미적분 I

수학의 신

정답과 해설

빠른 정답

01 함수의 극한

STEP 1 핵심 문제 | 18~19쪽

01 -1　02 ④　03 9　04 ②　05 ④　06 ①
07 25　08 ④　09 ③　10 54　11 2

STEP 2 고난도 문제 | 20~24쪽

01 ⑤　02 ②　03 64　04 $\frac{3}{2}$　05 ⑤　06 77
07 ④　08 20　09 226　10 ③　11 22　12 ④
13 16　14 ⑤　15 ⑤　16 -3　17 ①　18 1
19 ③　20 ③　21 ④　22 ②　23 ②　24 2

STEP 3 최고난도 문제 | 25~27쪽

01 ⑤　02 $\frac{52}{3}$　03 40　04 ③　05 -1　06 ②
07 42　08 25　09 ①　10 208

02 함수의 연속

STEP 1 핵심 문제 | 28~29쪽

01 ⑤　02 17　03 20　04 ②　05 12　06 3
07 3　08 ①　09 ①　10 23　11 ⑤　12 5

STEP 2 고난도 문제 | 30~34쪽

01 ②　02 ④　03 ③　04 ②　05 30　06 ④
07 16　08 7　09 ④　10 ⑤　11 51　12 3
13 64　14 ①　15 14　16 28　17 ⑤　18 9
19 ①　20 36　21 3　22 ⑤　23 7　24 ①
25 5

STEP 3 최고난도 문제 | 35~37쪽

01 ④　02 ③　03 4　04 19　05 ④　06 -5
07 -15　08 ⑤　09 75　10 ③

기출 변형 문제로 단원 마스터 | 38~41쪽

01 ④　02 168　03 6　04 ③　05 ⑤　06 84
07 16　08 20　09 ④　10 15　11 23　12 47
13 216　14 ②　15 $-\frac{87}{16}$

03 미분계수와 도함수

STEP 1 핵심 문제 | 44~45쪽

01 ①　02 24　03 ⑤　04 ③　05 $\frac{3}{4}$　06 ③
07 ②　08 ②　09 10　10 ③　11 15　12 7

STEP 2 고난도 문제 | 46~50쪽

01 17　02 ④　03 9　04 ③　05 ⑤　06 $\frac{5}{2}$
07 $\frac{3}{2}$　08 ③　09 29　10 ②　11 7　12 5
13 ⑤　14 52　15 18　16 36　17 4　18 ③
19 ⑤　20 ④　21 12　22 11　23 ④　24 $\frac{1}{32}$
25 147　26 ④

STEP 3 최고난도 문제 | 51~53쪽

01 30　02 ③　03 $\frac{17}{4}$　04 17　05 154　06 ①
07 13　08 8　09 ②　10 ⑤

04 도함수의 활용(1)

STEP 1 핵심 문제 | 54~55쪽

01 ④　02 $\frac{4}{3}$　03 48　04 -9　05 ③　06 -1
07 ①　08 13　09 ①　10 $\frac{1}{2}$　11 ①

STEP 2 고난도 문제 | 56~60쪽

01 $\sqrt{2}$　02 15　03 ③　04 5　05 29　06 ①
07 79　08 ㄱ, ㄴ　09 25　10 5　11 6
12 20　13 ④　14 ①　15 ⑤　16 ③　17 128
18 24　19 8　20 3　21 10　22 160　23 6
24 40　25 ①　26 ③

STEP 3 최고난도 문제 | 61~63쪽

01 ② 02 $\frac{5}{2}$ 03 ④ 04 ① 05 90 06 ③
07 380 08 $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ 09 39 10 $\frac{39}{16}$ 11 29

05 도함수의 활용(2)

STEP 1 핵심 문제 | 64~65쪽

01 ② 02 ④ 03 $\frac{64}{3}$ 04 9 05 27 06 26
07 ④ 08 2 09 3 10 ③ 11 ③
12 $-\frac{5\sqrt{3}}{8}$

STEP 2 고난도 문제 | 66~70쪽

01 ⑤ 02 15 03 12 04 ② 05 ⑤ 06 2
07 ③ 08 9 09 ② 10 ④ 11 13 12 21
13 ㄴ, ㄷ 14 ② 15 52 16 5 17 130 18 ②
19 32 20 ④ 21 $\frac{5}{6}$ 22 11 23 3
24 $12\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ 25 ④ 26 90

STEP 3 최고난도 문제 | 71~73쪽

01 ④ 02 12 03 ③ 04 61 05 38 06 296
07 16 08 7 09 216 10 ①

기출 변형 문제로 단원 마스터 | 74~77쪽

01 -3 02 ⑤ 03 ③ 04 ⑤ 05 14 06 ②
07 3 08 ② 09 ④ 10 ⑤ 11 34 12 27

06 부정적분과 정적분

STEP 1 핵심 문제 | 80~81쪽

01 ② 02 9 03 12 04 -21 05 15 06 ⑤
07 16 08 ① 09 $\frac{1}{6}$ 10 ① 11 36 12 ⑤

STEP 2 고난도 문제 | 82~86쪽

01 2 02 ③ 03 ⑤ 04 -2 05 ③ 06 17
07 9 08 $\frac{2}{5}$ 09 ⑤ 10 ③ 11 18 12 -57
13 110 14 28 15 ① 16 43 17 ⑤ 18 65
19 0 20 $\frac{27}{4}$ 21 ② 22 8 23 ① 24 10
25 38 26 ⑤

STEP 3 최고난도 문제 | 87~89쪽

01 4 02 4 03 ⑤ 04 ⑤ 05 ② 06 1
07 2 08 ⑤ 09 32 10 30

07 정적분의 활용

STEP 1 핵심 문제 | 90~91쪽

01 12 02 ③ 03 ③ 04 ⑤ 05 ④ 06 $\frac{16}{3}$
07 64 08 38 09 ② 10 ⑤ 11 ②

STEP 2 고난도 문제 | 92~96쪽

01 ④ 02 2 03 16 04 ④ 05 ④ 06 25
07 16 08 8 09 ② 10 2 11 8 12 80
13 ③ 14 6 15 ② 16 $\frac{9}{4}$ 17 ② 18 21
19 $\frac{38}{3}$ 20 ③ 21 ③ 22 ④

STEP 3 최고난도 문제 | 97~98쪽

01 ③ 02 ⑤ 03 ③ 04 17 05 ② 06 $\frac{16}{7}$
07 10 08 ③

기출 변형 문제로 단원 마스터 | 99~102쪽

01 13 02 ⑤ 03 145 04 25 05 ② 06 41
07 13 08 48 09 216 10 16 11 ① 12 ②
13 $\frac{59}{3}$ 14 10 15 16

01 함수의 극한

STEP 1 핵심 문제 | 18~19쪽

01 -1	02 ④	03 9	04 ②	05 ④	06 ①
07 25	08 ④	09 ③	10 54	11 2	

01 답 -1

$a=\lim\limits_{x\to0} f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to-1+} f(x+a)-\lim\limits_{x\to a-} f(1-x)=\lim\limits_{x\to-1+} f(x+2)-\lim\limits_{x\to2-} f(1-x)$

$x+2=t$로 놓으면 $x\to-1+$일 때 $t\to1+$이므로

$\lim\limits_{x\to-1+} f(x+2)=\lim\limits_{t\to1+} f(t)=-1$

$1-x=s$로 놓으면 $x\to2-$일 때 $s\to-1+$이므로

$\lim\limits_{x\to2-} f(1-x)=\lim\limits_{s\to-1+} f(s)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to-1+} f(x+2)-\lim\limits_{x\to2-} f(1-x)=-1-0=-1$

02 답 ④

$$f(x)=\frac{|x+2|}{x+2}+\frac{x^2-1}{|x-1|}+\frac{|x|}{x^2-2x}$$
$$=\frac{|x+2|}{x+2}+\frac{(x+1)(x-1)}{|x-1|}+\frac{|x|}{x(x-2)}$$

$$\lim_{x\to-2-} f(x)=\lim_{x\to-2-}\left\{\frac{-(x+2)}{x+2}+\frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}+\frac{-x}{x(x-2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to-2-}\left\{-1-(x+1)-\frac{1}{x-2}\right\}$$
$$=-1-(-2+1)-\frac{1}{-2-2}$$
$$=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}\left\{\frac{x+2}{x+2}+\frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}+\frac{x}{x(x-2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0+}\left\{1-(x+1)+\frac{1}{x-2}\right\}$$
$$=1-1-\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+}\left\{\frac{x+2}{x+2}+\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}+\frac{x}{x(x-2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1+}\left\{1+(x+1)+\frac{1}{x-2}\right\}$$
$$=1+(1+1)+\frac{1}{1-2}$$
$$=2$$

$$\therefore \lim_{x\to-2-} f(x)+\lim_{x\to0+} f(x)+\lim_{x\to1+} f(x)=\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)+2=\frac{7}{4}$$

03 답 9

$|\alpha|\neq2$일 때, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$로 극한값이 존재하므로 모든 실수 α에 대하여 $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$의 값이 존재하면 $\alpha=-2$, $\alpha=2$일 때도 $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$의 값이 존재한다. ······ 배점 10%

(i) $\alpha=-2$일 때,

$\lim\limits_{x\to-2+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2+}(-x^2+x)=-4-2=-6$

$\lim\limits_{x\to-2-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2-}(x^2+ax+b)=4-2a+b$

