vec{b} = (-1, 5)$ 이므로
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (6, 2) \cdot (-1, 5) = 6 \times (-1) + 2 \times 5 = 4$

7 포물선 $y^2 = 12x$ 의 초점 F의 좌표는 (3, 0)
 점 P의 좌표를 $(a, 2\sqrt{3a}) (a \geq 0)$ 라 하면
 $\vec{AP} = (a, 2\sqrt{3a}) - (5, 0) = (a-5, 2\sqrt{3a})$
 $\vec{FP} = (a, 2\sqrt{3a}) - (3, 0) = (a-3, 2\sqrt{3a})$
 $\therefore \vec{AP} \cdot \vec{FP} = (a-5, 2\sqrt{3a}) \cdot (a-3, 2\sqrt{3a})$
 $= (a-5)(a-3) + 2\sqrt{3a} \times 2\sqrt{3a}$
 $= a^2 + 4a + 15$
 $= (a+2)^2 + 11$
 그런데 $a \geq 0$ 이므로 $a = 0$ 일 때 $\vec{AP} \cdot \vec{FP}$ 의 최솟값은 15
 이다.

8 $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{17}$ 의 양변을 제곱하면
 $4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 17$
 $|\vec{a}| = \sqrt{11}$, $|\vec{b}| = 3$ 이므로
 $4 \times (\sqrt{11})^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 3^2 = 17$
 $4\vec{a} \cdot \vec{b} = 36 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 9$
 $\therefore |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$
 $= (\sqrt{11})^2 - 2 \times 9 + 3^2 = 2$
 그런데 $|\vec{a} - \vec{b}| \geq 0$ 이므로 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2}$

9 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 가 이루는 각의 크기는 60° 이고 $|\vec{a}| = 2$,
 $|\vec{b}| = 2$ 이므로
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$
 $\therefore |2\vec{a} + 3\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2$
 $= 4 \times 2^2 + 12 \times 2 + 9 \times 2^2 = 76$
 그런데 $|2\vec{a} + 3\vec{b}| \geq 0$ 이므로 $|2\vec{a} + 3\vec{b}| = 2\sqrt{19}$

10 오른쪽 그림과 같이 $\vec{AB} = \vec{a}$,
 $\vec{AC} = \vec{b}$ 라 하면 점 D는 변 BC를
 1:3으로 내분하는 점이므로
 $\vec{AD} = \frac{\vec{b} + 3\vec{a}}{1+3} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$



점 F는 변 BC를 3:1로 내분하는 점이므로
 $\vec{AF} = \frac{3\vec{b} + \vec{a}}{3+1} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$
 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 60° 이고
 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ 이므로
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 $\therefore \vec{AD} \cdot \vec{AF} = \left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right)$
 $= \frac{3}{16}|\vec{a}|^2 + \frac{5}{8}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{3}{16}|\vec{b}|^2$
 $= \frac{3}{16} \times 1^2 + \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{16} \times 1^2 = \frac{11}{16}$

11 $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ 이므로 $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 4$ 에서
 $|\vec{AB} + (\vec{AB} + \vec{BC})| = 4$
 $\therefore |2\vec{AB} + \vec{BC}| = 4$

양변을 제곱하면

$$4|\vec{AB}|^2 + 4\vec{AB} \cdot \vec{BC} + |\vec{BC}|^2 = 16$$

$$|\vec{AB}| = 1, \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \text{이므로}$$

$$4 \times 1^2 + 4 \times 0 + |\vec{BC}|^2 = 16$$

$$|\vec{BC}|^2 = 12$$

$$\text{그런데 } |\vec{BC}| \geq 0 \text{이므로 } |\vec{BC}| = 2\sqrt{3}$$

다른 풀이

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \text{이므로 } \vec{AB} \perp \vec{BC}$$

오른쪽 그림과 같이 $\angle ABC = 90^\circ$ 인 직각 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 M이라 하면

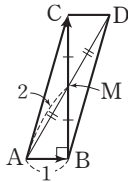
$$|\vec{AB} + \vec{AC}| = 4 \text{이므로}$$

$$2|\vec{AM}| = 4 \quad \therefore |\vec{AM}| = 2$$

직각삼각형 ABM에서 $|\vec{AB}| = 1$ 이므로

$$|\vec{BM}| = \sqrt{|\vec{AM}|^2 - |\vec{AB}|^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore |\vec{BC}| = 2|\vec{BM}| = 2\sqrt{3}$$



12 $\vec{a} + 2\vec{b} = \left(\frac{1}{2}, -1\right) + 2\left(\frac{3}{4}, 1\right) = (2, 1)$

$$\vec{a} - 2\vec{b} = \left(\frac{1}{2}, -1\right) - 2\left(\frac{3}{4}, 1\right) = (-1, -3)$$

$$\therefore (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = (2, 1) \cdot (-1, -3)$$

$$= 2 \times (-1) + 1 \times (-3) = -5$$

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) < 0 \text{이므로 두 벡터 } \vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b} \text{가}$$

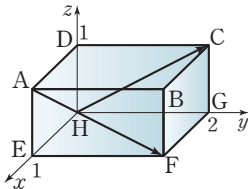
이루는 각의 크기를 $\theta (90^\circ < \theta \leq 180^\circ)$ 라 하면

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\frac{(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})}{|\vec{a} + 2\vec{b}| |\vec{a} - 2\vec{b}|}$$

$$= -\frac{-5}{\sqrt{2^2 + 1^2} \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $180^\circ - \theta = 45^\circ$ 이므로 $\theta = 135^\circ$

13 오른쪽 그림과 같이 점 H가 원점, 세 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축 위에 있도록 직육면체를 좌표공간에 놓으면



$$A(1, 0, 1), C(0, 2, 1), F(1, 2, 0)$$

$$\therefore \vec{AF} = (1, 2, 0) - (1, 0, 1) = (0, 2, -1),$$

$$\vec{HC} = (0, 2, 1)$$

$$\therefore \vec{AF} \cdot \vec{HC} = (0, 2, -1) \cdot (0, 2, 1)$$

$$= 0 \times 0 + 2 \times 2 + (-1) \times 1 = 3$$

$$\vec{AF} \cdot \vec{HC} > 0 \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{AF} \cdot \vec{HC}}{|\vec{AF}| |\vec{HC}|}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{3}{5}$$

14 (가)에서 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

(나)에서 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0$ 이므로

$$4|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$$

$$\therefore |\vec{b}| = 2|\vec{a}| \quad (\because |\vec{a}| > 0, |\vec{b}| > 0)$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2 \times 0 + (2|\vec{a}|)^2 = 5|\vec{a}|^2$$

$$\therefore |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5}|\vec{a}|$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 > 0 \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}| \times \sqrt{5}|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore 25 \cos^2 \theta = 25 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 5$$

15 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 60° 이고 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1^2 + 2 \times \frac{1}{2} + 1^2 = 3$$

그런데 $|\vec{a} + \vec{b}| \geq 0$ 이므로 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$

$$|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4 \times 1^2 - 4 \times \frac{1}{2} + 1^2 = 3$$

그런데 $|2\vec{a} - \vec{b}| \geq 0$ 이므로 $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2$$

$$= 2 \times 1^2 + \frac{1}{2} - 1^2 = \frac{3}{2}$$

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) > 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 $\theta (0^\circ \leq \theta < 90^\circ)$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| |2\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

16 두 벡터 $\vec{a}, \vec{a} - t\vec{b}$ 가 서로 수직이 되려면

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} - t\vec{b}) = 0 \text{이어야 하므로 } |\vec{a}|^2 - t\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$|\vec{a}| = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \text{이므로}$$

$$2^2 - t \times 2 = 0 \quad \therefore t = 2$$

17 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 이면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 이므로

$$(3, -2, 2) \cdot (x, y, 3) = 0$$

$$\therefore 3x - 2y + 6 = 0 \quad \dots \ominus$$

$\vec{b} \parallel \vec{c}$ 이면 $\vec{c} = k\vec{b}$ (k 는 0이 아닌 실수)이므로
 $(2x, -6, z) = k(x, y, 3) = (kx, ky, 3k)$
 $2x = kx, -6 = ky, z = 3k$
 $\therefore k = 2, y = -3, z = 6$ ($\because x \neq 0$)
 $y = -3$ 을 ㉠에 대입하면
 $3x - 2 \times (-3) + 6 = 0 \quad \therefore x = -4$
 $\therefore x + y + z = -4 + (-3) + 6 = -1$

18 오른쪽 그림과 같이 두 벡터 \vec{PA} ,

\vec{PB} 가 이루는 각의 크기를

θ ($90^\circ < \theta \leq 180^\circ$)라 하면

직각삼각형 PBH에서

$$|\vec{PB}| \cos(180^\circ - \theta) = |\vec{PH}|$$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{PA} \cdot \vec{PB}| &= |-\vec{PA}| |\vec{PB}| \cos(180^\circ - \theta) \\ &= |-\vec{PA}| |\vec{PH}| = |\vec{PA}| |\vec{PH}| \end{aligned}$$

두 벡터 \vec{PA}, \vec{PH} 가 영벡터가 아닐 때, $|\vec{PA}| > 0$,
 $|\vec{PH}| > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$|\vec{PA}| + |\vec{PH}| \geq 2\sqrt{|\vec{PA}| |\vec{PH}|}$$

이때 $|\vec{PA}| + |\vec{PH}| = |\vec{AH}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$ 이므로

$$\sqrt{3} \geq 2\sqrt{|\vec{PA}| |\vec{PH}|}$$

$$\therefore \sqrt{|\vec{PA}| |\vec{PH}|} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(단, 등호는 $|\vec{PA}| = |\vec{PH}|$ 일 때 성립)

양변을 제곱하면 $|\vec{PA}| |\vec{PH}| \leq \frac{3}{4}$

따라서 $|\vec{PA} \cdot \vec{PB}|$ 의 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이므로

$$p = 4, q = 3 \quad \therefore p + q = 7$$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 점 H가 원점,
 두 직선 BC, AH가 각각 x 축, y
 축이 되도록 정삼각형 ABC를 좌
 표평면에 놓으면

$$A(0, \sqrt{3}), B(-1, 0), C(1, 0)$$

점 P는 선분 AH 위의 점이므로 점 P의 좌표를
 $(0, y)$ ($0 \leq y \leq \sqrt{3}$)라 하면

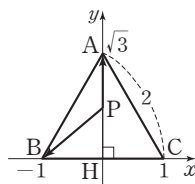
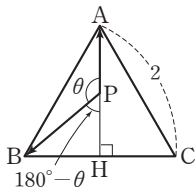
$$\vec{PA} = (0, \sqrt{3}) - (0, y) = (0, \sqrt{3} - y)$$

$$\vec{PB} = (-1, 0) - (0, y) = (-1, -y)$$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{PA} \cdot \vec{PB}| &= |(0, \sqrt{3} - y) \cdot (-1, -y)| \\ &= |y^2 - \sqrt{3}y| = \left| \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \right| \end{aligned}$$

$0 \leq y \leq \sqrt{3}$ 에서 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때 $|\vec{PA} \cdot \vec{PB}|$ 의 최댓값은 $\frac{3}{4}$
 이다.

따라서 $p = 4, q = 3$ 이므로 $p + q = 7$



19 오른쪽 그림과 같이 점 H가 원
 점, 세 모서리 HE, HG, HD가
 각각 x 축, y 축, z 축 위에 있도록
 직육면체를 좌표공간에 놓으면

$$A(4, 0, 8), B(4, 4, 8),$$

$$D(0, 0, 8), E(4, 0, 0),$$

$$F(4, 4, 0), G(0, 4, 0)$$

점 P는 모서리 AE를 1:3으로 내분하는 점이므로

$$P(4, 0, 6)$$

세 점 Q, R, S는 각각 모서리 AB, AD, FG의 중점이므로

$$Q(4, 2, 8), R(2, 0, 8), S(2, 4, 0)$$

점 T는 선분 QR의 중점이므로 $T(3, 1, 8)$

$$\therefore \vec{TP} = (4, 0, 6) - (3, 1, 8) = (1, -1, -2),$$

$$\vec{QS} = (2, 4, 0) - (4, 2, 8) = (-2, 2, -8)$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{TP} \cdot \vec{QS} &= (1, -1, -2) \cdot (-2, 2, -8) \\ &= 1 \times (-2) + (-1) \times 2 + (-2) \times (-8) \\ &= 12 \end{aligned}$$

20 $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AD} = \vec{b}$ 라 하면

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$|\vec{AC}| = 15 \text{이므로 } |\vec{a} + \vec{b}| = 15$$

양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 225 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$|\vec{BD}| = 9 \text{이므로 } |\vec{b} - \vec{a}| = 9$$

양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 81 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면 } 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 144 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 36$$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 36$$

21 $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b}$ 라 하면

$$\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{a}, \vec{AE} = \frac{3}{4}\vec{b}, \vec{AF} = \frac{1}{4}\vec{b} \text{이므로}$$

$$\vec{BF} = \vec{AF} - \vec{AB} = \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{a}$$

$$\vec{DE} = \vec{AE} - \vec{AD} = \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$$

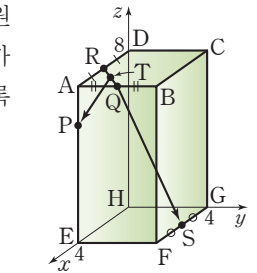
$$\therefore \vec{BF} + \vec{DE} = \left(\frac{1}{4}\vec{b} - \vec{a}\right) + \left(\frac{3}{4}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}\right) = -\frac{5}{3}\vec{a} + \vec{b}$$

두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 60° 이고 $|\vec{a}| = 3$,

$|\vec{b}| = 3$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 3 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{BF} + \vec{DE}|^2 &= \left| -\frac{5}{3}\vec{a} + \vec{b} \right|^2 \\ &= \frac{25}{9}|\vec{a}|^2 - \frac{10}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= \frac{25}{9} \times 3^2 - \frac{10}{3} \times \frac{9}{2} + 3^2 = 19 \end{aligned}$$



III-3 01 직선의 방정식

직선의 방정식

개념 Check

182쪽

- 1 답 (1) $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{6}$ (2) $x=1$ (3) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3}$
- 2 답 (1) $\frac{x-1}{-2} = y-2 = \frac{z-3}{2}$
 (2) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-2}, z=-2$
 (3) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{5}$

문제

183~184쪽

01-1 답 (1) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{3}$ (2) $\frac{x+5}{-2} = y = \frac{z-1}{4}$

(1) 직선 $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3}$ 의 방향벡터는 (4, 3)
 따라서 점 (2, 4)를 지나고 방향벡터가 (4, 3)인 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{3}$$

(2) 직선 $\frac{3-x}{2} = y-1 = \frac{z+2}{4}$ 의 방향벡터는 (-2, 1, 4)
 따라서 점 (-5, 0, 1)을 지나고 방향벡터가 (-2, 1, 4)인 직선의 방정식은

$$\frac{x+5}{-2} = y = \frac{z-1}{4}$$

01-2 답 -1

직선 $\frac{x-1}{2} = 2-y$ 의 방향벡터는 (2, -1)

즉, 점 (3, -2)를 지나고 방향벡터가 (2, -1)인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-1}$$

이 직선이 점 (1, a)를 지나므로

$$\frac{1-3}{2} = \frac{a+2}{-1} \quad \therefore a = -1$$

01-3 답 (6, 0, 5)

직선 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2}, z=2$ 의 방향벡터는 (3, -2, 0)

즉, 점 (3, 2, 5)를 지나고 방향벡터가 (3, -2, 0)인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-2}, z=5$$

$y=0$ 을 대입하면

$$\frac{x-3}{3} = \frac{0-2}{-2}, z=5 \quad \therefore x=6, z=5$$

따라서 구하는 점의 좌표는 (6, 0, 5)

02-1 답 (1) $\frac{x-5}{-4} = \frac{y+2}{5}$ (2) $x-2 = \frac{z-5}{3}, y=4$

(1) 두 점 A(5, -2), B(1, 3)을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\vec{AB} = (1, 3) - (5, -2) = (-4, 5)$$

따라서 점 A(5, -2)를 지나고 방향벡터가

$$\vec{AB} = (-4, 5) \text{인 직선의 방정식은}$$

$$\frac{x-5}{-4} = \frac{y+2}{5}$$

(2) 두 점 A(2, 4, 5), B(3, 4, 8)을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\vec{AB} = (3, 4, 8) - (2, 4, 5) = (1, 0, 3)$$

따라서 점 A(2, 4, 5)를 지나고 방향벡터가

$$\vec{AB} = (1, 0, 3) \text{인 직선의 방정식은}$$

$$x-2 = \frac{z-5}{3}, y=4$$

02-2 답 3

두 점 A(3, -1), B(4, -2)를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\vec{AB} = (4, -2) - (3, -1) = (1, -1)$$

즉, 점 (1, 2)를 지나고 방향벡터가 $\vec{AB} = (1, -1)$ 인 직선의 방정식은

$$x-1 = \frac{y-2}{-1}$$

$x=0$ 을 대입하면

$$0-1 = \frac{y-2}{-1} \quad \therefore y=3$$

따라서 구하는 y 절편은 3이다.

02-3 답 $(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}, 0)$

두 점 A(1, 4, -2), B(2, -3, 6)을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\vec{AB} = (2, -3, 6) - (1, 4, -2) = (1, -7, 8)$$

즉, 점 A(1, 4, -2)를 지나고 방향벡터가

$$\vec{AB} = (1, -7, 8) \text{인 직선의 방정식은}$$

$$x-1 = \frac{y-4}{-7} = \frac{z+2}{8}$$

$z=0$ 을 대입하면

$$x-1 = \frac{y-4}{-7} = \frac{0+2}{8}$$

$$x-1 = \frac{1}{4} \text{에서 } x = \frac{5}{4}, \frac{y-4}{-7} = \frac{1}{4} \text{에서 } y = \frac{9}{4}$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}, 0)$

2 두 직선이 이루는 각의 크기

문제

186~187쪽

03-1 ㉠ (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{5}{14}$

(1) 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면

$$\vec{u}=(1, -1), \vec{v}=(1, -7)$$

두 직선이 이루는 각의 크기가 θ 이므로

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|1 \times 1 + (-1) \times (-7)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + (-7)^2}} = \frac{4}{5}$$

(2) 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면

$$\vec{u}=(3, 2, -1), \vec{v}=(1, -3, 2)$$

두 직선이 이루는 각의 크기가 θ 이므로

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|3 \times 1 + 2 \times (-3) + (-1) \times 2|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{5}{14} \end{aligned}$$

03-2 ㉠ 60°

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면

$$\vec{u}=(1, 2, 3), \vec{v}=(-3, 1, -2)$$

두 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|1 \times (-3) + 2 \times 1 + 3 \times (-2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

03-3 ㉠ $-\sqrt{3}$

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면

$$\vec{u}=(3, -\sqrt{3}), \vec{v}=(a, 3)$$

두 직선이 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} &= \cos 30^\circ \\ \frac{|3 \times a + (-\sqrt{3}) \times 3|}{\sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} \sqrt{a^2 + 3^2}} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{|3a - 3\sqrt{3}|}{2\sqrt{3}\sqrt{a^2 + 9}} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{|3a - 3\sqrt{3}|}{\sqrt{a^2 + 9}} = 3 \\ |a - \sqrt{3}| &= \sqrt{a^2 + 9} \end{aligned}$$

양변을 제곱하면

$$a^2 - 2\sqrt{3}a + 3 = a^2 + 9$$

$$-2\sqrt{3}a = 6 \quad \therefore a = -\sqrt{3}$$

04-1 ㉠ (1) 평행할 때 $k = \frac{5}{2}$, 수직일 때 $k = -\frac{8}{5}$

(2) 평행할 때 $k = -6$, 수직일 때 $k = 3$

(1) 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면

$$\vec{u}=(2, k), \vec{v}=(4, 5)$$

두 직선이 서로 평행하면 $\vec{u} \parallel \vec{v}$ 이므로

$$\vec{u} = t\vec{v} \quad (\text{단, } t \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

$$(2, k) = t(4, 5) = (4t, 5t)$$

$$2 = 4t, k = 5t \quad \therefore t = \frac{1}{2}, k = \frac{5}{2}$$

두 직선이 서로 수직이면 $\vec{u} \perp \vec{v}$ 이므로

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$(2, k) \cdot (4, 5) = 0$$

$$2 \times 4 + k \times 5 = 0$$

$$5k + 8 = 0 \quad \therefore k = -\frac{8}{5}$$

(2) 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면

$$\vec{u}=(3, k, -3), \vec{v}=(-1, 2, 1)$$

두 직선이 서로 평행하면 $\vec{u} \parallel \vec{v}$ 이므로

$$\vec{u} = t\vec{v} \quad (\text{단, } t \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

$$(3, k, -3) = t(-1, 2, 1) = (-t, 2t, t)$$

$$3 = -t, k = 2t, -3 = t \quad \therefore t = -3, k = -6$$

두 직선이 서로 수직이면 $\vec{u} \perp \vec{v}$ 이므로

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$(3, k, -3) \cdot (-1, 2, 1) = 0$$

$$3 \times (-1) + k \times 2 + (-3) \times 1 = 0$$

$$2k - 6 = 0 \quad \therefore k = 3$$

04-2 ㉠ $\frac{1}{2}$

두 점 $A(a, 2), B(-2, a)$ 를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB} = (-2, a) - (a, 2) = (-a-2, a-2)$$

직선 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-5}$ 의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면

$$\vec{u} = (3, -5)$$

두 직선이 서로 수직이면 $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u}$ 이므로

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(-a-2, a-2) \cdot (3, -5) = 0$$

$$(-a-2) \times 3 + (a-2) \times (-5) = 0$$

$$-8a + 4 = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

연습문제

188~189쪽

1 ④ 2 $\frac{x-3}{2} = -y-1$ 3 ② 4 5

5 $\frac{\sqrt{10}}{3}$ 6 ② 7 ① 8 45° 9 ②

10 $\sqrt{5}$ 11 $\frac{x-3}{-5} = y-2 = \frac{z-1}{-7}$

12 $\frac{x-3}{2} = 1-y = \frac{z-4}{3}$ 13 ①

- 1 직선 $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{6}$ 의 방향벡터는 (2, 3, 6)
 즉, 점 (1, 2, -3)을 지나고 방향벡터가 (2, 3, 6)인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{6}$$
 이 직선이 점 (3, a, b)를 지나므로

$$\frac{3-1}{2} = \frac{a-2}{3} = \frac{b+3}{6}$$

$$\frac{a-2}{3} = 1 \text{에서 } a=5, \frac{b+3}{6} = 1 \text{에서 } b=3$$

$$\therefore a+b=8$$
- 2 $x-2 = \frac{y-1}{-2}$ 에서 $2x+y=5$ ㉠
 $\frac{x+1}{4} = -y$ 에서 $x+4y=-1$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $x=3, y=-1$
 즉, 두 직선의 교점의 좌표는 (3, -1)
 직선 $\frac{x+2}{2} = 3-y$ 의 방향벡터는 (2, -1)
 따라서 점 (3, -1)을 지나고 방향벡터가 (2, -1)인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{2} = -y-1$$
- 3 점 (4, -10)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (-1, 2)$ 인 직선의 방정식은
 $4-x = \frac{y+10}{2}$ ㉠
 $y=0$ 을 ㉠에 대입하면
 $4-x = \frac{0+10}{2} \therefore x=-1$
 $\therefore A(-1, 0)$
 $x=0$ 을 ㉠에 대입하면
 $4-0 = \frac{y+10}{2} \therefore y=-2$
 $\therefore B(0, -2)$
 따라서 삼각형 OAB의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$
- 4 두 점 A(3, 4), B(5, 1)을 지나고 직선의 방향벡터는 $\vec{AB} = (5, 1) - (3, 4) = (2, -3)$
 즉, 점 (1, 3)을 지나고 방향벡터가 $\vec{AB} = (2, -3)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3}$$
 이 직선이 점 (a, -3)을 지나므로

$$\frac{a-1}{2} = \frac{-3-3}{-3} \therefore a=5$$

- 5 두 점 A(-2, 1, -3), B(3, -2, 3)을 지나고 직선의 방향벡터는

$$\vec{AB} = (3, -2, 3) - (-2, 1, -3) = (5, -3, 6)$$
 즉, 점 A(-2, 1, -3)을 지나고 방향벡터가 $\vec{AB} = (5, -3, 6)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{6}$$
 $y=0$ 을 대입하면

$$\frac{x+2}{5} = \frac{0-1}{-3} = \frac{z+3}{6}$$
 $\frac{x+2}{5} = \frac{1}{3}$ 에서 $x = -\frac{1}{3}, \frac{z+3}{6} = \frac{1}{3}$ 에서 $z = -1$
 $\therefore P\left(-\frac{1}{3}, 0, -1\right)$
 따라서 선분 OP의 길이는

$$\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$
- 6 두 직선 $\frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{3}, x-1 = \frac{2-y}{3}$ 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면
 $\vec{u} = (4, 3), \vec{v} = (1, -3)$
 두 직선이 이루는 예각의 크기가 θ 이므로

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|4 \times 1 + 3 \times (-3)|}{\sqrt{4^2 + 3^2} \sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$
- 7 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면
 $\vec{u} = (a, a+1, a-1), \vec{v} = (-3, -1, 2)$
 두 직선이 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \cos 60^\circ$$

$$\frac{|a \times (-3) + (a+1) \times (-1) + (a-1) \times 2|}{\sqrt{a^2 + (a+1)^2 + (a-1)^2} \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{|-2a-3|}{\sqrt{3a^2+2}\sqrt{14}} = \frac{1}{2}$$

$$2|-2a-3| = \sqrt{3a^2+2}\sqrt{14}$$
 양변을 제곱하면 $4(-2a-3)^2 = 14(3a^2+2)$
 $13a^2 - 24a - 4 = 0, (13a+2)(a-2) = 0$
 $\therefore a = -\frac{2}{13}$ 또는 $a = 2$
 그런데 a는 정수이므로 $a = 2$
- 8 선분 AC의 중점 M의 좌표는
 $\left(\frac{3-1}{2}, \frac{2+6}{2}\right) \therefore (1, 4)$
 두 직선 AC, BM의 방향벡터는 각각
 $\vec{AC} = (-1, 6) - (3, 2) = (-4, 4)$
 $\vec{BM} = (1, 4) - (4, 4) = (-3, 0)$

두 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BM}|} \\ &= \frac{|(-4) \times (-3) + 4 \times 0|}{\sqrt{(-4)^2 + 4^2} \sqrt{(-3)^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \therefore \theta &= 45^\circ \end{aligned}$$

9 세 직선 l, m, n 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ 이라 하면

$$\vec{u}_1 = (3, 2), \vec{u}_2 = (6, a), \vec{u}_3 = (-b, 3)$$

두 직선 l, m 이 서로 평행하면 $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$ 이므로

$$\vec{u}_1 = t\vec{u}_2 \quad (\text{단, } t \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

$$(3, 2) = t(6, a) = (6t, at)$$

$$3 = 6t, 2 = at \quad \therefore t = \frac{1}{2}, a = 4$$

두 직선 l, n 이 서로 수직이면 $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_3$ 이므로

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0$$

$$(3, 2) \cdot (-b, 3) = 0$$

$$3 \times (-b) + 2 \times 3 = 0, -3b + 6 = 0 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a + b = 4 + 2 = 6$$

10 점 H의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 H는 직선 l 위의 점이므로

$$2(a+3) = -(b-1)$$

$$\therefore 2a + b = -5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{AH} = (a, b) - (2, 1) = (a-2, b-1)$$

이때 직선 $l: 2(x+3) = -(y-1)$, 즉 $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{2}$ 의

방향벡터를 \vec{u} 라 하면

$$\vec{u} = (-1, 2)$$

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \text{이므로 } \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(a-2, b-1) \cdot (-1, 2) = 0$$

$$(a-2) \times (-1) + (b-1) \times 2 = 0$$

$$\therefore a - 2b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -2, b = -1$$

$$\therefore H(-2, -1)$$

따라서 $\overrightarrow{OH} = (-2, -1)$ 이므로

$$|\overrightarrow{OH}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

11 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}_1, \vec{u}_2 라 하면

$$\vec{u}_1 = (3, 1, -2), \vec{u}_2 = (-1, 2, 1)$$

이때 구하는 직선을 n 이라 하고 직선 n 의 방향벡터를

$$\vec{u}_3 = (a, b, c) \text{라 하자.}$$

두 직선 l, n 이 서로 수직이면 $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_3$ 이므로

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0$$

$$(3, 1, -2) \cdot (a, b, c) = 0$$

$$\therefore 3a + b - 2c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 직선 m, n 이 서로 수직이면 $\vec{u}_2 \perp \vec{u}_3$ 이므로

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0$$

$$(-1, 2, 1) \cdot (a, b, c) = 0$$

$$\therefore -a + 2b + c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 2$ 를 하면

$$a + 5b = 0 \quad \therefore a = -5b$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 3$ 을 하면

$$7b + c = 0 \quad \therefore c = -7b$$

$$\therefore \vec{u}_3 = (-5b, b, -7b)$$

따라서 점 $(3, 2, 1)$ 을 지나고 방향벡터가

$(-5b, b, -7b)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{-5b} = \frac{y-2}{b} = \frac{z-1}{-7b} \quad \therefore \frac{x-3}{-5} = y-2 = \frac{z-1}{-7}$$

12 $\frac{x+3}{4} = \frac{4-y}{2} = \frac{z+2}{3} = t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x = 4t - 3, y = -2t + 4, z = 3t - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x - 2 = \frac{y-4}{2} = \frac{z-4}{3} = s$ (s 는 실수)로 놓으면

$$x = s + 2, y = 2s + 4, z = 3s + 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$4t - 3 = s + 2, -2t + 4 = 2s + 4, 3t - 2 = 3s + 4$$

세 식 중 두 식을 연립하여 풀면 $t = 1, s = -1$

$t = 1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면 $x = 1, y = 2, z = 1$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는 $(1, 2, 1)$ 이므로 두 점

$(1, 2, 1), (3, 1, 4)$ 를 지나고 방향벡터는

$$(3, 1, 4) - (1, 2, 1) = (2, -1, 3)$$

따라서 점 $(3, 1, 4)$ 를 지나고 방향벡터가 $(2, -1, 3)$ 인

직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{2} = 1-y = \frac{z-4}{3}$$

13 점 A(1, 7)에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H(a, b)라 하면 점 H는 직선 l 위의 점이므로

$$\frac{a+3}{3} = \frac{b}{2} \quad \therefore 2a - 3b = -6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{AH} = (a, b) - (1, 7) = (a-1, b-7)$$

이때 직선 l 의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면 $\vec{u} = (3, 2)$

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \text{이므로 } \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(a-1, b-7) \cdot (3, 2) = 0$$

$$(a-1) \times 3 + (b-7) \times 2 = 0$$

$$\therefore 3a + 2b = 17 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 3, b = 4$

$$\therefore H(3, 4)$$

따라서 정삼각형 ABC의 무게중심은 선분 AH를 2 : 1로

내분하는 점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 7}{2+1} \right) \quad \therefore \left(\frac{7}{3}, 5 \right)$$

III-3 02 평면과 구의 방정식

평면의 방정식

개념 Check

191쪽

- 1 답 (1) $2x-3y+4z-8=0$
 (2) $x+2y-z+3=0$
- 2 답 (1) $x-2y+3z+7=0$
 (2) $y=-1$

문제

192~195쪽

01-1 답 $2x+5z+8=0$

직선 $\frac{x+1}{2}=\frac{z-3}{5}$, $y=2$ 의 방향벡터는 $(2, 0, 5)$

이때 직선의 방향벡터는 평면의 법선벡터가 되므로 평면의 법선벡터는

$(2, 0, 5)$

따라서 점 $(1, 3, -2)$ 를 지나고 법선벡터가 $(2, 0, 5)$ 인 평면의 방정식은

$$2(x-1)+5(z+2)=0$$

$$\therefore 2x+5z+8=0$$

01-2 답 $3x-y+2z-1=0$

두 점 $A(-2, 1, 4)$, $B(1, 0, 6)$ 을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB}=(1, 0, 6)-(-2, 1, 4)=(3, -1, 2)$$

이때 직선의 방향벡터는 평면의 법선벡터가 되므로 평면의 법선벡터는

$(3, -1, 2)$

따라서 점 $A(-2, 1, 4)$ 를 지나고 법선벡터가 $(3, -1, 2)$ 인 평면의 방정식은

$$3(x+2)-(y-1)+2(z-4)=0$$

$$\therefore 3x-y+2z-1=0$$

01-3 답 6

$$\overrightarrow{AH}=(-1, 3, 0)-(1, 2, 3)=(-2, 1, -3)$$

이때 벡터 \overrightarrow{AH} 는 주어진 평면에 수직이고 점 H는 주어진 평면 위의 점이다.

즉, 평면의 법선벡터는 $(-2, 1, -3)$

따라서 점 $H(-1, 3, 0)$ 을 지나고 법선벡터가

$(-2, 1, -3)$ 인 평면의 방정식은

$$-2(x+1)+(y-3)-3z=0$$

$$\therefore 2x-y+3z+5=0$$

따라서 $a=2, b=-1, c=3$ 이므로

$$a-b+c=6$$

02-1 답 $x+2y-3z+6=0$

구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 이라 하자.

점 $A(0, 0, 2)$ 를 지나므로

$$2c+d=0 \quad \therefore c=-\frac{d}{2} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

점 $B(-6, 0, 0)$ 을 지나므로

$$-6a+d=0 \quad \therefore a=\frac{d}{6} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

점 $C(0, -3, 0)$ 을 지나므로

$$-3b+d=0 \quad \therefore b=\frac{d}{3} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면

$$\frac{d}{6}x+\frac{d}{3}y-\frac{d}{2}z+d=0$$

이때 $d \neq 0$ 이므로 구하는 평면의 방정식은

$$x+2y-3z+6=0$$

02-2 답 $(0, -2, 0)$

세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을

$ax+by+cz+d=0$ 이라 하자.

점 $A(1, 0, 0)$ 을 지나므로

$$a+d=0 \quad \therefore a=-d \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

점 $B(0, 0, 2)$ 를 지나므로

$$2c+d=0 \quad \therefore c=-\frac{d}{2} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

점 $C(0, -1, 1)$ 을 지나므로

$$-b+c+d=0 \quad \therefore b=c+d=\frac{d}{2} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면

$$-dx+\frac{d}{2}y-\frac{d}{2}z+d=0$$

이때 $d \neq 0$ 이므로 평면의 방정식은 $2x-y+z-2=0$

이 식에 $x=0, z=0$ 을 대입하면

$$2 \times 0 - y + 0 - 2 = 0 \quad \therefore y = -2$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(0, -2, 0)$

02-3 답 0

세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을

$ax+by+cz+d=0$ 이라 하자.

점 $A(2, 0, 0)$ 을 지나므로

$$2a+d=0 \quad \therefore a=-\frac{d}{2} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

점 $B(0, 4, 0)$ 을 지나므로

$$4b+d=0 \quad \therefore b=-\frac{d}{4} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

점 C(0, 0, 3)을 지나므로

$$3c+d=0 \quad \therefore c=-\frac{d}{3} \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

①, ②, ③을 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면

$$-\frac{d}{2}x - \frac{d}{4}y - \frac{d}{3}z + d = 0$$

이때 $d \neq 0$ 이므로 평면의 방정식은

$$6x+3y+4z-12=0$$

점 D(1, 2, k)가 이 평면 위의 점이므로

$$6 \times 1 + 3 \times 2 + 4k - 12 = 0 \quad \therefore k=0$$

03-1 ㉠ (2, -1, 1)

$$\frac{x-3}{2} = y + \frac{1}{2} = \frac{z-3}{4} = k \text{ (k는 실수)로 놓으면}$$

$$x=2k+3, y=k-\frac{1}{2}, z=4k+3 \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

①을 $x+2y-3z+3=0$ 에 대입하면

$$(2k+3) + 2\left(k-\frac{1}{2}\right) - 3(4k+3) + 3 = 0$$

$$-8k-4=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}$$

이를 ①에 대입하면

$$x=2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 2, y=-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1,$$

$$z=4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 1$$

따라서 구하는 교점의 좌표는 (2, -1, 1)

03-2 ㉠ 2

벡터 \vec{AH} 는 주어진 평면에 수직이므로 평면의 법선벡터는 두 점 A, H를 지나는 직선의 방향벡터가 된다.