$\lim\limits_{x\to-2} f(x)$의 값이 존재하면 $\lim\limits_{x\to-2+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2-} f(x)$이므로

$-6=4-2a+b$

$\therefore 2a-b=10$ ······ ㉠ ······ 배점 40%

(ii) $\alpha=2$일 때,

$\lim\limits_{x\to2+} f(x)=\lim\limits_{x\to2+}(x^2+ax+b)=4+2a+b$

$\lim\limits_{x\to2-} f(x)=\lim\limits_{x\to2-}(-x^2+x)=-4+2=-2$

$\lim\limits_{x\to2} f(x)$의 값이 존재하면 $\lim\limits_{x\to2+} f(x)=\lim\limits_{x\to2-} f(x)$이므로

$4+2a+b=-2$

$\therefore 2a+b=-6$ ······ ㉡ ······ 배점 40%

(i), (ii)에서 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-8$

$\therefore a-b=9$ ······ 배점 10%

04 답 ②

$2f(x)-3g(x)=h(x)$로 놓으면

$f(x)=\frac{1}{2}h(x)+\frac{3}{2}g(x)$

$\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\left\{\frac{1}{2}h(x)+\frac{3}{2}g(x)\right\}+g(x)}{3\left\{\frac{1}{2}h(x)+\frac{3}{2}g(x)\right\}-g(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2h(x)+7g(x)}{\frac{3}{2}h(x)+\frac{7}{2}g(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4h(x)+14g(x)}{3h(x)+7g(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4\times\frac{h(x)}{g(x)}+14}{3\times\frac{h(x)}{g(x)}+7}$$
$$=\frac{4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{h(x)}{g(x)}+14}{3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{h(x)}{g(x)}+7}$$
$$=\frac{0+14}{0+7}=2$$

05 답 ④

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x+1)}{(x+1)^2}=2$에서 $x+1=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)}{t^2}=2 \qquad \therefore \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{x^2-2g(x)}{f(x)-3x}=\lim_{x\to0}\frac{x-2\times\frac{g(x)}{x}}{x\times\frac{f(x)}{x^2}-3}$$
$$=\frac{0-2\times3}{0-3}=2$$

06 답 ①

$n \le x < n+1$일 때, $[x]=n$이므로

$\lim_{x \to n+} \frac{[x]^2+ax}{[x]} = \frac{n^2+an}{n} = n+a$

$n-1 \le x < n$일 때, $[x]=n-1$이므로

$\lim_{x \to n-} \frac{[x]^2+ax}{[x]} = \frac{(n-1)^2+an}{n-1} = n-1+\frac{an}{n-1}$

$\lim_{x \to n+} \frac{[x]^2+ax}{[x]} = \lim_{x \to n-} \frac{[x]^2+ax}{[x]} = n^2-4n+7$이므로

$n+a=n-1+\frac{an}{n-1}=n^2-4n+7$

$n+a=n-1+\frac{an}{n-1}$에서

$a+1=\frac{an}{n-1}$

$(a+1)(n-1)=an$

$\therefore a=n-1$ …… ㉠

$n+a=n^2-4n+7$에 ㉠을 대입하면

$n+(n-1)=n^2-4n+7$

$n^2-6n+8=0$, $(n-2)(n-4)=0$

$\therefore n=2$ 또는 $n=4$

㉠에서

$n=2$일 때, $a=1$ $\quad \therefore a^2+n^2=1+4=5$

$n=4$일 때, $a=3$ $\quad \therefore a^2+n^2=9+16=25$

따라서 모든 a^2+n^2의 값의 합은

$5+25=30$

비법 NOTE

$[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수일 때, 정수 n에 대하여

(1) $n \le x < n+1$이면 $[x]=n$

(2) $[x]=n$이면 $n \le x < n+1$

07 답 25

$x=-t$로 놓으면 $x \to -\infty$일 때 $t \to \infty$이므로

$\lim_{x \to -\infty} x(\sqrt{a^2x^2+12x}+2x+3) = \lim_{t \to \infty} \{-t(\sqrt{a^2t^2-12t}-2t+3)\}$

$a^2 \ge 0$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{t \to \infty} \{-t(\sqrt{a^2t^2-12t}-2t+3)\}\\ &=\lim_{t \to \infty} \frac{-t(\sqrt{a^2t^2-12t}-2t+3)(\sqrt{a^2t^2-12t}+2t-3)}{\sqrt{a^2t^2-12t}+2t-3}\\ &=\lim_{t \to \infty} \frac{-t\{a^2t^2-12t-(2t-3)^2\}}{\sqrt{a^2t^2-12t}+2t-3}\\ &=\lim_{t \to \infty} \frac{-t\{(a^2-4)t^2-9\}}{\sqrt{a^2t^2-12t}+2t-3}\end{aligned}$$

이때 극한값이 존재하므로 $a^2-4=0$, 즉 $a^2=4$

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x \to -\infty} x(\sqrt{a^2x^2+12x}+2x+3)\\ &=\lim_{t \to \infty} \frac{9t}{\sqrt{4t^2-12t}+2t-3}\\ &=\lim_{t \to \infty} \frac{9}{\sqrt{4-\frac{12}{t}}+2-\frac{3}{t}}\\ &=\frac{9}{2+2}=\frac{9}{4}\end{aligned}$$

$\therefore 4(a^2+b)=4 \times \left(4+\frac{9}{4}\right)=25$

08 답 ④

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$a=1$이라 하면

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x+3) \times g(x)}{\{f(x)\}^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)^2 g(x)}{(x-1)^4}$ …… ㉠

$x \to 1$일 때 ㉠의 값이 0이려면 $(x+2)^2 g(x)$가 $(x-1)^5$을 인수로 가져야 한다.

그런데 $(x+2)^2 g(x)$는 사차다항식이므로 $(x-1)^5$을 인수로 가질 수 없다.

따라서 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x+3) \times g(x)}{\{f(x)\}^2}=0$을 만족시키지 않는다.

즉, $a \ne 1$이고 $f(x)=(x-1)(x-a)$ $(a \ne 1)$

이때 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x+3) \times g(x)}{\{f(x)\}^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)(x+3-a)g(x)}{(x-1)^2(x-a)^2}=0$이므로

사차다항식 $(x+2)(x+3-a)g(x)$는 $(x-1)^3$을 인수로 갖는다.

따라서 $(x+3-a)g(x)=(x-1)^3$이므로

$a=4$, $g(x)=(x-1)^2$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-4)$, $g(x)=(x-1)^2$

$\therefore f(5)+g(5)=4+16=20$

09 답 ③

0이 아닌 모든 실수 x에 대하여

$x^2+3x < f(x) < 2x^2+3x$ …… ㉠

$\lim_{x \to 0} (x^2+3x)=0$, $\lim_{x \to 0} (2x^2+3x)=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x \to 0} f(x)=0$

(i) $x>0$일 때,

㉠의 각 변을 x로 나누면

$x+3 < \frac{f(x)}{x} < 2x+3$

$\lim_{x \to 0+} (x+3)=3$, $\lim_{x \to 0+} (2x+3)=3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x}=3$

(ii) $x<0$일 때,

㉠의 각 변을 x로 나누면

$2x+3 < \frac{f(x)}{x} < x+3$

$\lim_{x \to 0-} (2x+3)=3$, $\lim_{x \to 0-} (x+3)=3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)}{x}=3$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x)}{x}=3$이므로

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}=3$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{5f(x)-2x}{2xf(x)+x} = \lim_{x \to 0} \frac{5 \times \frac{f(x)}{x}-2}{2f(x)+1} = \frac{5 \times 3-2}{0+1}=13$$

10 답 54

$\frac{2t}{x}=-\frac{1}{t}x+3$에서 $2t^2=-x^2+3tx$

즉, $x^2-3tx+2t^2=0$에서 $(x-t)(x-2t)=0$이므로

$x=t$ 또는 $x=2t$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(t,\ 2)$, $\mathrm{B}(2t,\ 1)$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{t^2+4}$, $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{4t^2+1}$

$$\therefore \lim_{t\to1+}\frac{\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OA}}}{t-1}=\lim_{t\to1+}\frac{\sqrt{4t^2+1}-\sqrt{t^2+4}}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to1+}\frac{(\sqrt{4t^2+1}-\sqrt{t^2+4})(\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4})}{(t-1)(\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4})}$$
$$=\lim_{t\to1+}\frac{3(t^2-1)}{(t-1)(\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4})}$$
$$=\lim_{t\to1+}\frac{3(t+1)}{\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4}}$$
$$=\frac{3\sqrt{5}}{5}=k$$

$\therefore\ 30\times k^2=30\times\frac{9}{5}=54$

11 답 2

점 P_1은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이고 x좌표가 t이므로

$t^2+y^2=4$에서 $y^2=4-t^2$

이때 점 P_1은 제1사분면 위의 점이므로 $y=\sqrt{4-t^2}$

따라서 $\mathrm{P}_1(t,\ \sqrt{4-t^2})$, $\mathrm{P}_2(t,\ \sqrt{2t+4})$이므로

$S_1(t)=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2t+4}-\sqrt{4-t^2})\times t$ ············ 배점 30%

점 Q_1은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이고 y좌표가 $\sqrt{t}$이므로

$x^2+t=4$에서 $x^2=4-t$

이때 점 Q_1은 제2사분면 위의 점이므로 $x=-\sqrt{4-t}$

점 Q_2는 곡선 $y=\sqrt{2x+4}$ 위의 점이고 y좌표가 $\sqrt{t}$이므로

$\sqrt{t}=\sqrt{2x+4}$에서 $t=2x+4$ $\quad\therefore\ x=\frac{1}{2}t-2$

따라서 $\mathrm{Q}_1(-\sqrt{4-t},\ \sqrt{t})$, $\mathrm{Q}_2\left(\frac{1}{2}t-2,\ \sqrt{t}\right)$이므로

$S_2(t)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}t-2+\sqrt{4-t}\right)\times\sqrt{t}$ ············ 배점 30%

$$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{S_1(t)}{\sqrt{t}S_2(t)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{2}\times(\sqrt{2t+4}-\sqrt{4-t^2})\times t}{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}t-2+\sqrt{4-t}\right)\times t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{2(\sqrt{2t+4}-\sqrt{4-t^2})}{t-4+2\sqrt{4-t}}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{2(\sqrt{2t+4}-\sqrt{4-t^2})(\sqrt{2t+4}+\sqrt{4-t^2})(t-4-2\sqrt{4-t})}{(t-4+2\sqrt{4-t})(t-4-2\sqrt{4-t})(\sqrt{2t+4}+\sqrt{4-t^2})}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{2(t^2+2t)(t-4-2\sqrt{4-t})}{(t^2-4t)(\sqrt{2t+4}+\sqrt{4-t^2})}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{2t(t+2)(t-4-2\sqrt{4-t})}{t(t-4)(\sqrt{2t+4}+\sqrt{4-t^2})}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{2(t+2)(t-4-2\sqrt{4-t})}{(t-4)(\sqrt{2t+4}+\sqrt{4-t^2})}$$

$=\frac{2\times2\times(-4-4)}{-4\times(2+2)}=2$ ············ 배점 40%

STEP 2 고난도 문제

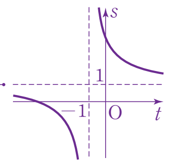
20~24쪽

01 ⑤	02 ②	03 64	04 $\frac{3}{2}$	05 ⑤	06 77
07 ④	08 20	09 226	10 ③	11 22	12 ④
13 16	14 ⑤	15 ⑤	16 −3	17 ①	18 1
19 ③	20 ③	21 ④	22 ②	23 ②	24 2

01 답 ⑤

ㄱ. $\frac{t+4}{t+1}=s$로 놓으면

$s=\frac{(t+1)+3}{t+1}=\frac{3}{t+1}+1$

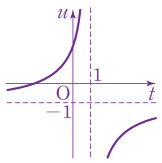


$t\to\infty$일 때 $s\to1+$이므로

$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t+4}{t+1}\right)=\lim_{s\to1+}f(s)=1$

$\frac{2+t}{1-t}=u$로 놓으면

$u=\frac{(t-1)+3}{-(t-1)}=-\frac{3}{t-1}-1$



$t\to-\infty$일 때 $u\to-1+$이므로

$\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{2+t}{1-t}\right)=\lim_{u\to-1+}f(u)=1$

$\therefore\ \lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t+4}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{2+t}{1-t}\right)=1+1=2$

ㄴ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to-1-$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(g(x))=\lim_{t\to0+}f(t)=-1$

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to-1+$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to-1+}g(f(x))=\lim_{t\to1-}g(t)=1$

$x\to-1-$일 때 $t=-1$이므로

$\lim_{x\to-1-}g(f(x))=g(-1)=1$

즉, $\lim_{x\to-1+}g(f(x))=\lim_{x\to-1-}g(f(x))=1$이므로 $\lim_{x\to-1}g(f(x))$의 값이 존재한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

02 답 ②

ㄱ. [반례] $f(x)=\frac{1}{x-a}$, $g(x)=1$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=1$,

$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}(x-a)=0$이지만 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x<0)\\ 0 & (x\ge0)\end{cases}$, $g(x)=x^2$이라 하자.

$g(x)=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to0}f(g(x))=\lim_{t\to0+}f(t)=0$

이때 $\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}x^2=0$이지만 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0$, $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\alpha$이므로

$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}\times\lim_{x\to a}f(x)g(x)=0$

$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\times f(x)g(x)\right\}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to a}\{g(x)\}^2=0$$

$\lim_{x\to a}\sqrt{\{g(x)\}^2}=\lim_{x\to a}|g(x)|=0$이므로

$$\lim_{x\to a}g(x)=0$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

idea

03 답 64

$y=x^2+4x\,(x\ge0)$라 하면 $y=(x+2)^2-4$

$(x+2)^2=y+4,\ x+2=\sqrt{y+4}\qquad \therefore\ x=\sqrt{y+4}-2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{x+4}-2$

따라서 $f(x)=x^2+4x\,(x\ge0)$, $f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}-2\,(x\ge0)$이다.

한편 $\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{17f(f(x))}{f(x)+f^{-1}(x)}=\lim_{x\to0+}\frac{17\times\frac{f(f(x))}{f(x)}}{1+\frac{f^{-1}(x)}{f(x)}}$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(f(x))}{f(x)}=\lim_{x\to0+}\frac{(x^2+4x)^2+4(x^2+4x)}{x^2+4x}$$
$$=\lim_{x\to0+}(x^2+4x+4)=4$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{f^{-1}(x)}{f(x)}=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+4x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{(x^2+4x)(\sqrt{x+4}+2)}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x(x+4)(\sqrt{x+4}+2)}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x+4}+2)}$$
$$=\frac{1}{4\times(2+2)}=\frac{1}{16}$$

$$\therefore \lim_{x\to0+}\frac{17f(f(x))}{f(x)+f^{-1}(x)}=\lim_{x\to0+}\frac{17\times\frac{f(f(x))}{f(x)}}{1+\frac{f^{-1}(x)}{f(x)}}=\frac{17\times4}{1+\frac{1}{16}}=64$$

04 답 $\frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^{2n}+a-\sqrt{x^n+a^2}}{x^3+x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x^{2n}+a-\sqrt{x^n+a^2})(x^{2n}+a+\sqrt{x^n+a^2})}{(x^3+x)(x^{2n}+a+\sqrt{x^n+a^2})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x^{2n}+a)^2-(x^n+a^2)}{x(x^2+1)(x^{2n}+a+\sqrt{x^n+a^2})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^n(x^{3n}+2ax^n-1)}{x(x^2+1)(x^{2n}+a+\sqrt{x^n+a^2})}\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

(i) $n=1$일 때,

㉠에서

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+a-\sqrt{x+a^2}}{x^3+x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+2ax-1}{(x^2+1)(x^2+a+\sqrt{x+a^2})}$$
$$=\frac{-1}{a+a}=-\frac{1}{2a}$$

즉, $-\frac{1}{2a}=2(a-1)$이므로 $-1=4a(a-1)$

$4a^2-4a+1=0,\ (2a-1)^2=0\qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}$

(ii) $n\ge2$일 때,

㉠에서

$$\lim_{x\to0}\frac{x^{2n}+a-\sqrt{x^n+a^2}}{x^3+x}=\lim_{x\to0}\frac{x^{n-1}(x^{3n}+2ax^n-1)}{(x^2+1)(x^{2n}+a+\sqrt{x^n+a^2})}$$
$$=\frac{0}{a+a}=0$$

즉, $0=2(a-1)$이므로 $a=1$

(i), (ii)에서 모든 양수 a의 값의 합은 $\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

05 답 ⑤

$$\frac{f(\sqrt[3]{f(x)}-1)}{\sqrt[3]{x}-1}$$
$$=\frac{f(\sqrt[3]{f(x)}-1)}{\sqrt[3]{f(x)}-1}\times\frac{\sqrt[3]{f(x)}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$
$$=\frac{f(\sqrt[3]{f(x)}-1)}{\sqrt[3]{f(x)}-1}\times\frac{\{\sqrt[3]{f(x)}-1\}[\sqrt[3]{\{f(x)\}^2}+\sqrt[3]{f(x)}+1]}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$
$$\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{\{f(x)\}^2}+\sqrt[3]{f(x)}+1}$$
$$=\frac{f(\sqrt[3]{f(x)}-1)}{\sqrt[3]{f(x)}-1}\times\frac{f(x)-1}{x-1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{\{f(x)\}^2}+\sqrt[3]{f(x)}+1}$$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=2$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to1}\{f(x)-1\}=0$에서 $f(1)-1=0\qquad\therefore\ f(1)=1$

$\sqrt[3]{f(x)}-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $f(x)\to1$이므로 $t\to0$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(\sqrt[3]{f(x)}-1)}{\sqrt[3]{f(x)}-1}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=3$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(\sqrt[3]{f(x)}-1)}{\sqrt[3]{x}-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{f(\sqrt[3]{f(x)}-1)}{\sqrt[3]{f(x)}-1}\times\frac{f(x)-1}{x-1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{\{f(x)\}^2}+\sqrt[3]{f(x)}+1}\right]$$
$$=3\times2\times\frac{1+1+1}{1+1+1}=6$$

개념 NOTE

실수 a와 2 이상인 자연수 n에 대하여

a의 n제곱근 $\Longleftrightarrow$ n제곱하여 a가 되는 수 $\Longleftrightarrow$ 방정식 $x^n=a$의 근 x

06 답 77

(가)의 $f(x)+ax+b=(x-3)^2g(x)$에서

$f(x)=(x-3)^2g(x)-ax-b\qquad\cdots\cdots\ ㉠$

(나)의 $\displaystyle\lim_{x\to2}g(x)=3$에서 $g(2)=3$

(다)의 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=1$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to2}\{f(x)-g(x)\}=0$에서 $f(2)-g(2)=0\qquad\therefore\ f(2)=g(2)$