이때 평면 $3x+2y-z+7=0$ 의 법선벡터는 (3, 2, -1)

이므로 두 점 A, H를 지나는 직선의 방향벡터는 (3, 2, -1)

즉, 점 A(4, -1, 3)을 지나고 방향벡터가 (3, 2, -1)인 직선의 방정식은

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-1}$$

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-1} = k \text{ (k는 실수)로 놓으면}$$

$$x=3k+4, y=2k-1, z=-k+3$$

H(3k+4, 2k-1, -k+3)이라 하면

점 H는 평면 $3x+2y-z+7=0$ 위의 점이므로

$$3(3k+4) + 2(2k-1) - (-k+3) + 7 = 0$$

$$14k+14=0 \quad \therefore k=-1$$

즉, 점 H의 좌표는

$$(3 \times (-1) + 4, 2 \times (-1) - 1, -(-1) + 3)$$

$$\therefore (1, -3, 4)$$

따라서 $a=1, b=-3, c=4$ 이므로 $a+b+c=2$

03-3 ㉠ $\sqrt{6}$

점 A(1, -2, 3)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(1, 2, -1)$ 인 직선의 방정식은

$$x-1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1}$$

$$x-1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1} = k \text{ (k는 실수)로 놓으면}$$

$$x=k+1, y=2k-2, z=-k+3 \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

①을 $2x-y-2z=0$ 에 대입하면

$$2(k+1) - (2k-2) - 2(-k+3) = 0$$

$$2k-2=0 \quad \therefore k=1$$

이를 ①에 대입하면

$$x=1+1=2, y=2 \times 1 - 2 = 0, z=-1+3=2$$

따라서 B(2, 0, 2)이므로

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(2-1)^2 + 2^2 + (2-3)^2} = \sqrt{6}$$

04-1 ㉠ $\frac{x-6}{-2} = y+1 = z$

두 평면의 방정식을 연립하여 x를 소거하면

$$-7y+7z=7 \quad \therefore z=y+1 \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

두 평면의 방정식을 연립하여 y를 소거하면

$$7x+14z=42 \quad \therefore z = \frac{x-6}{-2} \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

①, ②에서 구하는 교선의 방정식은

$$\frac{x-6}{-2} = y+1 = z$$

04-2 ㉠ -3

두 평면의 방정식을 연립하여 y를 소거하면

$$5x+z-6=0 \quad \therefore x = \frac{z-6}{-5} \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

두 평면의 방정식을 연립하여 z를 소거하면

$$2x-y-2=0 \quad \therefore x = \frac{y+2}{2} \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

①, ②에서 교선의 방정식은

$$x = \frac{y+2}{2} = \frac{z-6}{-5}$$

따라서 이 교선의 방향벡터는 $\vec{u}=(1, 2, -5)$ 이므로

$$a=2, b=-5 \quad \therefore a+b=-3$$

다른 풀이

두 평면 $3x+y+z-4=0, x+2y+z-2=0$ 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면

$$\vec{n}_1=(3, 1, 1), \vec{n}_2=(1, 2, 1)$$

두 평면의 교선의 방향벡터 $\vec{u}=(1, a, b)$ 는 두 평면의 법선벡터에 모두 수직이므로 $\vec{n}_1 \perp \vec{u}, \vec{n}_2 \perp \vec{u}$ 에서

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{u} = 0, \vec{n}_2 \cdot \vec{u} = 0$$

$$(3, 1, 1) \cdot (1, a, b) = 0, (1, 2, 1) \cdot (1, a, b) = 0$$

$$\therefore 3+a+b=0, 1+2a+b=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=-5$

$$\therefore a+b=-3$$

04-3 **답** $2x-y-z+5=0$

두 평면의 방정식을 연립하여 x 를 소거하면

$$y-z=-2 \quad \therefore y=z-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 평면의 방정식을 연립하여 z 를 소거하면

$$x+2y=-1 \quad \therefore y=\frac{x+1}{-2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 교선의 방정식은

$$\frac{x+1}{-2}=y=z-2$$

이 교선의 방향벡터는 $(-2, 1, 1)$ 이므로 이 교선에 수직인 평면의 법선벡터는

$$(-2, 1, 1)$$

따라서 점 $(-2, 0, 1)$ 을 지나고 법선벡터가 $(-2, 1, 1)$ 인 평면의 방정식은

$$-2(x+2)+y+(z-1)=0$$

$$\therefore 2x-y-z+5=0$$

2 두 평면이 이루는 각의 크기

문제

197~199쪽

05-1 **답** $\frac{1}{6}$

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면

$$\vec{n}_1=(2, -1, -1), \vec{n}_2=(1, 2, 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos\theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|2 \times 1 + (-1) \times 2 + (-1) \times 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

05-2 **답** 45°

주어진 세 점을 지나는 평면의 방정식을

$$ax+by+cz+d=0 \text{이라 하자.}$$

점 $(0, 0, 3)$ 을 지나므로

$$3c+d=0 \quad \therefore c=-\frac{d}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(1, 0, 5)$ 를 지나므로

$$a+5c+d=0 \quad \therefore a=-5c-d=\frac{2}{3}d \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

점 $(0, 1, 1)$ 을 지나므로

$$b+c+d=0 \quad \therefore b=-c-d=-\frac{2}{3}d \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면

$$\frac{2}{3}dx - \frac{2}{3}dy - \frac{d}{3}z + d = 0$$

이때 $d \neq 0$ 이므로 평면의 방정식은

$$2x-2y-z+3=0$$

두 평면 $2x-2y-z+3=0, x-4y+z-6=0$ 의 법선벡터

를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면

$$\vec{n}_1=(2, -2, -1), \vec{n}_2=(1, -4, 1)$$

두 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|2 \times 1 + (-2) \times (-4) + (-1) \times 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \therefore \theta &= 45^\circ \end{aligned}$$

05-3 **답** 2

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면

$$\vec{n}_1=(1, 1, k), \vec{n}_2=(k, -1, 1)$$

두 평면이 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ \frac{1}{2} &= \frac{|1 \times k + 1 \times (-1) + k \times 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + k^2} \sqrt{k^2 + (-1)^2 + 1^2}} \\ \frac{1}{2} &= \frac{2k-1}{k^2+2} \quad (\because k > \frac{1}{2}) \\ k^2+2 &= 2(2k-1), \quad k^2-4k+4=0 \\ (k-2)^2 &= 0 \quad \therefore k=2 \end{aligned}$$

06-1 **답** (1) 3 (2) $-\frac{3}{2}$

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면

$$\vec{n}_1=(k-2, 5, 1), \vec{n}_2=(1, k+2, 1)$$

(1) $\alpha \parallel \beta$ 이면 $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ 이므로

$$\vec{n}_1=t\vec{n}_2 \text{ (단, } t \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

$$(k-2, 5, 1)=t(1, k+2, 1)=(t, kt+2t, t)$$

$$k-2=t, 5=kt+2t, 1=t$$

$$\therefore t=1, k=3$$

(2) $\alpha \perp \beta$ 이면 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ 이므로

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$(k-2, 5, 1) \cdot (1, k+2, 1) = 0$$

$$(k-2) \times 1 + 5(k+2) + 1 \times 1 = 0$$

$$6k+9=0 \quad \therefore k=-\frac{3}{2}$$

06-2 **답** -6

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면

$$\vec{n}_1=(2, a, 6), \vec{n}_2=(1, -1, b)$$

두 평면 α, β 가 서로 평행하면 $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ 이므로
 $\vec{n}_1 = t\vec{n}_2$ (단, t 는 0이 아닌 실수)
 $(2, a, 6) = t(1, -1, b) = (t, -t, bt)$
 $2 = t, a = -t, 6 = bt \quad \therefore t = 2, a = -2, b = 3$
 $\therefore ab = -6$

06-3 ㉠ $5x + y + 3z - 6 = 0$

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면
 $\vec{n}_1 = (2, -1, -3), \vec{n}_2 = (5, 2, -9)$
 구하는 평면의 법선벡터를 $\vec{n} = (a, b, c)$ 라 하면
 $\vec{n} \perp \vec{n}_1, \vec{n} \perp \vec{n}_2$ 이므로
 $\vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0$ 에서
 $(a, b, c) \cdot (2, -1, -3) = 0$
 $\therefore 2a - b - 3c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 $\vec{n} \cdot \vec{n}_2 = 0$ 에서
 $(a, b, c) \cdot (5, 2, -9) = 0$
 $\therefore 5a + 2b - 9c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서
 $b = \frac{a}{5}, c = \frac{3}{5}a$
 $\therefore \vec{n} = \left(a, \frac{a}{5}, \frac{3}{5}a\right)$
 따라서 점 $(1, -2, 1)$ 을 지나고 법선벡터가
 $\left(a, \frac{a}{5}, \frac{3}{5}a\right)$ 인 평면의 방정식은
 $a(x-1) + \frac{a}{5}(y+2) + \frac{3}{5}a(z-1) = 0$
 $\therefore 5x + y + 3z - 6 = 0 \quad (\because a \neq 0)$

07-1 ㉠ 30°

직선의 방향벡터를 \vec{u} , 평면의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면
 $\vec{u} = (1, 2, -1), \vec{n} = (2, 1, 1)$
 직선과 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 두 벡터 \vec{u}, \vec{n}
 이 이루는 각의 크기는 $90^\circ - \theta$ 이므로
 $\cos(90^\circ - \theta) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|}$
 $= \frac{|1 \times 2 + 2 \times 1 + (-1) \times 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$
 따라서 $90^\circ - \theta = 60^\circ$ 이므로 $\theta = 30^\circ$

07-2 ㉠ 4

직선의 방향벡터를 \vec{u} , 평면의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면
 $\vec{u} = (1, 2, -2), \vec{n} = (1, -a, 1)$
 직선과 평면이 이루는 각의 크기가 45° 이면 두 벡터 \vec{u}, \vec{n}
 이 이루는 각의 크기는 $90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ 이므로
 $\cos 45^\circ = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1 \times 1 + 2 \times (-a) + (-2) \times 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + (-a)^2 + 1^2}}$$

$$3\sqrt{2(a^2 + 2)} = 2|-2a - 1|$$

양변을 제곱하면

$$9 \times 2(a^2 + 2) = 4(-2a - 1)^2$$

$$a^2 - 8a + 16 = 0, (a - 4)^2 = 0$$

$$\therefore a = 4$$

07-3 ㉠ 1

직선의 방향벡터를 \vec{u} , 평면의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면
 $\vec{u} = (1, a, 2), \vec{n} = (2, -6, b)$
 직선과 평면이 서로 수직이면 $\vec{u} \parallel \vec{n}$ 이므로
 $\vec{u} = t\vec{n}$ (단, t 는 0이 아닌 실수)
 $(1, a, 2) = t(2, -6, b) = (2t, -6t, bt)$
 $1 = 2t, a = -6t, 2 = bt$
 $\therefore t = \frac{1}{2}, a = -3, b = 4$
 $\therefore a + b = 1$

3 점과 평면 사이의 거리

개념 Check

200쪽

- 1 ㉠ (1) $\sqrt{14}$ (2) $\frac{5}{3}$ (3) 3

문제

201~203쪽

08-1 ㉠ $\frac{8}{3}$

점 A(3, -1, 1)을 지나고 법선벡터가 (1, 2, -2)인 평
 면 α 의 방정식은
 $(x-3) + 2(y+1) - 2(z-1) = 0$
 $\therefore x + 2y - 2z + 1 = 0$
 따라서 점 (1, -2, 3)과 평면 α 사이의 거리는
 $\frac{|1 \times 1 + 2 \times (-2) - 2 \times 3 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{8}{3}$

08-2 ㉠ $2\sqrt{6}$

주어진 두 평면 사이의 거리는 평면 $2x + y - z + 3 = 0$ 위
 의 점 (0, 0, 3)과 평면 $2x + y - z - 9 = 0$ 사이의 거리와
 같으므로
 $\frac{|2 \times 0 + 1 \times 0 - 1 \times 3 - 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{6}$

08-3 ㉞ $3x - y + 2z - 14 = 0, 3x - y + 2z + 14 = 0$

법선벡터가 $(3, -1, 2)$ 인 평면의 방정식을 $3x - y + 2z + d = 0$ (d 는 실수)이라 하면 원점과 평면 사이의 거리가 $\sqrt{14}$ 이므로

$$\frac{|d|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \sqrt{14}$$

$$|d| = 14 \quad \therefore d = -14 \text{ 또는 } d = 14$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$3x - y + 2z - 14 = 0, 3x - y + 2z + 14 = 0$$

09-1 ㉞ $x + y - z + 1 = 0, x + y - z + 7 = 0$

법선벡터가 $(1, 1, -1)$ 인 평면의 방정식을

$$x + y - z + d = 0$$
 (d 는 실수)이라 하자.

구의 중심 $(1, -2, 3)$ 과 평면 $x + y - z + d = 0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이 $\sqrt{3}$ 과 같으므로

$$\frac{|1 \times 1 + 1 \times (-2) - 1 \times 3 + d|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{3}$$

$$|d - 4| = 3 \quad \therefore d = 1 \text{ 또는 } d = 7$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$x + y - z + 1 = 0, x + y - z + 7 = 0$$

09-2 ㉞ 6

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z - 3 = 0$$
에서

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 14$$

구의 중심 $(1, -1, 3)$ 과 평면 $2x - 3y + z + k = 0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이 $\sqrt{14}$ 와 같으므로

$$\frac{|2 \times 1 - 3 \times (-1) + 1 \times 3 + k|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \sqrt{14}$$

$$|k + 8| = 14 \quad \therefore k = 6 \quad (\because k > 0)$$

09-3 ㉞ $2x + y - z + 2 - 2\sqrt{6} = 0,$

$$2x + y - z + 2 + 2\sqrt{6} = 0$$

직선 $\frac{x-1}{2} = y-1 = -z-1$ 의 방향벡터는 $(2, 1, -1)$

이때 직선의 방향벡터는 평면의 법선벡터가 되므로 평면의 법선벡터는 $(2, 1, -1)$

즉, 법선벡터가 $(2, 1, -1)$ 인 평면의 방정식을

$$2x + y - z + d = 0$$
 (d 는 실수)이라 하자.

구의 중심 $(0, 1, 3)$ 과 평면 $2x + y - z + d = 0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|2 \times 0 + 1 \times 1 - 1 \times 3 + d|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 2$$

$$|d - 2| = 2\sqrt{6} \quad \therefore d = 2 - 2\sqrt{6} \text{ 또는 } d = 2 + 2\sqrt{6}$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$2x + y - z + 2 - 2\sqrt{6} = 0, 2x + y - z + 2 + 2\sqrt{6} = 0$$

10-1 ㉞ (1) 3 (2) $(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3})$

구의 중심을 $C(0, 0, 0)$ 이라 하고, 점 C 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

(1) 오른쪽 그림에서 선분 CH 의 길이는 점 C 와 평면 α 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{CH} = \frac{|-12|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 4$$

구와 평면이 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P 라 하면

$$\overline{CP} = (\text{구의 반지름의 길이}) = 5$$

직각삼각형 CPH 에서

$$\overline{HP} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 3이다.

(2) 구하는 원의 중심은 점 H 와 같으므로 점 H 의 좌표를

$$(a, b, c)$$
라 하면 $\overrightarrow{CH} = (a, b, c)$

평면 α 의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면 $\vec{n} = (2, 1, -2)$

$$\overrightarrow{CH} \parallel \vec{n}$$
이므로

$$\overrightarrow{CH} = t\vec{n} \quad (\text{단, } t \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

$$(a, b, c) = t(2, 1, -2) = (2t, t, -2t)$$

$$\therefore a = 2t, b = t, c = -2t$$

$$\therefore H(2t, t, -2t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 점 H 는 평면 α 위의 점이므로

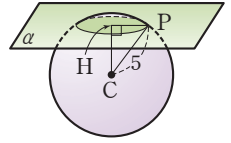
$$2 \times 2t + t - 2 \times (-2t) - 12 = 0$$

$$9t - 12 = 0$$

$$\therefore t = \frac{4}{3}$$

이를 ①에 대입하면 구하는 원의 중심의 좌표는

$$(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3})$$



10-2 ㉞ 64π

구의 중심을 C 라 하면

$$C(-2, 1, 3)$$

오른쪽 그림과 같이 점 C 에서

평면 α 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{CH} = \frac{|1 \times (-2) + 2 \times 1 - 2 \times 3 - 12|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 6$$

구와 평면이 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P 라 하면

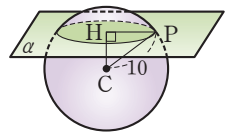
$$\overline{CP} = 10$$

직각삼각형 CPH 에서

$$\overline{HP} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

따라서 구와 평면 α 가 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 8이므로 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times 8^2 = 64\pi$$



4 벡터를 이용한 구의 방정식

개념 Check

204쪽

- 1 **답** (1) 점 $(-4, 3, -6)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 구
 (2) 점 $(-4, 3, -6)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구
 (1) $|\vec{p}-\vec{a}|=3$ 에서
 점 P는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 구 위의 점이다.
 (2) $\vec{p}-\vec{a}=(x+4, y-3, z+6)$ 이므로
 $(\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{a})=4$ 에서
 $(x+4, y-3, z+6) \cdot (x+4, y-3, z+6)=4$
 $\therefore (x+4)^2+(y-3)^2+(z+6)^2=2^2$
 따라서 점 P는 점 $(-4, 3, -6)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구 위의 점이다.

문제

205쪽

11-1 **답** 36 π

$\vec{p}-\vec{c}=(x-2, y+2, z-1)$,
 $\vec{p}+\vec{c}=(x+2, y-2, z+1)$ 이므로
 $(\vec{p}-\vec{c}) \cdot (\vec{p}+\vec{c})=0$ 에서
 $(x-2, y+2, z-1) \cdot (x+2, y-2, z+1)=0$
 $(x-2)(x+2)+(y+2)(y-2)+(z-1)(z+1)=0$
 $\therefore x^2+y^2+z^2=9$
 따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $(0, 0, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 구이므로 구하는 도형의 부피는
 $\frac{4}{3}\pi \times 3^3=36\pi$

11-2 **답** $x^2+(y+1)^2+(z-3)^2=6$

두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 구 위의 한 점을 P(x, y, z)라 하면
 $\vec{AP}=(x+1, y-1, z-2)$
 $\vec{BP}=(x-1, y+3, z-4)$
 $\vec{AP} \perp \vec{BP}$ 이므로
 $\vec{AP} \cdot \vec{BP}=0$ 에서
 $(x+1, y-1, z-2) \cdot (x-1, y+3, z-4)=0$
 $(x+1)(x-1)+(y-1)(y+3)+(z-2)(z-4)=0$
 $\therefore x^2+(y+1)^2+(z-3)^2=6$

11-3 **답** 20 π

점 P의 좌표를 (x, y, z)라 하면
 $\vec{AP}=(x-3, y, z+1)$
 $\vec{BP}=(x-1, y-4, z+1)$
 $\vec{AP} \cdot \vec{BP}=0$ 에서
 $(x-3, y, z+1) \cdot (x-1, y-4, z+1)=0$
 $(x-3)(x-1)+y(y-4)+(z+1)(z+1)=0$
 $\therefore (x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=5$
 따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $(2, 2, -1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 구이므로 구하는 도형의 겹넓이는
 $4\pi \times (\sqrt{5})^2=20\pi$

연습문제

206~208쪽

1 -6	2 $2x-3y+z+6=0$	3 ③	4 4
5 ④	6 ③	7 24	8 $x-y+z-3=0$
9 ②	10 1	11 ④	12 $\frac{11}{4}$
13 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$	14 ③	15 3	16 160
17 ②	18 288π	19 $x-4y-z+1=0$	20 $\frac{3}{5}$
			21 53

- 1 평면 $3x+2y-z-3=0$ 의 법선벡터는
 $(3, 2, -1)$
 점 $(3, 1, -2)$ 를 지나고 법선벡터가 $(3, 2, -1)$ 인 평면의 방정식은
 $3(x-3)+2(y-1)-(z+2)=0$
 $\therefore 3x+2y-z-13=0$
 이 평면이 점 $(1, 2, a)$ 를 지나므로
 $3 \times 1 + 2 \times 2 - a - 13 = 0$
 $\therefore a = -6$
- 2 구의 중심을 C(1, -1, 3)이라 하면
 $\vec{CA}=(-1, 2, 2)-(-1, -1, 3)$
 $=(-2, 3, -1)$
 이때 벡터 \vec{CA} 는 평면에 수직이므로 평면의 법선벡터는 $(-2, 3, -1)$
 따라서 점 A(-1, 2, 2)를 지나고 법선벡터가 $(-2, 3, -1)$ 인 평면의 방정식은
 $-2(x+1)+3(y-2)-(z-2)=0$
 $\therefore 2x-3y+z+6=0$

3 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 이라 하고, 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$$a+d=0 \quad \therefore a=-d \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a-b+d=0 \quad \therefore b=a+d=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$-a+c+d=0 \quad \therefore c=a-d=-2d \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 을 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면

$$-dx-2dz+d=0$$

이때 $d \neq 0$ 이므로 구하는 평면의 방정식은

$$x+2z-1=0$$

4 세 구의 부피를 모두 이등분하는 평면은 세 구의 중심을 모두 지나는 평면이다.

즉, 평면 $ax+by+cz+1=0$ 은 세 점 $(-1, 0, 0)$, $(-3, 2, 2)$, $(2, 1, 5)$ 를 모두 지나므로 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$$-a+1=0 \quad \therefore a=1$$

$$-3a+2b+2c+1=0 \quad \therefore b+c=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2a+b+5c+1=0 \quad \therefore b+5c=-3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$b=2, c=-1$$

$$\therefore a+b-c=1+2-(-1)=4$$

5 점 $(2, 1, 3)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(2, 3, -1)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-1}$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-1} = k \text{ (} k \text{는 실수)로 놓으면}$$

$$x=2k+2, y=3k+1, z=-k+3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 을 $x+y-z-6=0$ 에 대입하면

$$(2k+2)+(3k+1)-(-k+3)-6=0$$

$$6k-6=0 \quad \therefore k=1$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x=2 \times 1 + 2 = 4, y=3 \times 1 + 1 = 4, z=-1+3=2$$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(4, 4, 2)$

6 $x-2=y=\frac{z-3}{3}=t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x=t+2, y=t, z=3t+3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 을 $x-2y-z+1=0$ 에 대입하면

$$(t+2)-2t-(3t+3)+1=0$$

$$\therefore t=0$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x=2, y=0, z=3$$

$$\therefore A(2, 0, 3)$$

또 $\textcircled{1}$ 을 $2x+y+z-1=0$ 에 대입하면

$$2(t+2)+t+(3t+3)-1=0$$

$$6t+6=0$$

$$\therefore t=-1$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x=-1+2=1, y=-1, z=3 \times (-1)+3=0$$

$$\therefore B(1, -1, 0)$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(1-2)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{11}$$

7 두 평면의 방정식을 연립하여 x 를 소거하면

$$-7y+3z+3=0 \quad \therefore y = \frac{3z+3}{7} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 평면의 방정식을 연립하여 z 를 소거하면

$$3x-y-3=0 \quad \therefore y=3x-3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 교선의 방정식은

$$3x-3=y = \frac{3z+3}{7}$$

$$\therefore x-1 = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{7}$$

이 직선이 점 $(0, a, b)$ 를 지나므로

$$0-1 = \frac{a}{3} = \frac{b+1}{7}$$

$$\frac{a}{3} = -1 \text{에서 } a = -3, \frac{b+1}{7} = -1 \text{에서 } b = -8$$

$$\therefore ab = 24$$

8 두 평면의 방정식을 연립하여 x 를 소거하면

$$5y+5z=5 \quad \therefore z = -y+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 평면의 방정식을 연립하여 y 를 소거하면

$$5x-5z=5 \quad \therefore z = x-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 교선의 방정식은

$$x-1 = -y+1 = z$$

이 교선의 방향벡터는 $(1, -1, 1)$ 이므로 이 교선에 수직인 평면의 법선벡터는

$$(1, -1, 1)$$

따라서 점 $(-1, -1, 3)$ 을 지나고 법선벡터가

$$(1, -1, 1) \text{인 평면의 방정식은}$$

$$(x+1)-(y+1)+(z-3)=0$$

$$\therefore x-y+z-3=0$$

9 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면

$$\vec{n}_1 = (1, 1, -1), \vec{n}_2 = (3, -4, 5)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$= \frac{|1 \times 3 + 1 \times (-4) + (-1) \times 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{5}$$

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에서 높이는

$$\sqrt{5^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{19} \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{19}}{5}$$



- 10 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면 $\vec{n}_1 = (a, 1, -1), \vec{n}_2 = (1, -2, 1)$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|a \times 1 + 1 \times (-2) + (-1) \times 1|}{\sqrt{a^2 + 1^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{|a-3|}{\sqrt{6(a^2+2)}} \end{aligned}$$

즉, $\frac{|a-3|}{\sqrt{6(a^2+2)}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 이므로

$$3|a-3| = \sqrt{12(a^2+2)}$$

양변을 제곱하면

$$9(a-3)^2 = 12(a^2+2)$$

$$a^2 + 18a - 19 = 0$$

$$(a+19)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

- 11 구의 중심을 $C(1, 7, 2)$ 라 하면 점 $A(1, 3, 5)$ 에서 구에 그은 접선들의 접점으로 이루어진 도형을 포함하는 평면의 법선벡터는

$$\vec{CA} = (1, 3, 5) - (1, 7, 2) = (0, -4, 3)$$

이때 xy 평면의 법선벡터는 $(0, 0, 1)$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{|0 \times 0 + (-4) \times 0 + 3 \times 1|}{\sqrt{0^2 + (-4)^2 + 3^2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{3}{5}$$

- 12 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면

$$\vec{n}_1 = (a-3, 2-a, 1), \vec{n}_2 = (1, -2, a-4)$$

두 평면이 서로 수직이면 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ 이므로

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$(a-3, 2-a, 1) \cdot (1, -2, a-4) = 0$$

$$(a-3) \times 1 + (2-a) \times (-2) + 1 \times (a-4) = 0$$

$$4a - 11 = 0$$

$$\therefore a = \frac{11}{4}$$

- 13 $\overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (-2+4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{6}$

직선 AB의 방향벡터를 \vec{u} , 평면의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면

$$\vec{u} = (2, -2, 3) - (1, -4, 2) = (1, 2, 1)$$

$$\vec{n} = (2, 1, -1)$$

직선 AB와 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 두 벡터 \vec{u}, \vec{n} 이 이루는 각의 크기는 $90^\circ - \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \theta) &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} \\ &= \frac{|1 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times (-1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

즉, $90^\circ - \theta = 60^\circ$ 이므로 $\theta = 30^\circ$

따라서 선분 AB의 평면 $2x + y - z = 5$ 위로의 정사영의 길이는

$$\overline{AB} \cos 30^\circ = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

- 14 직선의 방향벡터를 \vec{u} , 평면의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면 $\vec{u} = (k, 2, k-1), \vec{n} = (4, k+1, -1)$

직선과 평면이 만나지 않으려면 서로 평행해야 하므로 $\vec{u} \perp \vec{n}$

$$\text{즉, } \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{이므로}$$

$$(k, 2, k-1) \cdot (4, k+1, -1) = 0$$

$$k \times 4 + 2(k+1) + (k-1) \times (-1) = 0$$

$$5k + 3 = 0$$

$$\therefore k = -\frac{3}{5}$$

참고 방향벡터가 \vec{u} 인 직선 l 과 법선벡터가 \vec{n} 인 평면 α 에 대하여

$$(1) l \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(2) l \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u} = t\vec{n} \quad (\text{단, } t \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

- 15 직선의 방향벡터는 $(-2, 2, -1)$ 이므로 이 직선에 수직인 평면의 법선벡터는 $(-2, 2, -1)$

즉, 점 $(-1, 5, 3)$ 을 지나고 법선벡터가 $(-2, 2, -1)$ 인 평면의 방정식은

$$-2(x+1) + 2(y-5) - (z-3) = 0$$

$$\therefore 2x - 2y + z + 9 = 0$$

따라서 이 평면과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|9|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 3$$

- 16 구의 중심 $(0, 0, 1)$ 과 평면 $2x - y + 2z - 7 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \times 0 - 1 \times 0 + 2 \times 1 - 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{5}{3}$$

구 위를 움직이는 점 P와 평면 $2x - y + 2z - 7 = 0$ 사이의 거리의 최댓값은 구의 중심과 평면 $2x - y + 2z - 7 = 0$ 사이의 거리에 구의 반지름의 길이 1을 더한 것과 같으므로

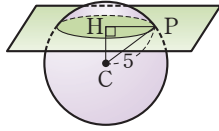
$$d = \frac{5}{3} + 1 = \frac{8}{3}$$

$$\therefore 60d = 60 \times \frac{8}{3} = 160$$

17 구의 중심을 C라 하면

$$C(1, 2, -1)$$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{CH} = \frac{|2 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times (-1) - 11|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 3$$

구와 평면이 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하면

$$\overline{CP} = 5$$

직각삼각형 CPH에서

$$\overline{HP} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

따라서 구와 평면이 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 4이므로 구하는 원의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 4 = 8\pi$$

18 $|\vec{p}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{p} + |\vec{a}|^2 = 9|\vec{b}|^2$ 에서 $|\vec{p} - \vec{a}|^2 = |3\vec{b}|^2$

이때 $\vec{p} - \vec{a} = (x-1, y+3, z-2)$, $\vec{b} = (\sqrt{2}, 1, -1)$ 이므로

$$\{\sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2}\}^2$$

$$= \{3\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2 + (-1)^2}\}^2$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 36$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 A(1, -3, 2)를 중심으로 하고 반지름의 길이가 6인 구이므로 구하는 도형의 부피는

$$\frac{4}{3}\pi \times 6^3 = 288\pi$$

19 두 직선 l, m은 한 점에서 만나므로 한 평면을 결정한다.

구하는 평면의 방정식을 $ax + by + cz + d = 0$ 이라 하면

이 평면은 직선 l 위의 두 점 $(0, 0, 1)$, $(1, \frac{1}{2}, 0)$ 과 직선 m 위의 점 $(-1, 0, 0)$ 을 지나므로 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$$c + d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a + \frac{b}{2} + d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$-a + d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{에서 } a = d, b = -4d, c = -d$$

이를 $ax + by + cz + d = 0$ 에 대입하면 구하는 평면의 방정식은

$$dx - 4dy - dz + d = 0$$

$$\therefore x - 4y - z + 1 = 0 \quad (\because d \neq 0)$$

20 x축을 포함하는 평면의 방정식을 $ay + bz = 0$ 이라 하자.

구의 중심 $(2, 3, 4)$ 와 평면 $ay + bz = 0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$$\frac{|3a + 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{5}$$

$$|3a + 4b| = \sqrt{5(a^2 + b^2)}$$

양변을 제곱하면

$$(3a + 4b)^2 = 5(a^2 + b^2)$$

$$4a^2 + 24ab + 11b^2 = 0$$

$$(2a + b)(2a + 11b) = 0$$

$$\therefore 2a + b = 0 \text{ 또는 } 2a + 11b = 0$$

(i) $2a + b = 0$, 즉 $b = -2a$ 일 때,

이를 $ay + bz = 0$ 에 대입하면 평면의 방정식은

$$ay - 2az = 0 \quad \therefore y - 2z = 0 \quad (\because a \neq 0)$$

(ii) $2a + 11b = 0$, 즉 $b = -\frac{2}{11}a$ 일 때,

이를 $ay + bz = 0$ 에 대입하면 평면의 방정식은

$$ay - \frac{2}{11}az = 0 \quad \therefore 11y - 2z = 0 \quad (\because a \neq 0)$$

(i), (ii)에서 두 평면의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면 $\vec{n}_1 = (0, 1, -2), \vec{n}_2 = (0, 11, -2)$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|0 \times 0 + 1 \times 11 + (-2) \times (-2)|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2} \sqrt{0^2 + 11^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

21 $\frac{x}{2} = y = z + 3 = t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x = 2t, y = t, z = t - 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 을 $x + 2y + 2z = 6$ 에 대입하면

$$2t + 2t + 2(t - 3) = 6$$

$$6t - 12 = 0$$

$$\therefore t = 2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x = 2 \times 2 = 4, y = 2, z = 2 - 3 = -1$$

$$\therefore A(4, 2, -1)$$

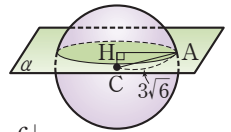
구의 중심을 C라 하면 $C(1, -1, 5)$ 이고 구의 반지름의 길이는

$$\overline{CA} = \sqrt{(4-1)^2 + (2+1)^2 + (-1-5)^2} = 3\sqrt{6}$$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서

평면 α 에 내린 수선의 발을 H

라 하면



$$\overline{CH} = \frac{|1 \times 1 + 2 \times (-1) + 2 \times 5 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}$$

$$= 1$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{HA} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{(3\sqrt{6})^2 - 1^2} = \sqrt{53}$$

따라서 구와 평면 α 가 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 $\sqrt{53}$ 인 원이므로 그 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{53})^2 = 53\pi$$

$$\therefore k = 53$$

유형편

정답과 해설

I-1. 이차곡선

01 포물선

4~8쪽

1 ③	2 ②	3 ⑤	4 $y^2=8x, x^2=y$
5 ③	6 $2\sqrt{6}$	7 $\frac{1}{8}$	8 12 9 24
10 ④	11 $(y-1)^2=16(x+1)$	12 0	
13 ②	14 10	15 $x^2-4x+4y=0$	16 ⑤
17 6	18 6	19 ④	20 ③ 21 4
22 16	23 8	24 15	25 6
26 $10+4\sqrt{5}$	27 ①	28 $\sqrt{17}$	29 $\frac{1}{4}$
30 ②	31 ⑤	32 $y^2=7(x+1)$	
33 (2, -1)			

1 $y^2=-4x$ 에서 $y^2=4 \times (-1)x$ 이므로 A(-1, 0)
 $x^2=12y$ 에서 $x^2=4 \times 3y$ 이므로 B(0, 3)
 $\therefore \overline{AB}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

2 원 $(x+\frac{1}{2})^2+y^2=1$ 의 중심의 좌표는 $(-\frac{1}{2}, 0)$
 즉, 점 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 을 초점으로 하고 준선이 $x=\frac{1}{2}$ 인 포물
 선의 방정식은
 $y^2=4 \times (-\frac{1}{2})x \quad \therefore y^2=-2x$
 따라서 이 포물선이 지나가는 점은 ② $(-2, 2)$ 이다.

3 $y^2=ax$ 에서 $y^2=4 \times \frac{a}{4}x$ 이므로 준선의 방정식은
 $x=-\frac{a}{4}$
 $x^2=4y$ 에서 $x^2=4 \times y$ 이므로 준선의 방정식은
 $y=-1$
 두 준선의 교점의 좌표는 $(-\frac{a}{4}, -1)$ 이므로
 $-\frac{a}{4}=-6, -1=b$
 따라서 $a=24, b=-1$ 이므로
 $a-b=25$

4 꼭짓점이 원점인 포물선의 방정식은
 $y^2=4px$ 또는 $x^2=4py$ ($p \neq 0$)라 하자.
 이 포물선이 점 (2, 4)를 지나므로

(i) $y^2=4px$ 일 때,
 $4^2=4p \times 2 \quad \therefore p=2$
 $\therefore y^2=8x$

(ii) $x^2=4py$ 일 때,
 $2^2=4p \times 4 \quad \therefore p=\frac{1}{4}$
 $\therefore x^2=y$

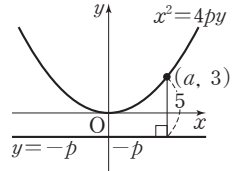
(i), (ii)에서 구하는 모든 포물선의 방정식은
 $y^2=8x, x^2=y$

5 포물선 $y^2=4px$ ($p > 0$)의 초점의 좌표는 $(p, 0)$, 준선의
 방정식은 $x=-p$ 이므로 중심의 좌표가 $(p, 0)$ 이고 직선
 $x=-p$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는 $p-(-p)=2p$
 이다.

이때 원의 둘레의 길이가 36π 이므로
 $2\pi \times 2p=36\pi \quad \therefore p=9$

6 꼭짓점이 원점이고 y 축에 대하여 대칭인 포물선의 방정식
 을 $x^2=4py$ ($p \neq 0$)라 하자.

이 포물선이 점 $(a, 3)$ ($a > 0$)
 을 지나므로 $p > 0$
 포물선의 준선의 방정식은
 $y=-p$ 이고 점 $(a, 3)$ 에서 준
 선까지의 거리가 5이므로
 $3-(-p)=5 \quad \therefore p=2$



따라서 점 $(a, 3)$ 은 포물선 $x^2=8y$ 위의 점이므로
 $a^2=8 \times 3 \quad \therefore a=2\sqrt{6}$ ($\because a > 0$)

7 초점이 $F(\frac{1}{4}, 0)$ 이고 준선이 $x=-\frac{1}{4}$ 인 포물선의 방정
 식은

$$y^2=4 \times \frac{1}{4}x \quad \therefore y^2=x$$

이 포물선의 꼭짓점은 A(0, 0)

한편 초점 F를 지나고 y 축에 평행한 직선의 방정식은

$$x=\frac{1}{4}$$

$$x=\frac{1}{4} \text{을 } y^2=x \text{에 대입하면}$$

$$y^2=\frac{1}{4} \quad \therefore y=\pm\frac{1}{2}$$

따라서 $B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), C(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ 이라 하면 삼각형 ABC
 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

- 8 포물선 $y^2=a(x-1)$ 은 포물선 $y^2=axy$ 를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 초점은

$$F\left(\frac{a}{4}+1, 0\right)$$

포물선 $x^2=2a(y+2)$ 는 포물선 $x^2=2ay$ 를 y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 초점은

$$F'\left(0, \frac{a}{2}-2\right)$$

점 F의 x 좌표와 점 F'의 y 좌표가 일치하므로

$$\frac{a}{4}+1=\frac{a}{2}-2$$

$$\therefore a=12$$

- 9 포물선 $(x-a)^2=k(y-b)$ 는 포물선 $x^2=ky$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 초점의 좌표는 $\left(a, \frac{k}{4}+b\right)$, 준선의 방정식은

$$y=-\frac{k}{4}+b \text{이다.}$$

따라서 $a=3, \frac{k}{4}+b=3, -\frac{k}{4}+b=-1$ 이므로

$$a=3, b=1, k=8$$

$$\therefore abk=24$$

- 10 꼭짓점의 좌표가 $(1, 0)$ 이고, 준선이 $x=-1$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$$(1+2, 0) \quad \therefore (3, 0)$$

주어진 포물선은 꼭짓점이 원점인 포물선을 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

평행이동하기 전의 포물선의 초점의 좌표는

$$(3-1, 0) \quad \therefore (2, 0)$$

따라서 평행이동하기 전의 포물선의 방정식은

$$y^2=4 \times 2x \quad \therefore y^2=8x$$

주어진 포물선의 방정식은

$$y^2=8(x-1)$$

이 포물선이 점 $(3, a)$ 를 지나므로

$$a^2=8 \times (3-1)$$

$$\therefore a=4 (\because a>0)$$

다른 풀이

꼭짓점의 좌표가 $(1, 0)$ 이고, 준선이 $x=-1$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$$(1+2, 0) \quad \therefore (3, 0)$$

포물선 위의 점 $(3, a)$ 에서 초점과 준선에 이르는 거리는 서로 같으므로

$$\sqrt{(3-3)^2+a^2}=|3-(-1)|$$

$$\sqrt{a^2}=4$$

$$\therefore a=4 (\because a>0)$$

- 11 주어진 도형은 초점이 $F(3, 1)$ 이고 준선의 방정식이 $x=-5$ 인 포물선이다.

이때 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$$\left(\frac{3-5}{2}, 1\right) \quad \therefore (-1, 1)$$

이 포물선은 꼭짓점이 원점인 포물선을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

평행이동하기 전의 포물선의 초점의 좌표는

$$(3-(-1), 1-1) \quad \therefore (4, 0)$$

평행이동하기 전의 포물선의 방정식은

$$y^2=4 \times 4x \quad \therefore y^2=16x$$

따라서 구하는 도형의 방정식은 $(y-1)^2=16(x+1)$

다른 풀이

주어진 도형은 초점이 $F(3, 1)$ 이고 준선의 방정식이 $x=-5$ 인 포물선이다.

포물선 위의 점 $P(x, y)$ 라 하고, 점 P에서 준선

$x=-5$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=|x-(-5)|$$

양변을 제곱하면 구하는 도형의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-1)^2=(x+5)^2$$

$$\therefore (y-1)^2=16(x+1)$$

- 12 $y^2-3x+4y+1=0$ 에서

$$y^2+4y+4=3x+3 \quad \therefore (y+2)^2=3(x+1)$$

즉, 이 포물선은 포물선 $y^2=3x$ 를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로

$$a=3, m=-1, n=-2 \quad \therefore a+m+n=0$$

- 13 $y^2-4y-ax+4=0$ 에서

$$y^2-4y+4=ax \quad \therefore (y-2)^2=ax$$

즉, 이 포물선은 포물선 $y^2=ax$ 를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 초점의 좌표는 $\left(\frac{a}{4}, 2\right)$ 이다.

따라서 $\frac{a}{4}=3, 2=b$ 이므로 $a=12, b=2$

$$\therefore a+b=14$$

- 14 포물선 $x^2-8y=0$, 즉 $x^2=8y$ 의 초점은 $F(0, 2)$

$$x^2+4y-8=0 \text{에서 } x^2=-4(y-2)$$

즉, 이 포물선은 포물선 $x^2=-4y$ 를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 초점은

$$F'(0, -1+2) \quad \therefore F'(0, 1)$$

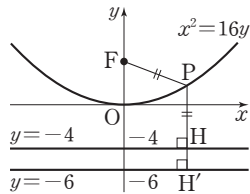
점 $A(a, 0) (a>0)$ 에 대하여 삼각형 $AF'F$ 의 넓이가 5이므로

$$\frac{1}{2} \times 1 \times a = 5 \quad \therefore a = 10$$

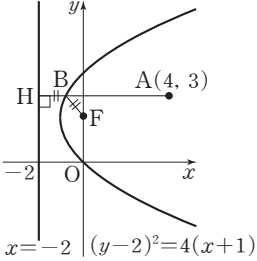
- 15** 축이 y 축에 평행한 포물선의 방정식을 $x^2 + Ax + By + C = 0$ (A, B, C 는 상수, $B \neq 0$)이라 하면 이 포물선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $C = 0$
 즉, 포물선 $x^2 + Ax + By = 0$ 이 두 점 $(4, 0), (2, 1)$ 을 지나므로
 $4^2 + A \times 4 + B \times 0 = 0$
 $16 + 4A = 0$
 $\therefore A = -4$ ㉠
 $2^2 + A \times 2 + B \times 1 = 0$
 $\therefore 4 + 2A + B = 0$ ㉡
 ㉠을 ㉡에 대입하여 풀면
 $B = 4$
 따라서 구하는 포물선의 방정식은 $x^2 - 4x + 4y = 0$

- 16** 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로 삼각형 PHF는 이등변삼각형이다.
 $\therefore \angle PHF = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 50^\circ) = 65^\circ$

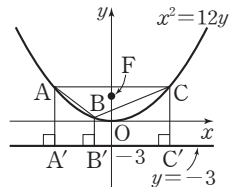
- 17** 포물선 $x^2 = 16y$ 의 준선의 방정식은 $y = -4$
 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H, 직선 $y = -6$ 에 내린 수선의 발을 H'이라 하면 $\overline{PH'} = 8$ 이므로
 $\overline{PH} + \overline{HH'} = 8$
 $\overline{PH} + 2 = 8$
 $\therefore \overline{PH} = 6$
 따라서 포물선의 정의에 의하여 점 P에서 초점 F까지의 거리는
 $\overline{PF} = \overline{PH} = 6$



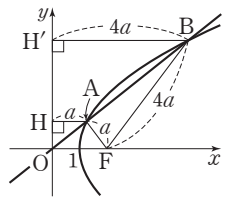
- 18** 포물선 $(y-2)^2 = 4(x+1)$ 은 포물선 $y^2 = 4x$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 준선의 방정식은 $x = -2$ 이다.
 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{BF} = \overline{BH}$ 이므로
 $\overline{AB} + \overline{BF} = \overline{AB} + \overline{BH}$
 $= \overline{AH}$
 $= 4 - (-2)$
 $= 6$



- 19** 포물선 $x^2 = 12y$ 의 초점은 $F(0, 3)$ 이고, 준선의 방정식은 $y = -3$ 이다.
 세 점 A, B, C의 y 좌표를 각각 y_1, y_2, y_3 이라 하면 초점 F가 삼각형 ABC의 무게중심과 같으므로
 $\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 3$
 $\therefore y_1 + y_2 + y_3 = 9$
 오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A', B', C'이라 하면 포물선의 정의에 의하여
 $\overline{AF} = \overline{AA'} = y_1 + 3$
 $\overline{BF} = \overline{BB'} = y_2 + 3$
 $\overline{CF} = \overline{CC'} = y_3 + 3$
 $\therefore \overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF} = (y_1 + 3) + (y_2 + 3) + (y_3 + 3)$
 $= y_1 + y_2 + y_3 + 9$
 $= 9 + 9$
 $= 18$



- 20** 포물선의 축이 x 축이고 $\overline{AF} = \overline{AH}$ 이므로 포물선의 정의에 의하여 준선은 y 축이다.
 즉, 포물선의 초점이 $F(2, 0)$ 이고, 준선이 y 축이므로 꼭짓점의 좌표는 $(1, 0)$ 이다.
 따라서 포물선의 방정식은 $y^2 = 4(x-1)$
 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 y 축에 내린 수선의 발을 H'이라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF} = \overline{AH}$, $\overline{BF} = \overline{BH'}$ 이므로
 $\overline{AH} : \overline{BH'} = \overline{AF} : \overline{BF} = 1 : 4$
 따라서 두 삼각형 OAH와 OBH'은 서로 닮음이고 닮음비는 $1 : 4$ 이므로
 $\overline{OH} : \overline{OH'} = 1 : 4$
 $A(a, b)$ ($a > 0, b > 0$)라 하면 $B(4a, 4b)$ 이고 두 점 A, B는 포물선 $y^2 = 4(x-1)$ 위의 점이므로
 $b^2 = 4(a-1)$ ㉠
 $(4b)^2 = 4(4a-1)$
 $\therefore 4b^2 = 4a-1$ ㉡
 ㉠을 ㉡에 대입하면
 $4 \times 4(a-1) = 4a-1$
 $12a = 15$
 $\therefore a = \frac{5}{4}$
 $\therefore \overline{AF} = \frac{5}{4}$

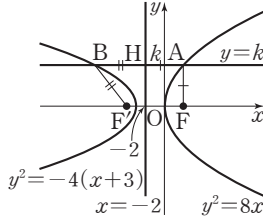


21 포물선 $y^2=8x$ 의 초점은 $F(2, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$ 이다.