이때 $g(2)=3$이므로 $f(2)=3$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=g(2)-2a-b$

$\therefore\ b=-2a\qquad\cdots\cdots\ ㉡$

$\therefore\ f(x)=(x-3)^2g(x)-ax+2a$

이를 (다)의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)^2g(x)-ax+2a-g(x)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-6x+8)g(x)-ax+2a}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)g(x)-a(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\{(x-4)g(x)-a\}$$
$$=-2\times 3-a=-a-6$$

즉, $-a-6=1$이므로 $a=-7$

이를 ㉡에 대입하면 $b=14$

따라서 $f(x)=(x-3)^2g(x)+7x-14$이므로

$f(3)=21-14=7$

$\therefore\ af(2)+bf(3)=-7\times 3+14\times 7=77$

07 답 ④

$f(x)=x^2+6x+12$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2}{\{f(x)\}^2-k(x+2)f(x)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{x^2}{f(x)\{f(x)-k(x+2)\}}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{x^2}{(x^2+6x+12)\{x^2+(6-k)x+12-2k\}} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

모든 실수 x에 대하여 $x^2+6x+12=(x+3)^2+3>0$이므로 임의의 실수 a에 대하여 ㉠의 값이 존재하는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 이차방정식 $x^2+(6-k)x+12-2k=0$의 실근이 존재하지 않을 때, ㉠의 분모가 0이 되는 x의 값이 존재하지 않으므로 임의의 실수 a에 대하여 ㉠의 값이 존재한다.

이차방정식 $x^2+(6-k)x+12-2k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(6-k)^2-4\times 1\times(12-2k)<0$

$k^2-4k-12<0$, $(k+2)(k-6)<0$

$\therefore\ -2<k<6$

(ⅱ) 이차방정식 $x^2+(6-k)x+12-2k=0$의 실근이 0뿐일 때,

즉, $x^2+(6-k)x+12-2k=x^2$일 때 $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2}{(x^2+6x+12)x^2}=\lim_{x\to a}\frac{1}{x^2+6x+12}$$

이므로 임의의 실수 a에 대하여 극한값이 존재한다.

따라서 ㉡에서

$6-k=0 \qquad \therefore\ k=6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 k의 값의 범위는

$-2<k\le 6$

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 k는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$의 8개이다.

비법 NOTE

모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{x^2}{\{f(x)\}^2-k(x+2)f(x)}$의 값이 존재하므로 기약분수꼴로 나타내었을 때, 분모가 0이 되는 x의 값은 존재하지 않는다.

08 답 20

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x-1}$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}f(x-1)=0$에서 $f(0)=0$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=1$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}f(x)=0$에서 $f(2)=0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)+6x^2}{f(x)+x^3}=1$에서 $f(x)$가 이차 이하의 다항함수이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)+6x^2}{f(x)+x^3}=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(분자의 차수)<(분모의 차수)

또 $f(x)$가 사차 이상의 다항함수이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)+6x^2}{f(x)+x^3}=2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(분자의 차수)=(분모의 차수)

따라서 $f(x)$는 삼차함수이고 $f(0)=0$, $f(2)=0$이므로

$f(x)=x(x-2)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하자.

이를 $\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)+6x^2}{f(x)+x^3}=1$의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)+6x^2}{f(x)+x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x(x-2)(ax+b)+6x^2}{x(x-2)(ax+b)+x^3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(a+\frac{b}{x}\right)+\frac{6}{x}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(a+\frac{b}{x}\right)+1}=\frac{2a}{a+1}$$

즉, $\frac{2a}{a+1}=1$이므로

$2a=a+1 \qquad \therefore\ a=1$

$\therefore\ f(x)=x(x-2)(x+b)$

이를 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=1$의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)(x+b)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}x(x+b)$$
$$=2(2+b)$$

즉, $2(2+b)=1$이므로

$2b=-3 \qquad \therefore\ b=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=x(x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$이므로

$f(4)=4\times 2\times\frac{5}{2}=20$

09 답 226

(가)에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}|f(x)-1|=0$에서

$|f(0)-1|=0 \qquad \therefore\ f(0)-1=0$

즉, 삼차식 $f(x)-1$은 x를 인수로 가지므로 이차식 $g(x)$에 대하여

$f(x)-1=xg(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 0+}\frac{|f(x)-1|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{|xg(x)|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x|g(x)|}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}|g(x)|=|g(0)|$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|f(x)-1|}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{|xg(x)|}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x|g(x)|}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\{-|g(x)|\}=-|g(0)|$$

(가)에서 $\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)-1|}{x}$의 값이 존재하므로

$|g(0)|=-|g(0)|$

$|g(0)|=0 \qquad \therefore g(0)=0$

즉, 이차식 $g(x)$도 x를 인수로 갖는다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-1=x^2(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=x^3+ax^2+1$

㈏의 $xf(x)\geq -4x^2+x$에서

$x(x^3+ax^2+1)\geq -4x^2+x$

$x^4+ax^3+4x^2\geq 0$

$x^2(x^2+ax+4)\geq 0$

이때 $x^2\geq 0$이므로 이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$x^2+ax+4\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-16\leq 0$

$(a+4)(a-4)\leq 0$

$\therefore -4\leq a\leq 4$

$f(x)=x^3+ax^2+1$에서 $f(5)=125+25a+1=25a+126$

따라서 $-4\leq a\leq 4$일 때, $f(5)$는 $a=4$에서 최댓값 226을 갖는다.

10 답 ③

(i) $n=1$일 때,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2+1}=6 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $f(x)-4x^3+3x^2$은 최고차항의 계수가 6인 이차함수이므로 $f(x)$는 x^3의 계수가 4, x^2의 계수가 3인 삼차함수이고, ㉡에서 $f(x)$는 x를 인수로 가지므로 $f(x)=x(4x^2+3x+a)$ (a는 상수)라 하자.

이를 ㉡의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(4x^2+3x+a)}{x}=\lim_{x\to 0}(4x^2+3x+a)=a$$

$\therefore a=4$

따라서 $f(x)=4x^3+3x^2+4x$이므로

$f(1)=4+3+4=11$

(ii) $n=2$일 때,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3+1}=6 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=4 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

㉢에서 $f(x)-4x^3+3x^2$은 최고차항의 계수가 6인 삼차함수이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 10인 삼차함수이고, ㉣에서 $f(x)$는 x^2을 인수로 가지므로 $f(x)=x^2(10x+b)$ (b는 상수)라 하자.

이를 ㉣의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(10x+b)}{x^2}=\lim_{x\to 0}(10x+b)=b$$

$\therefore b=4$

따라서 $f(x)=x^2(10x+4)$이므로

$f(1)=10+4=14$

(iii) $n\geq 3$일 때,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6 \qquad \cdots\cdots ㉤$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4 \qquad \cdots\cdots ㉥$$

㉤에서 $f(x)-4x^3+3x^2$은 최고차항의 계수가 6인 $(n+1)$차함수이므로 $f(x)$도 최고차항의 계수가 6인 $(n+1)$차함수이고, ㉥에서 $f(x)$는 x^n을 인수로 가지므로 $f(x)=x^n(6x+c)$ (c는 상수)라 하자.

이를 ㉥의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n(6x+c)}{x^n}=\lim_{x\to 0}(6x+c)=c$$

$\therefore c=4$

따라서 $f(x)=x^n(6x+4)$이므로

$f(1)=6+4=10$

(i), (ii), (iii)에서 $f(1)$의 최댓값은 14이다.

11 답 22

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a ($a\neq 0$)라 하면 ㈎에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^3f(x)}=\frac{a^2-a}{a}=a-1$$

즉, $a-1=2$이므로 $a=3$

따라서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 삼차함수이다. ············ 배점 30%

㈏에서 $\alpha\beta=0$이므로

$\alpha=0$ 또는 $\beta=0$

(i) $\alpha=0$일 때,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=0$에서 $f(0)=0$

따라서 $f(x)=3x(x^2+bx+c)$ (b, c는 상수)라 하고 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x(x^2+bx+c)}{x}=\lim_{x\to 0}3(x^2+bx+c)=3c$$

즉, $3c=0$이므로 $c=0$

$\therefore f(x)=3x(x^2+bx)=3x^2(x+b)$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\beta$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)-1\}=0$에서

$f(1)-1=0 \qquad \therefore f(1)=1$

$f(x)=3x^2(x+b)$에서

$3(1+b)=1$, $3b=-2$

$\therefore b=-\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=3x^2\left(x-\frac{2}{3}\right)$이므로

$f(2)=3\times 4\times\frac{4}{3}=16$ ············ 배점 30%

(ii) $\beta=0$일 때,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)-1\}=0$에서 $f(1)-1=0$

$f(x)-1=3(x-1)(x^2+dx+e)$ (d, e는 상수)라 하고 ㉡의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x^2+dx+e)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}3(x^2+dx+e)=3(1+d+e)$$

즉, $3(1+d+e)=0$이므로 $e=-d-1$

$\therefore f(x)-1=3(x-1)(x^2+dx-d-1)=3(x-1)^2(x+d+1)$

$\therefore f(x)=3(x-1)^2(x+d+1)+1$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\alpha$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=0$에서 $f(0)=0$

$f(x)=3(x-1)^2(x+d+1)+1$에서

$3(d+1)+1=0$, $3d=-4$ $\quad\therefore d=-\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=3(x-1)^2\left(x-\frac{1}{3}\right)+1$이므로

$f(2)=3\times1\times\frac{5}{3}+1=6$ ······ 배점 **30%**

(i), (ii)에서 모든 $f(2)$의 값의 합은

$16+6=22$ ······ 배점 **10%**

비법 NOTE

다항함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=0$이면 $x\to a$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to a}f(x)=0$에서 $f(a)=0$이므로 $f(x)$는 $x-a$를 인수로 갖는다.

$f(x)=(x-a)g(x)$라 하면 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=0$에서 $\lim_{x\to a}\frac{(x-a)g(x)}{x-a}=0$

$\lim_{x\to a}g(x)=0$ $\quad\therefore g(a)=0$

따라서 $g(x)$도 $x-a$를 인수로 가지므로 $f(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 갖는다.

12 답 ④

모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{|x-1||x-2|}$의 값이 존재하므로 $x\to a$일 때 (분모)$\to0$인 경우에도 극한값이 존재한다.

$a=1$이면 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{|x-1||x-2|}$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$에서 $f(1)=0$

또 $a=2$이면 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{|x-1||x-2|}$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}f(x)=0$에서 $f(2)=0$

사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$, $f(2)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x^2+bx+c)$ (b, c는 상수)라 하자.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{|x-1||x-2|}$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{|x-1||x-2|}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{|x-1||x-2|}$에서

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{|x-1||x-2|}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x-2)(x^2+bx+c)}{-(x-1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to1+}\{-(x^2+bx+c)\}=-1-b-c$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{|x-1||x-2|}=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x-2)(x^2+bx+c)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to1-}(x^2+bx+c)=1+b+c$$

즉, $-1-b-c=1+b+c$이므로 $2c=-2b-2$

$\therefore c=-b-1$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x^2+bx-b-1)$
$\qquad=(x-1)^2(x-2)(x+b+1)$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{|x-1||x-2|}$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{|x-1||x-2|}=\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{|x-1||x-2|}$에서

$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{|x-1||x-2|}=\lim_{x\to2+}\frac{(x-1)^2(x-2)(x+b+1)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2+}(x-1)(x+b+1)=b+3$$

$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{|x-1||x-2|}=\lim_{x\to2-}\frac{(x-1)^2(x-2)(x+b+1)}{-(x-1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2-}\{-(x-1)(x+b+1)\}=-b-3$$

즉, $b+3=-b-3$이므로 $2b=-6$

$\therefore b=-3$

따라서 $f(x)=(x-1)^2(x-2)^2$이므로

$f(-1)+f(0)=36+4=40$

13 답 16

(나)에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)\{g(x)\}^2=0$에서 $f(0)\{g(0)\}^2=0$이고, $f(x)\{g(x)\}^2$은 x^5을 인수로 갖는다. 즉,

$f(x)\{g(x)\}^2=x^5h(x)$ $(h(0)\neq0)$ ······ ㉠

를 만족시키는 다항함수 $h(x)$가 존재한다.

그리고 (가)에서 $\{f(x)\}^2g(x)$는 차수가 5이므로 오차함수가 되는 다음과 같이 경우를 나누어 생각한다.

(i) $f(x)$가 상수함수, $g(x)$가 오차함수일 때,

다항식 $f(x)\{g(x)\}^2$에서 $g(x)$만이 x를 인수로 가지므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)$가 일차함수, $g(x)$가 삼차함수일 때,

$f(x)=ax$, $g(x)=x^2(bx+c)$ (a, b, c는 음이 아닌 정수, $ab\neq0$)로 놓을 수 있다.

(가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2g(x)}{x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{a^2x^4(bx+c)}{x^5}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(a^2b+\frac{a^2c}{x}\right)$$
$$=a^2b=4$$

(나)에서

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)\{g(x)\}^2}{x^5}=\lim_{x\to0}\frac{ax^5(bx+c)^2}{x^5}$$
$$=\lim_{x\to0}a(bx+c)^2$$
$$=ac^2=2$$

$a^2b=4$, $ac^2=2$를 만족시키는 음이 아닌 세 정수 a, b, c는

$a=2$, $b=1$, $c=1$

$\therefore f(x)=2x$, $g(x)=x^2(x+1)$

(iii) $f(x)$가 이차함수, $g(x)$가 일차함수일 때,

다항식 $f(x)\{g(x)\}^2$의 차수가 4이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)=2x$, $g(x)=x^2(x+1)$

$\therefore f(2)+g(2)=4+12=16$

idea

14 답 ⑤

$0\le f(x)\le g(x)\le h(x)$에서

$0\le 2f(x)\le 2g(x)\le 2h(x)\le 3h(x)$이므로

$0\le 2h(x)-2f(x)\le 3h(x)-2f(x)$

이때 $\lim\limits_{x\to a}\{3h(x)-2f(x)\}=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to a}\{2h(x)-2f(x)\}=0$

$\{3h(x)-2f(x)\}-\{2h(x)-2f(x)\}=h(x)$이므로

$\lim\limits_{x\to a}h(x)=\lim\limits_{x\to a}[\{3h(x)-2f(x)\}-\{2h(x)-2f(x)\}]=0$

$0\le f(x)\le h(x)$에서 $\lim\limits_{x\to a}h(x)=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$

또 $0\le g(x)\le h(x)$에서 $\lim\limits_{x\to a}h(x)=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to a}\{2-f(x)\}\{3-g(x)\}\{4-h(x)\}=2\times3\times4=24$

15 답 ⑤

$|f(x)+xf(x)|\le|x-1|$에서

$0\le|f(x)|\times|x+1|\le|x-1|$ …… ㉠

ㄱ. $x\neq-1$일 때, ㉠의 각 변을 $|x+1|$로 나누면

$0\le|f(x)|\le\dfrac{|x-1|}{|x+1|}$

이때 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|x-1|}{|x+1|}=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to1}|f(x)|=0$

$-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$

ㄴ. $f(x)\neq0$일 때, ㉠의 각 변을 $|f(x)|$로 나누면

$0\le|x+1|\le\dfrac{|x-1|}{|f(x)|}$

이때 $\lim\limits_{x\to1}|x+1|=2$이고, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{f(x)}=a$에서

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|x-1|}{|f(x)|}=|a|=a\,(\because a>0)$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $a\ge2$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.

ㄷ. $x\neq-1$일 때, ㉠의 각 변을 $|x+1|$로 나누면

$0\le|f(x)|\le\dfrac{|x-1|}{|x+1|}$

이때 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x-1|}{|x+1|}=1$이므로 $0\le\lim\limits_{x\to0}|f(x)|\le1$, 즉 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$의 최댓값은 1이다.

$\lim\limits_{x\to1}f(x-1)$에서 $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x-1)=\lim\limits_{t\to0}f(t)$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}f(x-1)$의 최댓값은 1이고

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3+1}{f(x-1)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(2x^3+1)}{\lim\limits_{x\to1}f(x-1)}=\dfrac{3}{\lim\limits_{x\to1}f(x-1)}$의 최솟값은 3이다.

따라서 양수 b의 최솟값은 3이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

16 답 -3

$-2x=2x^3-8x^2+6x$에서

$2x^3-8x^2+8x=0,\ 2x(x-2)^2=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

$x\ge0$에서 $-2x\le f(x)\le 2x^3-8x^2+6x$이고

$\lim\limits_{x\to0+}(-2x)=0,\ \lim\limits_{x\to0+}(2x^3-8x^2+6x)=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0 \quad \therefore f(0)=0$

또 $\lim\limits_{x\to2}(-2x)=-4,\ \lim\limits_{x\to2}(2x^3-8x^2+6x)=-4$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=-4 \quad \therefore f(2)=-4$

따라서 다항함수 $f(x)$는 상수함수가 아니다.

(i) $f(x)$가 일차함수일 때,

최고차항의 계수가 1인 일차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=0$이므로

$f(x)=x$

이때 $f(1)=1$이므로 조건을 만족시키지 않는다. → $f(2)=-4$도 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)$가 이차함수일 때,

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=0$이므로

$f(x)=x(x+a)$ (a는 상수)라 하자.

$f(2)=-4$에서

$2(2+a)=-4$

$2a=-8 \quad \therefore a=-4$

$\therefore f(x)=x(x-4)$

이때 $f(1)=-3$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $f(x)$가 삼차함수일 때,

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=0$이므로

$f(x)=x(x^2+bx+c)$ (b, c는 상수)라 하자.

$f(2)=-4$에서

$2(4+2b+c)=-4$

$\therefore 2b+c=-6$ …… ㉠

$f(1)=-1$에서

$1+b+c=-1$

$\therefore b+c=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$b=-4,\ c=2$

$\therefore f(x)=x(x^2-4x+2)$

(iv) $f(x)$가 사차 이상의 다항함수일 때,

최고차항의 계수가 1인 사차 이상의 다항함수 $f(x)$를

$f(x)=x^n+g(x)$ (n은 4 이상의 자연수, $g(x)$는 $(n-1)$차 이하의 다항함수)라 하자.