또 포물선 $y^2=-4(x+3)$ 은 포물선 $y^2=-4x$ 를 x 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이므로 초점은 $F'(-4, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$ 이다.

$$\therefore \overline{FF'}=2-(-4)=6$$

두 포물선의 준선이 서로 같으므로 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=k$ 와 준선 $x=-2$ 의 교점을 H 라 하면 포물선의 정의에 의하여



$$\overline{AF}=\overline{AH}, \overline{BF'}=\overline{BH}$$

이때 사각형 $ABF'F$ 의 둘레의 길이가 24이므로

$$\overline{AB}+\overline{BF'}+\overline{F'F}+\overline{AF}=24$$

$$\overline{AB}+\overline{BH}+\overline{F'F}+\overline{AH}=24$$

$$\overline{AB}+(\overline{BH}+\overline{AH})+\overline{F'F}=24$$

$$2\overline{AB}+6=24 \quad \therefore \overline{AB}=9$$

두 점 A, B 의 y 좌표가 k 이므로

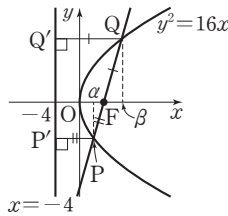
$$A\left(\frac{k^2}{8}, k\right), B\left(-\frac{k^2}{4}-3, k\right)$$

$$\overline{AB}=9 \text{이므로 } \frac{k^2}{8}-\left(-\frac{k^2}{4}-3\right)=9$$

$$k^2=16 \quad \therefore k=4 (\because k>0)$$

22 포물선 $y^2=16x$ 의 초점은 $F(4, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x=-4$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q 에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 P', Q' 이라 하면 포물선의 정의에 의하여



$$\overline{PF}=\overline{PP'}=a+4$$

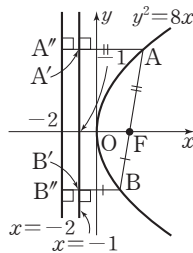
$$\overline{QF}=\overline{QQ'}=\beta+4$$

$$\therefore \overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{QF}=(a+4)+(\beta+4)$$

$$=a+\beta+8=8+8=16$$

23 포물선 $y^2=8x$ 의 준선의 방정식은 $x=-2$

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B 에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A'', B'' 이라 하면 포물선의 정의에 의하여



$$\overline{AF}=\overline{AA''}=\overline{AA'}+1$$

$$\overline{BF}=\overline{BB''}=\overline{BB'}+1$$

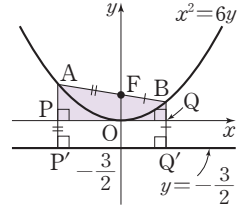
이때 $\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AB}=10$ 이므로

$$(\overline{AA'}+1)+(\overline{BB'}+1)=10$$

$$\therefore \overline{AA'}+\overline{BB'}=8$$

24 포물선 $x^2=6y$ 의 준선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}$

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B 에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 P', Q' 이라 하면 포물선의 정의에 의하여



$$\overline{AF}=\overline{AP'}=\overline{AP}+\frac{3}{2}$$

$$\overline{BF}=\overline{BQ'}=\overline{BQ}+\frac{3}{2}$$

이때 $\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AB}=8$ 이므로

$$\left(\overline{AP}+\frac{3}{2}\right)+\left(\overline{BQ}+\frac{3}{2}\right)=8$$

$$\therefore \overline{AP}+\overline{BQ}=5$$

따라서 사각형 $APQB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (\overline{AP}+\overline{BQ}) \times \overline{PQ}=\frac{1}{2} \times 5 \times 6=15$$

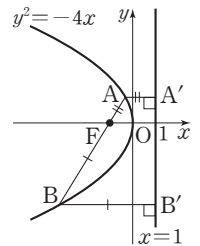
25 포물선 $y^2=-4x$ 의 초점을 F 라 하면 $F(-1, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x=1$ 이다.

두 점 A, B 의 x 좌표를 각각 a, b 라 하면 선분 AB 의 중점의 x 좌표가 -2 이므로

$$\frac{a+b}{2}=-2$$

$$\therefore a+b=-4$$

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B 에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A', B' 이라 하면 포물선의 정의에 의하여



$$\overline{AF}=\overline{AA'}=1-a$$

$$\overline{BF}=\overline{BB'}=1-b$$

$$\therefore \overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}$$

$$=(1-a)+(1-b)$$

$$=2-(a+b)=2-(-4)=6$$

26 포물선 $y^2=4px$ 의 초점은 $F(p, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x=-p$ 이다.

즉, 직선 m 의 방정식은 $x=p$ 이므로 두 점 A, B 의 x 좌표는 모두 p 이다.

이때 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF}=\overline{AA'}=p-(-p)=2p$$

$$\overline{BF}=\overline{BB'}=p-(-p)=2p$$

$$\therefore \overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=2p+2p=4p$$

이때 사각형 $AA'B'B$ 의 넓이가 40이므로

$$2p \times 4p=40, p^2=5 \quad \therefore p=\sqrt{5} (\because p>0)$$

직각삼각형 AOF 에서

$$\overline{OA}=\sqrt{\overline{OF}^2+\overline{AF}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2}=5$$

직각삼각형 BOF에서

$$\overline{OB} = \sqrt{\overline{OF}^2 + \overline{BF}^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = 5$$

따라서 삼각형 AOB의 둘레의 길이는

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AB} = 5 + 5 + 4p = 10 + 4\sqrt{5}$$

- 27** 포물선 $y^2=12x$ 의 초점은 F(3, 0)이고, 준선 l의 방정식은 $x=-3$ 이다.

$$\overline{AC}=4\text{이므로 점 A의 }x\text{좌표는 }4-3=1$$

$$\overline{BD}=a(a>0)\text{라 하면 점 B의 }x\text{좌표는 }a-3$$

이때 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF}=\overline{AC}$, $\overline{BF}=\overline{BD}$ 이므로

$$\overline{AF} : \overline{BF} = \overline{AC} : \overline{BD} = 4 : a$$

따라서 점 F는 선분 AB를 4 : a로 내분하는 점이므로

$$\frac{4(a-3)+a \times 1}{4+a} = 3$$

$$4(a-3)+a=3(4+a)$$

$$2a=24 \quad \therefore a=12$$

$$\therefore \overline{BD}=12$$

- 28** 포물선 $y^2=8x$ 의 초점을 F라 하면 F(2, 0)이고, 준선의 방정식은 $x=-2$ 이다.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PH}=\overline{PF}$

이므로

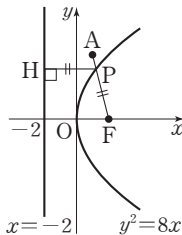
$$\overline{AP} + \overline{PH} = \overline{AP} + \overline{PF}$$

$$\geq \overline{AF}$$

$$= \sqrt{(2-1)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{17}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PH}$ 의 최솟값은 $\sqrt{17}$ 이다.



- 29** 포물선 $x^2=4y$ 의 초점은 F(0, 1)이고, 준선의 방정식은 $y=-1$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PH}\text{이므로}$$

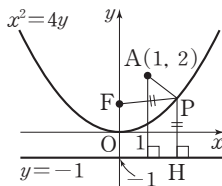
$$\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PH}$$

즉, 세 점 A, P, H가 직선 $x=1$ 위에 있을 때 $\overline{AP} + \overline{PF}$ 의 값이 최소이다.

이때 점 P의 x 좌표가 1이므로

$$P\left(1, \frac{1}{4}\right)$$

따라서 $a=1$, $b=\frac{1}{4}$ 이므로 $ab=\frac{1}{4}$



- 30** 포물선 $y^2=12x$ 의 초점의 좌표는 (3, 0)이고, 준선의 방정식은 $x=-3$ 이므로 점 B(3, 0)은 포물선의 초점이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PB}=\overline{PH}$ 이므로 삼각형 ABP의 둘레의 길이는

$$\overline{AP} + \overline{PB} + \overline{AB}$$

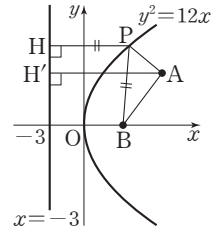
$$= \overline{AP} + \overline{PH} + \overline{AB}$$

$$\geq \overline{AH'} + \overline{AB}$$

$$= 9 + \sqrt{(3-6)^2 + (-4)^2}$$

$$= 9 + 5 = 14$$

따라서 구하는 최솟값은 14이다.



- 31** 원의 중심 C의 좌표를 (x, y)라 하면 점 C에서 점 A(5, 3)까지의 거리와 직선 $x=-1$ 까지의 거리가 서로 같으므로

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} = |x - (-1)|$$

양변을 제곱하면 구하는 도형의 방정식은

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = (x+1)^2$$

$$\therefore (y-3)^2 = 12(x-2)$$

- 32** 포물선 위의 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$$b^2 = 14a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 AP의 중점 M의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x = \frac{-2+a}{2}, y = \frac{b}{2} \quad \therefore a = 2x+2, b = 2y$$

이를 ①에 대입하면 구하는 도형의 방정식은

$$(2y)^2 = 14(2x+2) \quad \therefore y^2 = 7(x+1)$$

- 33** $x^2-4x+4y+4=0$ 에서

$$x^2-4x+4 = -4y \quad \therefore (x-2)^2 = -4y$$

즉, 이 포물선의 초점은 F(2, -1)

포물선 위의 점 A의 좌표를 (a, b)라 하면

$$(a-2)^2 = -4b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 AF를 1 : 2로 내분하는 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x = \frac{2+2a}{3}, y = \frac{-1+2b}{3}$$

$$\therefore a = \frac{3x-2}{2}, b = \frac{3y+1}{2}$$

이를 ①에 대입하면

$$\left(\frac{3x-2}{2} - 2\right)^2 = -4 \times \frac{3y+1}{2}$$

$$\frac{9}{4}(x-2)^2 = -2(3y+1)$$

$$\therefore (x-2)^2 = -\frac{8}{3}\left(y + \frac{1}{3}\right)$$

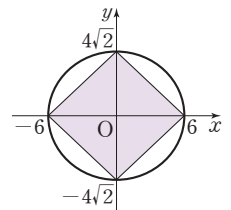
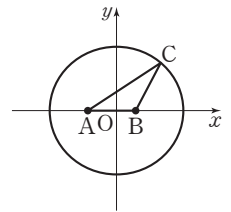
따라서 이 포물선의 초점의 좌표는

$$\left(2, -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) \quad \therefore (2, -1)$$

1 42	2 ⑤	3 ③	4 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$
5 $\frac{80}{3}$	6 9	7 $48\sqrt{2}$	8 ①
10 58	11 $2\sqrt{34}$	12 ②	13 ④
15 20	16 2	17 ②	18 18
20 14	21 ②	22 72	23 ④
24 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$	25 ⑤	26 $4\sqrt{3}$	

- 1 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(0, \sqrt{16-9}), (0, -\sqrt{16-9})$
 $\therefore (0, \sqrt{7}), (0, -\sqrt{7})$
 즉, 두 초점 사이의 거리는 $d = \sqrt{7} - (-\sqrt{7}) = 2\sqrt{7} \quad \therefore d^2 = 28$
 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 장축의 길이는 $2 \times 4 = 8$, 단축의 길이는 $2 \times 3 = 6$
 따라서 $a = 8, b = 6$ 이므로 $d^2 + a + b = 28 + 8 + 6 = 42$
- 2 포물선 $x^2 = -12y$ 의 초점의 좌표는 $(0, -3)$
 이 초점이 타원 $\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{k} = 1$ 의 한 초점과 일치하므로 $21 = k - (-3)^2 \quad \therefore k = 30$
- 3 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에서
 (i) $0 < a < 2$ 일 때,
 장축의 길이는 $2 \times 2 = 4$, 단축의 길이는 $2a$ 이므로 $4 = 2 \times 2a \quad \therefore a = 1$
 (ii) $a > 2$ 일 때,
 장축의 길이는 $2a$, 단축의 길이는 $2 \times 2 = 4$ 이므로 $2a = 2 \times 4 \quad \therefore a = 4$
 (i), (ii)에서 모든 양수 a 의 값의 합은 $1 + 4 = 5$
- 4 중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라 하자.
 삼각형 $AF'F$ 가 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로 $\overline{AF} = \overline{AF'} = 6$
 두 초점으로부터 거리의 합이 $\overline{AF} + \overline{AF'} = 12$ 이므로 $2a = 12 \quad \therefore a = 6$
 한편 $\overline{FF'} = 6$ 에서 두 초점은 $F(3, 0), F'(-3, 0)$
 $b^2 = a^2 - 3^2$ 이므로 $b^2 = 6^2 - 3^2 = 27$
 따라서 구하는 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

- 5 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ 의 두 초점은 $F(\sqrt{36-20}, 0), F'(-\sqrt{36-20}, 0)$
 $\therefore F(4, 0), F'(-4, 0)$
 $\therefore \overline{FF'} = 8$
 두 점 A, B의 x 좌표가 4이므로 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ 에 $x = 4$ 를 대입하면 $\frac{4^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1, y^2 = \frac{100}{9} \quad \therefore y = \pm \frac{10}{3}$
 $\therefore \overline{AB} = \frac{20}{3}$
 따라서 삼각형 $AF'B$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{FF'} = \frac{1}{2} \times \frac{20}{3} \times 8 = \frac{80}{3}$
- 6 직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이 원점이 되도록 하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라 하자.
 장축의 길이가 15이므로 $2a = 15 \quad \therefore a = \frac{15}{2}$
 단축의 길이가 12이므로 $2b = 12 \quad \therefore b = 6$
 타원의 두 초점의 좌표는 $(\sqrt{(\frac{15}{2})^2 - 6^2}, 0), (-\sqrt{(\frac{15}{2})^2 - 6^2}, 0)$
 $\therefore (\frac{9}{2}, 0), (-\frac{9}{2}, 0)$
 따라서 두 초점 사이의 거리는 $2 \times \frac{9}{2} = 9$
- 7 오른쪽 그림과 같이 두 꼭짓점 A, B가 x 축 위에 있고 변 AB의 중점이 원점이 되도록 삼각형 ABC를 좌표평면에 놓자.
 두 점 A, B를 초점으로 하고 점 C를 지나는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라 하자.
 두 초점으로부터 거리의 합이 $\overline{CA} + \overline{CB} = 7 + 5 = 12$ 이므로 $2a = 12 \quad \therefore a = 6$
 $\overline{AB} = 4$ 에서 두 초점의 좌표는 $(2, 0), (-2, 0)$ 이므로 $b^2 = a^2 - 2^2 = 6^2 - 2^2 = 32 \quad \therefore b = 4\sqrt{2} (\because b > 0)$
 즉, 타원의 네 꼭짓점의 좌표는 $(6, 0), (-6, 0), (0, 4\sqrt{2}), (0, -4\sqrt{2})$
 따라서 오른쪽 그림에서 구하는 사각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 12 \times 8\sqrt{2} = 48\sqrt{2}$



8 타원 $\frac{(x-2)^2}{a} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 은 타원 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\frac{(x-2)^2}{a} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 의 중심의 좌표는 (2, 2)

타원의 중심은 두 초점을 이은 선분의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{6-2}{2}, \frac{b+b}{2}\right) \quad \therefore (2, b)$$

$$\therefore b=2$$

한편 주어진 타원의 두 초점의 y 좌표가 같고 중심에서 초점까지의 거리가 4이므로

$$4 = a - 4^2 \quad \therefore a = 20$$

$$\therefore ab = 20 \times 2 = 40$$

9 타원의 중심은 선분 FF'의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+1}{2}, \frac{6-2}{2}\right) \quad \therefore (1, 2)$$

즉, 주어진 타원은 중심이 원점인 타원을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

두 초점 F, F'의 x 좌표가 같으므로 주어진 타원의 방정식

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1 \quad (b > a > 0) \text{이라 하자.}$$

두 초점으로부터 거리의 합이 10이므로

$$2b = 10 \quad \therefore b = 5$$

중심에서 초점까지의 거리가 4이므로

$$a^2 = b^2 - 4^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

따라서 타원의 방정식은 $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$

이 타원이 점 (-2, k)를 지나므로

$$\frac{(-2-1)^2}{9} + \frac{(k-2)^2}{25} = 1 \quad \therefore k = 2$$

10 타원 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 타원의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{49} + \frac{(y-n)^2}{9} = 1$$

이 타원이 x 축과 y 축에 동시에 접하려면

$$|\text{타원의 중심의 } x\text{좌표}| = \frac{(\text{장축의 길이})}{2},$$

$$|\text{타원의 중심의 } y\text{좌표}| = \frac{(\text{단축의 길이})}{2}$$

이어야 한다.

이 타원의 중심의 좌표는 (m, n) , 장축의 길이는

$$2 \times 7 = 14, \text{ 단축의 길이는 } 2 \times 3 = 6 \text{이므로}$$

$$|m| = \frac{14}{2} = 7, |n| = \frac{6}{2} = 3$$

$$\therefore m^2 + n^2 = 7^2 + 3^2 = 58$$

11 $(x-6)^2 + (y-5)^2 = 34$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$(x-6)^2 + (0-5)^2 = 34, x^2 - 12x + 27 = 0$$

$$(x-3)(x-9) = 0 \quad \therefore x = 3 \text{ 또는 } x = 9$$

즉, 두 점 (3, 0), (9, 0)을 초점으로 하고 점 (6, 5)를 지나는 타원이다.

타원의 중심은 두 초점을 이은 선분의 중점이므로 중심의 좌표는 (6, 0)

이 타원은 중심이 원점인 타원을 x 축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

두 초점의 y 좌표가 같으므로 타원의 방정식을

$$\frac{(x-6)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \text{이라 하자.}$$

이 타원이 점 (6, 5)를 지나므로

$$\frac{(6-6)^2}{a^2} + \frac{5^2}{b^2} = 1 \quad \therefore b^2 = 25$$

중심에서 초점까지의 거리가 3이므로

$$a^2 = b^2 + 3^2 = 25 + 3^2 = 34$$

즉, 타원의 방정식은 $\frac{(x-6)^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$

따라서 이 타원의 장축의 길이는 $2 \times \sqrt{34} = 2\sqrt{34}$

12 $x^2 + 4y^2 - 8x + 8y + 8 = 0$ 에서

$$(x^2 - 8x + 16) + 4(y^2 + 2y + 1) = 12$$

$$\therefore \frac{(x-4)^2}{12} + \frac{(y+1)^2}{3} = 1$$

즉, 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 을 x 축의 방향으로 4

만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

주어진 타원의 중심의 좌표는 (4, -1), 장축의 길이는

$$2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}, \text{ 단축의 길이는 } 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{이다.}$$

따라서 $a = 4, b = -1, c = 4\sqrt{3}, d = 2\sqrt{3}$ 이므로

$$ab + cd = 4 \times (-1) + 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 20$$

13 $3x^2 + 2y^2 - 6x + 8y - 1 = 0$ 에서

$$3(x^2 - 2x + 1) + 2(y^2 + 4y + 4) = 12$$

$$\therefore 3(x-1)^2 + 2(y+2)^2 = 12$$

즉, 이 타원을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로

2만큼 평행이동하면 타원 $3x^2 + 2y^2 = 12$ 와 겹쳐진다.

따라서 $a = -1, b = 2, c = 12$ 이므로 $a + b + c = 13$

14 $x^2 + 5y^2 - 4x - 10y - 1 = 0$ 에서

$$(x^2 - 4x + 4) + 5(y^2 - 2y + 1) = 10$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{10} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$

즉, 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{2} = 1$ 을 x 축의 방향으로 2

만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

- ㄱ. 중심의 좌표는 (2, 1)
 ㄴ. 두 초점의 좌표는 $(2\sqrt{2}+2, 1)$, $(-2\sqrt{2}+2, 1)$
 ㄷ. 단축의 길이는 $2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
 ㄹ. 평행이동하면 타원 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{2} = 1$ 과 겹쳐지지만 타원

$$\frac{x^2}{5} + y^2 = 1 \text{과는 겹쳐지지 않는다.}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

- 15 타원 $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ 은 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

주어진 타원의 두 초점의 좌표는 (6, 2), (0, 2)

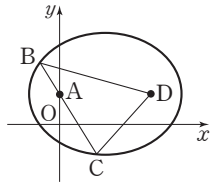
즉, 두 점 A, D는 주어진 타원의 초점이므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{BA} + \overline{BD} = 2 \times 5 = 10$$

$$\overline{CA} + \overline{CD} = 2 \times 5 = 10$$

따라서 삼각형 BCD의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{BD} &= (\overline{BA} + \overline{CA}) + \overline{CD} + \overline{BD} \\ &= (\overline{BA} + \overline{BD}) + (\overline{CA} + \overline{CD}) \\ &= 10 + 10 = 20 \end{aligned}$$



- 16 타원 $6x^2 + 2y^2 = 12$, 즉 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$ 의 두 초점의 좌표는

$$(0, 2), (0, -2) \quad \therefore \overline{FF'} = 4$$

$\overline{PF} = m$, $\overline{PF'} = n$ 이라 하면 타원의 정의에 의하여

$$m + n = 2 \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

삼각형 PFF'이 직각삼각형이므로

$$m^2 + n^2 = 4^2 = 16$$

이때 $(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$ 에서

$$(2\sqrt{6})^2 = 16 + 2mn, \quad 2mn = 8 \quad \therefore mn = 4$$

따라서 삼각형 PFF'의 넓이는 $\frac{1}{2}mn = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

- 17 점 P는 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점이므로

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 6 = 12$

직선 PQ가 원점 O를 지나므로 두 점 P, Q는 원점에 대하여 대칭이고, 두 초점 F, F'도 원점에 대하여 대칭이다.

$$\therefore \overline{PF} = \overline{QF'}$$

삼각형 PF'Q의 둘레의 길이가 20이므로

$$\overline{PF'} + \overline{F'Q} + \overline{PQ} = 20$$

$$(\overline{PF'} + \overline{PF}) + \overline{PQ} = 20$$

$$12 + \overline{PQ} = 20 \quad \therefore \overline{PQ} = 8$$

따라서 점 O는 선분 PQ의 중점이므로

$$\overline{OP} = \frac{1}{2}\overline{PQ} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

- 18 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 (0, 4), (0, -4)

$$\therefore \overline{FF'} = 8$$

$\overline{PF} = m$, $\overline{PF'} = n$ 이라 하면 타원의 정의에 의하여

$$m + n = 2 \times 5 = 10$$

$\overline{OP} = \overline{OF} = \overline{OF'}$ 이므로 점 P는 선분 FF'을 지름으로 하는 원 위의 점이다.

$$\therefore \angle FPF' = 90^\circ$$

삼각형 PFF'이 직각삼각형이므로

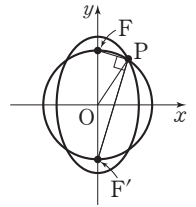
$$m^2 + n^2 = 8^2 = 64$$

이때 $(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$ 에서

$$10^2 = 64 + 2mn$$

$$2mn = 36 \quad \therefore mn = 18$$

$$\therefore \overline{PF} \times \overline{PF'} = 18$$



- 19 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점이 x 축 위에 있으므로

$F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)이라 하자.

x 좌표가 양수인 꼭짓점 A의 좌표는 $(a, 0)$

두 삼각형 PFF', PFA의 넓이의 비가 2 : 1이므로

$$\overline{F'F} : \overline{FA} = 2 : 1$$

$$\overline{F'F} = 2\overline{FA}$$

$$2c = 2(a - c) \quad \therefore a = 2c \quad \dots \textcircled{1}$$

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ 이고, 삼각형 PFF'의 둘레의 길이가 12이므로

$$\overline{PF'} + \overline{F'F} + \overline{PF} = 12$$

$$(\overline{PF} + \overline{PF'}) + \overline{F'F} = 12$$

$$2a + 2c = 12 \quad \therefore a + c = 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = 4, \quad c = 2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 \text{이므로}$$

$$b^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 4^2 + 12 = 28$$

- 20 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 의 두 초점은 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$

이때 $A(0, 3)$ 이므로

$$\overline{OA} = \overline{OF}$$

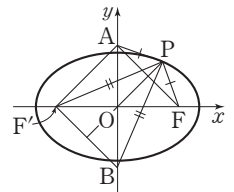
또 $\overline{AP} = \overline{PF}$ 이고 선분 PO는 공통이므로

$\triangle PAO \cong \triangle PFO$ (SSS 합동)

즉, 선분 OP는 선분 AF의 수직이등분선이므로

$\angle POA = \angle POF = 45^\circ$ 이고, 점 P는 직선 $y = x$ 위의 점

이다.



$B(0, -3), F'(-3, 0)$ 이므로 $\overline{PB}=\overline{PF}'$
 타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF}'=8$ 이고,
 $\overline{AF}'=\overline{F'B}=3\sqrt{2}$ 이므로 사각형 $AF'BP$ 의 둘레의 길이는
 $\overline{AF}'+\overline{F'B}+\overline{BP}+\overline{AP}=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}+(\overline{PF}'+\overline{PF})$
 $=8+6\sqrt{2}$
 따라서 $a=8, b=6$ 이므로 $a+b=14$

21 타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF}'=4$
 $\overline{PF}>0, \overline{PF}'>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의
 하여
 $\overline{PF}+\overline{PF}'\geq 2\sqrt{\overline{PF}\times\overline{PF}'}$
 $4\geq 2\sqrt{\overline{PF}\times\overline{PF}'}$
 $\therefore \sqrt{\overline{PF}\times\overline{PF}'}\leq 2$ (단, 등호는 $\overline{PF}=\overline{PF}'$ 일 때 성립)
 양변을 제곱하면 $\overline{PF}\times\overline{PF}'\leq 4$
 따라서 $\overline{PF}\times\overline{PF}'$ 의 최댓값은 4이다.

22 타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF}'=2\times 6=12$
 $\therefore \overline{PF}^2+\overline{PF}'^2=(\overline{PF}+\overline{PF}')^2-2\overline{PF}\times\overline{PF}'$
 $=144-2\overline{PF}\times\overline{PF}' \dots\dots \textcircled{1}$
 $\overline{PF}>0, \overline{PF}'>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의
 하여
 $\overline{PF}+\overline{PF}'\geq 2\sqrt{\overline{PF}\times\overline{PF}'}$
 $12\geq 2\sqrt{\overline{PF}\times\overline{PF}'}$
 $\therefore \sqrt{\overline{PF}\times\overline{PF}'}\leq 6$ (단, 등호는 $\overline{PF}=\overline{PF}'$ 일 때 성립)
 양변을 제곱하면 $\overline{PF}\times\overline{PF}'\leq 36$
 이때 $\textcircled{1}$ 에 의하여
 $\overline{PF}^2+\overline{PF}'^2=144-2\overline{PF}\times\overline{PF}'$
 $\geq 144-2\times 36=72$
 따라서 $\overline{PF}^2+\overline{PF}'^2$ 의 최솟값은 72이다.

23 $D(a, b) (a>0, b>0)$ 라 하면 직사각형 $ABCD$ 의 넓이는
 $2a\times 2b=4ab$
 점 $D(a, b)$ 가 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$ 위의 점이므로
 $\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{36}=1$
 $\frac{a^2}{16}>0, \frac{b^2}{36}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의
 하여
 $\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{36}\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{16}\times\frac{b^2}{36}}$
 $1\geq \frac{ab}{12} (\because a>0, b>0)$
 $\therefore ab\leq 12$ (단, 등호는 $\frac{a^2}{16}=\frac{b^2}{36}$ 일 때 성립)
 따라서 $4ab\leq 48$ 이므로 구하는 넓이의 최댓값은 48이다.

24 $A(a, 0), B(0, b)$ 라 하면 $\overline{AB}=8$ 에서
 $\sqrt{(-a)^2+b^2}=8$
 양변을 제곱하면
 $a^2+b^2=64 \dots\dots \textcircled{1}$
 선분 AB 를 1:3으로 내분하는 점 P 의 좌표를 (x, y) 라
 하면
 $x=\frac{1\times 0+3\times a}{1+3}=\frac{3}{4}a$
 $y=\frac{1\times b+3\times 0}{1+3}=\frac{b}{4}$
 이 식을 각각 a, b 에 대하여 풀면
 $a=\frac{4}{3}x, b=4y$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 도형의 방정식은
 $(\frac{4}{3}x)^2+(4y)^2=64$
 $\therefore \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$

25 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 P 의 좌표를 (a, b) 라 하면
 $\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{4}=1 \dots\dots \textcircled{1}$
 $H(0, b)$ 이므로 선분 PH 의 중점 M 의 좌표를 (x, y) 라
 하면
 $x=\frac{a}{2}, y=b$
 $\therefore a=2x, b=y$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 도형의 방정식은
 $\frac{(2x)^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$
 $\therefore 16x^2+3y^2=12$
 따라서 $p=16, q=3$ 이므로
 $p-q=13$

26 점 P 의 좌표를 (x, y) 라 하면
 $\sqrt{x^2+(y-2)^2}:|y-8|=1:2$
 $\therefore 2\sqrt{x^2+(y-2)^2}=|y-8|$
 양변을 제곱하면 도형의 방정식은
 $4x^2+4(y-2)^2=(y-8)^2$
 $4x^2+3y^2=48$
 $\therefore \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$
 따라서 이 타원의 단축의 길이는
 $2\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

1 $\sqrt{10}$	2 ③	3 5	4 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$
5 ④	6 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$	7 $\frac{4}{5}$	8 ④
9 ③	10 $4\sqrt{3}$	11 ②	12 ①
13 \neg, \square	14 ④	15 ③	16 20
17 7	18 9	19 ①	20 3
21 ①	22 $\frac{x^2}{4}-\frac{(y-5)^2}{36}=1$	23 $8\sqrt{10}$	24 ③
25 ④	26 4		

1 타원 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{25} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(0, \sqrt{15}), (0, -\sqrt{15})$
 이 두 점이 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{a^2} = -1$ 의 두 초점과 일치하므로 $5 = (\sqrt{15})^2 - a^2, a^2 = 10$
 $\therefore a = \sqrt{10} (\because a > 0)$

2 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{36} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(\sqrt{a^2+36}, 0), (-\sqrt{a^2+36}, 0)$
 이 두 초점 사이의 거리가 $6\sqrt{6}$ 이므로 $|\sqrt{a^2+36} - (-\sqrt{a^2+36})| = 6\sqrt{6}$
 $2\sqrt{a^2+36} = 6\sqrt{6}, \sqrt{a^2+36} = 3\sqrt{6}$
 양변을 제곱하면 $a^2 + 36 = 54 \therefore a^2 = 18$

3 중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 이라 하자.
 주축의 길이가 8이므로 $2a = 8 \therefore a = 4$
 중심에서 초점까지의 거리가 6이므로 $b^2 = 6^2 - a^2 = 6^2 - 4^2 = 20$
 즉, 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$
 이 쌍곡선이 점 $(6, k)$ 를 지나므로 $\frac{6^2}{16} - \frac{k^2}{20} = 1, k^2 = 25 \therefore k = 5 (\because k > 0)$

4 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 꼭짓점의 좌표는 $(2, 0), (-2, 0)$
 이 두 점을 초점으로 하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 이라 하면 $b^2 = 2^2 - a^2 = 4 - a^2$ ㉠

한편 쌍곡선이 점 $(3, \sqrt{2})$ 를 지나므로

$$\frac{3^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{2})^2}{b^2} = 1 \therefore \frac{9}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1 \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\frac{9}{a^2} - \frac{2}{4-a^2} = 1, 9(4-a^2) - 2a^2 = a^2(4-a^2)$$

$$(a^2-3)(a^2-12) = 0 \therefore a^2 = 3 \text{ 또는 } a^2 = 12$$

그런데 ㉠에서 $4 - a^2 > 0$, 즉 $a^2 < 4$ 이므로

$$a^2 = 3, b^2 = 1$$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$

5 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{4}{a}x$$

이때 점근선 중 하나의 기울기가 3이고 a 는 양수이므로

$$\frac{4}{a} = 3 \therefore a = \frac{4}{3}$$

6 타원 $x^2 + 5y^2 = 5$, 즉 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 의 두 초점의 좌표는

$$(2, 0), (-2, 0)$$

이 두 점을 꼭짓점으로 하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0) \text{이라 하면}$$

점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{3}{2}x$ 이므로

$$\frac{b}{2} = \frac{3}{2} \therefore b = 3$$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

7 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$ 위의 점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$a^2 - \frac{b^2}{4} = -1 \therefore 4a^2 - b^2 = -4 \dots\dots ㉠$$

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm 2x \therefore 2x - y = 0, 2x + y = 0$$

점 P(a, b)와 직선 $2x - y = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2a - b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2a - b|}{\sqrt{5}}$$

또 점 P(a, b)와 직선 $2x + y = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2a + b|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2a + b|}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PA} \times \overline{PB} &= \frac{|2a - b|}{\sqrt{5}} \times \frac{|2a + b|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{|4a^2 - b^2|}{5} = \frac{|-4|}{5} (\because ㉠) \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

8 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 의 점근선의 방정식은 $y = \pm x$
 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{64} = -1$ 의 점근선의 방정식은 $y = \pm 4x$
 이때 직선 $y = mx$ 가 두 쌍곡선 중 어느 것과도 만나지 않으려면 $1 \leq |m| \leq 4$ 이어야 한다.
 따라서 정수 m 은 $-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$ 의 8개이다.

9 쌍곡선 $\frac{(x+6)^2}{20} - \frac{(y-4)^2}{16} = -1$ 은 쌍곡선 $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = -1$ 을 x 축의 방향으로 -6 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.
 즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = -1$ 의 두 초점의 좌표는 $(0, 6), (0, -6)$, 주축의 길이는 $2 \times 4 = 8$ 이므로 주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는 $(-6, 10), (-6, -2)$, 주축의 길이는 8 이다.
 $\therefore ab + cd + l = (-6) \times 10 + (-6) \times (-2) + 8 = -40$

10 쌍곡선의 중심은 선분 FF' 의 중점이므로 중심의 좌표는 $(\frac{7-5}{2}, \frac{3+3}{2}) \therefore (1, 3)$
 즉, 주어진 쌍곡선은 중심이 원점인 쌍곡선을 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.
 두 초점 F, F' 의 y 좌표가 같으므로 주어진 쌍곡선의 방정식을 $\frac{(x-1)^2}{a^2} - \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 이라 하자.
 두 초점으로부터 거리의 차가 6 이므로 $2a = 6$
 $\therefore a = 3$
 중심에서 초점까지의 거리가 6 이므로 $b^2 = 6^2 - a^2 = 6^2 - 3^2 = 27$
 즉, 주어진 쌍곡선의 방정식은 $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{27} = 1$
 이 식에 $y = 0$ 을 대입하여 정리하면 $\frac{(x-1)^2}{9} = \frac{4}{3}$
 $(x-1)^2 = 12$
 $\therefore x = 2\sqrt{3} + 1$ 또는 $x = -2\sqrt{3} + 1$
 따라서 구하는 두 점 사이의 거리는 $(2\sqrt{3} + 1) - (-2\sqrt{3} + 1) = 4\sqrt{3}$

11 두 직선 $y = \frac{1}{2}x + 1, y = -\frac{1}{2}x - 1$ 의 교점의 좌표는 $(-2, 0)$
 즉, 점 $(-2, 0)$ 이 쌍곡선의 중심이므로 이 쌍곡선은 중심이 원점인 쌍곡선을 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.
 쌍곡선의 중심과 한 초점의 x 좌표가 같으므로 주어진 쌍곡선의 방정식을 $\frac{(x+2)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 (a > 0, b > 0)$ 이라 하자.

한 점근선의 방정식이 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 이므로 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$
 $\therefore a = 2b \dots \textcircled{1}$
 중심에서 초점까지의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로 $a^2 = (\sqrt{10})^2 - b^2 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $(2b)^2 = 10 - b^2$
 $5b^2 = 10 \therefore b^2 = 2$
 이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 정리하면 $a^2 = 8$
 따라서 쌍곡선의 방정식은 $\frac{(x+2)^2}{8} - \frac{y^2}{2} = -1$ 이므로 구하는 주축의 길이는 $2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

12 $3x^2 - y^2 + 4y - 1 = 0$ 에서 $3x^2 - (y^2 - 4y + 4) = -3$
 $\therefore x^2 - \frac{(y-2)^2}{3} = -1$
 따라서 이 쌍곡선을 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = -1$ 과 겹쳐진다.

13 $5x^2 - 3y^2 - 20x - 6y - 13 = 0$ 에서 $5(x^2 - 4x + 4) - 3(y^2 + 2y + 1) = 30$
 $\therefore \frac{(x-2)^2}{6} - \frac{(y+1)^2}{10} = 1$
 즉, 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{10} = 1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.
 ㄱ. 주축의 길이는 $2 \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$
 ㄴ. 두 초점의 좌표는 $(6, -1), (-2, -1)$
 즉, 두 초점 사이의 거리는 $6 - (-2) = 8$
 ㄷ. 두 점근선의 교점은 쌍곡선의 중심과 같으므로 교점의 좌표는 $(2, -1)$
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14 $4x^2 - 8x - y^2 - 6y - 9 = 0$ 에서

$$4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 6y + 9) = 4$$

$$\therefore (x-1)^2 - \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

즉, 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이므로 기울기가 양수인 점근선의 방정식은

$$y+3=2(x-1) \quad \therefore y=2x-5$$

이 직선이 x 축과 만나는 점의 좌표는 $(\frac{5}{2}, 0)$, y 축과 만나는 점의 좌표는 $(0, -5)$ 이므로 구하는 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{4}$$

15 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 5 = 10$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 에서 쌍곡선의 정의에 의하여

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2 \times 3 = 6$$

$$\therefore |\overline{PF}^2 - \overline{PF'}^2| = |(\overline{PF} + \overline{PF}')(\overline{PF} - \overline{PF}')| = 10 \times 6 = 60$$

16 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 의 두 초점의 좌표는

$$(6, 0), (-6, 0) \quad \therefore \overline{FF'} = 12$$

$\overline{PF} = m, \overline{PF'} = n$ 이라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$|m - n| = 2 \times 4 = 8$$

$$\text{양변을 제곱하면 } m^2 - 2mn + n^2 = 64 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 $PF'F$ 가 직각삼각형이므로 $m^2 + n^2 = 144$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$144 - 2mn = 64 \quad \therefore mn = 40$$

따라서 삼각형 $PF'F$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}mn = \frac{1}{2} \times 40 = 20$

17 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(5, 0), (-5, 0)$

이므로 두 점 A, B는 이 쌍곡선의 초점이다.

즉, 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{CB} - \overline{CA} = 2 \times 4 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{DB} - \overline{DA} = 2 \times 4 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{을 하면 } \overline{CB} + \overline{DB} - \overline{CA} - \overline{DA} = 16$$

이때 $\overline{CA} + \overline{DA} = \overline{CD}$ 이므로

$$\overline{CB} + \overline{DB} - \overline{CD} = 16 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

한편 삼각형 BCD 의 둘레의 길이가 30이므로

$$\overline{CB} + \overline{DB} + \overline{CD} = 30 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} \text{을 하면 } 2\overline{CD} = 14 \quad \therefore \overline{CD} = 7$$

18 오른쪽 그림과 같이 쌍곡선

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = -1 \text{의 두 초점 중 } y \text{좌}$$

표가 음수인 점을 F' 이라 하면

$$F(0, 4), F'(0, -4)$$

쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2 \times 2 = 4$$

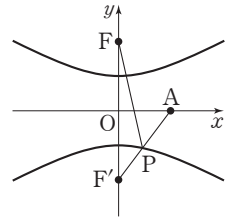
$$\therefore \overline{PF} = \overline{PF'} + 4$$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + (\overline{PF'} + 4) \geq \overline{AF'} + 4$$

이때 $\overline{AF'} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{PF} \geq 5 + 4 = 9$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PF}$ 의 최솟값은 9이다.