$f(x)\le 2x^3-8x^2+6x$에서

$x^n+g(x)\le 2x^3-8x^2+6x$

$x>0$에서

$1+\dfrac{g(x)}{x^n}\le\dfrac{2x^3-8x^2+6x}{x^n}$

그런데 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x^n}=0$이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{1+\dfrac{g(x)}{x^n}\right\}=1$이고

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-8x^2+6x}{x^n}=0$이므로 주어진 부등식을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 $f(x)=x(x^2-4x+2)$이므로

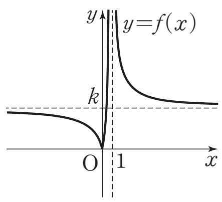
$f(3)=3\times(9-12+2)=-3$

17 답 ①

$f(x)=\left|\dfrac{kx}{x-1}\right|=\left|\dfrac{k(x-1)+k}{x-1}\right|$

$\quad\;=\left|\dfrac{k}{x-1}+k\right|$

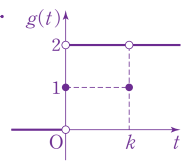
이고 $k>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t=0 \text{ 또는 } t=k)\\ 2 & (0<t<k \text{ 또는 } t>k)\end{cases}$$

모든 양수 a에 대하여 $\lim\limits_{t\to a-}g(t)=2$이므로



$\lim\limits_{t\to 2-}g(t)=2$

$\lim\limits_{t\to 0+}g(t)+\lim\limits_{t\to 2-}g(t)+g(4)=5$에서

$2+2+g(4)=5 \qquad \therefore\ g(4)=1$

$\therefore\ k=4\ (\because\ k>0)$

따라서 $f(x)=\left|\dfrac{4x}{x-1}\right|$이므로

$f(3)=\left|\dfrac{12}{3-1}\right|=6$

18 답 1

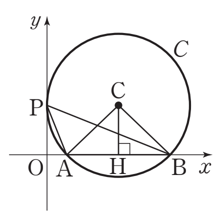
원 C가 점 $\mathrm{P}(0,\ t)$에서 y축에 접하므로

원 C의 중심을 C라 하면

$\mathrm{C}(r(t),\ t)$

원 C의 방정식은

$\{x-r(t)\}^2+(y-t)^2=\{r(t)\}^2$



이 원이 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$을 지나므로

$\{1-r(t)\}^2+t^2=\{r(t)\}^2$, $2r(t)=t^2+1$

$\therefore\ r(t)=\dfrac{t^2+1}{2}$

원의 중심 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{OH}}=r(t)$, $\overline{\mathrm{OA}}=1$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}}=r(t)-1$

삼각형 CAB는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\{r(t)-1\}$

따라서 삼각형 PAB의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\times 2\{r(t)-1\}\times t$

$\quad\;=t\{r(t)-1\}=t\left(\dfrac{t^2+1}{2}-1\right)$

$\quad\;=\dfrac{t(t^2-1)}{2}$

$$\therefore\ \lim_{t\to 1+}\frac{S(t)}{(t-1)r(t)}=\lim_{t\to 1+}\frac{\frac{t(t^2-1)}{2}}{\frac{(t-1)(t^2+1)}{2}}$$

$$=\lim_{t\to 1+}\frac{t(t+1)(t-1)}{(t-1)(t^2+1)}$$

$$=\lim_{t\to 1+}\frac{t(t+1)}{t^2+1}$$

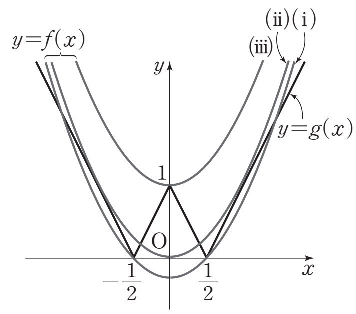
$$=\frac{1\times 2}{1+1}=1$$

19 답 ③

$g(x)=||2x|-1|$

$$=\begin{cases}-2x-1 & \left(x<-\dfrac{1}{2}\right)\\ 2x+1 & \left(-\dfrac{1}{2}\le x<0\right)\\ -2x+1 & \left(0\le x<\dfrac{1}{2}\right)\\ 2x-1 & \left(x\ge\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$$

이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같고 모두 y축에 대하여 대칭이다.



(i) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$을 지날 때,

점 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$을 지나는 경우와 같다.

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$에서

$\dfrac{1}{4}+a=0 \qquad \therefore\ a=-\dfrac{1}{4}$

(ii) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2x-1$에 접할 때,

직선 $y=-2x-1$에 접하는 경우와 같다.

$x^2+a=2x-1$에서

$x^2-2x+a+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1-(a+1)=0 \qquad \therefore\ a=0$

(iii) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지날 때,

$f(0)=1$에서 $a=1$

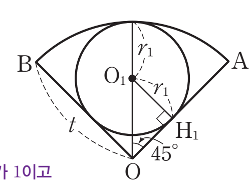
(i), (ii), (iii)에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수 $h(a)$는

$$h(a)=\begin{cases}2 & \left(a<-\dfrac{1}{4} \text{ 또는 } 0<a<1\right)\\ 4 & \left(a=-\dfrac{1}{4} \text{ 또는 } a=0\right)\\ 6 & \left(-\dfrac{1}{4}<a<0\right)\\ 1 & (a=1)\\ 0 & (a>1)\end{cases}$$

따라서 $\lim\limits_{a\to k}h(a)$의 값이 존재하지 않도록 하는 실수 k는 $-\dfrac{1}{4}$, 0, 1의 3개이다.

20 답 ③

부채꼴 AOB의 내접원의 중심을 $\mathrm{O_1}$, 내접원이 선분 OA와 접하는 점을 $\mathrm{H_1}$이라 하면



$\angle\mathrm{OH_1O_1}=90^\circ$

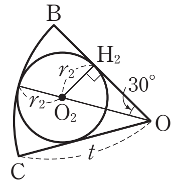
직각삼각형 $\mathrm{OH_1O_1}$에서 $\angle\mathrm{O_1OH_1}=45^\circ$이므로 $\sin 45^\circ=\dfrac{\overline{\mathrm{O_1H_1}}}{\overline{\mathrm{OO_1}}}$

직선 OA의 기울기가 1이고 $\tan 45^\circ=1$이므로 $\angle\mathrm{O_1OH_1}=45^\circ$

$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{r_1}{t-r_1}$, $2r_1=\sqrt{2}(t-r_1)$, $(2+\sqrt{2})r_1=\sqrt{2}t$

$\therefore\ r_1=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}t=\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}t=(\sqrt{2}-1)t$

부채꼴 BOC의 내접원의 중심을 O_2, 내접원이 선분 OB와 접하는 점을 H_2라 하면



$\angle OH_2O_2=90^\circ$

직각삼각형 OH_2O_2에서 $\angle O_2OH_2=30^\circ$이므로

$\sin 30^\circ=\frac{\overline{O_2H_2}}{\overline{OO_2}}$, $\frac{1}{2}=\frac{r_2}{t-r_2}$

$2r_2=t-r_2$, $3r_2=t$ $\qquad\therefore\ r_2=\frac{1}{3}t$

$\therefore\ \lim_{t\to0+}\frac{3r_2-r_1}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{t-(\sqrt{2}-1)t}{t}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{(2-\sqrt{2})t}{t}=2-\sqrt{2}$

21 답 ④

함수 $f(x)=\frac{ax+5}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=ax$가 만나는 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, $\beta\,(\alpha>\beta)$라 하면

$\frac{ax+5}{x-1}=ax$, $ax+5=ax^2-ax$

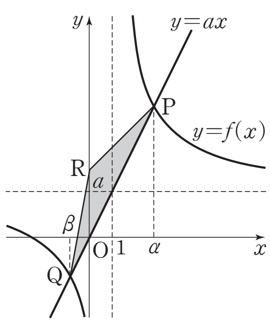
$ax^2-2ax-5=0$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

α, β는 이차방정식 ㉠의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-\frac{5}{a}$

$f(x)=\frac{a(x-1)+a+5}{x-1}=\frac{a+5}{x-1}+a$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=ax$는 그림과 같다.



따라서 삼각형 PRQ의 넓이는

$\triangle PRQ$

$=\triangle OPR+\triangle OQR$

$=\frac{1}{2}\times\overline{OR}\times\alpha+\frac{1}{2}\times\overline{OR}\times(-\beta)$

$=\frac{1}{2}\overline{OR}(\alpha-\beta)$

즉, $\frac{1}{2}\overline{OR}(\alpha-\beta)=3$이므로

$\overline{OR}=\frac{6}{\alpha-\beta}=\frac{6}{\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}}$

$=\frac{6}{\sqrt{4+\frac{20}{a}}}=\frac{3}{\sqrt{1+\frac{5}{a}}}$

$\therefore\ \lim_{a\to\infty}\overline{OR}=\lim_{a\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{5}{a}}}=3$

22 답 ②

정사각형 OABC의 넓이를 이등분하는 직선 l은 정사각형 OABC의 두 대각선이 만나는 점 $(-1, 1)$을 지난다.