19 오른쪽 그림에서 삼각형 PQF가 정삼각형이므로

$$\angle PQF = \angle PFQ = 60^\circ$$

주어진 쌍곡선은 y 축에 대하여 대칭이고 점 Q가 y 축 위의 점이므로 삼각형 $QF'F$ 는 $\overline{QF} = \overline{QF'}$

인 이등변삼각형이다.

$$\therefore \angle QF'F = \angle QFF' = \frac{1}{2} \angle PQF = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

삼각형 $PF'F$ 에서

$$\angle PFF' = \angle PFQ + \angle QFF' = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$

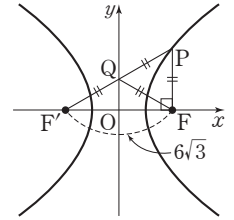
즉, 삼각형 $PF'F$ 가 직각삼각형이고

$$\angle PF'F = \angle QF'F = 30^\circ, \overline{FF'} = 6\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$\overline{PF} = 6, \overline{PF'} = 12$$

따라서 쌍곡선의 정의에 의하여 주축의 길이는

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 12 - 6 = 6$$



20 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 의 두 초점 F, F'

$$F(4, 0), F'(-4, 0)$$

오른쪽 그림과 같이 쌍곡선

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1 \text{의 한 꼭짓점을}$$

$A(3, 0)$ 이라 하면 원 C는 중

심이 F이고 반지름의 길이는

$$\overline{AF} = 1 \text{이다.}$$

점 Q는 원의 접점이므로

$$\angle PQF = 90^\circ$$

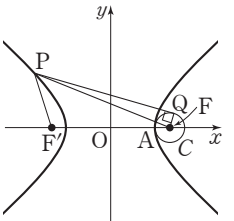
즉, 삼각형 PQF가 직각삼각형이므로

$$\overline{PF} = \sqrt{\overline{PQ}^2 + \overline{FQ}^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 + 1^2} = 9$$

쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2 \times 3 = 6$$

$$9 - \overline{PF'} = 6 \quad \therefore \overline{PF'} = 3$$



21 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2} : |x-1| = 2 : 1$$

$$\therefore \sqrt{(x-4)^2+y^2} = 2|x-1|$$

양변을 제곱하면 구하는 도형의 방정식은

$$(x-4)^2+y^2=4(x-1)^2, 3x^2-y^2=12$$

$$\therefore \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

22 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 점 Q의 좌표는 $(0, y)$

$$\overline{AQ} = 3\overline{PQ} \text{에서}$$

$$\sqrt{6^2+(y-5)^2} = 3|x|$$

양변을 제곱하면 구하는 도형의 방정식은

$$36+(y-5)^2=9x^2, 9x^2-(y-5)^2=36$$

$$\therefore \frac{x^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{36} = 1$$

23 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

점 P와 두 직선 $x-3y=0, x+3y=0$ 사이의 거리는 각각

$$\frac{|x-3y|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{|x-3y|}{\sqrt{10}}, \frac{|x+3y|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|x+3y|}{\sqrt{10}}$$

$$\overline{PA} \times \overline{PB} = 9 \text{에서 } \frac{|x-3y|}{\sqrt{10}} \times \frac{|x+3y|}{\sqrt{10}} = 9$$

$$|x^2-9y^2| = 90, x^2-9y^2 = \pm 90$$

$$\therefore \frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{10} = 1, \frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{10} = -1$$

즉, 두 쌍곡선의 주축의 길이는 각각 $2 \times 3\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$,

$2 \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$ 이므로 구하는 합은 $6\sqrt{10} + 2\sqrt{10} = 8\sqrt{10}$

24 방정식 $(k+2)x^2 + (k-3)y^2 = 2$ 가 나타내는 도형이 쌍곡선이 되려면

$$(k+2)(k-3) < 0 \quad \therefore -2 < k < 3$$

따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개이다.

25 $x^2 - 4x + k(y^2 + 2) = 0$ 에서

$$(x^2 - 4x + 4) + ky^2 = -2k + 4$$

$$\therefore (x-2)^2 + ky^2 = -2k + 4$$

이 방정식이 나타내는 도형이 타원이 되려면

$$1 \times k > 0, k \neq 1, -2k + 4 > 0$$

$$\therefore 0 < k < 1 \text{ 또는 } 1 < k < 2$$

따라서 실수 k 의 값이 될 수 있는 것은 ④ $\frac{1}{2}$ 이다.

26 $(x^2 + 2y^2 - x)k - 4x^2 + 3y^2 - x = 0$ 에서

$$(k-4)x^2 + (2k+3)y^2 - (k+1)x = 0$$

이때 y 항이 없으므로 이 방정식이 나타내는 도형이 포물선이 되려면

$$k-4=0, (2k+3)(k+1) \neq 0 \quad \therefore k=4$$

I-2. 이차곡선의 접선

01 이차곡선의 접선

18~22쪽

1 ⑤	2 $-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$	3 -1	4 3
5 -4	6 ③	7 $\frac{3}{2}$	8 45
10 5	11 ⑤	12 -2	13 1
15 $\frac{\sqrt{5}}{5}$	16 -3	17 -16	18 2
20 1	21 ④	22 -12	23 ④
25 10	26 12	27 ⑤	28 ③
30 2	31 $\frac{9}{11}$	32 ⑤	33 ②
35 4			34 ④

1 $y = \frac{1}{2}x + k$ 를 $x^2 = 4y$ 에 대입하면

$$x^2 = 4\left(\frac{1}{2}x + k\right) \quad \therefore x^2 - 2x - 4k = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (-4k) = 0$$

$$4k + 1 = 0 \quad \therefore k = -\frac{1}{4}$$

2 직선 $y = mx$ 를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y = m(x-2)$

$$y = m(x-2) \text{를 } x^2 + \frac{y^2}{36} = 1 \text{에 대입하면}$$

$$x^2 + \frac{\{m(x-2)\}^2}{36} = 1$$

$$\therefore (m^2 + 36)x^2 - 4m^2x + 4m^2 - 36 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-2m^2)^2 - (m^2 + 36)(4m^2 - 36) = 0$$

$$m^2 = 12 \quad \therefore m = \pm 2\sqrt{3}$$

3 $n(A \cap B) = 1$ 이므로 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = -1$ 과 직선

$y = \sqrt{2}x + k$ 는 한 점에서 만난다.

$$y = \sqrt{2}x + k \text{를 } x^2 - \frac{y^2}{3} = -1 \text{에 대입하면}$$

$$x^2 - \frac{(\sqrt{2}x + k)^2}{3} = -1$$

$$\therefore x^2 - 2\sqrt{2}kx - k^2 + 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-\sqrt{2}k)^2 - (-k^2 + 3) = 0$$

$$3k^2 - 3 = 0, k^2 = 1 \quad \therefore k = \pm 1$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은 $-1 \times 1 = -1$

4 포물선 $x^2=ay$ 에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은
 $y=x-\frac{a}{4} \quad \therefore x-y-\frac{a}{4}=0$

즉, $-1=b, -\frac{a}{4}=-1$ 이므로
 $a=4, b=-1 \quad \therefore a+b=3$

5 직선 $x-y+3=0$, 즉 $y=x+3$ 에 수직인 직선의 기울기는 -1 이므로 포물선 $y^2=ax$ 에 접하고 기울기가 -1 인 접선의 방정식은

$y=-x-\frac{a}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

이를 $y^2=ax$ 에 대입하면

$(-x-\frac{a}{4})^2=ax, x^2-\frac{a}{2}x+\frac{a^2}{16}=0$

$(x-\frac{a}{4})^2=0 \quad \therefore x=\frac{a}{4}$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$y=-\frac{a}{4}-\frac{a}{4}=-\frac{a}{2}$

즉, $A(\frac{a}{4}, -\frac{a}{2}), F(\frac{a}{4}, 0)$ 이므로 $\overline{AF}=\left|\frac{a}{2}\right|$

$\overline{AF}=1$ 이므로 $\left|\frac{a}{2}\right|=1$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은 $-2 \times 2 = -4$

6 포물선 $y^2=4x$ 에 접하고 기울기가 -1 인 접선의 방정식은
 $y=-x-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ 을 $y^2=4x$ 에 대입하면

$(-x-1)^2=4x, x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$

$\therefore A(1, -2)$

또 직선 $\textcircled{1}$ 은 포물선 $x^2=4y$ 의 접선이므로 $\textcircled{1}$ 을 $x^2=4y$ 에 대입하면

$x^2=4(-x-1), x^2+4x+4=0$

$(x+2)^2=0 \quad \therefore x=-2$

$\therefore B(-2, 1)$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(1+2)^2}=3\sqrt{2}$

7 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행할 때, 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소이므로 삼각형 APB의 넓이도 최소이다.

직선 AB의 기울기가 $\frac{4}{3}$ 이므로 포물선 $y^2=16x$ 에 접하고

기울기가 $\frac{4}{3}$ 인 접선의 방정식은

$y=\frac{4}{3}x+3$

따라서 점 A와 직선 $y=\frac{4}{3}x+3$, 즉 $4x-3y+9=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-12+9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{3}{5}$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ 이므로 삼각형 APB의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2} \times 5 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{2}$

8 직선 $3x-y+12=0$, 즉 $y=3x+12$ 와 평행한 직선의 기울기는 3이므로 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1$ 에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식은

$y=3x \pm \sqrt{3 \times 3^2 + 9}$

$\therefore y=3x \pm 6$

따라서 $m=3, n=-6$ 또는 $m=3, n=6$ 이므로

$m^2+n^2=9+36=45$

9 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 (b>a>0)$ 이라 하면 초점의 좌표가 $(0, 2), (0, -2)$ 이므로

$b^2-a^2=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

또 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y=x \pm \sqrt{a^2+b^2}$

즉, 직선 $y=x-\sqrt{a^2+b^2}$ 이 직선 $y=x-4$ 와 일치하므로

$\sqrt{a^2+b^2}=4$

$\therefore a^2+b^2=16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}+\textcircled{2}$ 을 하면

$2b^2=20, b^2=10$

$\therefore b=\sqrt{10} (\because b>0)$

따라서 타원의 장축의 길이는

$2 \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$

10 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{4}=1$ 에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y=x \pm \sqrt{a+4}$

따라서 두 접선 사이의 거리는 직선 $y=x+\sqrt{a+4}$ 위의 점 $(0, \sqrt{a+4})$ 와 직선 $y=x-\sqrt{a+4}$, 즉

$x-y-\sqrt{a+4}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-\sqrt{a+4}-\sqrt{a+4}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$

$2\sqrt{a+4}=6, \sqrt{a+4}=3$

$a+4=9 \quad \therefore a=5$

11 사각형 ABCD의 넓이가 최대가 될 때는 선분 AC를 밑변으로 하고 두 점 B, D와 직선 AC 사이의 거리가 각각 최대가 될 때이다.

즉, 두 점 B, D는 타원 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 에 접하고 기울기가 1인 접선의 접점이어야 한다.

타원 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{3 \times 1^2 + 1} \quad \therefore y = x \pm 2$$

즉, 직선 $y = x + 2$ 와 타원의 접점이 B이고, 직선 $y = x - 2$ 와 타원의 접점이 D이다.

두 직선 $y = x + 2, y = x - 1$ 사이의 거리는 직선 $y = x + 2$ 위의 점 (0, 2)와 직선 $y = x - 1$, 즉 $x - y - 1 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

또 두 직선 $y = x - 2, y = x - 1$ 사이의 거리는 직선 $y = x - 2$ 위의 점 (0, -2)와 직선 $y = x - 1$, 즉 $x - y - 1 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

한편 두 점 A, C의 좌표를 구하면

$$\frac{x^2}{3} + (x-1)^2 = 1 \text{에서 } 2x^2 - 3x = 0$$

$$x(2x-3) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}$$

즉, $A\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), C(0, -1)$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \end{aligned}$$

12 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{10} = -1$ 에 접하고 기울기가 -2인 접선의 방정식은

$$y = -2x \pm \sqrt{10 - 2 \times (-2)^2} \quad \therefore y = -2x \pm \sqrt{2}$$

따라서 두 직선의 y절편은 각각 $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ 이므로 그 곱은 $-\sqrt{2} \times \sqrt{2} = -2$

13 쌍곡선 $3x^2 - 4y^2 = 12$, 즉 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{4m^2 - 3}$$

이 직선이 점 (0, -1)을 지나므로

$$-1 = \pm \sqrt{4m^2 - 3}$$

양변을 제곱하면

$$1 = 4m^2 - 3, m^2 = 1 \quad \therefore m = 1 (\because m > 0)$$

14 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{a} = -1$ 에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{a-2}$$

즉, 직선 $y = x - \sqrt{a-2}$ 가 직선 $y = x - 1$ 과 일치하므로 $\sqrt{a-2} = 1$

$$a - 2 = 1 \quad \therefore a = 3$$

즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = -1$ 의 두 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$$

따라서 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{5}$ 이다.

15 쌍곡선 $8x^2 - y^2 = 16$, 즉 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{16} = 1$ 에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{2 \times 3^2 - 16} \quad \therefore y = 3x \pm \sqrt{2}$$

따라서 구하는 거리의 최솟값은 직선 $y = 3x$ 위의 점 (0, 0)과 직선 $y = 3x + \sqrt{2}$, 즉 $3x - y + \sqrt{2} = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

16 포물선 $y^2 = 6x$ 위의 점 (3, $3\sqrt{2}$)에서의 접선의 방정식은

$$3\sqrt{2}y = 3(x+3) \quad \therefore y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

이 직선이 점 (k, 0)을 지나므로

$$0 = \frac{\sqrt{2}}{2}k + \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \therefore k = -3$$

17 포물선 $x^2 = 8y$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x = 4(y+y_1) \quad \therefore y = \frac{x_1}{4}x - y_1$$

즉, 포물선 위의 두 점 (a, b), (c, d)에서의 접선의 기울기는 각각 $\frac{a}{4}, \frac{c}{4}$ 이고 두 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{a}{4} \times \frac{c}{4} = -1 \quad \therefore ac = -16$$

18 포물선 $y^2 = ax$ 위의 점 (a, a)에서의 접선의 방정식은

$$ay = \frac{a}{2}(x+a) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{a}{2}$$

즉, $A(-a, 0), B\left(0, \frac{a}{2}\right)$ 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a (\because a > 0)$$

따라서 $\frac{\sqrt{5}}{2}a = \sqrt{5}$ 이므로 $a = 2$

19 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(n^2, 2n)$ 에서의 접선의 방정식은 $2ny=2(x+n^2) \quad \therefore x-ny+n^2=0$

원 C 와 직선 $x-ny+n^2=0$ 이 만나려면 원의 중심 $(1, 0)$ 과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이인 6 이하이어야 하므로

$$\frac{|1+n^2|}{\sqrt{1+(-n)^2}} \leq 6, \sqrt{1+n^2} \leq 6$$

$$1+n^2 \leq 36 \quad \therefore n^2 \leq 35$$

따라서 자연수 n 은 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

20 점 $(-1, a)$ 가 타원 $x^2+2y^2=9$ 위의 점이므로 $(-1)^2+2a^2=9, a^2=4 \quad \therefore a=2 (\because a>0)$

즉, 타원 $x^2+2y^2=9$ 위의 점 $(-1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-x+2 \times 2y=9 \quad \therefore y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$$

이 직선이 점 $(b, 3)$ 을 지나므로

$$3=\frac{1}{4}b+\frac{9}{4} \quad \therefore b=3$$

$$\therefore b-a=3-2=1$$

21 점 $(-2, 3)$ 이 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{(-2)^2}{a}+\frac{3^2}{b}=1 \quad \therefore \frac{4}{a}+\frac{9}{b}=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ 위의 점 $(-2, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-\frac{2x}{a}+\frac{3y}{b}=1 \quad \therefore y=\frac{2b}{3a}x+\frac{b}{3}$$

이 직선의 y 절편이 6이므로

$$\frac{b}{3}=6 \quad \therefore b=18$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $a=8$

$$\therefore a+b=8+18=26$$

22 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{2}x}{3}-\frac{\sqrt{2}y}{6}=1 \quad \therefore y=2x-3\sqrt{2}$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이므로 기울기가

$$-\frac{1}{2}$$
이고 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=1$ 의 두 초점 $(0, \sqrt{3}),$

$(0, -\sqrt{3})$ 을 각각 지나는 두 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{3}, y=-\frac{1}{2}x-\sqrt{3}$$

따라서 두 직선의 x 절편은 각각 $2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}$ 이므로 그 곱은

$$2\sqrt{3} \times (-2\sqrt{3}) = -12$$

23 점 $(2, 1)$ 이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{2^2}{a^2}+\frac{1^2}{b^2}=1 \quad \therefore \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=1 \quad \therefore y=-\frac{2b^2}{a^2}x+b^2$$

이 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$-\frac{2b^2}{a^2}=-\frac{1}{2} \quad \therefore a^2=4b^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{4}{4b^2}+\frac{1}{b^2}=1, \frac{2}{b^2}=1$$

$$\therefore b^2=2$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$a^2=4 \times 2=8$$

따라서 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 의 두 초점의 좌표는 $(\sqrt{6}, 0),$

$(-\sqrt{6}, 0)$ 이므로 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{6}$ 이다.

24 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 위의 점 $(2a, \sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2ax}{a^2}-\sqrt{3}y=1 \quad \therefore y=\frac{2}{\sqrt{3}a}x-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

이 직선이 직선 $y=-\sqrt{3}x+1$ 과 수직이므로

$$\frac{2}{\sqrt{3}a} \times (-\sqrt{3}) = -1$$

$$-\frac{2}{a} = -1 \quad \therefore a=2$$

25 점 $(1, 2)$ 가 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{b}=1 \quad \therefore \frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=-1$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}=-1 \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{2y}{b}=1 \quad \therefore y=-\frac{b}{2a}x+\frac{b}{2} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

두 직선 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 이 서로 수직이므로

$$\frac{1}{2} \times \left(-\frac{b}{2a}\right) = -1 \quad \therefore b=4a \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{4}$ 을 연립하여 풀면 $a=2, b=8$

$$\therefore a+b=10$$

26 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 12$ 위의 점 P(4, 2)에서의 접선의 방정식은

$$4x - 2y = 12 \quad \therefore y = 2x - 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 12$, 즉 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{12} = 1$ 의 점근선의 방정식은 $y = \pm x$ 이므로 두 점근선은 서로 수직이다.

$y = x$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x = 2x - 6 \quad \therefore x = 6$$

직선 $\textcircled{1}$ 과 점근선 $y = x$ 의 교점을 A라 하면

$$A(6, 6)$$

$$\therefore \overline{OA} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$

또 $y = -x$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-x = 2x - 6 \quad \therefore x = 2$$

직선 $\textcircled{1}$ 과 점근선 $y = -x$ 의 교점을 B라 하면

$$B(2, -2)$$

$$\therefore \overline{OB} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 12$$

27 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1 y = 4(x + x_1)$$

이 직선이 점 $(-8, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 4(-8 + x_1) \quad \therefore x_1 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 포물선 $y^2 = 8x$ 위의 점이므로

$$y_1^2 = 8x_1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$y_1^2 = 8 \times 8 \quad \therefore y_1 = \pm 8$$

따라서 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + 4 \quad \text{또는} \quad y = -\frac{1}{2}x - 4$$

그런데 $m > 0, n > 0$ 이므로

$$m = \frac{1}{2}, n = 4$$

$$\therefore mn = 2$$

28 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1 x = -(y + y_1)$$

이 직선이 점 $(2, 6)$ 을 지나므로

$$2x_1 = -(6 + y_1) \quad \therefore y_1 = -2x_1 - 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 포물선 $x^2 = -2y$ 위의 점이므로

$$x_1^2 = -2y_1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$x_1^2 = -2(-2x_1 - 6), x_1^2 - 4x_1 - 12 = 0$$

$$(x_1 + 2)(x_1 - 6) = 0$$

$$\therefore x_1 = -2 \quad \text{또는} \quad x_1 = 6$$

$\textcircled{1}$ 에서 $x_1 = -2$ 일 때 $y_1 = -2, x_1 = 6$ 일 때 $y_1 = -18$

즉, 접선의 방정식은

$$y = 2x + 2 \quad \text{또는} \quad y = -6x + 18$$

따라서 두 접선의 기울기의 합은

$$2 + (-6) = -4$$

29 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1 y = -3(x + x_1)$$

이 직선이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$y_1 = -3(2 + x_1)$$

$$\therefore x_1 = -\frac{1}{3}y_1 - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 포물선 $y^2 = -6x$ 위의 점이므로

$$y_1^2 = -6x_1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$y_1^2 = -6\left(-\frac{1}{3}y_1 - 2\right)$$

$$\therefore y_1^2 - 2y_1 - 12 = 0$$

이 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2$$

이때 접점 P, Q의 좌표가 각각 $\left(-\frac{\alpha^2}{6}, \alpha\right), \left(-\frac{\beta^2}{6}, \beta\right)$ 이

므로 직선 PQ의 기울기는

$$\begin{aligned} \frac{\beta - \alpha}{-\frac{\beta^2}{6} + \frac{\alpha^2}{6}} &= \frac{-6(\beta - \alpha)}{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)} \\ &= -\frac{6}{\alpha + \beta} = -3 \end{aligned}$$

30 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{3} + \frac{y_1 y}{6} = 1$$

이 직선이 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$\frac{3y_1}{6} = 1 \quad \therefore y_1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{3} + \frac{y_1^2}{6} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\frac{x_1^2}{3} + \frac{2^2}{6} = 1$$

$$x_1^2 = 1 \quad \therefore x_1 = \pm 1$$

즉, 접선의 방정식은

$$y = -x + 3 \quad \text{또는} \quad y = x + 3$$

따라서 직선 $y = -x + 3$ 이 점 $(1, k)$ 를 지나므로

$$k = -1 + 3 = 2$$

31 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$9x_1x + y_1y = 3$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$9x_1 = 3 \quad \therefore x_1 = \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 타원 $9x^2 + y^2 = 3$ 위의 점이므로

$$9x_1^2 + y_1^2 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + y_1^2 = 3$$

$$y_1^2 = 2 \quad \therefore y_1 = \pm\sqrt{2}$$

즉, 접선의 방정식은

$$3x + \sqrt{2}y - 3 = 0 \quad \text{또는} \quad 3x - \sqrt{2}y - 3 = 0$$

이 직선이 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하려면 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 r 와 같아야 하므로

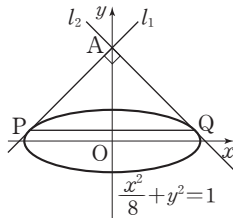
$$r = \frac{|-3|}{\sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{3^2 + (-\sqrt{2})^2}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

$$\therefore r^2 = \frac{9}{11}$$

32 y 축 위의 점 A에서 타원

$C: \frac{x^2}{8} + y^2 = 1$ 에 그은 두 접

선 l_1, l_2 중 기울기가 양수인 직선을 l_1 , 기울기가 음수인 직선을 l_2 라 하면 오른쪽 그림과 같다.



타원 C가 y 축에 대하여 대칭이므로 y 축 위의 점에서 그은 두 접선 l_1, l_2 는 y 축에 대하여 대칭이고 두 접점 P, Q도 y 축에 대하여 대칭이다.

즉, 삼각형 APQ는 직각이등변삼각형이고 두 직선 l_1, l_2 의 기울기는 각각 1, -1 이다.

타원 C에 접하고 기울기가 1, y 절편이 양수인 직선 l_1 의 방정식은

$$y = x + \sqrt{8 \times 1^2 + 1} \quad \therefore y = x + 3$$

이 식을 $\frac{x^2}{8} + y^2 = 1$ 에 대입하면

$$\frac{x^2}{8} + (x+3)^2 = 1$$

$$9x^2 + 48x + 64 = 0$$

$$(3x+8)^2 = 0$$

$$\therefore x = -\frac{8}{3}$$

따라서 점 P의 x 좌표는 $-\frac{8}{3}$ 이고 점 Q의 x 좌표는 $\frac{8}{3}$ 이

므로 선분 PQ의 길이는

$$\left| \frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right) \right| = \frac{16}{3}$$

33 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x - y_1y = -4$$

이 직선이 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$2x_1 = -4 \quad \therefore x_1 = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 $x^2 - y^2 = -4$ 위의 점이므로

$$x_1^2 - y_1^2 = -4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$(-2)^2 - y_1^2 = -4$$

$$y_1^2 = 8 \quad \therefore y_1 = \pm 2\sqrt{2}$$

즉, 접선의 방정식은

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2} \quad \text{또는} \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

34 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$2x_1x - y_1y = 1$$

이 직선이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$2x_1 - 3y_1 = 1 \quad \therefore y_1 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 $2x^2 - y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$2x_1^2 - y_1^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$2x_1^2 - \left(\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}\right)^2 = 1, 7x_1^2 + 2x_1 - 5 = 0$$

$$(x_1+1)(7x_1-5) = 0 \quad \therefore x_1 = -1 \quad \text{또는} \quad x_1 = \frac{5}{7}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } x_1 = -1 \text{일 때 } y_1 = -1, x_1 = \frac{5}{7} \text{일 때 } y_1 = \frac{1}{7}$$

즉, 접선의 방정식은

$$y = 2x + 1 \quad \text{또는} \quad y = 10x - 7$$

따라서 y 절편이 양수인 직선의 방정식은 $y = 2x + 1$ 이므로

$$m = 2, n = 1 \quad \therefore mn = 2$$

35 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x - 2y_1y = 2$$

이 직선이 점 A(0, 1)을 지나므로

$$-2y_1 = 2 \quad \therefore y_1 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 $x^2 - 2y^2 = 2$ 위의 점이므로

$$x_1^2 - 2y_1^2 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$x_1^2 - 2 \times (-1)^2 = 2, x_1^2 = 4 \quad \therefore x_1 = \pm 2$$

따라서 P(-2, -1), Q(2, -1)이므로 삼각형 APQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

II-1. 공간도형

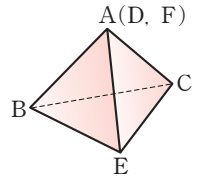
01 직선과 평면의 위치 관계

24~26쪽

1 7	2 2	3 ③	4 ④	5 14
6 ⑤	7 ㄴ, ㄷ, ㄹ	8 ③	9 ④	
10 ㄱ, ㄴ	11 90°	12 $\frac{\sqrt{6}}{6}$	13 ②	14 ①
15 60°	16 ③			

- 네 점 A, E, G, C는 한 평면 위의 점이므로 이 네 점으로 만들 수 있는 평면은 평면 AEGC
한 직선 위에 있지 않은 세 점으로 만들 수 있는 평면은 평면 ACD, 평면 AED, 평면 AGD, 평면 CDE, 평면 CDG, 평면 DEG
따라서 구하는 평면의 개수는 7
- 한 점에서 만나는 두 직선으로 만들 수 있는 평면은 평면 BCDEF
한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점으로 만들 수 있는 평면은 평면 AFD
따라서 구하는 평면의 개수는 2
- 한 직선 위에 있지 않은 세 점으로 만들 수 있는 평면은 평면 ADF
한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점으로 만들 수 있는 평면은 평면 ACE, 평면 DCE, 평면 FCE, 평면 AGH, 평면 DGH, 평면 FGH
그런데 네 점 C, D, E, F는 한 평면 위의 점이므로 평면 DCE와 평면 FCE는 서로 같은 평면이다.
따라서 구하는 평면의 개수는 1+5=6
- ④ 두 직선 AF, CE는 꼬인 위치에 있으므로 만나지 않는다.
⑤ 평면 DEF와 평행한 직선은 직선 AB, 직선 BC, 직선 AC의 3개이다.
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.
- 직선 AG와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 BC, 직선 CD, 직선 DE, 직선 EF, 직선 HI, 직선 IJ, 직선 JK, 직선 KL $\therefore m=8$
평면 EKJD와 평행한 직선은 직선 AB, 직선 AG, 직선 BH, 직선 CI, 직선 FL, 직선 GH $\therefore n=6$
 $\therefore m+n=8+6=14$

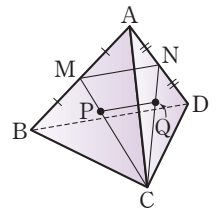
- 주어진 전개도로 만든 정사면체는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 직선 BD와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 CE



- ㄱ. 직선 AB와 평행한 직선은 직선 DE의 1개이다.
ㄴ. 직선 EF와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 AB, 직선 AC, 직선 AD의 3개이다.
ㄷ. 직선 BC와 한 점에서 만나는 평면은 평면 ADEB, 평면 ADFC의 2개이다.
ㄹ. 평면 DEF와 평행한 평면은 평면 ABC의 1개이다.
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

- ㄱ. 직선 CD와 직선 BQ는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.
ㄴ. 직선 AD와 직선 BC는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.

- 오른쪽 그림과 같이 직선 CP가 모서리 AB와 만나는 점을 M, 직선 CQ가 모서리 AD와 만나는 점을 N이라 하면 두 점 M, N은 각각 모서리 AB, AD의 중점이므로 삼각형 ABD에서



$$\overline{MN} \parallel \overline{BD} \quad \dots \textcircled{㉠}$$

또 두 점 P, Q는 각각 삼각형 ABC, ACD의 무게중심이므로 삼각형 CMN에서

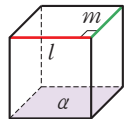
$$\overline{PQ} \parallel \overline{MN} \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에 의하여 } \overline{PQ} \parallel \overline{BD}$$

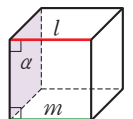
따라서 직선 PQ와 직선 BD는 평행하다.

따라서 보기에서 두 직선이 꼬인 위치에 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

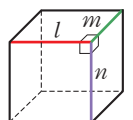
- ① [반례] 한 평면에 평행한 서로 다른 두 직선은 서로 수직이다.



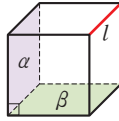
- ② [반례] 한 평면에 수직인 서로 다른 두 직선은 서로 평행하다.



- ③ [반례] 한 직선에 수직인 서로 다른 두 직선은 서로 수직이다.

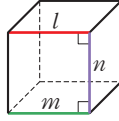


- ⑤ [반례] 한 직선에 평행한 서로 다른 두 평면은 서로 수직이다.

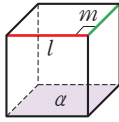


따라서 옳은 것은 ④이다.

- 10 나. 오른쪽 그림에서 $l \parallel m, l \perp n$ 이면 $m \perp n$ 이다.



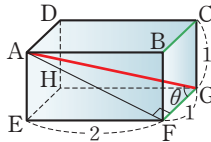
- 다. [반례] 오른쪽 그림에서 $l \perp m, l \parallel \alpha$ 이지만 $m \parallel \alpha$ 이다.



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

- 11 $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ 이므로 두 직선 AH, BE가 이루는 각의 크기는 두 직선 AH, CD가 이루는 $\angle AHD$ 의 크기와 같다. 이때 $\overline{AH} \perp \overline{CD}$ 이므로 $\angle AHD = 90^\circ$ 따라서 두 직선 AH, BE가 이루는 각의 크기는 90° 이다.

- 12 오른쪽 그림에서 $\overline{BC} \parallel \overline{FG}$ 이므로 $\angle AGF = \theta$ 한편 $\overline{FG} \perp$ (평면 AEFB)이므로 삼각형 AFG는 $\angle AFG = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.



직각삼각형 AEF에서

$$\overline{AF} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EF}^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

직각삼각형 AFG에서

$$\overline{AG} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{FG}^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

따라서 직각삼각형 AFG에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{FG}}{\overline{AG}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

- 13 $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ 이므로 두 직선 AB, EF가 이루는 각의 크기는 두 직선 AB, AC가 이루는 $\angle CAB$ 의 크기와 같다. 이때 삼각형 ABC는 정삼각형이므로 $\alpha = \angle CAB = 60^\circ$ $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ 이므로 두 직선 AD, BE가 이루는 각의 크기는 두 직선 AD, CD가 이루는 $\angle CDA$ 의 크기와 같다. 이때 삼각형 ACD는 정삼각형이므로 $\beta = \angle CDA = 60^\circ$ $\therefore \alpha + \beta = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

- 14 오른쪽 그림에서 $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ 이므로 $\angle FAB = \theta$

이때 삼각형 ABF는 $\overline{AF} = \overline{BF}$ 인 이등변삼각형이므로 점 F에서 변 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면

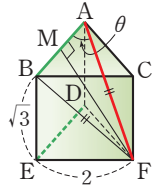
$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 1$$

직각삼각형 ADF에서

$$\overline{AF} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DF}^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{7}$$

따라서 직각삼각형 AMF에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{AM}}{\overline{AF}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$



- 15 주어진 전개도로 만든 정육면체는 오른쪽 그림과 같다.

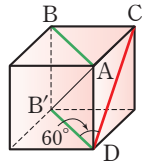
점 D를 지나면서 직선 AB에 평행한 선분을 $\overline{DB'}$ 이라 하면 $\overline{AB} \parallel \overline{DB'}$ 이므로 두 직선 AB, CD가 이루는 각의 크기는

두 직선 $\overline{DB'}$, CD가 이루는 $\angle B'DC$ 의 크기와 같다.

이때 삼각형 $\overline{CB'D}$ 는 정삼각형이므로

$$\angle B'DC = 60^\circ$$

따라서 두 직선 AB, CD가 이루는 각의 크기는 60° 이다.



- 16 오른쪽 그림과 같이 모서리 AB의 중점을 N이라 하면 $\overline{MG} \parallel \overline{NC}$ 이므로 $\angle ECN = \theta$

직각삼각형 NBC에서

$$\overline{NB} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 1$$

$$\overline{NC} = \sqrt{\overline{NB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

직각삼각형 EFG에서

$$\overline{EG} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{FG}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

한편 $\overline{CG} \perp$ (평면 EFGH)이므로 삼각형 CEG는

$\angle EGC = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

직각삼각형 CEG에서

$$\overline{EC} = \sqrt{\overline{EG}^2 + \overline{CG}^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$$

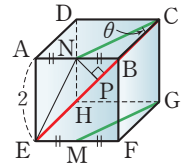
이때 삼각형 NEC는 $\overline{NE} = \overline{NC}$ 인 이등변삼각형이므로

점 N에서 변 EC에 내린 수선의 발을 P라 하면

$$\overline{PC} = \frac{1}{2} \overline{EC} = \sqrt{3}$$

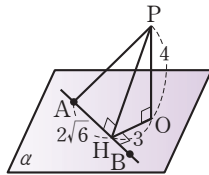
따라서 직각삼각형 NCP에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{PC}}{\overline{NC}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

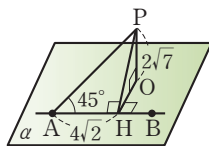


1 7	2 2	3 $2\sqrt{10}$	4 $\frac{7\sqrt{10}}{10}$	5 $\frac{5}{13}$
6 $\frac{3}{4}$	7 12	8 ④	9 $\frac{21\sqrt{10}}{10}$	10 60°
11 ③	12 $3\sqrt{5}$	13 6	14 $\frac{\sqrt{6}}{3}$	15 ②
16 ③	17 2	18 $\frac{\sqrt{6}}{4}$	19 ④	20 12
21 4	22 $\sqrt{13}$	23 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$	24 4	25 $\frac{3}{4}\pi$
26 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	27 $\frac{\sqrt{6}}{3}$	28 $\frac{2}{7}$	29 $\frac{\sqrt{3}}{12}$	30 $\sqrt{6}$
31 20π	32 $\frac{15}{2}\text{m}^2$	33 ③	34 12cm	

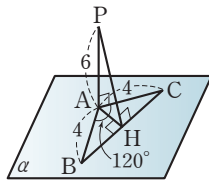
1 오른쪽 그림과 같이 선분 PH를
그으면 직각삼각형 PHO에서
 $\overline{PH} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
이때 $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로
삼수선 정리에 의하여
 $\overline{PH} \perp \overline{AB}$
따라서 직각삼각형 PAH에서
 $\overline{PA} = \sqrt{5^2 + (2\sqrt{6})^2} = 7$



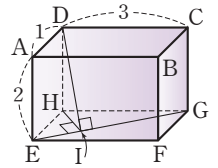
2 오른쪽 그림과 같이 선분 PH를
그으면 $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로
삼수선 정리에 의하여
 $\overline{PH} \perp \overline{AB}$
직각삼각형 PAH에서 $\angle PAH = 45^\circ$ 이므로
 $\overline{PH} = \overline{AH} \tan 45^\circ = 4\sqrt{2} \times 1 = 4\sqrt{2}$
따라서 직각삼각형 PHO에서
 $\overline{OH} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{7})^2} = 2$



3 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 직
선 BC에 내린 수선의 발을 H라
하면 $\overline{PA} \perp \alpha$, $\overline{PH} \perp \overline{BC}$ 이므로
삼수선 정리에 의하여
 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$
이때 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로
 $\angle BAH = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$
직각삼각형 ABH에서
 $\overline{AH} = \overline{AB} \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$
직각삼각형 PAH에서
 $\overline{PH} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$
따라서 점 P와 직선 BC 사이의 거리는 $2\sqrt{10}$ 이다.



4 오른쪽 그림과 같이 선분 HI를
그으면 $\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH),
 $\overline{DI} \perp \overline{EG}$ 이므로 삼수선 정리에
의하여
 $\overline{HI} \perp \overline{EG}$

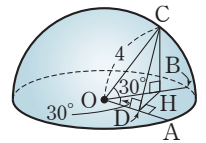


직각삼각형 HEG에서
 $\overline{EG} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$
삼각형 HEG의 넓이에서
 $\frac{1}{2} \times \overline{HE} \times \overline{HG} = \frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{HI}$
 $\frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \overline{HI} \quad \therefore \overline{HI} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$
따라서 직각삼각형 DHI에서
 $\overline{DI} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \frac{7\sqrt{10}}{10}$

5 $\overline{OC} \perp \overline{OA}$, $\overline{OB} \perp \overline{OC}$ 이므로
 $\overline{OC} \perp$ (평면 OAB)
 $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여
 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$

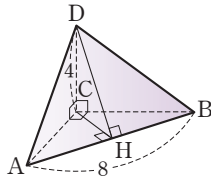
직각삼각형 OAB에서
 $\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
삼각형 OAB의 넓이에서
 $\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OH}$
 $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} \times 5 \times \overline{OH} \quad \therefore \overline{OH} = \frac{12}{5}$
따라서 직각삼각형 OHC에서
 $\overline{CH} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{13}{5}$
 $\therefore \sin \theta = \frac{\overline{OC}}{\overline{CH}} = \frac{1}{\frac{13}{5}} = \frac{5}{13}$

6 오른쪽 그림과 같이 점 H에서 선분
OA에 내린 수선의 발을 D라 하면
 $\overline{CH} \perp$ (반구의 밑면), $\overline{HD} \perp \overline{OA}$ 이
므로 삼수선 정리에 의하여
 $\overline{CD} \perp \overline{OA}$



직각삼각형 OHC에서
 $\overline{OH} = \overline{OC} \cos 30^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$
직각삼각형 ODH에서
 $\overline{OD} = \overline{OH} \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$
따라서 직각삼각형 ODC에서
 $\cos \theta = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{3}{4}$

- 7 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 모서리 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CD} \perp$ (평면 ABC), $\overline{DH} \perp \overline{AB}$
이므로 삼수선 정리에 의하여
 $\overline{CH} \perp \overline{AB}$

삼각형 ABD의 넓이가 20이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{DH} = 20, \quad \frac{1}{2} \times 8 \times \overline{DH} = 20$$

$$\therefore \overline{DH} = 5$$

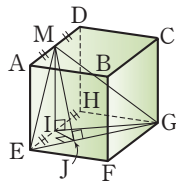
직각삼각형 DCH에서

$$\overline{CH} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH} = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$$

- 8 오른쪽 그림과 같이 점 M에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 I, 선분 EG에 내린 수선의 발을 J라 하고 선분 IJ를 그으면



$\overline{MI} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{MJ} \perp \overline{EG}$ 이

므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{IJ} \perp \overline{EG}$$

직각삼각형 HEG에서

$$\overline{EG} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

삼각형 IEG의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{IE} \times \overline{HG} = \frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{IJ}$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \overline{IJ}$$

$$\therefore \overline{IJ} = \sqrt{2}$$

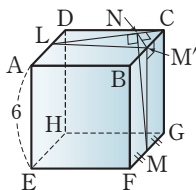
직각삼각형 MIJ에서

$$\overline{MJ} = \sqrt{4^2 + (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 MEG의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{MJ} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 12$$

- 9 오른쪽 그림과 같이 점 M에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 M'이라 하고 선분 M'N을 그으면



$\overline{MM'} \perp$ (평면 ABCD),

$\overline{MN} \perp \overline{CL}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{M'N} \perp \overline{CL}$$

점 L은 모서리 AD를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\overline{LD} = \frac{1}{3} \overline{AD} = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

직각삼각형 DLC에서

$$\overline{CL} = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$$

삼각형 CLM'의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{CM'} \times \overline{AB} = \frac{1}{2} \times \overline{CL} \times \overline{M'N}$$

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 6 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times \overline{M'N} \quad \therefore \overline{M'N} = \frac{9\sqrt{10}}{10}$$

따라서 직각삼각형 MM'N에서

$$\overline{MN} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{9\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \frac{21\sqrt{10}}{10}$$

- 10 오른쪽 그림과 같이 선분 MN을 그으면 $\overline{AN} \perp \alpha$, $\overline{AM} \perp l$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{MN} \perp l$$

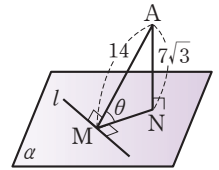
이때 점 A와 직선 l에 의하여 결

정되는 평면과 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\angle AMN = \theta$$

따라서 직각삼각형 AMN에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{AN}}{\overline{AM}} = \frac{7\sqrt{3}}{14} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \theta = 60^\circ$$



- 11 오른쪽 그림과 같이 선분 HF의 중점을 N이라 하면 두 삼각형 MHF, GHF는 이등변삼각형이므로

$$\overline{MN} \perp \overline{HF}, \quad \overline{GN} \perp \overline{HF}$$

$$\therefore \angle MNG = \theta$$

직각삼각형 EFG에서

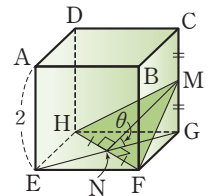
$$\overline{EG} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{GN} = \frac{1}{2} \overline{EG} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

직각삼각형 MNG에서

$$\overline{MN} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{GN}}{\overline{MN}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



- 12 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 정사각형 BCDE의 두 대각선의 교점이므로

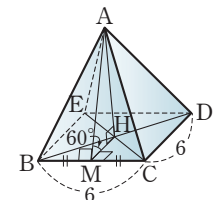
$$\overline{BH} = \overline{CH}$$

모서리 BC의 중점을 M이라 하

면 두 삼각형 ABC, HBC는 이등변삼각형이므로

$$\overline{AM} \perp \overline{BC}, \quad \overline{HM} \perp \overline{BC}$$

$$\therefore \angle AMH = 60^\circ$$



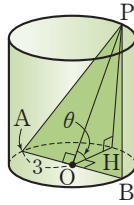
직각삼각형 AMH에서

$$\overline{AM} = \frac{\overline{MH}}{\cos 60^\circ} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

따라서 직각삼각형 ABM에서

$$\overline{AB} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$$

- 13** 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 점 O를 포함한 원기둥의 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PH} \perp$ (점 O를 포함한 밑면), $\overline{PO} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{HO} \perp \overline{AB}$



$$\therefore \angle POH = \theta$$

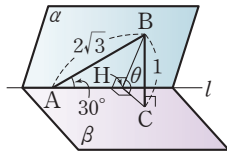
직각삼각형 POH에서

$$\overline{PO} = \frac{\overline{HO}}{\cos \theta} = \frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 3\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{PH} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 3^2} = 6$$

따라서 원기둥의 높이는 6이다.

- 14** 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BC} \perp \beta$, $\overline{BH} \perp l$ 이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{CH} \perp l$



$$\therefore \angle BHC = \theta$$

직각삼각형 BAH에서

$$\overline{BH} = \overline{AB} \sin 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

직각삼각형 BHC에서

$$\overline{CH} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{CH}}{\overline{BH}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

- 15** 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle ABH = \theta$$

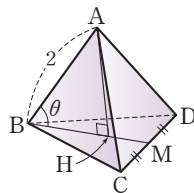
모서리 CD의 중점을 M이라 하면

점 H는 정삼각형 BCD의 무게중심이므로

$$\overline{BH} = \frac{2}{3} \overline{BM} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서 직각삼각형 ABH에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



- 16** 오른쪽 그림과 같이 점 M에서 평면 DEF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle MEH = \theta$$

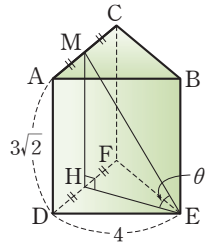
점 H는 모서리 DF의 중점이므로

$$\overline{EH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

따라서 직각삼각형 MHE에서

$$\overline{EM} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{30}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{EH}}{\overline{EM}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$



- 17** 점 F에서 평면 AEHD에 내린 수선의 발이 E이므로

$$\angle FDE = \alpha$$

$$\overline{DF} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}, \overline{DE} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

점 D에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발이 H이므로

$$\angle DFH = \beta$$

$$\overline{FH} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{이므로}$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{FH}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

점 F에서 평면 DHGC에 내린 수선의 발이 G이므로

$$\angle FDG = \gamma$$

$$\overline{DG} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{이므로}$$

$$\cos \gamma = \frac{\overline{DG}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} + \frac{5}{6} = 2$$

- 18** 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 평면 BEFC에 내린 수선의 발이 F이므로

$$\angle DBF = \theta$$

$\overline{DE} = a$ 라 하면 직각삼각형

DEF에서

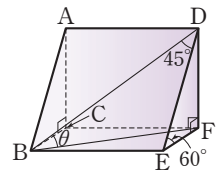
$$\overline{DF} = \overline{DE} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

직각삼각형 DBE에서

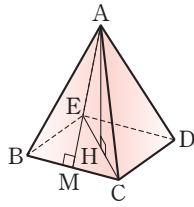
$$\overline{DB} = \frac{\overline{DE}}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} a$$

따라서 직각삼각형 DBF에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{DF}}{\overline{DB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} a}{\sqrt{2} a} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$



- 19 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{HC} = \frac{1}{2}\overline{EC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

직선 AC와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\angle ACH = 60^\circ$$

직각삼각형 AHC에서

$$\overline{AC} = \frac{\overline{HC}}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

점 A에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로

$$\overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

직각삼각형 AMC에서

$$\overline{AM} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 1^2} = \sqrt{7}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AM} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{7} = \sqrt{7}$$

- 20 $\tan \theta = \sqrt{3}$ 이므로 $\theta = 60^\circ$

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 60^\circ \text{이므로}$$

$$6 = \overline{AB} \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore \overline{AB} = 12$$

- 21 타원의 장축의 길이를 $2a$, 단축의 길이를 $2b$ 라 하자.

타원의 장축의 밑면을 포함한 평면 위로의 정사영은 원기둥의 밑면의 지름이고, 단면과 밑면이 이루는 각의 크기가 45° 이므로

$$4 = 2a \cos 45^\circ \quad \therefore a = 2\sqrt{2}$$

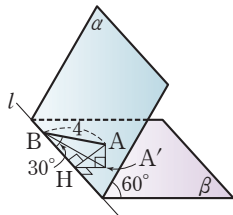
타원의 단축의 길이는 원기둥의 밑면의 지름의 길이와 같으므로

$$2b = 4 \quad \therefore b = 2$$

따라서 타원의 두 초점 사이의 거리는

$$2\sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 4$$

- 22 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 β 에 내린 수선의 발을 A' , 점 A에서 교선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AA'} \perp \beta$, $\overline{AH} \perp \overline{BH}$ 이므로

삼수선 정리에 의하여

$$\overline{A'H} \perp \overline{BH}$$

직각삼각형 ABH에서

$$\overline{AH} = \overline{AB} \sin 30^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\overline{BH} = \overline{AB} \cos 30^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\angle AHA' = 60^\circ$$

$$\therefore \overline{A'H} = \overline{AH} \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

따라서 선분 AB의 평면 β 위로의 정사영은 선분 $A'B'$ 이므로 직각삼각형 $A'B'H$ 에서

$$\overline{A'B'} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{13}$$

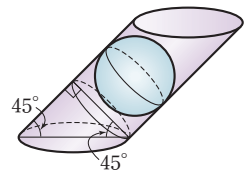
- 23 한 변의 길이가 6인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}$$

따라서 이 정삼각형의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는

$$9\sqrt{3} \cos 60^\circ = 9\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

- 24 구와 입체도형이 접하는 점들을 연결하면 구와 반지름의 길이가 같은 원이 된다.



이 원을 오른쪽 그림과 같이 밑면과 한 점에서 만나도록 평행이동하면 이 원과 밑면이 이루는 각의 크기는 45° 이다.

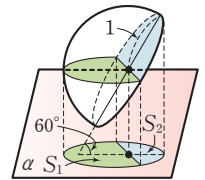
이 원을 포함하는 평면을 α 라 하면 밑면인 타원의 평면 α 위로의 정사영은 이 원이므로 그 넓이는

$$16\sqrt{2}\pi \cos 45^\circ = 16\sqrt{2}\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16\pi$$

구의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\pi r^2 = 16\pi, r^2 = 16 \quad \therefore r = 4 (\because r > 0)$$

- 25 오른쪽 그림과 같이 반구를 반구의 중심을 지나고 평면 α 와 평행한 평면으로 자를 때 생기는 단면인 반원의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S_1 , 반구의 밑면의 반



인 반원의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S_2 라 하면 구하는 정사영의 넓이는 $S_1 + S_2$ 이다.

S_1 은 반원의 넓이와 같으므로

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$S_2 = (\text{반원의 넓이}) \times \cos 60^\circ = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

따라서 구하는 넓이는

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

26 삼각형 ABC의 평면 DEF 위로의 정사영은 삼각형 DEF
이므로 $\triangle DEF = \triangle ABC \cos \theta$

$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\overline{BC} = \overline{CA} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ 이므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

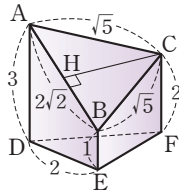
$$\overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\overline{CH} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

$$\text{또 } \triangle DEF = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3} \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



27 삼각형 DMF의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 HEF이므로

$$\triangle HEF = \triangle DMF \cos \theta$$

$$\text{직각삼각형 DAM에서 } \overline{DM} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

즉, 삼각형 DMF는 $\overline{DM} = \overline{MF}$ 인 이등변삼각형이다.

오른쪽 그림과 같이 점 M에서 선 분 DF에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\overline{DI} = \frac{1}{2}\overline{DF} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$$\therefore \overline{MI} = \frac{1}{2}\overline{DF} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

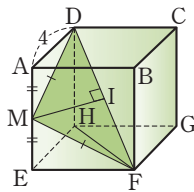
직각삼각형 DMI에서

$$\overline{DI} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \triangle DMF = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{6}$$

$$\text{또 } \triangle HEF = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8 \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\triangle HEF}{\triangle DMF} = \frac{8}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



28 삼각형 ADC의 평면 ABC 위로의 정사영은 삼각형 AHC이므로

$$\triangle AHC = \triangle ADC \cos \theta$$

그런데 $\overline{BH} : \overline{HC} = 5 : 2$ 이므로

$$\triangle ABH : \triangle AHC = 5 : 2 \quad \therefore \triangle AHC = \frac{2}{7}\triangle ABC$$

또 $\triangle ADC = \triangle ABC$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\triangle AHC}{\triangle ADC} = \frac{\frac{2}{7}\triangle ABC}{\triangle ABC} = \frac{2}{7}$$

29 두 평면 ABC, BCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 GBC이므로 $\triangle GBC = \triangle ABC \cos \theta$

$$\triangle GBC = \frac{1}{3}\triangle BCD = \frac{1}{3}\triangle ABC \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\triangle GBC}{\triangle ABC} = \frac{\frac{1}{3}\triangle ABC}{\triangle ABC} = \frac{1}{3}$$

따라서 삼각형 GBC의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle GBC \cos \theta = \left\{ \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{3})^2 \right\} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

30 두 평면 MFND, EFGH가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 사각형 MFND의 평면 EFGH 위로의 정사영은 사각형 EFGH이므로

$$\square EFGH = \square MFND \cos \theta$$

정육면체의 한 모서리의 길이를 $2a$ 라 하면 직각삼각형 MEF에서 $\overline{MF} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a$ ($\because a > 0$)

$$\text{이때 } \overline{MF} = \overline{FN} = \overline{ND} = \overline{DM} \text{이므로 사각형 MFND는}$$

마름모이다.

마름모 MFND의 두 대각선의 길이는

$$\overline{MN} = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = 2\sqrt{2}a \quad (\because a > 0)$$

$$\overline{DF} = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2 + (2a)^2} = 2\sqrt{3}a \quad (\because a > 0)$$

즉, 마름모 MFND의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}a \times 2\sqrt{3}a = 2\sqrt{6}a^2$$

$$\text{또 } \square EFGH = (2a)^2 = 4a^2 \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\square EFGH}{\square MFND} = \frac{4a^2}{2\sqrt{6}a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 사각형 EFGH의 평면 MFND 위로의 정사영의 넓이는

$$\square EFGH \cos \theta = 4a^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{3}a^2$$

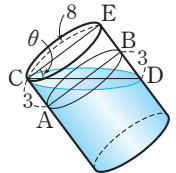
$$\text{즉, } \frac{4\sqrt{6}}{3}a^2 = 2\sqrt{6} \text{이므로}$$

$$a^2 = \frac{3}{2} \quad \therefore a = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (\because a > 0)$$

따라서 정육면체의 한 모서리의 길이는

$$2a = 2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$

31 오른쪽 그림과 같이 컵을 기울이기 전의 수면의 지름을 선분 AB라 하고, 컵을 물이 쏟아지기 직전까지 기울였을 때의 수면의 모양은 타원이므로 수면의 장축을 선분 CD, 원기둥의 밑면의 지름을 선분 CE라 하자.



컵을 기울이면 한쪽 수면이 올라온 만큼 반대쪽 수면은 내려가므로

$$\overline{AC} = \overline{BD} = 3$$

$$\therefore \overline{DE} = 6$$

직각삼각형 CDE에서

$$\overline{CD} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$\angle DCE = \theta$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

이때 컵의 밑면의 넓이는 $\pi \times 4^2 = 16\pi$

따라서 구하는 수면의 넓이를 S 라 하면

$$S \cos \theta = 16\pi, S \times \frac{4}{5} = 16\pi$$

$$\therefore S = 20\pi$$

32 직사각형 모양의 태양광 패널의 넓이는

$$5 \times 3 = 15(\text{m}^2)$$

태양광 패널이 지면과 이루는 각의 크기가 60° 이고 태양광선이 지면에 수직이므로 그림자의 넓이를 $S \text{m}^2$ 라 하면

$$S = 15 \cos 60^\circ = 15 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

따라서 지면에 생기는 태양광 패널의 그림자의 넓이는

$$\frac{15}{2} \text{m}^2 \text{이다.}$$

33 오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에

있는 원뿔의 모선의 양 끝점을 각각 A, B, 밑면의 중심을 O라 하고 원뿔의 밑면과 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\angle ABO = \theta$$

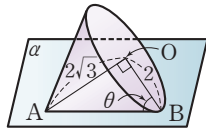
직각삼각형 ABO에서

$$\overline{AB} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{BO}}{\overline{AB}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

따라서 구하는 그림자의 넓이는 원뿔의 밑면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이와 같으므로

$$(\text{밑면의 넓이}) \times \cos \theta = \pi \times 2^2 \times \frac{1}{2} = 2\pi$$



34 오른쪽 그림과 같이 태양 광선과 수직이고 공의 중심을 지나서 평면이 지면과 이루는 각의 크기는 45° 이다.

이때 공의 반지름의 길이를

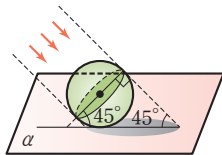
$r \text{cm}$ 라 하면 공의 그림자의 넓이가 $144\sqrt{2}\pi \text{cm}^2$ 이므로

$$\pi r^2 = 144\sqrt{2}\pi \cos 45^\circ$$

$$\pi r^2 = 144\sqrt{2}\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r^2 = 144 \quad \therefore r = 12 (\because r > 0)$$

따라서 공의 반지름의 길이는 12cm 이다.



II-2. 공간좌표

01 공간에서 점의 좌표

34~38쪽

1 -8	2 4	3 (3, -6, 1)	4 8
5 ①	6 $\sqrt{7}$	7 ⑤	8 -1
10 6	11 ⑤	12 ③	13 $\frac{15}{4}$
14 $(-\frac{9}{4}, -\frac{9}{2}, 0)$	15 ⑤		
16 (2, 1, 0), (3, 2, 0)	17 $3\sqrt{5}$	18 1	
19 ④	20 $2\sqrt{26}$	21 ②	22 $\frac{\sqrt{6}}{3}$
24 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$	25 $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1)$	26 10	27 ①
28 $\frac{5}{4}$	29 3	30 ⑤	31 7
33 2	34 (0, -17, 0)	35 (1, 2, -2)	32 2
36 ②	37 (1, 1, 2)	38 $\sqrt{83}$	39 3
40 6			

1 점 A(2, -3, 6)에서 zx 평면에 내린 수선의 발 B의 좌표는 (2, 0, 6)

점 B를 y 축에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는

$$(-2, 0, -6)$$

따라서 $a = -2, b = 0, c = -6$ 이므로

$$a + b + c = -8$$

2 점 A(a, 2, b-1)을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (-a, -2, -b+1) …… ㉠

점 B(b+2, -2, 2a+6)을 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (b+2, -2, -2a-6) …… ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$$-a = b + 2, -b + 1 = -2a - 6$$

$$\therefore a + b = -2, 2a - b = -7$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -3, b = 1 \quad \therefore b - a = 4$$

3 점 A의 좌표를 (a, b, c)라 하자.

점 A를 x 축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$$(a, -b, -c)$$

점 B를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는

$$(-a, -b, -c)$$

이 점이 점 (-3, 6, -1)과 일치하므로

$$-a = -3, -b = 6, -c = -1$$

$$\therefore a = 3, b = -6, c = 1$$

$$\therefore A(3, -6, 1)$$

다른 풀이

점 C(-3, 6, -1)을 yz평면에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 (3, 6, -1)

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점 A의 좌표는 (3, -6, 1)

4 점 C는 점 B(2, a, 3)에서 yz평면에 내린 수선의 발이므로 C(0, a, 3)

점 C를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (0, -a, -3)

이 점이 점 (0, -5, b)와 일치하므로

$$-a = -5, -3 = b$$

$$\therefore a = 5, b = -3 \quad \therefore a - b = 8$$

5 점 A(4, 3, -9)를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 (4, 3, 9)

점 A(4, 3, -9)를 원점에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는 (-4, -3, 9)

$$\therefore \overline{BC} = \sqrt{(-4-4)^2 + (-3-3)^2 + (9-9)^2} = 10$$

6 $\overline{PA} = 2\overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = 4\overline{PB}^2$ 이므로

$$(-3-2)^2 + (1-5)^2 + a^2$$

$$= 4\{(4-2)^2 + (7-5)^2 + (-2)^2\}$$

$$a^2 + 41 = 48, a^2 = 7$$

$$\therefore a = \sqrt{7} \quad (\because a > 0)$$

7 점 A(a, 2, -4)를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 (-a, 2, -4)

점 A(a, 2, -4)를 x축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 (a, -2, 4)

$\overline{PQ} = 10$ 이므로

$$\sqrt{(a+a)^2 + (-2-2)^2 + (4+4)^2} = 10$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4a^2 + 80 = 100, a^2 = 5 \quad \therefore a = \sqrt{5} \quad (\because a > 0)$$

8 $\overline{AB}^2 = (a+1)^2 + (-2)^2 + (1-1)^2 = a^2 + 2a + 5$

$$\overline{BC}^2 = (-a)^2 + (-1)^2 + (3-1)^2 = a^2 + 5$$

$$\overline{CA}^2 = (-1)^2 + (2+1)^2 + (1-3)^2 = 14$$

이때 삼각형 ABC가 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$14 = (a^2 + 2a + 5) + (a^2 + 5), a^2 + a - 2 = 0$$

$$(a+2)(a-1) = 0 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 1$$

따라서 모든 a의 값의 합은

$$-2 + 1 = -1$$

9 좌표공간에서 원점을 O라 하고 직선 $z = \sqrt{3}y$ 위의 점 H의 좌표를 $(0, a, \sqrt{3}a)$ ($a \neq 0$)라 하면 삼각형 OHP는 $\angle OHP = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{PO}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HP}^2$$

$$(-\sqrt{5})^2 + (-4)^2$$

$$= a^2 + (\sqrt{3}a)^2 + (\sqrt{5})^2 + (-a)^2 + (4 - \sqrt{3}a)^2$$

$$a^2 - \sqrt{3}a = 0, a(a - \sqrt{3}) = 0 \quad \therefore a = \sqrt{3} \quad (\because a \neq 0)$$

따라서 H(0, $\sqrt{3}$, 3)이므로

$$\overline{PH} = \sqrt{(-\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2 + (3-4)^2} = 3$$

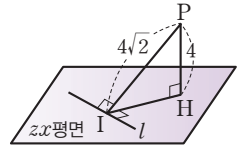
10 $\overline{AB} = \sqrt{(2-x-1)^2 + (-x+2)^2 + (x-1-2)^2}$

$$= \sqrt{3x^2 - 12x + 14} = \sqrt{3(x-2)^2 + 2}$$

즉, $x = 2$ 일 때 두 점 A, B 사이의 거리의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

따라서 $\alpha = 2, \beta = \sqrt{2}$ 이므로 $\alpha^2 + \beta^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2 = 6$

11 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 I라 하자.



$\overline{PH} \perp (zx\text{평면}), \overline{PI} \perp l$ 이므로

삼수선 정리에 의하여 $\overline{HI} \perp l$

H(2, 0, 3)이므로 $\overline{PH} = 4$

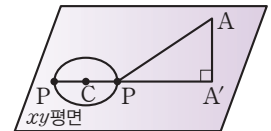
직각삼각형 PIH에서 $\overline{HI} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - 4^2} = 4$

따라서 점 H와 직선 l 사이의 거리는 4이다.

12 오른쪽 그림과 같이 점

A(2, 4, -2)에서 xy평면

에 내린 수선의 발을 A'이라 하면 A'(2, 4, 0)



원의 중심을 C(-1, 0, 0)이라 하면

$$\overline{A'C} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-4)^2} = 5$$

$\overline{A'P}$ 의 최댓값은 $\overline{A'C} + 1 = 6$, 최솟값은 $\overline{A'C} - 1 = 4$

이때 $\overline{AA'} = 2$ 이므로 직각삼각형 APA'에서

$$M = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}, m = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore M^2 + m^2 = (2\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{5})^2 = 60$$

13 구하는 점을 P(0, 0, c)라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(-3)^2 + 2^2 + (c-4)^2 = 3^2 + (-1)^2 + (c-2)^2$$

$$c^2 - 8c + 29 = c^2 - 4c + 14$$

$$-4c = -15 \quad \therefore c = \frac{15}{4}$$

따라서 구하는 점의 z좌표는 $\frac{15}{4}$

- 14 직선 $y=2x$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, 2a, 0)$ 이라 하면
 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로
 $(a-1)^2+(2a-2)^2+(-2)^2=(a-3)^2+(2a)^2+3^2$
 $5a^2-10a+9=5a^2-6a+18$
 $-4a=9 \quad \therefore a=-\frac{9}{4}$

따라서 점 P의 좌표는 $(-\frac{9}{4}, -\frac{9}{2}, 0)$

- 15 점 P가 yz 평면 위에 있으므로 $a=0$

$$\therefore P(0, b, c)$$

$$\overline{PA}=\overline{PB}$$
에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$ 이므로

$$2^2+(-b)^2+(-c)^2=1^2+(-b)^2+(1-c)^2$$

$$4+b^2+c^2=b^2+c^2-2c+2$$

$$2c=-2 \quad \therefore c=-1$$

$$\overline{PB}=\overline{PC}$$
에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$ 이므로

$$1^2+(-b)^2+(1-c)^2=3^2+(2-b)^2+(1-c)^2$$

$$b^2+c^2-2c+2=b^2+c^2-4b-2c+14$$

$$4b=12 \quad \therefore b=3$$

$$\therefore a+b+c=0+3+(-1)=2$$

- 16 xy 평면 위의 점 C의 좌표를 $(a, b, 0)$ 이라 하자.

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

$$\overline{AB}=\overline{BC}$$
에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$ 이므로

$$(3-2)^2+(1-2)^2+(-1+1)^2=(a-3)^2+(b-1)^2+1^2$$

$$2=a^2+b^2-6a-2b+11$$

$$\therefore a^2+b^2-6a-2b+9=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{BC}=\overline{CA}$$
에서 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$ 이므로

$$(a-3)^2+(b-1)^2+1^2=(2-a)^2+(2-b)^2+(-1)^2$$

$$a^2+b^2-6a-2b+11=a^2+b^2-4a-4b+9$$

$$\therefore a=b+1$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$(b+1)^2+b^2-6(b+1)-2b+9=0$$

$$b^2-3b+2=0, (b-1)(b-2)=0$$

$$\therefore b=1 \text{ 또는 } b=2$$

따라서 $b=1$ 일 때 $a=2$, $b=2$ 일 때 $a=3$ 이므로 구하는

점 C의 좌표는

$$(2, 1, 0), (3, 2, 0)$$

- 17 두 점 A, B의 z 좌표의 부호가 다르므로 두 점 A, B는 xy 평면을 기준으로 서로 반대쪽에 있다.

$$\therefore \overline{AP}+\overline{BP} \geq \overline{AB}$$

$$=\sqrt{(2-4)^2+(-5+1)^2+(1+4)^2}$$

$$=3\sqrt{5}$$

- 18 두 점 A, B의 y 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 zx 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A를 zx 평면에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

$$A'(1, -3, 4)$$

이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$ 이므로

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

$$=\sqrt{(-2-1)^2+(a+3)^2+(4-4)^2}$$

$$=\sqrt{a^2+6a+18}$$

따라서 $\sqrt{a^2+6a+18}=5$ 이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2+6a-7=0, (a+7)(a-1)=0$$

$$\therefore a=1 (\because a>0)$$

- 19 두 점 A, B의 y 좌표가 0이고 x 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 zx 평면 위에 있고 z 축을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A를 z 축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

$$A'(-3, 0, -1)$$

이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$ 이므로

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

$$=\sqrt{(4+3)^2+(2+1)^2}=\sqrt{58}$$

- 20 두 점 A, B의 z 좌표, x 좌표의 부호가 각각 같으므로 두 점 A, B는 xy 평면, yz 평면을 기준으로 각각 같은 쪽에 있다.

점 A를 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점을 A', 점 B를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$$A'(5, 1, -4), B'(-3, 3, 2)$$

이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{BQ}=\overline{B'Q}$ 이므로

$$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$$

$$\geq \overline{A'B'}$$

$$=\sqrt{(-3-5)^2+(3-1)^2+(2+4)^2}$$

$$=2\sqrt{26}$$

- 21 두 점 A, B의 yz 평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라 하면 $A'(0, -1, 2)$, $B'(0, -3, 1)$

$$\therefore \overline{A'B'}=\sqrt{(-3+1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$$

- 22 $\overline{AB}=\sqrt{(1+2)^2+(4-1)^2+(6-3)^2}=3\sqrt{3}$

두 점 A, B의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라 하면 $A'(-2, 1, 0)$, $B'(1, 4, 0)$

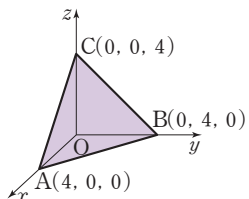
$$\therefore \overline{A'B'}=\sqrt{(1+2)^2+(4-1)^2}=3\sqrt{2}$$

이때 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$ 이므로

$$3\sqrt{2}=3\sqrt{3}\cos\theta \quad \therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

23 $\overline{AB} = \sqrt{(2-3)^2 + (-a)^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{a^2+3}$
 점 B는 y 좌표가 0이므로 zx 평면 위의 점이고, 점 A의 zx 평면 위로의 정사영을 A'이라 하면 A'(3, 0, 0)
 $\therefore \overline{A'B} = \sqrt{(2-3)^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$
 이때 $\overline{A'B} = \overline{AB} \cos 30^\circ$ 이므로
 $\sqrt{3} = \sqrt{a^2+3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3} = \sqrt{3(a^2+3)}$
 양변을 제곱하면
 $12 = 3(a^2+3), a^2 = 1 \quad \therefore a = \pm 1$
 따라서 모든 a 의 값의 곱은 $-1 \times 1 = -1$

24 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $4\sqrt{2}$ 인 정삼각형이므로
 $\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (4\sqrt{2})^2 = 8\sqrt{3}$



$\triangle ABO = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$
 이때 삼각형 ABO는 삼각형 ABC의 xy 평면 위로의 정사영이므로 두 평면 ABO, ABC가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면
 $\triangle ABO = \triangle ABC \cos \theta, 8 = 8\sqrt{3} \cos \theta$
 $\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 따라서 삼각형 ABO의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는
 $\triangle ABO \cos \theta = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

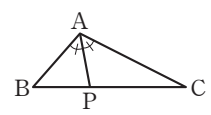
25 선분 AB를 1:2로 내분하는 점 P의 좌표는
 $\left(\frac{1 \times (-1) + 2 \times 2}{1+2}, \frac{1 \times (-5) + 2 \times (-2)}{1+2}, \frac{1 \times 4 + 2 \times 1}{1+2} \right)$
 $\therefore (1, -3, 2)$
 따라서 선분 OP의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{2}{2} \right) \quad \therefore \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1 \right)$

26 점 P를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 (3, 4, 5)
 선분 PQ를 2:1로 내분하는 점의 좌표는
 $\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times (-3)}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 4}{2+1}, \frac{2 \times 5 + 1 \times 5}{2+1} \right)$
 $\therefore (1, 4, 5)$
 따라서 $a=1, b=4, c=5$ 이므로 $a+b+c=10$

27 선분 PQ를 3:2로 내분하는 점 R의 좌표는
 $\left(\frac{3 \times 8 + 2 \times a}{3+2}, \frac{3 \times b + 2 \times 6}{3+2}, \frac{3 \times 5 + 2 \times (-5)}{3+2} \right)$

$\therefore \left(\frac{24+2a}{5}, \frac{3b+12}{5}, 1 \right)$
 이 점이 점 (6, -3, c)와 일치하므로
 $\frac{24+2a}{5} = 6, \frac{3b+12}{5} = -3, 1 = c$
 $\therefore a=3, b=-9, c=1$
 $\therefore 3a+2b-c = 3 \times 3 + 2 \times (-9) - 1 = -10$

28 점 P가 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC의 교점이므로
 $\overline{BP} : \overline{CP} = \overline{AB} : \overline{AC}$



이때 $\overline{AB} = \sqrt{(-1)^2 + (1+1)^2 + (-1-1)^2} = 3,$
 $\overline{AC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (3+1)^2 + (1-1)^2} = 5$ 이므로
 $\overline{BP} : \overline{CP} = 3 : 5$
 따라서 점 P는 변 BC를 3:5로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는
 $\left(\frac{3 \times (-2) + 5 \times 0}{3+5}, \frac{3 \times 3 + 5 \times 1}{3+5}, \frac{3 \times 1 + 5 \times (-1)}{3+5} \right)$
 $\therefore \left(-\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, -\frac{1}{4} \right)$
 따라서 $a = -\frac{3}{4}, b = \frac{7}{4}, c = -\frac{1}{4}$ 이므로
 $a+b-c = \frac{5}{4}$

29 선분 AB를 1:m으로 내분하는 점이 xy 평면 위에 있으므로 내분점의 z 좌표는 0이다.
 즉, $\frac{1 \times (-3) + m \times 1}{1+m} = 0$ 이므로
 $-3+m=0 \quad \therefore m=3$

30 선분 AB의 중점이 zx 평면 위에 있으므로 중점의 y 좌표는 0이다.
 즉, $\frac{b+6}{2} = 0$ 이므로 $b = -6$
 선분 AB를 1:2로 내분하는 점이 y 축 위에 있으므로 내분점의 x 좌표, z 좌표는 모두 0이다.
 즉, $\frac{-8+2a}{3} = 0, \frac{c-10}{3} = 0$ 이므로 $a=4, c=10$
 $\therefore a+b+c = 4 + (-6) + 10 = 8$

31 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ 이므로 점 P는 선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점이고, yz 평면 위에 있으므로 점 P의 x 좌표는 0이다.
 즉, $\frac{m \times 4 + n \times (-10)}{m+n} = 0$ 이므로 $2m = 5n$
 따라서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 5 : 2$ 이므로 $m=5, n=2$
 $\therefore m+n=7$

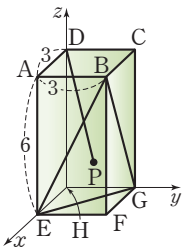
32 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = k$ (k 는 상수)라 하면 $\overline{BC} = k\overline{AC}$ 에서
 $\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : k$
 따라서 점 C는 선분 AB를 1 : k 로 내분하는 점이고, xy 평면 위에 있으므로 점 C의 z 좌표는 0이다.
 즉, $\frac{1 \times 4 + k \times (-2)}{1+k} = 0$ 이므로
 $4 - 2k = 0 \quad \therefore k = 2$

33 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는
 $\left(\frac{a+(a-6)-1}{3}, \frac{-1+2+b}{3}, \frac{3+b+(3-b)}{3} \right)$
 $\therefore \left(\frac{2a-7}{3}, \frac{b+1}{3}, 2 \right)$
 이 점이 점 $(-1, 1, c)$ 와 일치하므로
 $\frac{2a-7}{3} = -1, \frac{b+1}{3} = 1, 2 = c$
 $\therefore a=2, b=2, c=2 \quad \therefore a+b-c=2$

34 점 C의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 선분 CM을 2 : 1로 내분하는 점이 삼각형 ABC의 무게중심이므로 이 점의 좌표는
 $\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times a}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times b}{2+1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times c}{2+1} \right)$
 $\therefore \left(\frac{6+a}{3}, \frac{8+b}{3}, \frac{12+c}{3} \right)$
 이 점이 점 $G(2, -3, 4)$ 와 일치하므로
 $\frac{6+a}{3} = 2, \frac{8+b}{3} = -3, \frac{12+c}{3} = 4$
 $\therefore a=0, b=-17, c=0$
 따라서 점 C의 좌표는 $(0, -17, 0)$

35 삼각형 ABC의 무게중심은 삼각형 PQR의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는
 $\left(\frac{0+2+1}{3}, \frac{1+3+2}{3}, \frac{-8+5-3}{3} \right)$
 $\therefore (1, 2, -2)$

36 오른쪽 그림과 같이 점 H가 원점, 세 모서리 HE, HG, HD가 각각 x 축, y 축, z 축 위에 있도록 직육면체를 좌표공간에 놓으면
 $B(3, 3, 6), D(0, 0, 6), E(3, 0, 0), G(0, 3, 0)$
 즉, 삼각형 BEG의 무게중심 P의 좌표는
 $\left(\frac{3+3+0}{3}, \frac{3+0+3}{3}, \frac{6+0+0}{3} \right) \quad \therefore (2, 2, 2)$
 $\therefore \overline{DP} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (2-6)^2} = 2\sqrt{6}$



37 평행사변형 ABCD의 대각선 AC의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{4+2}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{3+1}{2} \right) \quad \therefore (3, 0, 2)$
 점 D의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{5+a}{2}, \frac{-1+b}{2}, \frac{2+c}{2} \right)$
 평행사변형의 두 대각선 AC, BD의 중점은 일치하므로
 $3 = \frac{5+a}{2}, 0 = \frac{-1+b}{2}, 2 = \frac{2+c}{2}$
 $\therefore a=1, b=1, c=2 \quad \therefore D(1, 1, 2)$

38 점 B의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 평행사변형 ABCD의 대각선 BD의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{a-1}{2}, \frac{b+8}{2}, \frac{c+3}{2} \right)$
 대각선 BD의 중점은 두 대각선의 교점과 일치하므로
 $\frac{a-1}{2} = -2, \frac{b+8}{2} = 3, \frac{c+3}{2} = 1$
 $\therefore a=-3, b=-2, c=-1$
 따라서 $B(-3, -2, -1)$ 이므로
 $\overline{AB} = \sqrt{(-3-6)^2 + (-2+1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{83}$

39 평행사변형 ABCD의 각 변의 중점을 연결하여 만든 사각형 PQRS도 평행사변형이고, 평행사변형 PQRS의 두 대각선의 교점은 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점과 일치한다.
 대각선 AC의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{2+6}{2} \right) \quad \therefore (-1, 0, 4)$
 따라서 $a=-1, b=0, c=4$ 이므로 $a+b+c=3$

40 마름모 ABCD의 대각선 AC의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{a+1}{2}, \frac{3-1}{2} \right) \quad \therefore \left(2, \frac{a+1}{2}, 1 \right)$
 대각선 BD의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{4+0}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{1+1}{2} \right) \quad \therefore \left(2, \frac{b+2}{2}, 1 \right)$
 마름모의 두 대각선 AC, BD의 중점은 일치하므로
 $\frac{a+1}{2} = \frac{b+2}{2} \quad \therefore b=a-1 \quad \dots \textcircled{1}$
 또 마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로
 $\overline{AD} = \overline{CD}$ 에서 $\overline{AD}^2 = \overline{CD}^2$
 $(-2)^2 + (2-a)^2 + (1-3)^2 = (-2)^2 + (2-1)^2 + (1+1)^2$
 $a^2 - 4a + 3 = 0, (a-1)(a-3) = 0$
 $\therefore a=3 (\because a > 1)$
 이를 ①에 대입하면 $b=2$
 $\therefore ab=6$

02 구의 방정식

39~42쪽

1 3	2 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$	3 ③
4 ⑤	5 -3	6 1
7 5	8 ④	
9 $32\sqrt{3}\pi$	10 ②	11 ④
12 54	13 0	
14 ②	15 2	16 9
17 10	18 ②	
19 ⑤	20 4	21 ③
22 42π	23 ③	
24 $2\sqrt{3}$	25 ④	26 $2\sqrt{6}\pi$
27 ③	28 64	
29 ②		

- 1 구 $(x+1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=16$ 의 중심의 좌표는 $(-1, -3, 2)$
 따라서 구의 반지름의 길이는 두 점 $(-1, -3, 2), (1, -1, 3)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(1+1)^2+(-1+3)^2+(3-2)^2}=3$$
- 2 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $(\frac{0-3+3}{3}, \frac{2+1+0}{3}, \frac{-1+3+1}{3})$
 $\therefore (0, 1, 1)$
 구의 반지름의 길이는 두 점 $(0, 1, 1), (0, 2, -1)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(2-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}$$

 따라서 구하는 구의 방정식은 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$
- 3 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는 $(\frac{1 \times 7 + 2 \times (-8)}{1+2}, \frac{1 \times (-2) + 2 \times (-2)}{1+2}, \frac{1 \times (-8) + 2 \times 7}{1+2})$
 $\therefore (-3, -2, 2)$
 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점 Q의 좌표는 $(\frac{3 \times 7 + 2 \times (-8)}{3+2}, \frac{3 \times (-2) + 2 \times (-2)}{3+2}, \frac{3 \times (-8) + 2 \times 7}{3+2})$
 $\therefore (1, -2, -2)$
 구의 중심은 선분 PQ의 중점과 같으므로 구의 중심의 좌표는 $(\frac{-3+1}{2}, \frac{-2-2}{2}, \frac{2-2}{2}) \therefore (-1, -2, 0)$
 구의 반지름의 길이는 구의 중심과 점 P 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(-3+1)^2+(-2+2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

 따라서 구하는 구의 방정식은 $(x+1)^2+(y+2)^2+z^2=8$

4 구의 방정식을 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ 이라 하자.

점 $(0, 0, 0)$ 을 지나므로 $D=0$

점 $(2, 0, 0)$ 을 지나므로 $4+2A=0 \therefore A=-2$

점 $(0, 2, 0)$ 을 지나므로 $4+2B=0 \therefore B=-2$

점 $(0, 0, 2)$ 를 지나므로 $4+2C=0 \therefore C=-2$

즉, 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=0$

$\therefore (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$

따라서 $a=1, b=1, c=1, r^2=3$ 이므로

$a+b+c+r^2=6$

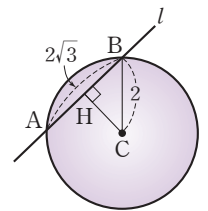
5 $x^2+y^2+z^2-4x+2ky-10z-6k=0$ 에서 $(x-2)^2+(y+k)^2+(z-5)^2=k^2+6k+29$
 이때 구의 부피가 최소이려면 구의 반지름의 길이 $\sqrt{k^2+6k+29}$ 가 최소이어야 한다.

$k^2+6k+29=(k+3)^2+20$ 이므로 $k=-3$ 일 때 반지름의 길이가 최소이다.

따라서 구하는 k 의 값은 -3 이다.

6 $x^2+y^2+z^2-8x-4y+4z+20=0$ 에서 $(x-4)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=4$
 이 구의 중심의 좌표는 $(4, 2, -2)$, 반지름의 길이는 2이다.

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C, 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CB}=2, \overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{3}$

직각삼각형 CBH에서

$\overline{CH}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

따라서 구의 중심과 직선 l 사이의 거리는 1이다.