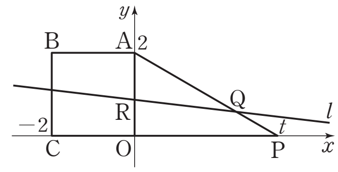
직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y-1=m(x+1)$ $\qquad\therefore\ y=mx+m+1$

두 점 $A(0, 2)$, $P(t, 0)$을 지나는 직선 AP의 방정식은

$\frac{x}{t}+\frac{y}{2}=1$ $\qquad\therefore\ y=-\frac{2}{t}x+2$

직선 AP와 직선 l이 만나는 점을 Q라 하고 점 Q의 x좌표를 구하면



$-\frac{2}{t}x+2=mx+m+1$

$\left(m+\frac{2}{t}\right)x=-m+1$

$\therefore\ x=\frac{-m+1}{m+\frac{2}{t}}=\frac{-mt+t}{mt+2}$

직선 l이 y축과 만나는 점을 R라 하면 $R(0, m+1)$이므로

$\overline{AR}=2-(m+1)=1-m$

삼각형 ARQ의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times(1-m)\times\frac{-mt+t}{mt+2}=\frac{t(1-m)^2}{2mt+4}$

삼각형 AOP의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\frac{1}{2}\times t\times2=t$

삼각형 ARQ의 넓이는 삼각형 AOP의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로 $S_1=\frac{1}{2}S_2$에서

$\frac{t(1-m)^2}{2mt+4}=\frac{1}{2}t$, $(1-m)^2=mt+2$

$m^2-(t+2)m-1=0$ ⟶ m에 대한 이차방정식이므로 근의 공식을 이용한다.

$\therefore\ m=\frac{t+2\pm\sqrt{(t+2)^2+4}}{2}=\frac{t+2\pm\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$

이때 $0<m+1<2$이므로 $-1<m<1$

양수 t에 대하여

$\frac{t+2+\sqrt{t^2+4t+8}}{2}>\frac{t+2+\sqrt{t^2+4t+4}}{2}=t+2>2$이므로

$m=\frac{t+2+\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$은 $-1<m<1$을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ m=\frac{t+2-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$

따라서 직선 l의 y절편 $f(t)$는

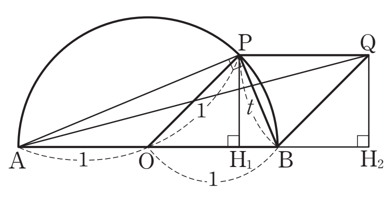
$f(t)=m+1=\frac{t+2-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}+1=\frac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$

$\therefore\ \lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{t\to0+}\frac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}=\frac{4-\sqrt{8}}{2}=2-\sqrt{2}$

23 답 ②

반원의 중심이 O이므로 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OP}=1$

그림과 같이 두 점 P, Q에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.



원의 지름에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 $\angle APB=90^\circ$

직각삼각형 ABP에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{AB}^2$, $\overline{AP}^2+t^2=2^2$

$\therefore\ \overline{AP}^2=4-t^2$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

직각삼각형 OH_1P에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OH_1}^2+\overline{PH_1}^2=\overline{OP}^2$, $\overline{OH_1}^2+\overline{PH_1}^2=1^2$

$\therefore\ \overline{PH_1}^2=1-\overline{OH_1}^2$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

직각삼각형 AH_1P에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AH_1}^2+\overline{PH_1}^2=\overline{AP}^2$

$(1+\overline{OH_1})^2+(1-\overline{OH_1}^2)=4-t^2$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$2+2\overline{OH_1}=4-t^2$

$\therefore \overline{OH_1}=\dfrac{2-t^2}{2}$

직각삼각형 AH_2Q에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AH_2}^2+\overline{QH_2}^2=\overline{AQ}^2$

이때 $\overline{BH_2}=\overline{OH_1}$, $\overline{QH_2}=\overline{PH_1}$이므로 ⟶ $\triangle POH_1 \equiv \triangle QBH_2$(ASA 합동)

$$\begin{aligned}\overline{AQ}^2&=(2+\overline{OH_1})^2+\overline{PH_1}^2\\&=(2+\overline{OH_1})^2+(1-\overline{OH_1}^2)\ (\because ㉡)\\&=4\overline{OH_1}+5\\&=4\times\frac{2-t^2}{2}+5\\&=9-2t^2\end{aligned}$$

$\therefore \overline{AQ}=\sqrt{9-2t^2}$ ($\because \overline{AQ}>0$)

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t\to0+}\frac{3-\overline{AQ}}{t^2}&=\lim_{t\to0+}\frac{3-\sqrt{9-2t^2}}{t^2}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{(3-\sqrt{9-2t^2})(3+\sqrt{9-2t^2})}{t^2(3+\sqrt{9-2t^2})}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{2t^2}{t^2(3+\sqrt{9-2t^2})}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{2}{3+\sqrt{9-2t^2}}\\&=\frac{2}{3+3}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

24 답 2

접선 l의 기울기를 $m\,(m>0)$이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=m(x+a)$

$\therefore y=mx+am$

점 $(2, 0)$과 직선 $y=mx+am$, 즉 $mx-y+am=0$ 사이의 거리는 원 $(x-2)^2+y^2=4$의 반지름의 길이 2와 같으므로

$\dfrac{|2m+am|}{\sqrt{m^2+1}}=2$, $\dfrac{(2m+am)^2}{m^2+1}=4$

$m^2(a+2)^2=4(m^2+1)$, $m^2(a^2+4a)=4$

$m^2=\dfrac{4}{a^2+4a}$ $\qquad\therefore m=\dfrac{2}{\sqrt{a^2+4a}}$ ($\because m>0$)

따라서 직선 l의 방정식은 $y=\dfrac{2}{\sqrt{a^2+4a}}x+\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+4a}}$이므로

$P\left(0, \dfrac{2a}{\sqrt{a^2+4a}}\right)$

점 P에서 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같으므로 $\overline{PO}=\overline{PQ}$이고 $\angle APO=\angle RPQ$(맞꼭지각), $\angle POA=\angle PQR=90°$이므로 $\triangle POA\equiv\triangle PQR$ (ASA 합동)

$\therefore \overline{PQ}=\overline{PO}=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+4a}}$,

$\overline{QR}=\overline{OA}=a$,

$$\begin{aligned}\overline{PR}=\overline{PA}&=\sqrt{a^2+\left(\frac{2a}{\sqrt{a^2+4a}}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{a^4+4a^3+4a^2}{a^2+4a}}=\sqrt{\frac{(a^2+2a)^2}{a^2+4a}}\\&=\frac{a^2+2a}{\sqrt{a^2+4a}}\ (\because a>0)\end{aligned}$$

따라서 삼각형 PQR의 둘레의 길이 $l(a)$는

$l(a)=\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{PR}=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+4a}}+a+\dfrac{a^2+2a}{\sqrt{a^2+4a}}=a+\sqrt{a^2+4a}$

삼각형 PQR의 넓이 $S(a)$는

$S(a)=\dfrac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{QR}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+4a}}\times a=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+4a}}$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{l(a)}{S(a)}&=\lim_{a\to\infty}\frac{a+\sqrt{a^2+4a}}{\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+4a}}}\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{a\sqrt{a^2+4a}+a^2+4a}{a^2}\\&=\lim_{a\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{4}{a}}+1+\frac{4}{a}\right)\\&=1+1=2\end{aligned}$$

개념 NOTE

점 $P(x_1, y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

STEP 3 최고난도 문제

| 25~27쪽

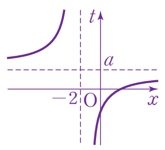
01 ⑤	02 $\frac{52}{3}$	03 40	04 ③	05 -1	06 ②
07 42	08 25	09 ①	10 208		

01 답 ⑤

1단계 극한을 포함한 식 변형하기

$\dfrac{ax-3a}{x+2}=t$로 놓으면

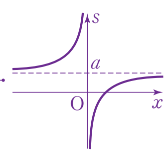
$t=\dfrac{a(x+2)-5a}{x+2}=-\dfrac{5a}{x+2}+a$ ⟶



$x\to-\infty$일 때 $t\to a+$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f\left(\frac{ax-3a}{x+2}\right)=\lim_{t\to a+}f(t)$

$\dfrac{ax-3a}{x}=s$로 놓으면 $s=-\dfrac{3a}{x}+a$ ⟶



$x\to\infty$일 때 $s\to a-$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{ax-3a}{x}\right)=\lim_{s\to a-}f(s)$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f\left(\frac{ax-3a}{x+2}\right)+\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{ax-3a}{x}\right)=2$에서

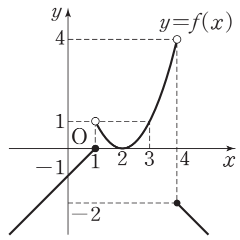
$\displaystyle\lim_{t\to a+}f(t)+\lim_{s\to a-}f(s)=2$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to a+}f(x)+\lim_{x\to a-}f(x)=2$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

2단계 조건을 만족시키는 a의 값 구하기

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & (x\le1)\\(x-2)^2 & (1<x<4)\\-x+2 & (x\ge4)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(i) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$일 때,

㉠에서 $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = 1$ $\quad \therefore \lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $a=3$

(ii) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-} f(x)$일 때,

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-} f(x)$를 만족시키는 a의 값은 1 또는 4이다.

ⓘ $a=1$일 때,

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) + \lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 1+0 = 1$

이는 ㉠을 만족시키지 않는다.