7 $x^2+y^2+z^2+2x-2y-4z-5=0$ 에서 $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=11$

이 구의 중심의 좌표는 $(-1, 1, 2)$

이때 구의 중심은 선분 AB의 중점과 같으므로

$\frac{-4+a}{2}=-1, \frac{2+b}{2}=1, \frac{1+c}{2}=2$

따라서 $a=2, b=0, c=3$ 이므로 $a-b+c=5$

8 $\overline{AP} : \overline{BP}=2 : 1$ 이므로 $2\overline{BP}=\overline{AP} \therefore 4\overline{BP}^2=\overline{AP}^2$
 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$4\{x^2+(y+1)^2+z^2\}=x^2+y^2+(z-3)^2$

$\therefore x^2+y^2+z^2+\frac{8}{3}y+2z-\frac{5}{3}=0$

따라서 $a=0, b=\frac{8}{3}, c=2, d=-\frac{5}{3}$ 이므로

$a-b+c-d=1$

9 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면
 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로
 $\{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2\}$
 $+ \{(x+3)^2 + (y-3)^2 + z^2\}$
 $= (-3-1)^2 + (3+1)^2 + (-4)^2$
 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 6 = 0$
 $\therefore (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 12$
따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $(-1, 1, 2)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 구이므로 구하는 도형의 부피는
 $\frac{4}{3}\pi \times (2\sqrt{3})^3 = 32\sqrt{3}\pi$

10 점 B의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 점 B는 구 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ 위의 점이므로
 $(a-2)^2 + (b-1)^2 + c^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
선분 AB의 중점의 좌표를 (x, y, z) 라 하면
 $x = \frac{a}{2}, y = \frac{5+b}{2}, z = \frac{-2+c}{2}$
 $\therefore a = 2x, b = 2y - 5, c = 2z + 2$
이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $(2x-2)^2 + (2y-5-1)^2 + (2z+2)^2 = 4$
 $\therefore (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 1$
따라서 선분 AB의 중점이 나타내는 도형은 점 $(1, 3, -1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 구이므로 구하는 도형의 겹넓이는
 $4\pi \times 1^2 = 4\pi$

11 $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 2kz + k = 0$ 에서
 $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+k)^2 = k^2 - k + 13$
이 구가 xy 평면에 접하므로
 $\sqrt{k^2 - k + 13} = |-k|$
양변을 제곱하면 $k^2 - k + 13 = k^2$
 $\therefore k = 13$

12 구가 x 축, y 축, z 축에 동시에 접하므로 구의 중심 (a, b, c) 에서 x 축, y 축, z 축에 이르는 거리는 모두 구의 반지름의 길이와 같다.
즉, $|a| = |b| = |c|$ 이므로 $a^2 = b^2 = c^2$
구의 중심에서 x 축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(a, 0, 0)$
구의 반지름의 길이는 두 점 $(a, b, c), (a, 0, 0)$ 사이의 거리와 같으므로
 $\sqrt{(-b)^2 + (-c)^2} = 6, 2b^2 = 36$
 $\therefore b^2 = 18$
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 3b^2 = 3 \times 18 = 54$

13 구 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 9$ 의 중심을 C라 하면 $C(a, b, c)$ 이고 반지름의 길이는 3이다.
구가 yz 평면에 접하므로
 $|a| = 3$
 $\therefore a^2 = 9$
구의 중심 C에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(a, 0, 0)$
이때 선분 CH의 길이는 구의 반지름의 길이와 같으므로
 $\sqrt{(a-a)^2 + (-b)^2 + (-c)^2} = 3$
 $\therefore b^2 + c^2 = 9$
 $\therefore a^2 - b^2 - c^2 = 9 - 9 = 0$

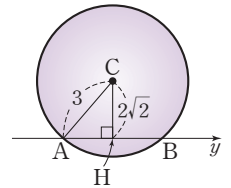
14 구가 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 동시에 접하고 점 $(2, 1, -1)$ 을 지나므로 반지름의 길이를 r 라 하면 구의 방정식은
 $(x-r)^2 + (y-r)^2 + (z+r)^2 = r^2$
이 구가 점 $(2, 1, -1)$ 을 지나므로
 $(2-r)^2 + (1-r)^2 + (-1+r)^2 = r^2$
 $r^2 - 4r + 3 = 0$
 $(r-1)(r-3) = 0$
 $\therefore r = 1$ 또는 $r = 3$
따라서 두 구의 반지름의 길이의 합은
 $1 + 3 = 4$

15 주어진 구의 방정식에 $x=0, z=0$ 을 대입하면
 $y^2 + 6y + 8 = 0$
 $(y+4)(y+2) = 0$
 $\therefore y = -4$ 또는 $y = -2$
따라서 두 교점의 좌표는 $(0, -4, 0), (0, -2, 0)$ 이므로
 $\overline{AB} = |-2 - (-4)| = 2$

다른 풀이

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 4z + 8 = 0$ 에서
 $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 9$

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C라 하고 점 $C(2, -3, 2)$ 에서 y 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(0, -3, 0)$



$\therefore \overline{CH} = \sqrt{(-2)^2 + (-3+3)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

따라서 직각삼각형 CAH에서
 $\overline{AH} = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1$
 $\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 1 = 2$

16 구의 반지름의 길이를 r 라 하면 구의 방정식은 $(x+4)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=r^2$
 이 방정식에 $x=0, y=0$ 을 대입하면 $(0+4)^2+(0+1)^2+(z-4)^2=r^2$
 $(z-4)^2=r^2-17 \quad \therefore z=4\pm\sqrt{r^2-17}$
 즉, 주어진 구와 z 축의 두 교점의 좌표는 $(0, 0, 4-\sqrt{r^2-17}), (0, 0, 4+\sqrt{r^2-17})$ 이고 $\overline{AB}=16$
 이므로 $|(4+\sqrt{r^2-17})-(4-\sqrt{r^2-17})|=16$
 $|2\sqrt{r^2-17}|=16, \sqrt{r^2-17}=8$
 양변을 제곱하면 $r^2-17=64, r^2=81 \quad \therefore r=9 (\because r>0)$
 따라서 구의 반지름의 길이는 9이다.

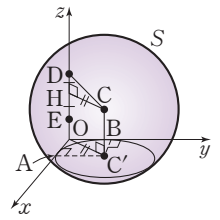
17 주어진 구의 방정식에 $y=0, z=0$ 을 대입하면 $x^2+2x-3=0, (x+3)(x-1)=0$
 $\therefore x=-3$ 또는 $x=1$
 즉, 주어진 구와 x 축의 두 교점의 좌표는 $(-3, 0, 0), (1, 0, 0)$ 이므로 $\overline{AB}=|1-(-3)|=4$
 이때 두 점 A, B는 구 위의 점이므로 두 선분 AC, BC의 길이는 모두 구의 반지름의 길이와 같다.
 $x^2+y^2+z^2+2x+2y-4z-3=0$ 에서 $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9 \quad \therefore \overline{AC}=\overline{BC}=3$
 따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=4+3+3=10$

18 구 S의 중심을 $C(a, b, c)$, 반지름의 길이를 r 라 하면 중심의 x 좌표, y 좌표, z 좌표가 모두 양수이므로 $a>0, b>0, c>0$
 구 S가 x 축, y 축과 접하는 점을 각각 A, B라 하면 $A(a, 0, 0), B(0, b, 0)$ 이고 $r=\overline{AC}=\overline{BC}$ 이므로 $r=\sqrt{(a-a)^2+b^2+c^2}=\sqrt{a^2+(b-b)^2+c^2}$
 $\therefore r^2=b^2+c^2=a^2+c^2$
 $\therefore a=b (\because a>0, b>0)$
 구 S의 방정식은 $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-c)^2=a^2+c^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 에 $z=0$ 을 대입하면 $(x-a)^2+(y-a)^2+(0-c)^2=a^2+c^2$
 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$
 이 원의 넓이가 64π 이므로 $\pi \times a^2=64\pi \quad \therefore a=8 (\because a>0)$
 $\textcircled{1}$ 에 $a=8$ 을 대입하면 $(x-8)^2+(y-8)^2+(z-c)^2=8^2+c^2$

이 식에 $x=0, y=0$ 을 대입하면 $(0-8)^2+(0-8)^2+(z-c)^2=64+c^2$
 $(z-c)^2=c^2-64 \quad \therefore z=c\pm\sqrt{c^2-64}$
 구 S가 z 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8이므로 $|(c+\sqrt{c^2-64})-(c-\sqrt{c^2-64})|=8$
 $|2\sqrt{c^2-64}|=8, \sqrt{c^2-64}=4$
 양변을 제곱하면 $c^2-64=16 \quad \therefore c^2=80$
 따라서 구 S의 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{8^2+80}=12$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 구 S의 중심을 C라 하고 점 C의 xy 평면 위로의 정사영을 C' 이라 하자.
 이때 구 S가 x 축과 y 축에 각각 접하므로 xy 평면에 의하여 잘린 구의 단면은 x 축과 y 축에 각각 접하고 점 C' 을 중심으로 하는 원이다.

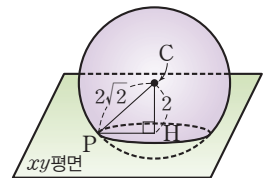


이 원의 넓이가 $64\pi=\pi \times 8^2$ 이므로 $\overline{AC'}=\overline{BC'}=8$
 또 구 S가 z 축과 만나는 두 점을 D, E, 점 C에서 z 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{DE}=8, \overline{CD}=\overline{CE}, \overline{CH} \perp \overline{DE}$
 이므로 $\overline{DH}=\frac{1}{2}\overline{DE}=4$
 $\overline{CH}=\overline{OC'}=\sqrt{\overline{OA'}^2+\overline{AC'}^2}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$
 직각삼각형 DHC에서 $\overline{DC}=\sqrt{4^2+(8\sqrt{2})^2}=12$
 따라서 구 S의 반지름의 길이는 12이다.

19 주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하여 정리하면 $(x-3)^2+(y+2)^2=4$
 따라서 주어진 구와 xy 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는 $2\pi \times 2=4\pi$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C, 점 C에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H, 구와 xy 평면이 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하면



$C(3, -2, 2), H(3, -2, 0)$ 이므로 $\overline{CP}=2\sqrt{2}, \overline{CH}=2$
 직각삼각형 CPH에서 $\overline{PH}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2^2}=2$

따라서 주어진 구와 xy 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는 $2\pi \times 2 = 4\pi$

20 주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$y^2 + z^2 + 2y - 4z + k = 0$$

$$\therefore (y+1)^2 + (z-2)^2 = 5-k$$

이때 주어진 구와 yz 평면이 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 1이므로

$$\sqrt{5-k} = 1, 5-k = 1 \quad \therefore k = 4$$

21 주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$y^2 + z^2 + 6y - 2kz + 7 = 0$$

$$\therefore (y+3)^2 + (z-k)^2 = k^2 + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 구의 방정식에 $y=0$ 을 대입하면

$$x^2 + z^2 - 4x - 2kz + 7 = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 + (z-k)^2 = k^2 - 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 원 $\textcircled{1}$ 의 넓이가 원 $\textcircled{2}$ 의 넓이의 2배이므로

$$\pi(k^2 + 2) = 2 \times \pi(k^2 - 3)$$

$$k^2 = 8 \quad \therefore k = 2\sqrt{2} (\because k > 0)$$

22 원기둥의 한 밑면의 둘레는 구와 yz 평면이 만나서 생기는 원과 같다.

주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$y^2 + z^2 - 4y + 2z - 2 = 0$$

$$\therefore (y-2)^2 + (z+1)^2 = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

즉, 원기둥의 밑면인 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{7}$ 이다.

또 $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 2z - 2 = 0$ 에서

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$$

구의 중심을 C라 하고 점 C(-3, 2, -1)에서 yz 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 원 $\textcircled{1}$ 의 중심이므로

$$H(0, 2, -1) \quad \therefore \overline{CH} = 3$$

따라서 원기둥의 높이는 $2\overline{CH} = 6$ 이므로 구하는 원기둥의 부피는 $\pi \times (\sqrt{7})^2 \times 6 = 42\pi$

23 $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 2z - 6 = 0$ 에서

$$x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 11$$

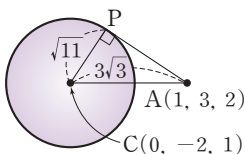
이 구의 중심을 C라 하면 C(0, -2, 1)이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(-1)^2 + (-2-3)^2 + (1-2)^2} = 3\sqrt{3}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 구에 그은 접선의 접점을 P라 하면 $\overline{CP} = \sqrt{11}$

따라서 직각삼각형 APC에서

$$\overline{AP} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{11})^2} = 4$$



24 $\overline{AC} = \sqrt{(-2-3)^2 + (3-5)^2 + 2^2} = \sqrt{33}$

오른쪽 그림과 같이 점 A

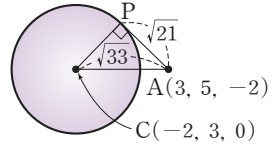
에서 구에 그은 접선의 접

점을 P라 하면

$$\overline{AP} = \sqrt{21}$$

따라서 직각삼각형 APC에서

$$\overline{CP} = \sqrt{(\sqrt{33})^2 - (\sqrt{21})^2} = 2\sqrt{3}$$



25 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - k = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = k+2$$

이 구의 중심을 C라 하면 C(1, 0, -1)이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-4)^2 + 3^2 + (-1+5)^2} = \sqrt{34}$$

오른쪽 그림과 같이 점

A에서 구에 그은 접선

의 접점을 P라 하면

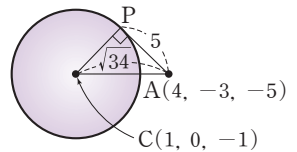
$$\overline{AP} = 5$$

직각삼각형 APC에서

$$\overline{CP} = \sqrt{(\sqrt{34})^2 - 5^2} = 3$$

따라서 $\sqrt{k+2} = 3$ 이므로 양변을 제곱하면

$$k+2 = 9 \quad \therefore k = 7$$



26 주어진 구의 중심을 C라 하면 C(3, 3, 0)이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{3^2 + (3+1)^2 + (\sqrt{7})^2} = 4\sqrt{2}$$

오른쪽 그림과 같이 점

A에서 구에 그은 접선

의 접점을 P라 하면

$$\overline{CP} = 2\sqrt{2}$$

직각삼각형 ACP에서

$$\overline{AP} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6}$$

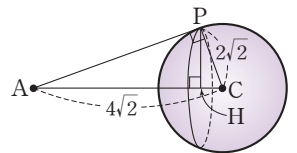
직각삼각형 ACP의 꼭짓점 P에서 변 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ACP의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \overline{PH}$$

$$\therefore \overline{PH} = \sqrt{6}$$

따라서 접점이 나타내는 도형은 중심이 점 H이고 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$ 인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}\pi$$



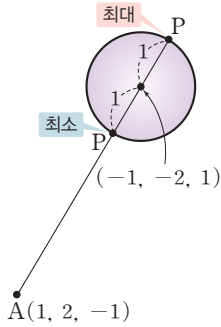
27 점 A(1, 2, -1)에서 구의 중심 (-1, -2, 1)까지의 거리를 d라 하면

$$d = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2-2)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{6}$$

한편 구의 반지름의 길이를 r라 하면

$$r = 1$$

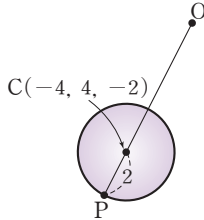
이때 선분 AP의 길이가 최대 또는 최소가 되는 경우의 점 P의 위치는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 선분 AP의 길이의 최댓값 M, 최솟값 m은
 $M=d+r=2\sqrt{6}+1$
 $m=d-r=2\sqrt{6}-1$
 $\therefore Mm=24-1=23$



28 $x^2+y^2+z^2+8x-8y+4z+32=0$ 에서

$(x+4)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=4$
 구의 중심을 C라 하면 $C(-4, 4, -2)$ 이고 반지름의 길이는 2이다.

원점 O에 대하여
 $OP^2=x^2+y^2+z^2$ 이므로
 $x^2+y^2+z^2$ 의 값이 최대가 되는 경우의 점 P의 위치는 오른쪽 그림과 같다.



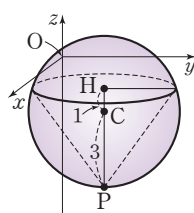
$OC=\sqrt{(-4)^2+4^2+(-2)^2}=6$
 이므로 선분 OP의 길이의 최댓값은 $6+2=8$
 따라서 $x^2+y^2+z^2$ 의 최댓값은 $8^2=64$

29 원뿔의 한 밑면의 둘레는 구와 xy 평면이 만나서 생기는 원과 같다.

주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면
 $x^2+y^2-2x-4y-3=0$
 $\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=8$ ㉠
 즉, 원뿔의 밑면인 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.
 또 $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0$ 에서
 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$
 구의 중심을 C라 하고 점 $C(1, 2, -1)$ 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 원 ㉠의 중심이므로
 $H(1, 2, 0) \therefore CH=1$

구 위의 점 P에 대하여 원뿔의 높이가 최대가 되는 경우의 점 P의 위치는 오른쪽 그림과 같다.
 즉, 원뿔의 높이의 최댓값은
 $CP+CH=3+1=4$
 따라서 원뿔의 부피의 최댓값은

$$\frac{1}{3} \times 8\pi \times 4 = \frac{32}{3}\pi$$



III-1. 벡터의 연산

01 벡터의 연산

44~48쪽

1 $\sqrt{14}$	2 ④	3 ④	4 다, 라	5 5
6 ⑤	7 ⑤	8 나, 다	9 ⑤	
10 $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$		11 평행사변형	12 1	
13 ②	14 ②	15 ③	16 ①	17 ①
18 ⑤	19 1	20 $-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$	21 4	
22 ④	23 -8	24 ④	25 ①	26 ④
27 ③	28 20	29 3	30 11	31 13
32 C, E	33 2			

1 $|\overrightarrow{BH}| = BH = \sqrt{2^2+1^2+3^2} = \sqrt{14}$

2 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서

$$\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

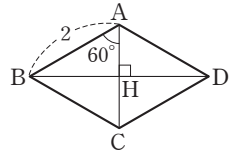
즉, 크기가 $\sqrt{3}$ 인 벡터는 $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}$ 의 6개이다.

3 오른쪽 그림과 같이 두 대각선의 교점을 H라 하면 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

이고 $\angle BAC = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{BH} = \overline{AB} \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\therefore |\overrightarrow{BD}| = BD = 2\overline{BH} = 2\sqrt{3}$$



4 서로 같은 벡터는 시점의 위치에 관계없이 크기와 방향이 각각 같은 벡터이므로 \overrightarrow{OB} 와 같은 벡터는

$$\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{DC}$$

따라서 보기에서 \overrightarrow{OB} 와 같은 벡터인 것은 다, 라이다.

5 서로 같은 벡터는 시점의 위치에 관계없이 크기와 방향이 각각 같은 벡터이므로 \overrightarrow{ED} 와 같은 벡터는 \overrightarrow{BG} 이다.

$$\therefore m=1$$

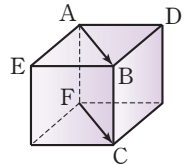
또 \overrightarrow{FG} 와 크기는 같지만 방향이 반대인 벡터는 $\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{GF}$ 이므로 $n=4$

$$\therefore m+n=1+4=5$$

6 주어진 전개도로 정육면체를 만들면

오른쪽 그림과 같으므로

$$\overline{AB} = \overline{FC}$$



7 ① $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ 이므로 $|\overrightarrow{AA}| = 0$

② $\overline{AB} = \overline{BA}$ 이므로 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$

③ $\overline{AC} + \overline{CA} = \overline{AA} = \vec{0}$

- ④ $\vec{AB} - \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$
 ⑤ $\vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BD} = \vec{CB} + \vec{BD} = \vec{CD}$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

- 8 \neg . $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = -\vec{a} + \vec{b}$
 \sqcup . $\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = -\vec{b} + \vec{c}$
 \sqsubset . $\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC} = \vec{a} - \vec{c}$
 따라서 보기에서 옳은 것은 \neg , \sqsubset 이다.

- 9 $\vec{AB} + \vec{BC} - \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{DC} = \vec{AC} + \vec{FA}$
 $= \vec{FA} + \vec{AC} = \vec{FC}$

- 10 $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB}$
 $= \vec{a} + \vec{c} - \vec{b} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

- 11 $\vec{PA} + \vec{PC} = \vec{PB} + \vec{PD}$ 에서
 $\vec{PA} - \vec{PB} = \vec{PD} - \vec{PC} \quad \therefore \vec{BA} = \vec{CD}$
 즉, 사각형 ABCD에서 $\vec{BA} = \vec{CD}$, $\vec{BA} \parallel \vec{CD}$
 따라서 사각형 ABCD는 평행사변형이다.

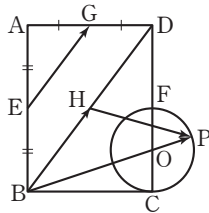
- 12 $\vec{AD} - \vec{AP} = \vec{PD}$ 이므로 $|\vec{AD} - \vec{AP}| = |\vec{PD}| = \overline{PD}$
 선분 PD의 길이는 점 P가 점 B에 위치할 때 최대이므로
 최댓값은 $\sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3$
 또 선분 PD의 길이는 점 P가 점 C에 위치할 때 최소이므로
 최솟값은 2
 따라서 $|\vec{AD} - \vec{AP}|$ 의 최댓값은 3, 최솟값은 2이므로 구
 하는 차는 $3 - 2 = 1$

- 13 $\vec{EG} = \frac{1}{2}\vec{BD} = \vec{BH}$ 이므로

$$\vec{EG} + \vec{HP} = \vec{BH} + \vec{HP} = \vec{BP}$$

즉, $|\vec{EG} + \vec{HP}|$ 의 최댓값은
 $|\vec{BP}|$ 의 최댓값과 같다.

따라서 원의 중심을 O라 하면 구
 하는 최댓값은 벡터 \vec{BP} 가 원의 중심 O를 지날 때이므로
 $\overline{BO} + \overline{OP} = \sqrt{6^2 + 2^2} + 2 = 2 + 2\sqrt{10}$



- 14 $3\vec{x} - \vec{a} + 2\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{5}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{x}$ 에서

$$\frac{5}{2}\vec{x} = \frac{4}{3}\vec{a} - \frac{11}{3}\vec{b} \quad \therefore \vec{x} = \frac{8}{15}\vec{a} - \frac{22}{15}\vec{b}$$

따라서 $m = \frac{8}{15}$, $n = -\frac{22}{15}$ 이므로 $m - n = 2$

- 15 $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$

$$\vec{y} = -\vec{a} + 2\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 2$ 를 하면 $\vec{b} = \vec{x} + 2\vec{y}$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\vec{y} = -\vec{a} + 2(\vec{x} + 2\vec{y}) \quad \therefore \vec{a} = 2\vec{x} + 3\vec{y}$$

$$\therefore 2\vec{a} - 5\vec{b} = 2(2\vec{x} + 3\vec{y}) - 5(\vec{x} + 2\vec{y}) = -\vec{x} - 4\vec{y}$$

따라서 $m = -1$, $n = -4$ 이므로 $mn = 4$

- 16 $2\vec{x} - \vec{y} = 5\vec{a} - 3\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$

$$3\vec{x} + 2\vec{y} = 4\vec{a} - \vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2}$ 을 하면

$$7\vec{x} = 14\vec{a} - 7\vec{b} \quad \therefore \vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2(2\vec{a} - \vec{b}) - \vec{y} = 5\vec{a} - 3\vec{b} \quad \therefore \vec{y} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\therefore 4\vec{x} + 6\vec{y} = 4(2\vec{a} - \vec{b}) + 6(-\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

- 17 오른쪽 그림과 같이 $\frac{1}{3}\vec{CD} = \vec{CP}$ 를

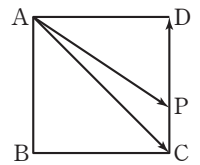
만족시키는 점을 P라 하면 점 P는
 선분 CD 위에 있다.

$$|\vec{CP}| = \left| \frac{1}{3}\vec{CD} \right| = \frac{1}{3}\overline{CD} = 1$$

이므로 $\overline{DP} = 2$

$$\therefore \left| \vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{CD} \right| = |\vec{AC} + \vec{CP}| = |\vec{AP}| = \overline{AP}$$

$$= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$



- 18 ① $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{a}$

$$\textcircled{2} \vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\textcircled{3} \vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\textcircled{4} \vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\textcircled{5} \vec{NB} = \vec{AB} - \vec{AN} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

- 19 $\vec{BM} = \vec{FM} - \vec{FB} = \frac{1}{2}\vec{FH} + \vec{BF}$

$$= \frac{1}{2}(\vec{EH} - \vec{EF}) + \vec{BF} = \frac{1}{2}(\vec{AD} - \vec{AB}) + \vec{AE}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) + \vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$$

따라서 $l = -\frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$, $n = 1$ 이므로

$$l + m + n = 1$$

- 20 $\vec{BF} = \vec{AF} - \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{FC} = 2\vec{AB} = 2\vec{a}$ 이므로

$$\vec{BC} = \vec{BF} + \vec{FC} = (\vec{b} - \vec{a}) + 2\vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\therefore \vec{FM} = \frac{1}{2}\vec{FE} = \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\therefore \vec{CM} = \vec{FM} - \vec{FC} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) - 2\vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

21 $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DF}$
 $= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG}) + (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FH}) + (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GE})$
 $\qquad\qquad\qquad + (\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HF})$
 $= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DH}) + (\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{HF})$
 $= 4\overrightarrow{AE}$
 $\therefore m=4$

다른 풀이

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AE} = \vec{c}$ 라 하면
 $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{BH} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c},$
 $\overrightarrow{CE} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{DF} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
 이 식을 주어진 식에 대입하여 정리하면
 $4\vec{c} = 4\overrightarrow{AE} = m\overrightarrow{AE} \quad \therefore m=4$

22 $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{BC}$
 $= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$
 이때 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 8$ 이므로 $|2\overrightarrow{BC}| = 8$
 $2|\overrightarrow{BC}| = 8, |\overrightarrow{BC}| = 4 \quad \therefore \overrightarrow{BC} = 4$
 따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 4이다.

23 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AH}$
 $= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + \dots + (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA})$
 $= (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \dots + \overrightarrow{OH}) - 7\overrightarrow{OA}$
 $= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \dots + \overrightarrow{OH}) - 8\overrightarrow{OA}$
 $= -8\overrightarrow{OA} \quad (\because \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \dots + \overrightarrow{OH} = \vec{0})$
 $\therefore k = -8$

24 $(3m+n-4)\vec{a} + (m+n)\vec{b} = \vec{0}$ 에서
 $3m+n-4=0, m+n=0$
 두 식을 연립하여 풀면 $m=2, n=-2$
 $\therefore m-n=4$

25 $(2\vec{a} - m\vec{b}) - (n\vec{a} - 4\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$ 에서
 $(2-n)\vec{a} - (m-4)\vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$
 따라서 $2-n=1, m-4=1$ 이므로
 $m=5, n=1 \quad \therefore m+n=6$

26 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3\vec{a} - \vec{b}) - (\vec{a} + 3\vec{b}) = 2\vec{a} - 4\vec{b}$
 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (2\vec{a} + k\vec{b}) - (\vec{a} + 3\vec{b})$
 $= \vec{a} + (k-3)\vec{b}$
 이때 $m\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AC}$ 에서
 $m(2\vec{a} - 4\vec{b}) = 4\{\vec{a} + (k-3)\vec{b}\}$
 $\therefore 2m\vec{a} - 4m\vec{b} = 4\vec{a} + (4k-12)\vec{b}$
 따라서 $2m=4, -4m=4k-12$ 이므로
 $m=2, k=1 \quad \therefore km=2$

27 두 벡터 $2\vec{a} + 5\vec{b}, m\vec{a} + (m-6)\vec{b}$ 가 서로 평행하므로
 $m\vec{a} + (m-6)\vec{b} = k(2\vec{a} + 5\vec{b})$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $\therefore m\vec{a} + (m-6)\vec{b} = 2k\vec{a} + 5k\vec{b}$
 따라서 $m=2k, m-6=5k$ 이므로
 $m-2k=0, m-5k=6$
 두 식을 연립하여 풀면
 $k=-2, m=-4$

28 두 벡터 $\vec{p}-\vec{q}, \vec{p}+\vec{r}$ 가 서로 평행하려면
 $\vec{p}+\vec{r} = k(\vec{p}-\vec{q}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.
 $\vec{p}-\vec{q} = (\vec{a}+2\vec{b}) - (-2\vec{a}+\vec{b}) = 3\vec{a}+\vec{b}$
 $\vec{p}+\vec{r} = (\vec{a}+2\vec{b}) + (m\vec{a}+5\vec{b}) = (m+1)\vec{a}+7\vec{b}$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $(m+1)\vec{a}+7\vec{b} = k(3\vec{a}+\vec{b})$
 $\therefore (m+1)\vec{a}+7\vec{b} = 3k\vec{a}+k\vec{b}$
 따라서 $m+1=3k, 7=k$ 이므로
 $k=7, m=20$

29 두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 가 서로 평행하려면
 $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (\vec{a} - 3\vec{b}) - (2\vec{a} - \vec{b})$
 $= -\vec{a} - 2\vec{b}$
 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (4\vec{a} + m\vec{b}) - (2\vec{a} - \vec{b})$
 $= 2\vec{a} + (m+1)\vec{b}$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $2\vec{a} + (m+1)\vec{b} = k(-\vec{a} - 2\vec{b})$
 $\therefore 2\vec{a} + (m+1)\vec{b} = -k\vec{a} - 2k\vec{b}$
 따라서 $2 = -k, m+1 = -2k$ 이므로
 $k = -2, m = 3$

30 두 벡터 \vec{x}, \vec{y} 가 서로 평행하려면
 $\vec{x} = k\vec{y} \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.
 $2\vec{a} + \vec{y} = m\vec{a} + 3\vec{b}$ 에서
 $\vec{y} = (m-2)\vec{a} + 3\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\vec{x} - 3\vec{y} = -3\vec{a} - \vec{b}$ 에 대입하면
 $\vec{x} - 3\{(m-2)\vec{a} + 3\vec{b}\} = -3\vec{a} - \vec{b}$
 $\therefore \vec{x} = (3m-9)\vec{a} + 8\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $(3m-9)\vec{a} + 8\vec{b} = k\{(m-2)\vec{a} + 3\vec{b}\}$
 $\therefore (3m-9)\vec{a} + 8\vec{b} = (km-2k)\vec{a} + 3k\vec{b}$
 따라서 $3m-9 = km-2k, 8 = 3k$ 이므로
 $k = \frac{8}{3}, m = 11$

31 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (m\vec{a} - 4\vec{b}) - (3\vec{a} + 2\vec{b})$$

$$= (m-3)\vec{a} - 6\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-2\vec{a} + 5\vec{b}) - (3\vec{a} + 2\vec{b})$$

$$= -5\vec{a} + 3\vec{b}$$

이를 ①에 대입하면

$$(m-3)\vec{a} - 6\vec{b} = k(-5\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$\therefore (m-3)\vec{a} - 6\vec{b} = -5k\vec{a} + 3k\vec{b}$$

따라서 $m-3 = -5k$, $-6 = 3k$ 이므로

$$k = -2, m = 13$$

32 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -\vec{a} + \vec{b}$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (3\vec{a} - 2\vec{b}) - \vec{a}$$

$$= 2\vec{a} - 2\vec{b} = -2(-\vec{a} + \vec{b})$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (2\vec{a} - 3\vec{b}) - \vec{a}$$

$$= \vec{a} - 3\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} = (4\vec{a} - 3\vec{b}) - \vec{a}$$

$$= 3\vec{a} - 3\vec{b} = -3(-\vec{a} + \vec{b})$$

따라서 $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AB}$ 이므로 직선 AB 위에 있는 점은 C, E이다.

33 세 점 B, P, Q가 한 직선 위에 있으려면

$$\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BQ} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$,

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 라 하면

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{2}{5}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = \left(\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) - \vec{b}$$

$$= \frac{2}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{또 } \overrightarrow{AQ} = \frac{m}{m+1}\overrightarrow{AD} = \frac{m}{m+1}\vec{a} \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB} = \frac{m}{m+1}\vec{a} - \vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

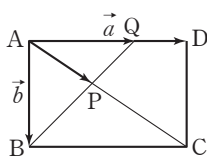
②, ③을 ①에 대입하면

$$\frac{2}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b} = k\left(\frac{m}{m+1}\vec{a} - \vec{b}\right)$$

$$\therefore \frac{2}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b} = \frac{km}{m+1}\vec{a} - k\vec{b}$$

$$\text{따라서 } \frac{2}{5} = \frac{km}{m+1}, \quad -\frac{3}{5} = -k \text{이므로}$$

$$k = \frac{3}{5}, m = 2$$



III-2. 벡터의 성분과 내적

01 벡터의 성분

50~56쪽

1 $\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

2 $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

3 $\frac{13}{25}$

4 $-\frac{1}{12}$

5 ①

6 $\frac{1}{4}$

7 $\frac{2}{3}$

8 $-\frac{1}{9}$

9 -2

10 ①

11 ②

12 18

13 ③

14 -15

15 $2\sqrt{10}$

16 ④

17 ③

18 -6

19 $2\sqrt{2}$

20 ①

21 ②

22 7

23 ⑤

24 $5\sqrt{2}$

25 ①

26 $\frac{10}{3}$

27 ③

28 $3x - 2y - 5 = 0$

29 ②

30 ②

31 ③

32 10

33 -35

34 (1) $3\vec{a} + 2\vec{b}$ (2) $-5\vec{a} - \vec{b}$

35 7

36 ④

37 ③

38 18

39 $\vec{b} = (-6, 4, -12)$, $\vec{b} = (6, -4, 12)$

40 (6, -4, 1)

41 ①

42 ②

43 -3

44 ③

45 $72\sqrt{2}\pi$

46 4

1 세 점 P, Q, M의 위치벡터를 각각 \vec{p} , \vec{q} , \vec{m} 이라 하면

$$\vec{p} = \frac{3\vec{b} + 2\vec{a}}{3+2} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}, \quad \vec{q} = \frac{4\vec{a} + \vec{b}}{4+1} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$$

$$\therefore \vec{m} = \frac{\vec{p} + \vec{q}}{2} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

2 $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{c}$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{c} - \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

3 선분 AP가 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overrightarrow{BP} : \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB} : \overrightarrow{AC} = 2 : 3$$

즉, 점 P는 변 BC를 2:3으로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}}{2+3} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

따라서 $m = \frac{3}{5}$, $n = \frac{2}{5}$ 이므로

$$m^2 + n^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{13}{25}$$

4 $\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{b}$ 이므로

$$\overrightarrow{BP} = \frac{3\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}}{3+1} = \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{4}\vec{a} = \vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}}{2+1} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BP} = \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}\right) - \left(\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right) \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \end{aligned}$$

따라서 $m = -\frac{1}{3}$, $n = \frac{1}{4}$ 이므로 $mn = -\frac{1}{12}$

5 $\overrightarrow{BP} = \frac{2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}}{2+1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{QP} &= \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BQ} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

이때 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \end{aligned}$$

$\therefore k = \frac{1}{2}$

6 $\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{b}$ 이므로

$$\overrightarrow{BP} = \frac{3\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{BA}}{3+2} = \frac{3}{5}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{2}{5}\vec{a} = \vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$$

삼각형 ABP에서 $\overrightarrow{BQ} : \overrightarrow{QP} = m : (1-m)$ 이라 하면

$$\overrightarrow{BQ} = m\overrightarrow{BP} = m\vec{a} + \frac{3}{5}m\vec{b} \quad \text{..... ㉠}$$

삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AQ} : \overrightarrow{QC} = n : (1-n)$ 이라 하면

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{n\overrightarrow{BC} + (1-n)\overrightarrow{BA}}{n+(1-n)} = (1-n)\vec{a} + n\vec{b} \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서 $m\vec{a} + \frac{3}{5}m\vec{b} = (1-n)\vec{a} + n\vec{b}$

두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 는 서로 평행하지 않으므로

$$m = 1-n, \quad \frac{3}{5}m = n$$

두 식을 연립하여 풀면 $m = \frac{5}{8}$, $n = \frac{3}{8}$

따라서 $x = \frac{5}{8}$, $y = \frac{3}{8}$ 이므로 $x - y = \frac{1}{4}$

7 두 점 G, P의 위치벡터를 각각 \vec{g} , \vec{p} 라 하면

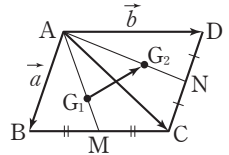
$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}, \quad \vec{p} = \frac{3\vec{b} + \vec{a}}{3+1} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{GP} &= \vec{p} - \vec{g} = \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right) - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \\ &= -\frac{1}{12}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

따라서 $l = -\frac{1}{12}$, $m = \frac{5}{12}$, $n = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$l + m - n = \frac{2}{3}$$

8 오른쪽 그림과 같이 두 변 BC, CD의 중점을 각각 M, N이라 하면 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$ 이므로



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG_1} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \times \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b})}{2} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \\ \overrightarrow{AG_2} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3} \times \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{2} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}}{2} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{G_1G_2} &= \overrightarrow{AG_2} - \overrightarrow{AG_1} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) - \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \end{aligned}$$

따라서 $m = -\frac{1}{3}$, $n = \frac{1}{3}$ 이므로 $mn = -\frac{1}{9}$

9 점 P는 삼각형 DEG의 무게중심이므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG}}{3}$$

이때 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG}}{3} = \frac{\vec{b} + \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}{3} \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) - \vec{a} \\ &= -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

따라서 $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = \frac{2}{3}$ 이므로

$$x - y - z = -2$$

10 네 점 A, B, C, P의 위치벡터를 각각 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{p} 라 하면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{CB} \text{에서} \\ (\vec{a} - \vec{p}) + (\vec{b} - \vec{p}) + 2(\vec{c} - \vec{p}) &= \vec{b} - \vec{c} \\ \vec{a} + 3\vec{c} &= 4\vec{p} \quad \therefore \vec{p} = \frac{\vec{a} + 3\vec{c}}{4} \end{aligned}$$

따라서 점 P는 변 AC를 3:1로 내분하는 점이므로 $m=3$, $n=1$ $\therefore m-n=2$

다른 풀이

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{CB} \text{에서} \\ \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC} \\ \therefore \overrightarrow{PA} &= -3\overrightarrow{PC} \end{aligned}$$

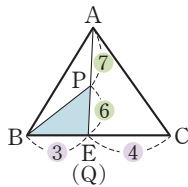
따라서 점 P는 변 AC를 3:1로 내분하는 점이므로 $m=3$, $n=1$ $\therefore m-n=2$

- 11 $3\vec{OP} + 2\vec{AP} + \vec{BP} = 3\vec{OB}$ 에서
 $3\vec{OP} + 2(\vec{OP} - \vec{OA}) + (\vec{OP} - \vec{OB}) = 3\vec{OB}$
 $6\vec{OP} = 2\vec{OA} + 4\vec{OB} \quad \therefore \vec{OP} = \frac{\vec{OA} + 2\vec{OB}}{3}$
 즉, 점 P는 변 AB를 2:1로 내분하는 점이므로
 $\triangle OAP : \triangle OPB = \vec{AP} : \vec{PB} = 2:1$
 $\therefore \triangle OPB = \frac{1}{3}\triangle OAB = \frac{1}{3} \times 15 = 5$

- 12 $6\vec{PA} + 4\vec{PB} + 3\vec{PC} = \vec{0}$ 에서 $6\vec{PA} = -4\vec{PB} - 3\vec{PC}$
 $\therefore 6\vec{PA} = -7 \times \frac{4\vec{PB} + 3\vec{PC}}{7}$
 이때 변 BC를 3:4로 내분하는 점을 Q라 하면
 $\vec{PQ} = \frac{4\vec{PB} + 3\vec{PC}}{7}$ 이므로
 $6\vec{PA} = -7\vec{PQ}$
 즉, 점 P는 선분 AQ를 7:6으로 내분하는 점이다.
 따라서 점 Q는 직선 AP와 변 BC의 교점이므로 점 E와 일치한다.

$$\therefore \vec{BE} : \vec{EC} = 3 : 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle BEP &= \frac{6}{13} \triangle ABE \\ &= \frac{6}{13} \times \frac{3}{7} \triangle ABC \\ &= \frac{6}{13} \times \frac{3}{7} \times 91 \\ &= 18 \end{aligned}$$



- 13 $\vec{a} + \vec{b} = (4, 1) + (-2, 0) = (2, 1)$
 $\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
- 14 $2(4\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}) - (6\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c})$
 $= 2\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c}$
 $= 2(-2, 1) - 5(1, -1) + (3, 2)$
 $= (-6, 9)$
 따라서 $m = -6, n = 9$ 이므로
 $m - n = -15$

- 15 $\vec{p} = 4\vec{a} + t\vec{b} = 4(-1, 2) + t(3, -1)$
 $= (-4 + 3t, 8 - t)$
 $\therefore |\vec{p}| = \sqrt{(-4 + 3t)^2 + (8 - t)^2}$
 $= \sqrt{10t^2 - 40t + 80}$
 $= \sqrt{10(t - 2)^2 + 40}$
 따라서 $t = 2$ 일 때 $|\vec{p}|$ 의 최솟값은 $2\sqrt{10}$ 이다.

- 16 $\vec{a} + 2\vec{b} = (-1, 5) + 2(1, -2) = (1, 1)$
 $\therefore |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

즉, 벡터 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 와 방향이 같고 크기가 4인 벡터는
 $4 \times \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{|\vec{a} + 2\vec{b}|} = \frac{4}{\sqrt{2}}(1, 1) = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
 따라서 $p = 2\sqrt{2}, q = 2\sqrt{2}$ 이므로 $p + q = 4\sqrt{2}$

- 17 $\vec{a} + 3\vec{b} = (k, 3) + 3(1, 2) = (k + 3, 9)$
 즉, $(k + 3, 9) = (6, 9)$ 이므로
 $k + 3 = 6 \quad \therefore k = 3$

- 18 $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ 에서
 $(-11, -4) = m(-3, 0) + n(1, 2)$
 $= (-3m + n, 2n)$
 $\therefore -11 = -3m + n, -4 = 2n$
 따라서 $m = 3, n = -2$ 이므로
 $mn = -6$

- 19 $\vec{a} = \vec{b} + 2\vec{c}$ 에서
 $(m, 3) = (-1, n) + 2(2, m + n) = (3, 2m + 3n)$
 $\therefore m = 3, 3 = 2m + 3n$
 따라서 $m = 3, n = -1$ 이므로 $\vec{c} = (2, 2)$
 $\therefore |\vec{c}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

- 20 $\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{b} + \vec{c}$ 에서 $\vec{a} = 3\vec{b} + \vec{c}$ 이므로
 $(1, -2) = 3(2, x) + (1 - y, 4) = (7 - y, 3x + 4)$
 $\therefore 1 = 7 - y, -2 = 3x + 4$
 $\therefore x = -2, y = 6$
 즉, $\vec{a} = (1, -2), \vec{b} = (2, -2), \vec{c} = (-5, 4)$ 이므로
 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (-2, 0)$
 $\therefore |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$

- 21 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 서로 평행하므로
 $\vec{b} = t\vec{a}$ (단, t 는 0이 아닌 실수)
 $(k + 2, 2k + 1) = t(-1, 7) = (-t, 7t)$
 $\therefore k + 2 = -t, 2k + 1 = 7t$
 두 식을 연립하여 풀면 $t = -\frac{1}{3}, k = -\frac{5}{3}$

- 22 $\vec{a} - 2\vec{c} = (2, 8) - 2(4, 2) = (-6, 4)$
 $t\vec{b} + \vec{c} = t(2, -2) + (4, 2) = (2t + 4, -2t + 2)$
 두 벡터 $\vec{a} - 2\vec{c}, t\vec{b} + \vec{c}$ 가 서로 평행하려면
 $t\vec{b} + \vec{c} = k(\vec{a} - 2\vec{c})$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $(2t + 4, -2t + 2) = k(-6, 4) = (-6k, 4k)$
 $\therefore 2t + 4 = -6k, -2t + 2 = 4k$
 두 식을 연립하여 풀면 $k = -3, t = 7$

- 23** $\vec{v}=(x, y)$ 라 하면
 $\vec{v}+\vec{b}=(x, y)+(4, -2)=(x+4, y-2)$
 두 벡터 $\vec{a}, \vec{v}+\vec{b}$ 가 서로 평행하므로
 $\vec{v}+\vec{b}=k\vec{a}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $(x+4, y-2)=k(3, 1)=(3k, k)$
 즉, $x+4=3k, y-2=k$ 이므로
 $x=3k-4, y=k+2$
 $\therefore |\vec{v}|^2=(3k-4)^2+(k+2)^2$
 $=10k^2-20k+20$
 $=10(k-1)^2+10$
 따라서 $k=1$ 일 때 $|\vec{v}|^2$ 의 최솟값은 10이다.
- 24** $\vec{CA}=(3, 1), \vec{CB}=(1, 2)$ 이므로
 $\vec{CA}+2\vec{CB}=(3, 1)+2(1, 2)=(5, 5)$
 $\therefore |\vec{CA}+2\vec{CB}|=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$
- 25** 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
 $\vec{AP}=(x+2, y-3), \vec{BP}=(x-3, y-4),$
 $\vec{PC}=(2-x, 2-y)$
 $\vec{AP}+\vec{BP}=\vec{PC}$ 에서
 $(x+2, y-3)+(x-3, y-4)=(2-x, 2-y)$
 $(2x-1, 2y-7)=(2-x, 2-y)$
 $\therefore 2x-1=2-x, 2y-7=2-y$
 따라서 $x=1, y=3$ 이므로
 $\vec{BP}=(-2, -1)$
 $\therefore |\vec{BP}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$
- 26** 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로
 $\vec{AB}=k\vec{AC}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $\vec{AB}=(-1, 4-a), \vec{AC}=(-3, 2)$ 이므로
 $(-1, 4-a)=k(-3, 2)=(-3k, 2k)$
 $\therefore -1=-3k, 4-a=2k$
 $\therefore k=\frac{1}{3}, a=\frac{10}{3}$
- 27** 곡선 $y=\frac{4}{x}(x>0)$ 위의 점 P의 좌표를 $(t, \frac{4}{t})(t>0)$ 라 하면
 $\vec{PA}=\left(-2-t, -\frac{4}{t}\right), \vec{PB}=\left(2-t, -\frac{4}{t}\right)$
 $\therefore \vec{PA}+\vec{PB}=\left(-2-t, -\frac{4}{t}\right)+\left(2-t, -\frac{4}{t}\right)$
 $=\left(-2t, -\frac{8}{t}\right)$
 $\therefore |\vec{PA}+\vec{PB}|=\sqrt{(-2t)^2+\left(-\frac{8}{t}\right)^2}$
 $=\sqrt{4t^2+\frac{64}{t^2}}$

$t^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $4t^2+\frac{64}{t^2}\geq 2\sqrt{4t^2\times\frac{64}{t^2}}=32$
 (단, 등호는 $4t^2=\frac{64}{t^2}$, 즉 $t=2$ 일 때 성립)

따라서 $|\vec{PA}+\vec{PB}|$ 의 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다.

- 28** 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
 $\vec{AP}=(x-6, y), \vec{BP}=(x, y-4)$
 $|\vec{AP}|=|\vec{BP}|$ 이므로
 $\sqrt{(x-6)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-4)^2}$
 양변을 제곱하면 $x^2-12x+36+y^2=x^2+y^2-8y+16$
 $\therefore 3x-2y-5=0$
- 29** 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
 $\vec{AP}=(x-1, y-1), \vec{BP}=(x-4, y-1),$
 $\vec{CP}=(x-1, y-4)$
 $\therefore \vec{AP}+\vec{BP}+\vec{CP}$
 $=\left(x-1, y-1\right)+\left(x-4, y-1\right)+\left(x-1, y-4\right)$
 $=\left(3x-6, 3y-6\right)$
 $|\vec{AP}+\vec{BP}+\vec{CP}|=3\sqrt{5}$ 이므로
 $\sqrt{(3x-6)^2+(3y-6)^2}=3\sqrt{5}$
 양변을 제곱하면 $9(x-2)^2+9(y-2)^2=45$
 $\therefore (x-2)^2+(y-2)^2=5$
 따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 (2, 2)를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는
 $2\pi\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}\pi$
- 30** 두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(x, y), (x', y')$ 이라 하면
 $\vec{AP}=(x-4, y-6), \vec{BP}=(x-4, y+4),$
 $\vec{BQ}=(x'-4, y'+4)$
 $2\vec{AP}+\vec{BP}=\vec{BQ}$ 이므로
 $2(x-4, y-6)+(x-4, y+4)=(x'-4, y'+4)$
 $(3x-12, 3y-8)=(x'-4, y'+4)$
 $\therefore 3x-12=x'-4, 3y-8=y'+4$
 $\therefore x=\frac{x'+8}{3}, y=\frac{y'+12}{3}$ ㉠
- 점 P는 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 움직이므로 $x^2+y^2=1$
 이 식에 ㉠을 대입하면 $\left(\frac{x'+8}{3}\right)^2+\left(\frac{y'+12}{3}\right)^2=1$
 $\therefore (x'+8)^2+(y'+12)^2=9$
 따라서 점 Q가 나타내는 도형은 점 (-8, -12)를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원이므로 구하는 도형의 넓이는
 $\pi\times 3^2=9\pi$

31 $\vec{a}+2\vec{b}=3\vec{a}+4\vec{x}$ 에서 $4\vec{x}=-2\vec{a}+2\vec{b}$
 $\therefore \vec{x}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$
 $=-\frac{1}{2}(1, 4, -2)+\frac{1}{2}(-1, 2, 0)$
 $=(-1, -1, 1)$
 $\therefore |\vec{x}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$

32 $\vec{p}+\vec{q}=(3, 2, -3) \quad \text{..... } \textcircled{A}$
 $\vec{p}-2\vec{q}=(0, -4, -6) \quad \text{..... } \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}-\textcircled{B}$ 을 하면
 $3\vec{q}=(3, 6, 3)$
 $\therefore \vec{q}=(1, 2, 1)$
 이를 \textcircled{A} 에 대입하면
 $\vec{p}+(1, 2, 1)=(3, 2, -3)$
 $\therefore \vec{p}=(3, 2, -3)-(1, 2, 1)=(2, 0, -4)$
 따라서 $\vec{p}+4\vec{q}=(2, 0, -4)+4(1, 2, 1)=(6, 8, 0)$ 이
 므로
 $|\vec{p}+4\vec{q}|=\sqrt{6^2+8^2+0^2}=10$

33 $t\vec{a}+\vec{b}=t(1, 2, -1)+(2, -1, -6)$
 $=(t+2, 2t-1, -t-6)$
 $\therefore |t\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(t+2)^2+(2t-1)^2+(-t-6)^2}$
 $=\sqrt{6t^2+12t+41}$
 $=\sqrt{6(t+1)^2+35}$
 즉, $|t\vec{a}+\vec{b}|$ 는 $t=-1$ 일 때 최솟값 $\sqrt{35}$ 를 갖는다.
 따라서 $\alpha=-1, m=\sqrt{35}$ 이므로
 $\alpha m^2=-1 \times (\sqrt{35})^2=-35$

34 (1) $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ 를 성분으로 나타내면
 $(4, 3, -2)=x(2, -1, -4)+y(-1, 3, 5)$
 $=(2x-y, -x+3y, -4x+5y)$
 $\therefore 4=2x-y, 3=-x+3y, -2=-4x+5y$
 세 식 중 두 식을 연립하여 풀면
 $x=3, y=2$
 $\therefore \vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$
 (2) $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}$ 를 성분으로 나타내면
 $(-9, 2, 15)=x(2, -1, -4)+y(-1, 3, 5)$
 $=(2x-y, -x+3y, -4x+5y)$
 $\therefore -9=2x-y, 2=-x+3y, 15=-4x+5y$
 세 식 중 두 식을 연립하여 풀면
 $x=-5, y=-1$
 $\therefore \vec{d}=-5\vec{a}-\vec{b}$

35 $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$ 에서
 $(8, 4, z+3)=3(x, -2, 1)+2(-2, 6-y, 2)$
 $=(3x-4, 6-2y, 7)$
 $\therefore 8=3x-4, 4=6-2y, z+3=7$
 따라서 $x=4, y=1, z=4$ 이므로 $x-y+z=7$

36 $\vec{d}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ 에서
 $(-1, 0, 5)=l(1, -1, 0)+m(-1, 0, 1)+n(0, 1, 1)$
 $=(l-m, -l+n, m+n)$
 $\therefore -1=l-m, 0=-l+n, 5=m+n$
 세 식을 연립하여 풀면 $l=2, m=3, n=2$
 $\therefore lmn=12$

37 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 서로 평행하므로
 $\vec{b}=k\vec{a}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $(3, x+2, y)=k(1, 2, -5)=(k, 2k, -5k)$
 $\therefore 3=k, x+2=2k, y=-5k$
 따라서 $x=4, y=-15$ 이므로 $x+y=-11$

38 $\vec{a}+\vec{c}=(3, 6, n-6), \vec{b}-\vec{c}=(1, m-2, 4-n)$
 두 벡터 $\vec{a}+\vec{c}, \vec{b}-\vec{c}$ 가 서로 평행하므로
 $\vec{b}-\vec{c}=k(\vec{a}+\vec{c})$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $(1, m-2, 4-n)=k(3, 6, n-6)$
 $=(3k, 6k, k(n-6))$
 $\therefore 1=3k, m-2=6k, 4-n=k(n-6)$
 따라서 $k=\frac{1}{3}, m=4, n=\frac{9}{2}$ 이므로 $mn=18$

39 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 서로 평행하므로
 $\vec{b}=k\vec{a}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $\vec{b}=k(3, -2, 6)=(3k, -2k, 6k)$
 $|\vec{b}|=14$ 이므로
 $\sqrt{(3k)^2+(-2k)^2+(6k)^2}=14$
 양변을 제곱하면
 $9k^2+4k^2+36k^2=196, k^2=4 \quad \therefore k=\pm 2$
 $\therefore \vec{b}=(-6, 4, -12), \vec{b}=(6, -4, 12)$

40 점 D의 좌표를 (x, y, z) 라 하면
 $\vec{AB}=(3, -5, 3), \vec{CD}=(x-3, y-1, z+2)$
 $\vec{AB}=\vec{CD}$ 이므로
 $(3, -5, 3)=(x-3, y-1, z+2)$
 $\therefore 3=x-3, -5=y-1, 3=z+2$
 $\therefore x=6, y=-4, z=1$
 따라서 점 D의 좌표는 $(6, -4, 1)$

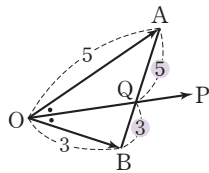
41 평행사변형 ABCD에서 $\vec{AD}=\vec{BC}$
 $\vec{AD}=(a, b-1, c-3)$, $\vec{BC}=(-2, 1, 1)$ 이므로
 $(a, b-1, c-3)=(-2, 1, 1)$
 $\therefore a=-2, b-1=1, c-3=1$
 $\therefore a=-2, b=2, c=4$
 따라서 D(-2, 2, 4)이므로
 $|\vec{OD}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+4^2}=2\sqrt{6}$

42 xy평면 위의 점 P의 좌표를 $(x, y, 0)$ 이라 하면
 $\vec{PA}=(3-x, 4-y, 5)$, $\vec{PB}=(4-x, 8-y, 6)$,
 $\vec{PC}=(5-x, 3-y, 7)$
 즉, $\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}=(12-3x, 15-3y, 18)$ 이므로
 $\frac{\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}}{3}=(4-x, 5-y, 6)$
 $\therefore \left| \frac{\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}}{3} \right| = \sqrt{(4-x)^2+(5-y)^2+6^2}$
 따라서 $x=4, y=5$ 일 때 $\left| \frac{\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}}{3} \right|$ 의 최솟값은
 6이다.

다른 풀이

삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면
 $G\left(\frac{3+4+5}{3}, \frac{4+8+3}{3}, \frac{5+6+7}{3}\right) \therefore G(4, 5, 6)$
 $\left| \frac{\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}}{3} \right| = |\vec{PG}|$ 이므로 $|\vec{PG}|$ 의 값이 최소이려
 면 점 G에서 xy평면에 내린 수선의 발이 점 P이어야 한다.
 $\therefore P(4, 5, 0)$
 따라서 $|\vec{PG}|$ 의 최솟값은 6이다.

43 $|\vec{OA}|=\sqrt{(-3)^2+4^2+0^2}=5$
 $|\vec{OB}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}=3$



이므로 오른쪽 그림과 같이 벡터 \vec{OP} 가 선분 AB와 만나는 점을 Q라 하면 점 Q는 선분 AB를 5:3으로 내분하는 점이다.

$\therefore \vec{OQ}=\frac{5\vec{OB}+3\vec{OA}}{5+3}=\frac{3}{8}\vec{OA}+\frac{5}{8}\vec{OB}$
 세 점 O, Q, P는 한 직선 위에 있으므로
 $\vec{OP}=k\vec{OQ}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $\therefore \vec{OP}=k\left(\frac{3}{8}\vec{OA}+\frac{5}{8}\vec{OB}\right)=\frac{3}{8}k\vec{OA}+\frac{5}{8}k\vec{OB}$
 $\vec{OA}=(-3, 4, 0)$, $\vec{OB}=(2, -2, -1)$, $\vec{OP}=(1, a, b)$
 이므로
 $(1, a, b)=\frac{3}{8}k(-3, 4, 0)+\frac{5}{8}k(2, -2, -1)$
 $=\left(\frac{1}{8}k, \frac{1}{4}k, -\frac{5}{8}k\right)$

$\therefore 1=\frac{1}{8}k, a=\frac{1}{4}k, b=-\frac{5}{8}k$
 따라서 $k=8, a=2, b=-5$ 이므로 $a+b=-3$

44 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면
 $\vec{PA}=(-5-x, 1-y, 3-z)$
 $\vec{PB}=(-1-x, 8-y, 5-z)$
 $\vec{PC}=(3-x, 3-y, -2-z)$
 $\therefore \vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}$
 $=(-5-x, 1-y, 3-z)+(-1-x, 8-y, 5-z)$
 $+ (3-x, 3-y, -2-z)$
 $=(-3-3x, 12-3y, 6-3z)$
 $|\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}|=5$ 이므로
 $\sqrt{(-3-3x)^2+(12-3y)^2+(6-3z)^2}=5$
 양변을 제곱하면
 $9(x+1)^2+9(y-4)^2+9(z-2)^2=25$
 $\therefore (x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=\frac{25}{9}$

45 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면
 $\vec{AP}=(x-3, y+4, z-2)$, $\vec{BP}=(x-1, y+2, z-1)$
 $|\vec{AP}|=\sqrt{2}|\vec{BP}|$ 이므로
 $\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2+(z-2)^2}$
 $=\sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2}$
 양변을 제곱하면
 $x^2-6x+9+y^2+8y+16+z^2-4z+4$
 $=2(x^2-2x+1+y^2+4y+4+z^2-2z+1)$
 $\therefore (x+1)^2+y^2+z^2=18$
 따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $(-1, 0, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$ 인 구이므로 구하는 도형의 부피는 $\frac{4}{3}\pi \times (3\sqrt{2})^3=72\sqrt{2}\pi$

46 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면
 $\vec{OA}=(\sqrt{3}, 0, 1)$, $\vec{AP}=(x-\sqrt{3}, y, z-1)$
 $|\vec{OA}||\vec{AP}|=k$ 이므로
 $\sqrt{(\sqrt{3})^2+0^2+1^2}\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2+(z-1)^2}=k$
 양변을 제곱하면 $4\{(x-\sqrt{3})^2+y^2+(z-1)^2\}=k^2$
 $\therefore (x-\sqrt{3})^2+y^2+(z-1)^2=\frac{k^2}{4}$
 따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $(\sqrt{3}, 0, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{k}{2}$ 인 구이다.
 이때 이 도형의 겉넓이가 16π 이므로
 $4\pi \times \left(\frac{k}{2}\right)^2=16\pi, k^2=16 \therefore k=4 (\because k>0)$

02 벡터의 내적

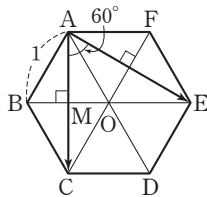
57~60쪽

1 3	2 ②	3 $\frac{3}{2}$	4 ④	5 120
6 -18	7 2	8 4	9 ⑤	10 ⑤
11 8	12 $-\frac{13}{3}$	13 -4	14 1	15 ③
16 3	17 $\frac{45}{4}$	18 $\frac{4}{5}$	19 ③	20 45°
21 $\frac{3\sqrt{70}}{70}$	22 ③	23 60°	24 $\frac{7}{12}$	25 $\frac{4}{5}$
26 ①	27 ②	28 -5	29 (3, 3)	

1 두 벡터 \vec{AB}, \vec{AC} 가 이루는 각의 크기는 60° 이므로
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos 60^\circ$
 $= \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \frac{1}{2} = 3$

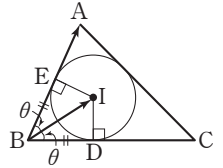
2 $|\vec{OM}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
 $|\vec{OP}| = \frac{1}{3} |\vec{OA}| = \frac{1}{3} \times 3 = 1$
 이때 $\angle MOP = 30^\circ$ 이므로
 $\vec{OM} \cdot \vec{OP} = |\vec{OM}| |\vec{OP}| \cos 30^\circ$
 $= \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4}$

3 오른쪽 그림과 같이 정육각형 ABCDEF의 세 대각선의 교점을 O, 선분 OB의 중점을 M이라 하면
 $|\vec{AC}| = |\vec{AE}| = 2\vec{AM}$
 $= 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 1\right) = \sqrt{3}$
 이때 $\angle CAE = 60^\circ$ 이므로
 $\vec{AC} \cdot \vec{AE} = |\vec{AC}| |\vec{AE}| \cos 60^\circ$
 $= \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$



4 두 벡터 \vec{BA}, \vec{BC} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면
 $\theta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
 $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 3$ 이므로
 $|\vec{BA}| |\vec{BC}| \cos 60^\circ = 3$
 $3 \times |\vec{BC}| \times \frac{1}{2} = 3 \quad \therefore |\vec{BC}| = 2$
 따라서 $|\vec{BC}| = 2$ 이므로 평행사변형 ABCD의 넓이는
 $|\vec{AB}| \times |\vec{BC}| \sin 60^\circ = 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= 3\sqrt{3}$

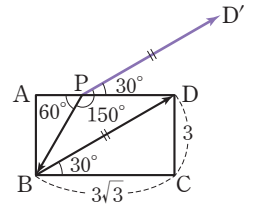
5 오른쪽 그림과 같이 점 I에서 변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하면
 $\triangle BIE \cong \triangle BID$
 두 벡터 \vec{BI}, \vec{BA} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면



$\angle IBE = \angle IBD = \theta$
 따라서 직각삼각형 IBD에서 $|\vec{BI}| \cos \theta = |\vec{BD}|$ 이므로
 $\vec{BA} \cdot \vec{BI} = |\vec{BA}| |\vec{BI}| \cos \theta$
 $= |\vec{BA}| |\vec{BD}| = 15 \times 8 = 120$

6 직각삼각형 BCD에서
 $|\vec{BD}| = \sqrt{|\vec{BC}|^2 + |\vec{CD}|^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = 6$
 $|\vec{AP}| = \frac{1}{3} |\vec{AD}| = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$ 이므로
 직각삼각형 ABP에서
 $|\vec{PB}| = \sqrt{|\vec{AB}|^2 + |\vec{AP}|^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$
 이때 $\angle DBC = 30^\circ$,

$\angle BPA = 60^\circ$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 $|\vec{BD}| = |\vec{PD}'|$ 이 되도록 점 D'을 잡으면



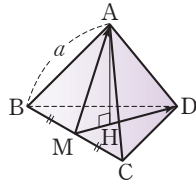
$\angle D'PB = 150^\circ$
 $\therefore \vec{PB} \cdot \vec{BD} = \vec{PB} \cdot \vec{PD}'$
 $= -|\vec{PB}| |\vec{PD}'| \cos(180^\circ - 150^\circ)$
 $= -2\sqrt{3} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -18$

7 삼각형 ABC는 정삼각형이므로 두 벡터 \vec{BA}, \vec{BC} 가 이루는 각의 크기는 60° 이다.
 $\therefore \vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| |\vec{BC}| \cos 60^\circ$
 $= 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$

8 직각삼각형 ACD에서
 $|\vec{AC}| = \sqrt{|\vec{AD}|^2 + |\vec{CD}|^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$
 두 벡터 \vec{AC}, \vec{AG} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면
 $\angle ACG = 90^\circ$ 이므로
 $\vec{AC} \cdot \vec{AG} = |\vec{AC}| |\vec{AG}| \cos \theta$
 $= |\vec{AC}| |\vec{AG}| \times \frac{|\vec{AC}|}{|\vec{AG}|}$
 $= |\vec{AC}|^2 = 2^2 = 4$

9 정사면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면 두 삼각형 ABC, BCD는 정삼각형이므로
 $|\vec{MA}| = |\vec{MD}| = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 삼각형 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 삼각형 BCD의 무게중심이므로



$$\overline{MH} = \frac{1}{3} \overline{MD}$$

$\angle AHM = 90^\circ$ 이므로 $\angle AMH = \theta$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overline{MH}}{\overline{MA}} = \frac{\frac{1}{3} \overline{MD}}{\overline{MD}} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{MA} \cdot \overline{MD} &= |\overline{MA}| |\overline{MD}| \cos \theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} a^2 \end{aligned}$$

$$\overline{MA} \cdot \overline{MD} = 16 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{4} a^2 = 16, a^2 = 64$$

$$\therefore a = 8 (\because a > 0)$$

따라서 정사면체의 한 모서리의 길이는 8이다.

10 $\overline{OA} = (4, 2), \overline{BC} = (2, -2)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{OA} \cdot \overline{BC} &= (4, 2) \cdot (2, -2) \\ &= 4 \times 2 + 2 \times (-2) = 4 \end{aligned}$$

11 $\vec{a} + \vec{b} = (k+2, 3k-4)$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = 10 \text{이므로}$$

$$\sqrt{(k+2)^2 + (3k-4)^2} = 10$$

양변을 제곱하면

$$k^2 + 4k + 4 + 9k^2 - 24k + 16 = 100$$

$$k^2 - 2k - 8 = 0$$

$$(k+2)(k-4) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 4$$

그런데 $k < 0$ 이므로 $k = -2$

따라서 $\vec{a} = (-4, -4), \vec{b} = (4, -6)$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-4) \times 4 + (-4) \times (-6) = 8$$

12 $t\vec{a} + \vec{b} = t(-1, 1, 0) + (2, -1, 1)$

$$= (-t+2, t-1, 1)$$

$$\vec{a} - t\vec{b} = (-1, 1, 0) - t(2, -1, 1)$$

$$= (-2t-1, t+1, -t)$$

$$\therefore f(t) = (t\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - t\vec{b})$$

$$= (-t+2, t-1, 1) \cdot (-2t-1, t+1, -t)$$

$$= (-t+2)(-2t-1) + (t-1)(t+1)$$

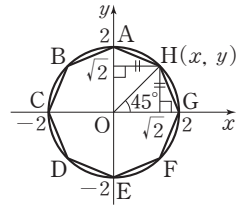
$$+ 1 \times (-t)$$

$$= 3t^2 - 4t - 3$$

$$= 3\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{13}{3}$$

따라서 $t = \frac{2}{3}$ 일 때 $f(t)$ 의 최솟값은 $-\frac{13}{3}$ 이다.

13 오른쪽 그림과 같이 주어진 원 O의 중심이 원점, 두 직선 CG, AE가 각각 x 축, y 축이 되도록 원 O를 좌표평면에 놓으면



$A(0, 2), C(-2, 0), G(2, 0)$

점 H의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \overline{OH} \cos 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$y = \overline{OH} \sin 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore H(\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\overline{AG} = (2, 0) - (0, 2) = (2, -2)$$

$$\overline{HC} = (-2, 0) - (\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (-2 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$$\therefore \overline{AG} \cdot \overline{HC} = (2, -2) \cdot (-2 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$$= 2 \times (-2 - \sqrt{2}) + (-2) \times (-\sqrt{2}) = -4$$

14 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 2 \times \cos 60^\circ = 1$ 이므로

$$(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 6|\vec{a}|^2 + 7\vec{a} \cdot \vec{b} - 3|\vec{b}|^2$$

$$= 6 \times 1^2 + 7 \times 1 - 3 \times 2^2 = 1$$

15 $|2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}$ 의 양변을 제곱하면

$$4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 13$$

$$4 \times (\sqrt{2})^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 13$$

$$\therefore 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 5 \quad \dots \text{㉠}$$

$|\vec{a} - \vec{b}| = 1$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1$$

$$(\sqrt{2})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1$$

$$\therefore 2\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 = 1 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠+㉡을 하면

$$6\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

이를 ㉠에 대입하면

$$4 \times 1 + |\vec{b}|^2 = 5 \quad \therefore |\vec{b}|^2 = 1$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$= (\sqrt{2})^2 + 2 \times 1 + 1 = 5$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5} (\because |\vec{a} + \vec{b}| \geq 0)$$

16 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 k 라 하면

$$\angle CAB = 45^\circ, |\overline{AC}| = \sqrt{2}k \text{이므로}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ = k \times \sqrt{2}k \times \frac{\sqrt{2}}{2} = k^2$$

$$(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - 2\vec{b}) = 27 \text{이므로}$$

$$3|\vec{a}|^2 - 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 27$$

$$3k^2 - 8k^2 + 4 \times (\sqrt{2}k)^2 = 27$$

$$k^2 = 9 \quad \therefore k = 3 (\because k > 0)$$

따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 3이다.

17 선분 AP가 ∠A의 이등분선이므로

$$\overline{BP} : \overline{PC} = \overline{AB} : \overline{AC} = 5 : 3$$

즉, 점 P는 변 BC를 5:3으로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{5\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}}{5+3} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{8}\overrightarrow{AC}$$

한편 ∠A=120°이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos(180^\circ - 120^\circ) \\ &= -10 \times 6 \times \frac{1}{2} = -30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{8}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{5}{8}|\overrightarrow{AC}|^2 \\ &= \frac{3}{8} \times (-30) + \frac{5}{8} \times 6^2 = \frac{45}{4} \end{aligned}$$

18 $2\vec{a} + \vec{b} = (4, 5)$ 에서

$$2\vec{a} = (4, 5) - \vec{b} = (4, 5) - (2, 1) = (2, 4)$$

$$\therefore \vec{a} = (1, 2)$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2) \cdot (2, 1) = 1 \times 2 + 2 \times 1 = 4$$

따라서 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{4}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{4}{5}$$

19 $\overrightarrow{BA} = (1, 2, -1)$, $\overrightarrow{BC} = (1, -2, 1)$ 이므로

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (1, 2, -1) \cdot (1, -2, 1)$$

$$= 1 \times 1 + 2 \times (-2) + (-1) \times 1 = -4$$

따라서 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - \theta) &= -\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} \\ &= -\frac{-4}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

20 $\vec{a} + \vec{b} = (2x-1, 4)$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = 5 \text{이므로 } \sqrt{(2x-1)^2 + 4^2} = 5$$

양변을 제곱하면

$$4x^2 - 4x + 1 + 16 = 25, \quad x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 2$

$$\text{즉, } \vec{a} = (2, 1), \vec{b} = (1, 3) \text{이므로}$$

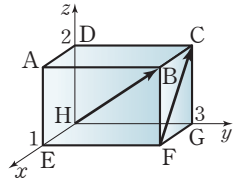
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + 1 \times 3 = 5$$

따라서 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 이므로 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 $\theta (0^\circ \leq \theta < 90^\circ)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \therefore \theta &= 45^\circ \end{aligned}$$

21 오른쪽 그림과 같이 점 H가 원

점, 세 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축 위에 있도록 직육면체를 좌표공간에 놓으면



$B(1, 3, 2)$, $C(0, 3, 2)$, $F(1, 3, 0)$

$\overrightarrow{HB} = (1, 3, 2)$, $\overrightarrow{FC} = (-1, 0, 2)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{FC} &= (1, 3, 2) \cdot (-1, 0, 2) \\ &= 1 \times (-1) + 3 \times 0 + 2 \times 2 = 3 \end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{FC} > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{FC}}{|\overrightarrow{HB}||\overrightarrow{FC}|} \\ &= \frac{3}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+0^2+2^2}} = \frac{3\sqrt{70}}{70} \end{aligned}$$

22 $|2\vec{a} + \vec{b}| = 4$ 의 양변을 제곱하면

$$4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16$$

$$4 \times 1^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 3^2 = 16 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{4}$$

따라서 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 이므로 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\frac{3}{4}}{1 \times 3} = \frac{1}{4}$

23 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -12$ 이므로

$$2|\vec{a}|^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2 = -12$$

$$2 \times (2\sqrt{2})^2 - 3 \times 4 - 2|\vec{b}|^2 = -12$$

$$|\vec{b}|^2 = 8 \quad \therefore |\vec{b}| = 2\sqrt{2} (\because |\vec{b}| > 0)$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 이므로 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 $\theta (0^\circ \leq \theta < 90^\circ)$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{4}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

24 $\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ 에서 $\vec{a} + 2\vec{b} = -\vec{c}$

즉, $|\vec{a} + 2\vec{b}| = |-\vec{c}|$ 이므로 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

$$3^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \times 4^2 = (3\sqrt{5})^2 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -7$$

따라서 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ 이므로

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = -\frac{-7}{3 \times 4} = \frac{7}{12}$$

25 $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$|2\vec{a} + \vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4 \times 1^2 + 4 \times 0 + 1^2 = 5$$

$$\therefore |2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5} (\because |2\vec{a} + \vec{b}| \geq 0)$$

$$|\vec{a}+2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 1^2 + 4 \times 0 + 4 \times 1^2 = 5$$

$$\therefore |\vec{a}+2\vec{b}| = \sqrt{5} \quad (\because |\vec{a}+2\vec{b}| \geq 0)$$

$$(2\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+2\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 + 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 2|\vec{b}|^2$$

$$= 2 \times 1^2 + 5 \times 0 + 2 \times 1^2 = 4$$

따라서 $(2\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+2\vec{b}) > 0$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{(2\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+2\vec{b})}{|2\vec{a}+\vec{b}| |\vec{a}+2\vec{b}|} = \frac{4}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

26 $3\vec{a}+\vec{b}=(10, 8), \vec{a}+m\vec{b}=(-2m+4, 2m+2)$

두 벡터 $3\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+m\vec{b}$ 가 서로 수직이면

$$(3\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+m\vec{b}) = 0 \text{이므로}$$

$$(10, 8) \cdot (-2m+4, 2m+2) = 0$$

$$10(-2m+4) + 8(2m+2) = 0$$

$$-4m+56=0 \quad \therefore m=14$$

27 두 벡터 $6\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}$ 가 서로 수직이면

$$(6\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = 0 \text{이므로}$$

$$6|\vec{a}|^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 = 0$$

$$6 \times 1^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 3^2 = 0 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{5}$$

28 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 가 되려면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 이어야 하므로

$$(-1, 2, 4) \cdot (k, -1, -2) = 0$$

$$-k - 2 - 8 = 0 \quad \therefore k = -10 \quad \therefore \alpha = -10$$

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ 가 되려면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| |\vec{b}|$ 이어야 하므로

$$(-1, 2, 4) \cdot (k, -1, -2)$$

$$= \pm \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 4^2} \sqrt{k^2 + (-1)^2 + (-2)^2}$$

$$-k - 10 = \pm \sqrt{21} \sqrt{k^2 + 5}$$

양변을 제곱하면 $k^2 + 20k + 100 = 21k^2 + 105$

$$4k^2 - 4k + 1 = 0, (2k-1)^2 = 0 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \beta = \frac{1}{2} \quad \therefore \alpha\beta = -10 \times \frac{1}{2} = -5$$

29 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 $\vec{AP}=(x-1, y-2),$

$$\vec{AC}=(1, -2), \vec{AB}=(2, 6), \vec{CP}=(x-2, y)$$

두 벡터 \vec{AP}, \vec{AC} 가 서로 수직이면

$$\vec{AP} \cdot \vec{AC} = 0 \text{이므로}$$

$$(x-1, y-2) \cdot (1, -2) = 0$$

$$(x-1) - 2(y-2) = 0 \quad \therefore x - 2y + 3 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

두 벡터 \vec{AB}, \vec{CP} 가 서로 평행하면

$$\vec{CP} = k \vec{AB} \quad (k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수}) \text{이므로}$$

$$(x-2, y) = k(2, 6) = (2k, 6k)$$

$$x-2=2k, y=6k \quad \therefore x=2k+2, y=6k \quad \dots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하여 풀면 $k = \frac{1}{2}, x=3, y=3$

따라서 점 P의 좌표는 $(3, 3)$

III-3. 도형의 방정식

01 직선의 방정식

62~65쪽

1 ①	2 ④	3 $\frac{9}{2}$	4 52
5 $x-1 = \frac{y+3}{-2}$	6 ④	7 8	8 ⑤
9 1	10 ③	11 3	12 $(0, 3, -16)$
13 ④	14 $\frac{4}{5}$	15 60°	16 ⑤
17 ①	18 4	19 2	20 $\frac{5}{3}$
21 ④	22 ③	23 -6	24 2
25 ⑤	26 $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$	27 ②	

1 점 $(-2, 3)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(5, 2)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{2}$$

이 직선이 점 $(a, -3)$ 을 지나므로

$$\frac{a+2}{5} = \frac{-3-3}{2} \quad \therefore a = -17$$

2 직선 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3} = -z$ 의 방향벡터는 $(2, 3, -1)$

즉, 점 $(-5, 1, 3)$ 을 지나고 방향벡터가 $(2, 3, -1)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{3} = 3-z$$

④ $x=3$ 을 대입하면 $\frac{3+5}{2} = \frac{y-1}{3} = 3-z$

$$\frac{y-1}{3} = 4 \text{에서 } y=13, 3-z=4 \text{에서 } z=-1$$

따라서 점 $(3, 12, -1)$ 은 이 직선 위의 점이 아니다.

3 점 $(4, 1, -1)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(5, 2, 1)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = z+1$$

$y=0$ 을 대입하면

$$\frac{x-4}{5} = \frac{0-1}{2} = z+1$$

$$\frac{x-4}{5} = -\frac{1}{2} \text{에서 } x = \frac{3}{2}, z+1 = -\frac{1}{2} \text{에서 } z = -\frac{3}{2}$$

즉, 주어진 직선이 zx 평면과 만나는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right)$$

따라서 $a = \frac{3}{2}, b = 0, c = -\frac{3}{2}$ 이므로

$$a^2 + b^2 + c^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

- 4 점 (6, 3)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(2, 3)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$y=0$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{x-6}{2} = \frac{0-3}{3} \quad \therefore x=4$$

$\therefore A(4, 0)$

$x=0$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{0-6}{2} = \frac{y-3}{3} \quad \therefore y=-6$$

$\therefore B(0, -6)$

$$\therefore \overline{AB}^2 = \{\sqrt{(-4)^2 + (-6)^2}\}^2 = 52$$

- 5 $3-x = \frac{1-y}{2}$ 에서 $2x-y=5$ $\dots\dots \textcircled{1}$

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{-2}$$
에서 $2x+3y=-7$ $\dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $x=1, y=-3$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는 (1, -3)

직선 $x-1 = \frac{5-y}{2}$ 의 방향벡터는 (1, -2)

따라서 점 (1, -3)을 지나고 방향벡터가 (1, -2)인 직선의 방정식은

$$x-1 = \frac{y+3}{-2}$$

- 6 점 (1, 1, 0)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(-2, 2, 1)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{2} = z$$

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{2} = z = k \text{ (} k \text{는 실수)로 놓으면}$$

$$x = -2k+1, y = 2k+1, z = k$$

이를 $x^2+y^2+z^2=11$ 에 대입하면

$$(-2k+1)^2 + (2k+1)^2 + k^2 = 11, k^2 = 1$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 1$$

따라서 두 교점의 좌표는 (3, -1, -1), (-1, 3, 1)

이므로 선분 AB의 길이는

$$\sqrt{(-1-3)^2 + (3+1)^2 + (1+1)^2} = 6$$

- 7 두 점 A(0, 3), B(4, a)를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overline{AB} = (4, a) - (0, 3) = (4, a-3)$$

직선 $\frac{x}{4} = \frac{y-2}{5}$ 의 방향벡터는 (4, 5)

두 직선의 방향벡터가 서로 같으므로

$$(4, a-3) = (4, 5), a-3=5$$

$$\therefore a=8$$

- 8 두 점 A(-1, 1, 1), B(2, 3, -1)을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overline{AB} = (2, 3, -1) - (-1, 1, 1) = (3, 2, -2)$$

즉, 점 (1, -1, 2)를 지나고 방향벡터가

$$\overline{AB} = (3, 2, -2)$$
인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$$

이 식이 $\frac{x-1}{a} = \frac{y+b}{2} = \frac{z-2}{c}$ 와 일치하므로

$$a=3, b=1, c=-2 \quad \therefore abc=-6$$

- 9 두 점 A(1, 4), B(-2, a)를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overline{AB} = (-2, a) - (1, 4) = (-3, a-4)$$

즉, 점 (3, 1)을 지나고 방향벡터가 $\overline{AB} = (-3, a-4)$

인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{-3} = \frac{y-1}{a-4}$$

$x=0, y=-2$ 를 대입하면

$$\frac{0-3}{-3} = \frac{-2-1}{a-4} \quad \therefore a=1$$

- 10 점 A(2, -4)를 지나고 방향벡터가 (-1, 1)인 직선의 방정식은

$$2-x = y+4 \quad \therefore x+y = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 점 B(1, 2), C(3, 5)를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overline{BC} = (3, 5) - (1, 2) = (2, 3)$$

즉, 점 B(1, 2)를 지나고 방향벡터가 $\overline{BC} = (2, 3)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} \quad \therefore 3x-2y = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$x = -1, y = -1$$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는 (-1, -1)

따라서 $a = -1, b = -1$ 이므로 $ab = 1$

- 11 두 점 A(-1, 3, -2), C(4, -3, 1)을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overline{AC} = (4, -3, 1) - (-1, 3, -2) = (5, -6, 3)$$

즉, 점 A(-1, 3, -2)를 지나고 방향벡터가

$$\overline{AC} = (5, -6, 3)$$
인 직선의 방정식은

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z+2}{3}$$

이때 점 B(a, b, -5)가 이 직선 위에 있으므로

$$\frac{a+1}{5} = \frac{b-3}{-6} = \frac{-5+2}{3}$$

$$\frac{a+1}{5} = -1 \text{에서 } a = -6, \frac{b-3}{-6} = -1 \text{에서 } b = 9$$

$$\therefore a+b=3$$

12 선분 AB를 3:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 5 + 1 \times 1}{3+1}, \frac{3 \times (-6) + 1 \times (-2)}{3+1}, \frac{3 \times (-1) + 1 \times 3}{3+1} \right)$$

∴ (4, -5, 0)
 두 점 (4, -5, 0), (3, -3, -4)를 지나는 직선의 방향 벡터는

$$(3, -3, -4) - (4, -5, 0) = (-1, 2, -4)$$

즉, 점 (4, -5, 0)을 지나고 방향벡터가 (-1, 2, -4)인 직선의 방정식은

$$4 - x = \frac{y+5}{2} = -\frac{z}{4}$$

x=0을 대입하면

$$4 - 0 = \frac{y+5}{2} = -\frac{z}{4}$$

$$\frac{y+5}{2} = 4 \text{에서 } y=3, \quad -\frac{z}{4} = 4 \text{에서 } z = -16$$

따라서 구하는 점의 좌표는 (0, 3, -16)

13 두 점 A(-1, 1, -2), B(2, 2, 2)를 지나는 직선의 방향 벡터는

$$\overrightarrow{AB} = (2, 2, 2) - (-1, 1, -2) = (3, 1, 4)$$

즉, 점 A(-1, 1, -2)를 지나고 방향벡터가

$$\overrightarrow{AB} = (3, 1, 4) \text{인 직선 AB의 방정식은}$$

$$\frac{x+1}{3} = y-1 = \frac{z+2}{4}$$

$$\frac{x+1}{3} = y-1 = \frac{z+2}{4} = t \text{ (t는 실수)로 놓으면}$$

$$x=3t-1, y=t+1, z=4t-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 점 C(4, 1, 1), D(k, 3, 6)을 지나는 직선의 방향 벡터는

$$\overrightarrow{CD} = (k, 3, 6) - (4, 1, 1) = (k-4, 2, 5)$$

즉, 점 C(4, 1, 1)을 지나고 방향벡터가

$$\overrightarrow{CD} = (k-4, 2, 5) \text{인 직선 CD의 방정식은}$$

$$\frac{x-4}{k-4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{5}$$

$$\frac{x-4}{k-4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{5} = s \text{ (s는 실수)로 놓으면}$$

$$x=(k-4)s+4, y=2s+1, z=5s+1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$3t-1=(k-4)s+4, t+1=2s+1, 4t-2=5s+1$$

두 식 t+1=2s+1, 4t-2=5s+1을 연립하여 풀면

$$t=2, s=1$$

이를 3t-1=(k-4)s+4에 대입하면

$$3 \times 2 - 1 = (k-4) \times 1 + 4$$

$$\therefore k=5$$

14 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면 $\vec{u}=(2, 1), \vec{v}=(1, 2)$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|2 \times 1 + 1 \times 2|}{\sqrt{2^2+1^2} \sqrt{1^2+2^2}} = \frac{4}{5}$$

15 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면 $\vec{u}=(4, 3, -5), \vec{v}=(3, -4, -5)$

두 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|4 \times 3 + 3 \times (-4) + (-5) \times (-5)|}{\sqrt{4^2+3^2} \sqrt{3^2+(-4)^2+(-5)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

16 직선 l의 방향벡터는 $\vec{u}=(3, -1)$

직선 m의 방향벡터를 \vec{v} 라 하면 $\vec{v}=(7, 1)$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|3 \times 7 + (-1) \times 1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2} \sqrt{7^2+1^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

17 두 점 A(3, -1, -1), B(2, 1, 0)을 지나는 직선의 방향 벡터를 \vec{u} 라 하면

$$\vec{u} = (2, 1, 0) - (3, -1, -1) = (-1, 2, 1)$$

두 점 C(2, -1, 1), D(4, -1, 2)를 지나는 직선의 방향 벡터를 \vec{v} 라 하면

$$\vec{v} = (4, -1, 2) - (2, -1, 1) = (2, 0, 1)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|(-1) \times 2 + 2 \times 0 + 1 \times 1|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2} \sqrt{2^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{30}$$

18 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면 $\vec{u}=(1, 1, 2), \vec{v}=(k, 2k, 2)$

두 직선이 이루는 각의 크기가 45° 이므로

$$\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \cos 45^\circ = \frac{|1 \times k + 1 \times 2k + 2 \times 2|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2} \sqrt{k^2+(2k)^2+2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{|3k+4|}{\sqrt{6} \sqrt{5k^2+4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|3k+4| = \sqrt{3} \sqrt{5k^2+4}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 9k^2 + 24k + 16 = 15k^2 + 12$$

$$3k^2 - 12k - 2 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실

$$\text{수 } k \text{의 값의 합은 } \frac{12}{3} = 4$$

19 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면

$$\vec{u}=(a, -b), \vec{v}=(1, 2)$$

$$\cos\theta=\frac{3}{5}\text{이므로 } \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{|a\times 1+(-b)\times 2|}{\sqrt{a^2+(-b)^2}\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3}{5}$$

$$\sqrt{5}|a-2b|=3\sqrt{a^2+b^2}$$

양변을 제곱하면

$$5a^2-20ab+20b^2=9a^2+9b^2$$

$$4a^2+20ab-11b^2=0$$

$$(2a+11b)(2a-b)=0$$

$$\therefore 2a=-11b \text{ 또는 } 2a=b$$

그런데 a, b 는 자연수이므로 $a>0, b>0$ 에서

$$2a=b \quad \therefore \frac{b}{a}=2$$

20 직선 l 의 방향벡터를 \vec{u} , x 축, y 축, z 축의 방향벡터를 각각 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ 이라 하면

$$\vec{u}=(2, -2, 1), \vec{u}_1=(1, 0, 0), \vec{u}_2=(0, 1, 0),$$

$$\vec{u}_3=(0, 0, 1)$$

$$\therefore \cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{u}_1|}{|\vec{u}||\vec{u}_1|}$$

$$=\frac{|2\times 1+(-2)\times 0+1\times 0|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\frac{2}{3}$$

$$\cos\beta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{u}_2|}{|\vec{u}||\vec{u}_2|}$$

$$=\frac{|2\times 0+(-2)\times 1+1\times 0|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{0^2+1^2+0^2}}=\frac{2}{3}$$

$$\cos\gamma=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{u}_3|}{|\vec{u}||\vec{u}_3|}$$

$$=\frac{|2\times 0+(-2)\times 0+1\times 1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\frac{5}{3}$$

21 두 점 $A(a, 4), B(2, a)$ 를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\vec{AB}=(2, a)-(a, 4)$$

$$=(2-a, a-4)$$

직선 $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-3}$ 의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면

$$\vec{u}=(4, -3)$$

두 직선이 서로 평행하면 $\vec{AB}\parallel\vec{u}$ 이므로

$$\vec{AB}=t\vec{u} \text{ (단, } t\text{는 } 0\text{이 아닌 실수)}$$

$$(2-a, a-4)=t(4, -3)=(4t, -3t)$$

$$2-a=4t, a-4=-3t$$

두 식을 연립하여 풀면

$$t=-2, a=10$$

$$22 \quad ax+6y-12=0\text{에서 } \frac{x}{-6}=\frac{y-2}{a}$$

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면

$$\vec{u}=(-6, a), \vec{v}=(5, 3)$$

두 직선이 서로 수직이면 $\vec{u}\perp\vec{v}$ 이므로

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

$$(-6, a)\cdot(5, 3)=0$$

$$-6\times 5+a\times 3=0$$

$$3a-30=0 \quad \therefore a=10$$

23 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 \vec{u}, \vec{v} 라 하면

$$\vec{u}=(2, a+1), \vec{v}=(a, 3)$$

두 직선이 서로 평행하려면 $\vec{u}\parallel\vec{v}$ 이어야 하므로

$$\vec{u}=t\vec{v} \text{ (단, } t\text{는 } 0\text{이 아닌 실수)}$$

$$(2, a+1)=t(a, 3)=(at, 3t)$$

$$2=at, a+1=3t$$

$$\text{즉, } t=\frac{2}{a}=\frac{a+1}{3}\text{이므로}$$

$$a(a+1)=6, a^2+a-6=0$$

$$(a+3)(a-2)=0$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은 $-3\times 2=-6$

24 세 직선 l, m, n 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ 이라 하면

$$\vec{u}_1=(2, 1, 3), \vec{u}_2=(a, b, 6), \vec{u}_3=(-1, c, 2)$$

두 직선 l, m 이 서로 평행하면 $\vec{u}_1\parallel\vec{u}_2$ 이므로

$$\vec{u}_1=t\vec{u}_2 \text{ (단, } t\text{는 } 0\text{이 아닌 실수)}$$

$$(2, 1, 3)=t(a, b, 6)=(at, bt, 6t)$$

$$2=at, 1=bt, 3=6t$$

$$\therefore t=\frac{1}{2}, a=4, b=2$$

두 직선 l, n 이 서로 수직이면 $\vec{u}_1\perp\vec{u}_3$ 이므로

$$\vec{u}_1\cdot\vec{u}_3=0$$

$$(2, 1, 3)\cdot(-1, c, 2)=0$$

$$2\times(-1)+1\times c+3\times 2=0$$

$$c+4=0 \quad \therefore c=-4$$

$$\therefore a+b+c=4+2+(-4)=2$$

25 점 P 의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 P 는 직선 l 위의 점이므로

$$\frac{a-5}{2}=b-5$$

$$\therefore a-2b=-5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\vec{AP}=(a, b)-(2, 6)=(a-2, b-6)$$

직선 l 의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면

$$\vec{u}=(2, 1)$$

$$\overrightarrow{AP} \perp \vec{u} \text{이므로 } \overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(a-2, b-6) \cdot (2, 1) = 0$$

$$(a-2) \times 2 + (b-6) \times 1 = 0$$

$$\therefore 2a + b = 10 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{을 연립하여 풀면 } a=3, b=4$$

$$\text{따라서 } P(3, 4) \text{이므로 } \overrightarrow{OP} = (3, 4)$$

$$\therefore |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

26 원점 O와 점 A(1, 2, 2)를 지나는 직선의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면

$$\vec{u} = (1, 2, 2)$$

즉, 원점 O를 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (1, 2, 2)$ 인 직선 l의 방정식은

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$$

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2} = t \text{ (t는 실수)로 놓으면 } x=t, y=2t, z=2t$$

점 H는 직선 l 위의 점이므로 H(t, 2t, 2t)라 하면

$$\overrightarrow{PH} = (t, 2t, 2t) - (-2, 1, 3)$$

$$= (t+2, 2t-1, 2t-3)$$

$$\overrightarrow{PH} \perp l \text{이므로 } \overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(t+2, 2t-1, 2t-3) \cdot (1, 2, 2) = 0$$

$$(t+2) \times 1 + (2t-1) \times 2 + (2t-3) \times 2 = 0$$

$$9t - 6 = 0 \quad \therefore t = \frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 점 H의 좌표는 } \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

27 $\frac{x+1}{2} = y-4 = \frac{z-8}{-3} = t$ (t는 실수)로 놓으면

$$x=2t-1, y=t+4, z=-3t+8$$

점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 직선 l 위의 점이므로 H(2t-1, t+4, -3t+8)이라 하자.

$$\therefore \overrightarrow{CH} = (2t-1, t+4, -3t+8) - (1, -1, 3)$$

$$= (2t-2, t+5, -3t+5)$$

직선 l의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면 $\vec{u} = (2, 1, -3)$

$$\overrightarrow{CH} \perp \vec{u} \text{이므로 } \overrightarrow{CH} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(2t-2, t+5, -3t+5) \cdot (2, 1, -3) = 0$$

$$(2t-2) \times 2 + (t+5) \times 1 + (-3t+5) \times (-3) = 0$$

$$14t - 14 = 0 \quad \therefore t = 1$$

즉, $\overrightarrow{CH} = (0, 6, 2)$ 이므로 삼각형 ABC의 높이는

$$|\overrightarrow{CH}| = |\overrightarrow{CH}| = \sqrt{0^2 + 6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$$

삼각형 ABC는 정삼각형이므로 한 변의 길이를 a라 하면

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a = 2\sqrt{10} \quad \therefore a = \frac{4\sqrt{30}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{4\sqrt{30}}{3}\right)^2 = \frac{40\sqrt{3}}{3}$$

02 평면과 구의 방정식

66~71쪽

1 x=1 2 ② 3 10 4 ⑤ 5 ④

6 $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z}{3}$ 7 ⑤ 8 ③

9 (-1, 3, 0) 10 x=z+1, y=0 11 ④

12 ① 13 4x-y+3z+1=0 14 ④ 15 ③

16 4√2 17 ① 18 ④ 19 -4 20 60°

21 30° 22 ⑤ 23 ㄱ, ㄷ 24 ④ 25 4√5

26 2 27 ② 28 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 29 15-2√5

30 6 31 x+4y+z+1=0, x+4y+z+25=0

32 3 33 ② 34 ① 35 33 36 24π

37 ④ 38 84π

39 (x-4)²+(y-5)²+(z-4)²=11

1 x축에 수직인 평면의 법선벡터는 (1, 0, 0) 따라서 점 E(1, 2, 3)을 지나고 법선벡터가 (1, 0, 0)인 평면의 방정식은

$$(x-1) + 0(y-2) + 0(z-3) = 0$$

$$\therefore x=1$$

2 평면 x-y-2z=-1의 법선벡터는 (1, -1, -2) 점 (2, 1, -1)을 지나고 법선벡터가 (1, -1, -2)인 평면의 방정식은

$$(x-2) - (y-1) - 2(z+1) = 0$$

$$\therefore x - y - 2z - 3 = 0$$

이 평면이 점 (3, 4, k)를 지나므로

$$3 - 4 - 2k - 3 = 0$$

$$\therefore k = -2$$

3 직선 $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{a} = \frac{z+5}{4}$ 의 방향벡터는 (2, a, 4)이므로 이 직선에 수직인 평면의 법선벡터는 (2, a, 4)이다

즉, 점 (1, 1, -2)를 지나고 법선벡터가 (2, a, 4)인 평면의 방정식은

$$2(x-1) + a(y-1) + 4(z+2) = 0$$

$$\therefore 2x + ay + 4z - a + 6 = 0$$

이 식이 2x+5y+bz+c=0과 일치하므로

$$a=5, 4=b, -a+6=c$$

따라서 a=5, b=4, c=1이므로

$$a+b+c=10$$

4 구하는 평면의 방정식을 ax+by+cz+d=0이라 하자. 점 (0, 0, 3)을 지나므로

$$3c+d=0 \quad \therefore c = -\frac{d}{3} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

점 $(0, -5, 0)$ 을 지나므로
 $-5b+d=0 \quad \therefore b=\frac{d}{5} \quad \dots\dots \textcircled{L}$

점 $(1, -2, 0)$ 을 지나므로
 $a-2b+d=0 \quad \therefore a=2b-d=-\frac{3}{5}d \quad \dots\dots \textcircled{M}$

$\textcircled{L}, \textcircled{M}, \textcircled{N}$ 을 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면 구하는 평면의 방정식은

$$-\frac{3}{5}dx + \frac{d}{5}y - \frac{d}{3}z + d = 0$$

$\therefore 9x-3y+5z-15=0 \quad (\because d \neq 0)$

5 주어진 세 점을 지나는 평면의 방정식을

$ax+by+cz+d=0$ 이라 하자.

점 $(-1, 0, 0)$ 을 지나므로
 $-a+d=0 \quad \therefore a=d \quad \dots\dots \textcircled{L}$

점 $(0, 2, 0)$ 을 지나므로
 $2b+d=0 \quad \therefore b=-\frac{d}{2} \quad \dots\dots \textcircled{M}$

점 $(-1, 1, 1)$ 을 지나므로
 $-a+b+c+d=0 \quad \therefore c=a-b-d=\frac{d}{2} \quad \dots\dots \textcircled{N}$

$\textcircled{L}, \textcircled{M}, \textcircled{N}$ 을 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면 평면의 방정식은

$$dx - \frac{d}{2}y + \frac{d}{2}z + d = 0$$

$\therefore 2x-y+z+2=0 \quad (\because d \neq 0)$

이 평면이 점 $(1, 1, k)$ 를 지나므로
 $2 \times 1 - 1 + k + 2 = 0 \quad \therefore k = -3$

6 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을

$ax+by+cz+d=0$ 이라 하고, 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$$-a+b+d=0 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$a+c+d=0 \quad \dots\dots \textcircled{M}$$

$$-b+4c+d=0 \quad \dots\dots \textcircled{N}$$

$\textcircled{L}, \textcircled{M}, \textcircled{N}$ 에서

$$a = -\frac{2}{5}d, b = -\frac{7}{5}d, c = -\frac{3}{5}d$$

이를 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면 평면의 방정식은

$$-\frac{2}{5}dx - \frac{7}{5}dy - \frac{3}{5}dz + d = 0$$

$$\therefore 2x+7y+3z-5=0 \quad (\because d \neq 0)$$

이 평면의 법선벡터는 $(2, 7, 3)$ 이므로 평면에 수직인 직선의 방향벡터는 $(2, 7, 3)$

따라서 점 $A(-1, 1, 0)$ 을 지나고 방향벡터가 $(2, 7, 3)$

인 직선의 방정식은

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z}{3}$$

7 $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z-1 = k$ (k 는 실수)로 놓으면
 $x=2k+1, y=3k, z=k+1 \quad \dots\dots \textcircled{L}$

\textcircled{L} 을 $x+y-3z-2=0$ 에 대입하면

$$(2k+1) + 3k - 3(k+1) - 2 = 0$$

$$2k-4=0$$

$$\therefore k=2$$

이를 \textcircled{L} 에 대입하면

$$x=2 \times 2 + 1 = 5, y=3 \times 2 = 6, z=2+1=3$$

따라서 교점의 좌표는 $(5, 6, 3)$ 이므로

$$a=5, b=6, c=3$$

$$\therefore a-b+c=2$$

8 xy 평면과 만나는 점의 z 좌표는 0이므로 직선의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$$\frac{x+4}{-2} = y+1 = \frac{0-3}{3}$$

$$\frac{x+4}{-2} = -1 \text{에서 } x=-2, y+1=-1 \text{에서 } y=-2$$

$$\therefore A(-2, -2, 0)$$

yz 평면과 만나는 점의 x 좌표는 0이므로 직선의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$\frac{0+4}{-2} = y+1 = \frac{z-3}{3}$$

$$y+1=-2 \text{에서 } y=-3, \frac{z-3}{3}=-2 \text{에서 } z=-3$$

$$\therefore B(0, -3, -3)$$

$$\therefore AB = \sqrt{2^2 + (-3+2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

9 평면 $2x-y+3z+5=0$ 의 법선벡터는 $(2, -1, 3)$ 이므로 두 점 A, H를 지나는 직선의 방향벡터는

$$(2, -1, 3)$$

즉, 점 $A(1, 2, 3)$ 을 지나고 방향벡터가 $(2, -1, 3)$ 인

직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{3}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{3} = k \quad (k \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=2k+1, y=-k+2, z=3k+3$$

$H(2k+1, -k+2, 3k+3)$ 이라 하면

점 H는 평면 $2x-y+3z+5=0$ 위의 점이므로

$$2(2k+1) - (-k+2) + 3(3k+3) + 5 = 0$$

$$14k+14=0$$

$$\therefore k=-1$$

따라서 점 H의 좌표는

$$(2 \times (-1) + 1, -(-1) + 2, 3 \times (-1) + 3)$$

$$\therefore (-1, 3, 0)$$

10 zx 평면의 방정식은 $y=0$
따라서 평면 $x+2y-z=1$ 과 zx 평면의 교선의 방정식은
 $x=z+1, y=0$

11 두 평면의 방정식을 연립하여 x 를 소거하면

$$y+z=7 \quad \therefore z=\frac{y-7}{-1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

두 평면의 방정식을 연립하여 y 를 소거하면

$$x+2z=8 \quad \therefore z=\frac{x-8}{-2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 교선의 방정식은

$$\frac{x-8}{-2}=\frac{y-7}{-1}=z$$

이 교선의 방향벡터는 $(-2, -1, 1)$ 이므로 이 교선에 수직인 평면의 법선벡터는

$$(-2, -1, 1)$$

즉, 점 $(-1, -2, 0)$ 을 지나고 법선벡터가 $(-2, -1, 1)$

인 평면의 방정식은

$$-2(x+1)-(y+2)+z=0$$

$$\therefore 2x+y-z+4=0$$

이 평면이 점 $(a, 0, 2)$ 를 지나므로

$$2a+0-2+4=0$$

$$\therefore a=-1$$

12 $x-2z-7=0$ 에서 $z=\frac{x-7}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$

$$y-3z-14=0 \text{에서 } z=\frac{y-14}{3} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 교선 l 의 방정식은

$$\frac{x-7}{2}=\frac{y-14}{3}=z$$

원점 O 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 점 H 는 직선 l 위에 있다.

$$\frac{x-7}{2}=\frac{y-14}{3}=z=k \text{ (} k \text{는 실수)로 놓으면}$$

$$x=2k+7, y=3k+14, z=k$$

$$\therefore H(2k+7, 3k+14, k)$$

직선 l 의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면

$$\vec{u}=(2, 3, 1)$$

$$\vec{u} \perp \vec{OH} \text{이므로 } \vec{u} \cdot \vec{OH}=0$$

$$(2, 3, 1) \cdot (2k+7, 3k+14, k)=0$$

$$2(2k+7)+3(3k+14)+k=0$$

$$14k+56=0 \quad \therefore k=-4$$

즉, 점 H 의 좌표는

$$(2 \times (-4)+7, 3 \times (-4)+14, -4)$$

$$\therefore (-1, 2, -4)$$

따라서 $a=-1, b=2, c=-4$ 이므로

$$a+b+c=-3$$

13 두 평면의 방정식을 연립하여 y 를 소거하면

$$3x+z=0 \quad \therefore x=-\frac{z}{3} \quad \cdots \textcircled{1}$$

두 평면의 방정식을 연립하여 z 를 소거하면

$$5x+y=1 \quad \therefore x=\frac{y-1}{-5} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 교선의 방정식은

$$x=\frac{y-1}{-5}=\frac{z}{-3}$$

이때 구하는 평면의 방정식은 교선 위의 두 점 $(0, 1, 0), (1, -4, -3)$ 과 주어진 점 $(1, -1, -2)$ 를 지나는 평면의 방정식과 같다.

구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 이라 하고, 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$$b+d=0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$a-4b-3c+d=0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$a-b-2c+d=0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}, \textcircled{5}$ 에서

$$a=4d, b=-d, c=3d$$

이를 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면 구하는 평면의 방정식은

$$4dx-dy+3dz+d=0$$

$$\therefore 4x-y+3z+1=0 \quad (\because d \neq 0)$$

14 평면 $2x+2y-z+5=0$ 의 법선벡터를 \vec{n}_1 , xy 평면의 법선벡터를 \vec{n}_2 라 하면

$$\vec{n}_1=(2, 2, -1), \vec{n}_2=(0, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|2 \times 0 + 2 \times 0 + (-1) \times 1|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2} \sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

15 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면

$$\vec{n}_1=(3, -2, 1), \vec{n}_2=(2, 1, k)$$

두 평면이 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ \frac{1}{2} &= \frac{|3 \times 2 + (-2) \times 1 + 1 \times k|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2} \sqrt{2^2+1^2+k^2}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|k+4|}{\sqrt{14(k^2+5)}}, \sqrt{14(k^2+5)}=2|k+4|$$

양변을 제곱하면

$$14(k^2+5)=4(k+4)^2$$

$$5k^2-16k+3=0, (5k-1)(k-3)=0$$

$$\therefore k=\frac{1}{5} \text{ 또는 } k=3$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은 $\frac{1}{5}+3=\frac{16}{5}$

- 16 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면
 $\vec{n}_1 = (1, -2, 2), \vec{n}_2 = (3, 4, -5)$

두 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|1 \times 3 + (-2) \times 4 + 2 \times (-5)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

한편 평면 α 위의 사각형의 넓이를 S , 이 사각형의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 S' 이라 하면 $S' = S \cos \theta$ 이므로

$$2 \times 2 = S \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore S = 4\sqrt{2}$$

따라서 구하는 사각형의 넓이는 $4\sqrt{2}$ 이다.

- 17 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면
 $\vec{n}_1 = (2, 1, 3), \vec{n}_2 = (k, 3, 1)$

두 평면이 서로 수직이면 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ 이므로

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$(2, 1, 3) \cdot (k, 3, 1) = 0$$

$$2 \times k + 1 \times 3 + 3 \times 1 = 0$$

$$2k + 6 = 0$$

$$\therefore k = -3$$

- 18 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면
 $\vec{n}_1 = (a-1, 3, 1), \vec{n}_2 = (2, 3, \frac{a}{3})$

두 평면이 서로 평행하면 $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ 이므로

$$\vec{n}_1 = t\vec{n}_2 \quad (\text{단, } t \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

$$(a-1, 3, 1) = t \left(2, 3, \frac{a}{3} \right) = \left(2t, 3t, \frac{a}{3}t \right)$$

$$a-1 = 2t, 3 = 3t, 1 = \frac{a}{3}t$$

$$\therefore t = 1, a = 3$$

- 19 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면
 $\vec{n}_1 = (4, k-1, -1), \vec{n}_2 = (-k, k+5, -1)$

두 평면이 서로 수직이 되려면 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ 이어야 하므로

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$(4, k-1, -1) \cdot (-k, k+5, -1) = 0$$

$$4 \times (-k) + (k-1)(k+5) + (-1) \times (-1) = 0$$

$$k^2 = 4 \quad \therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 2$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$-2 \times 2 = -4$$

- 20 직선의 방향벡터를 \vec{u} , 평면의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면
 $\vec{u} = (\sqrt{2}, 1, 1), \vec{n} = (\sqrt{2}, 0, 1)$

직선과 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 두 벡터 \vec{u}, \vec{n} 이 이루는 각의 크기는 $90^\circ - \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \theta) &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} \\ &= \frac{|\sqrt{2} \times \sqrt{2} + 1 \times 0 + 1 \times 1|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 0^2 + 1^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

따라서 $90^\circ - \theta = 30^\circ$ 이므로 $\theta = 60^\circ$

- 21 직선의 방향벡터를 \vec{u} , 평면의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면
 $\vec{u} = (7, 2, -1) - (3, -3, 2) = (4, 5, -3)$

$$\vec{n} = (3, -5, 4)$$

직선과 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 두 벡터 \vec{u}, \vec{n} 이 이루는 각의 크기는 $90^\circ - \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \theta) &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} \\ &= \frac{|4 \times 3 + 5 \times (-5) + (-3) \times 4|}{\sqrt{4^2 + 5^2 + (-3)^2} \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 4^2}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 $90^\circ - \theta = 60^\circ$ 이므로 $\theta = 30^\circ$

- 22 직선의 방향벡터를 \vec{u} , 평면의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면
 $\vec{u} = (2, 1-k, k), \vec{n} = (1, k, -2)$

직선과 평면이 서로 평행하면 $\vec{u} \perp \vec{n}$ 이므로

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(2, 1-k, k) \cdot (1, k, -2) = 0$$

$$2 \times 1 + (1-k)k + k \times (-2) = 0$$

$$k^2 + k - 2 = 0, (k+2)(k-1) = 0$$

$$\therefore k = -2 \quad (\because k < 0)$$

- 23 직선 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = 1-z$ 의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면
 $\vec{u} = (3, 2, -1)$

평면의 법선벡터를 \vec{n} 이라 할 때, 직선과 평면이 서로 수직이면 $\vec{u} \parallel \vec{n}$ 이므로

$$\vec{u} = t\vec{n} \quad (\text{단, } t \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

$$\therefore \vec{n} = (-3, -2, 1) \text{이므로}$$

$$(3, 2, -1) = -(-3, -2, 1)$$

즉, 직선과 평면은 서로 수직이다.

$$\therefore \vec{n} = (-2, -3, 4) \text{이므로}$$

$$(3, 2, -1) = t(-2, -3, 4) = (-2t, -3t, 4t)$$

이를 만족시키는 실수 t 의 값은 존재하지 않으므로 직선과 평면은 수직이 아니다.

$$\therefore \vec{n} = (4, 6, 3) \text{이므로}$$

$$(3, 2, -1) = t(4, 6, 3) = (4t, 6t, 3t)$$

이를 만족시키는 실수 t 의 값은 존재하지 않으므로 직선과 평면은 수직이 아니다.

르. $\vec{n} = (6, 4, -2)$ 이므로

$$(3, 2, -1) = \frac{1}{2}(6, 4, -2)$$

즉, 직선과 평면은 서로 수직이다.

따라서 보기에서 주어진 직선과 수직인 평면의 방정식은 ㄱ, ㄴ이다.

24 직선의 방향벡터를 \vec{u} , 평면의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면

$$\vec{u} = (-2, 1, 1), \vec{n} = (1, 1, a)$$

직선과 평면이 이루는 각의 크기가 30° 이면 두 벡터 \vec{u}, \vec{n} 이 이루는 각의 크기는 $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ 이므로

$$\cos 60^\circ = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|(-2) \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times a|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + a^2}}, \frac{1}{2} = \frac{|a-1|}{\sqrt{6(a^2+2)}}$$

$$\sqrt{6(a^2+2)} = 2|a-1|$$

양변을 제곱하면

$$6(a^2+2) = 4(a-1)^2, a^2 + 4a + 4 = 0$$

$$(a+2)^2 = 0 \quad \therefore a = -2$$

25 두 평면의 방정식을 연립하여 x 를 소거하면

$$-y + 5z - 2 = 0 \quad \therefore z = \frac{y+2}{5} \quad \text{..... ㉠}$$

두 평면의 방정식을 연립하여 y 를 소거하면

$$x + 2z - 3 = 0 \quad \therefore z = \frac{x-3}{-2} \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 교선의 방정식은 } \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{5} = z$$

직선 $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{5} = z$ 의 방향벡터를 \vec{u} , 평면

$x + 2y + z - 5 = 0$ 의 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면

$$\vec{u} = (-2, 5, 1), \vec{n} = (1, 2, 1)$$

직선과 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 두 벡터 \vec{u}, \vec{n}

이 이루는 각의 크기는 $90^\circ - \theta$ 이므로

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|}$$

$$= \frac{|(-2) \times 1 + 5 \times 2 + 1 \times 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에서 높이는

$$\sqrt{10^2 - (3\sqrt{5})^2} = \sqrt{55}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{55}}{10}$$

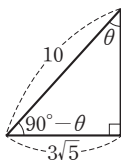
선분 AB의 길이를 l , 선분 AB의 평면

$x + 2y + z - 5 = 0$ 위의 정사영의 길이를 l' 이라 하면

$$l' = l \cos \theta \text{이므로}$$

$$2\sqrt{11} = l \times \frac{\sqrt{55}}{10} \quad \therefore l = 4\sqrt{5}$$

따라서 선분 AB의 길이는 $4\sqrt{5}$ 이다.



26 두 평면의 법선벡터가 $(2, 3, -6)$ 으로 같으므로 두 평면은 서로 평행하다.

따라서 두 평면 사이의 거리는 평면 $2x + 3y - 6z - 6 = 0$ 위의 점 $(0, 0, -1)$ 과 평면 $2x + 3y - 6z + 8 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2 \times 0 + 3 \times 0 - 6 \times (-1) + 8|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = 2$$

27 점 A(1, 4, 2)가 직선 $\frac{x+1}{a} = \frac{y-2}{b} = \frac{z-1}{2}$ 위의 점이므로

$$\frac{1+1}{a} = \frac{4-2}{b} = \frac{2-1}{2}$$

$$\therefore a = 4, b = 4$$

따라서 점 A(1, 4, 2)와 평면 $4x + 4y + 2z + 48 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4 \times 1 + 4 \times 4 + 2 \times 2 + 48|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2}} = 12$$

28 세 점 A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 2)를 지나는 평면 α 의 방정식을 $ax + by + cz + d = 0$ 이라 하고, 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$$2a + d = 0 \quad \therefore a = -\frac{d}{2} \quad \text{..... ㉠}$$

$$2b + d = 0 \quad \therefore b = -\frac{d}{2} \quad \text{..... ㉡}$$

$$2c + d = 0 \quad \therefore c = -\frac{d}{2} \quad \text{..... ㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 $ax + by + cz + d = 0$ 에 대입하면 평면 α 의 방정식은

$$-\frac{d}{2}x - \frac{d}{2}y - \frac{d}{2}z + d = 0$$

$$\therefore x + y + z - 2 = 0 \quad (\because d \neq 0)$$

따라서 원점과 평면 α 사이의 거리는

$$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

29 $AP = \sqrt{(2+1)^2 + 2^2 + (3-2)^2} = \sqrt{14}$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 하면

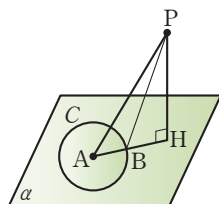
$$PH = \frac{|1 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 3 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}$$

$$= 3$$

직각삼각형 PAH에서

$$AH = \sqrt{AP^2 - PH^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{14})^2 - 3^2} = \sqrt{5}$$



이때 선분 AH와 원 C의 교점을 B라 하면

$$\overline{BH} = \sqrt{5} - 1$$

점 P에서 원 C 위의 점까지의 거리의 최솟값 d는 선분 BP의 길이와 같으므로 직각삼각형 PBH에서

$$d^2 = \overline{BP}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{BH}^2 = 3^2 + (\sqrt{5} - 1)^2 = 15 - 2\sqrt{5}$$

- 30** 구의 중심 (1, -2, 0)과 평면 $2x + y - 2z + k = 0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|2 \times 1 + 1 \times (-2) - 2 \times 0 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2$$

$$|k| = 6 \quad \therefore k = 6 \quad (\because k > 0)$$

- 31** 직선 $x - 1 = \frac{y + 2}{4} = z - 3$ 의 방향벡터는 (1, 4, 1)이므로

이 직선에 수직인 평면의 법선벡터는 (1, 4, 1)

구하는 평면의 방정식을 $x + 4y + z + d = 0$ (d는 실수)이라 하면 구의 중심 (1, -4, 2)와 평면 사이의 거리는 구의 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 와 같으므로

$$\frac{|1 \times 1 + 4 \times (-4) + 1 \times 2 + d|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$|d - 13| = 12 \quad \therefore d = 1 \text{ 또는 } d = 25$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$x + 4y + z + 1 = 0, \quad x + 4y + z + 25 = 0$$

- 32** 법선벡터가 (1, 1, -1)인 평면의 방정식을

$x + y - z + d = 0$ (d는 실수)이라 하자.

평면 $x + y - z + d = 0$ 이 구 $(x - 2)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 3$ 에 접하면 구의 중심 (2, 0, 2)와 평면 사이의 거리는 구의 반지름의 길이 $\sqrt{3}$ 과 같으므로

$$\frac{|1 \times 2 + 1 \times 0 - 1 \times 2 + d|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{3}$$

$$|d| = 3$$

$$\therefore d = -3 \text{ 또는 } d = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

또 평면 $x + y - z + d = 0$ 이 구

$x^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 12$ 에 접하면 구의 중심

(0, 1, -2)와 평면 사이의 거리는 구의 반지름의 길이

$2\sqrt{3}$ 과 같으므로

$$\frac{|1 \times 0 + 1 \times 1 - 1 \times (-2) + d|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{3}$$

$$|d + 3| = 6$$

$$\therefore d = -9 \text{ 또는 } d = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $d = 3$ 일 때 평면 $x + y - z + d = 0$ 이 두 구에 동시에 접하므로 평면의 방정식은

$$x + y - z + 3 = 0$$

이 평면이 점 (1, -1, a)를 지나므로

$$1 + (-1) - a + 3 = 0 \quad \therefore a = 3$$

- 33** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2z - 3 = 0$ 에서

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 6$$

구의 중심을 C(1, -1, -1)이라 하면 점 A(2, 0, -3)

을 지나고 구에 접하는 평면 α 의 법선벡터는

$$\overrightarrow{CA} = (2, 0, -3) - (1, -1, -1)$$

$$= (1, 1, -2)$$

구하는 평면의 방정식을 $x + y - 2z + d = 0$ (d는 실수)이라 하면 구의 중심 C와 평면 사이의 거리는 구의 반지름의 길이 $\sqrt{6}$ 과 같으므로

$$\frac{|1 \times 1 + 1 \times (-1) - 2 \times (-1) + d|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{6}$$

$$|d + 2| = 6$$

$$\therefore d = -8 \text{ 또는 } d = 4$$

그런데 $d = -8$ 이면 평면 $x + y - 2z + d = 0$ 은 점 A를 지나는 평면 α 이므로 구하는 평면의 방정식은

$$x + y - 2z + 4 = 0$$

- 34** 세 점 A, B, C를 지나는 평면 α 의 방정식을

$ax + by + cz + d = 0$ 이라 하고, 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$$a + d = 0 \quad \therefore a = -d \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b + d = 0 \quad \therefore b = -d \quad \dots \textcircled{2}$$

$$2c + d = 0 \quad \therefore c = -\frac{d}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③을 $ax + by + cz + d = 0$ 에 대입하면 평면 α 의 방정식은

$$-dx - dy - \frac{d}{2}z + d = 0$$

$$\therefore 2x + 2y + z - 2 = 0 \quad (\because d \neq 0)$$

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을

O(0, 0, 0)이라 하고, 점 O에서

평면 α 에 내린 수선의 발을 H라

하면

$$\overline{OH} = \frac{|-2|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}$$

구와 평면 α 가 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하면

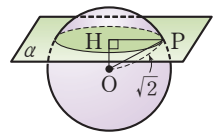
$$\overline{OP} = \sqrt{2}$$

직각삼각형 OPH에서

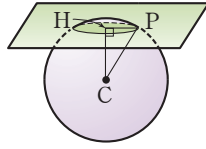
$$\begin{aligned} \overline{HP} &= \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OH}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{3} \end{aligned}$$

따라서 구와 평면 α 가 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{14}}{3}$ 이므로 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{\sqrt{14}}{3}\right)^2 = \frac{14}{9}\pi$$



- 35 오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 $C(-2, -3, 3)$ 이라 하고, 점 C 에서 평면 $2x - y - z - 8 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면



$$\overline{CH} = \frac{|2 \times (-2) - 1 \times (-3) - 1 \times 3 - 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}}$$

$$= 2\sqrt{6}$$

구와 평면이 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P 라 하면

$$\overline{CP} = \sqrt{k}$$

구와 평면이 만나서 생기는 원의 넓이가 9π 이므로

$$\pi \times \overline{HP}^2 = 9\pi, \overline{HP}^2 = 9$$

$$\therefore \overline{HP} = 3 \quad (\because \overline{HP} > 0)$$

따라서 직각삼각형 CPH 에서

$$\overline{CP}^2 = \overline{HP}^2 + \overline{CH}^2$$

$$(\sqrt{k})^2 = 3^2 + (2\sqrt{6})^2$$

$$\therefore k = 33$$

- 36 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 33 = 0$ 에서

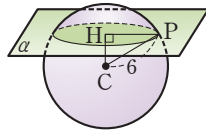
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 36$$

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을

$C(1, 1, -1)$ 이라 하고, 점 C 에

서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H

라 하면



$$\overline{CH} = \frac{|2 \times 1 - 2 \times 1 + 1 \times (-1) - 8|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}}$$

$$= 3$$

구와 평면 α 가 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P 라 하면

$$\overline{CP} = 6$$

직각삼각형 CPH 에서

$$\overline{HP} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

구와 평면 α 가 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{3}$

이므로 원의 넓이는

$$\pi \times (3\sqrt{3})^2 = 27\pi$$

한편 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 \vec{n}_1, \vec{n}_2 라 하면

$$\vec{n}_1 = (2, -2, 1), \vec{n}_2 = (1, -2, 2)$$

두 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$= \frac{|2 \times 1 + (-2) \times (-2) + 1 \times 2|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{8}{9}$$

따라서 구하는 원의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는

$$27\pi \cos \theta = 27\pi \times \frac{8}{9} = 24\pi$$

- 37 $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 36$ 을 만족시키는 점 P 가 나타내는 도형은 점 A 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 6인 구이다. 따라서 구하는 도형의 부피는

$$\frac{4}{3}\pi \times 6^3 = 288\pi$$

- 38 $\vec{p} - \vec{a} = (x+4, y-2, z-8)$ 이므로
 $\vec{p} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$ 에서

$$(x, y, z) \cdot (x+4, y-2, z-8) = 0$$

$$x(x+4) + y(y-2) + z(z-8) = 0$$

$$\therefore (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 21$$

따라서 점 P 가 나타내는 도형은 점 $(-2, 1, 4)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{21}$ 인 구이므로 구하는 도형의 겹넓이는

$$4\pi \times (\sqrt{21})^2 = 84\pi$$

- 39 $x-2 = \frac{y+1}{3} = z-2 = k$ (k 는 실수)로 놓으면

$$x = k+2, y = 3k-1, z = k+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 을 $2x - 3y + 3z = 1$ 에 대입하면

$$2(k+2) - 3(3k-1) + 3(k+2) = 1$$

$$-4k + 12 = 0$$

$$\therefore k = 3$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x = 3+2=5, y = 3 \times 3 - 1 = 8, z = 3+2=5$$

$$\therefore P(5, 8, 5)$$

또 $\textcircled{1}$ 을 $x + 2y - 5z = -8$ 에 대입하면

$$(k+2) + 2(3k-1) - 5(k+2) = -8$$

$$2k - 2 = 0$$

$$\therefore k = 1$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x = 1+2=3, y = 3 \times 1 - 1 = 2, z = 1+2=3$$

$$\therefore Q(3, 2, 3)$$

두 점 P, Q 를 지름의 양 끝점으로 하는 구 위의 한 점을

$R(x, y, z)$ 라 하면

$$\overrightarrow{PR} = (x-5, y-8, z-5)$$

$$\overrightarrow{QR} = (x-3, y-2, z-3)$$

$\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{QR}$ 이므로

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$$
에서

$$(x-5, y-8, z-5) \cdot (x-3, y-2, z-3) = 0$$

$$(x-5)(x-3) + (y-8)(y-2) + (z-5)(z-3) = 0$$

$$\therefore (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 = 11$$

MEMO

MEMO

MEMO