ⓘⓘ $a=4$일 때,

$\lim\limits_{x \to 4+} f(x) + \lim\limits_{x \to 4-} f(x) = -2+4 = 2$

이는 ㉠을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=3$ 또는 $a=4$

3단계 a의 값의 합 구하기

따라서 모든 양수 a의 값의 합은

$3+4=7$

02 답 $\frac{52}{3}$

1단계 a가 정수일 때, $a+b$의 값 구하기

(i) a가 정수일 때,

$\lim\limits_{x \to a+} [x] = a$이므로

$$\lim_{x \to a+} \frac{[x]^2+3x}{[x]} = \frac{a^2+3a}{a} = a+3$$

$\lim\limits_{x \to a-} [x] = a-1$이므로

$$\lim_{x \to a-} \frac{[x]^2+3x}{[x]} = \frac{(a-1)^2+3a}{a-1} = a-1+\frac{3a}{a-1}$$

$$\lim_{x \to a+} \frac{[x]^2+3x}{[x]} = \lim_{x \to a-} \frac{[x]^2+3x}{[x]} = b\text{이므로}$$

$$a+3 = a-1+\frac{3a}{a-1} = b$$

$a+3 = a-1+\dfrac{3a}{a-1}$에서 $\dfrac{3a}{a-1} = 4$

$3a = 4a-4 \qquad \therefore a=4$

$a+3=b$에서 $b=7$

$\therefore a+b = 4+7 = 11$

2단계 a가 정수가 아닐 때, $a+b$의 값 구하기

(ii) a가 정수가 아닐 때,

$a = n+\alpha$ (n은 음이 아닌 정수, $0<\alpha<1$)라 하자.

$\lim\limits_{x \to a} [x] = n$이므로

$$\lim_{x \to a} \frac{[x]^2+3x}{[x]} = \frac{n^2+3(n+\alpha)}{n}$$

즉, $\dfrac{n^2+3(n+\alpha)}{n} = b$이므로

$n^2+3(n+\alpha) = bn$

$3\alpha = -n^2+bn-3n \quad \cdots\cdots$ ㉠

$-n^2+bn-3n$은 정수이므로 3α도 정수이다.

이때 $0<\alpha<1$이므로

$\alpha = \dfrac{1}{3}$ 또는 $\alpha = \dfrac{2}{3}$

ⓘ $\alpha = \dfrac{1}{3}$일 때,

㉠에서 $1 = -n^2+bn-3n$

$1 = n(-n+b-3)$

n은 음이 아닌 정수, $-n+b-3$은 정수이므로

$n=1$, $-n+b-3=1 \qquad \therefore b=5$

따라서 $a = n+\alpha = 1+\dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$이므로

$a+b = \dfrac{4}{3}+5 = \dfrac{19}{3}$

ⓘⓘ $\alpha = \dfrac{2}{3}$일 때,

㉠에서 $2 = -n^2+bn-3n$

$2 = n(-n+b-3)$

n은 음이 아닌 정수, $-n+b-3$은 정수이므로

$n=1$, $-n+b-3=2$ 또는 $n=2$, $-n+b-3=1$

$\therefore n=1$, $b=6$ 또는 $n=2$, $b=6$

$n=1$일 때, $a = n+\alpha = 1+\dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$이므로

$a+b = \dfrac{5}{3}+6 = \dfrac{23}{3}$

$n=2$일 때, $a = n+\alpha = 2+\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{3}$이므로

$a+b = \dfrac{8}{3}+6 = \dfrac{26}{3}$

3단계 $a+b$의 최댓값과 최솟값의 합 구하기

(i), (ii)에서 $a+b$의 최댓값은 11, 최솟값은 $\dfrac{19}{3}$이므로 그 합은

$11+\dfrac{19}{3} = \dfrac{52}{3}$

03 답 40

1단계 $f(x)$를 이차항의 계수가 p인 식으로 나타내기

(가)에서 $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{\sqrt{x^2}-f(x)}{x+f(x)} = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{-\{x+f(x)\}}{x+f(x)} = -1$이므로

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x^2}-f(x)}{x+f(x)} = \lim_{x \to 0+} \frac{x-f(x)}{x+f(x)} = 2$$

$f(x) = px^2+qx+r$ (p, q, r는 상수, $p>0$)라 하면

$\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{x-f(x)}{x+f(x)} = 2$이므로 $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{-px^2-(q-1)x-r}{px^2+(q+1)x+r} = 2$

이때 $r \neq 0$이라 하면 $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{-px^2-(q-1)x-r}{px^2+(q+1)x+r} = \dfrac{-r}{r} = -1$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore r=0$

$r=0$을 대입하면

$$\lim_{x \to 0+} \frac{-px^2-(q-1)x}{px^2+(q+1)x} = \lim_{x \to 0+} \frac{-px-(q-1)}{px+(q+1)} = \frac{-(q-1)}{q+1} = 2$$

$-q+1 = 2q+2 \qquad \therefore q = -\dfrac{1}{3}$

$\therefore f(x) = px^2-\dfrac{1}{3}x = x\left(px-\dfrac{1}{3}\right)$

2단계 a의 값에 따라 p의 값 구하기

(나)에서 $\lim_{x\to a}(\sqrt{x^2}-3)\neq 0$이면 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x-4)f(x+1)}{\sqrt{x^2}-3}$의 값이 존재하므로 $\lim_{x\to a}(\sqrt{x^2}-3)=0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to a}(\sqrt{x^2}-3)=\sqrt{a^2}-3=0$, $|a|=3$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=3$

(i) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x-4)f(x+1)}{\sqrt{x^2}-3}$의 값이 존재하지 않는 실수 a의 값이 -3이면

$x=3$에서 극한값이 존재하고 $\lim_{x\to 3}(\sqrt{x^2}-3)=0$이므로

$\lim_{x\to 3}f(x-4)f(x+1)=f(-1)\times f(4)=0$ $x\to 3$일 때 (분모)$\to 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$

$f(-1)\times f(4)=-\left(-p-\dfrac{1}{3}\right)\times 4\left(4p-\dfrac{1}{3}\right)=0$

$\left(p+\dfrac{1}{3}\right)\left(4p-\dfrac{1}{3}\right)=0$

$\therefore p=\dfrac{1}{12}$ ($\because p>0$)

(ii) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x-4)f(x+1)}{\sqrt{x^2}-3}$의 값이 존재하지 않는 실수 a의 값이 3이면

$x=-3$에서 극한값이 존재하고 $\lim_{x\to -3}(\sqrt{x^2}-3)=0$이므로

$\lim_{x\to -3}f(x-4)f(x+1)=f(-7)\times f(-2)=0$ $x\to -3$일 때 (분모)$\to 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$

$f(-7)\times f(-2)=-7\left(-7p-\dfrac{1}{3}\right)\times(-2)\left(-2p-\dfrac{1}{3}\right)=0$

$\left(7p+\dfrac{1}{3}\right)\left(2p+\dfrac{1}{3}\right)=0$

이때 $p>0$을 만족시키는 p의 값은 없다.

(i), (ii)에서 $p=\dfrac{1}{12}$

3단계 $f(24)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{12}x^2-\dfrac{1}{3}x=\dfrac{1}{12}x(x-4)$이므로

$f(24)=\dfrac{1}{12}\times 24\times 20=40$

idea

04 답 ③

1단계 주어진 극한을 식으로 나타내기

$f(x)=x-a$, $g(x)=(x-b)(x-b^2)(x-b^3)$,

$g\left(\dfrac{x}{2}\right)=\left(\dfrac{x}{2}-b\right)\left(\dfrac{x}{2}-b^2\right)\left(\dfrac{x}{2}-b^3\right)=\dfrac{1}{8}(x-2b)(x-2b^2)(x-2b^3)$

이므로

$$\lim_{x\to c}\frac{g\left(\frac{x}{2}\right)}{f(x)g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{(x-2b)(x-2b^2)(x-2b^3)}{8(x-a)(x-b)(x-b^2)(x-b^3)}\quad\cdots\cdots ㉠$$

2단계 순서쌍 (a, b, c)의 개수 구하기

㉠의 값이 존재하지 않도록 하는 c가 오직 하나뿐이려면 기약분수 꼴로 나타내었을 때 분모가 0이 되게 하는 x의 값이 오직 하나뿐이어야 한다.

(i) $b=b^2=b^3$일 때,

$b=b^2$에서 $b(b-1)=0$ $\quad\therefore b=1$ ($\because b$는 자연수)

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to c}\frac{g\left(\frac{x}{2}\right)}{f(x)g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{(x-2)^3}{8(x-a)(x-1)^3}$$

극한값이 존재하지 않도록 하는 c가 오직 하나뿐이므로

$c=1$이고 $a=1$ 또는 $a=2$

따라서 순서쌍 (a, b, c)는 $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$의 2개이다.

(ii) b, b^2, b^3의 값이 서로 다를 때,

$b<b^2<b^3$, $b<2b<2b^2<2b^3$이므로 ㉠에서 극한값이 존재하지 않도록 하는 c가 오직 하나뿐이려면

$2b=b^2$ 또는 $2b=b^3$ 또는 $2b^2=b^3$ $b<2b$, $b^2<2b^2$, $b^3<2b^3$ ($\because b$는 자연수) 이므로 가능한 경우는 세 가지이다.

$b(b-2)=0$ 또는 $b(b^2-2)=0$ 또는 $b^2(b-2)=0$

$\therefore b=2$ ($\because b$는 자연수)

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to c}\frac{g\left(\frac{x}{2}\right)}{f(x)g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{(x-4)(x-8)(x-16)}{8(x-a)(x-2)(x-4)(x-8)}$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{x-16}{8(x-a)(x-2)}$$

극한값이 존재하지 않도록 하는 c가 오직 하나뿐이므로

$c=2$이고 $a=2$ 또는 $a=16$

따라서 순서쌍 (a, b, c)는 $(2, 2, 2)$, $(16, 2, 2)$의 2개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$2+2=4$

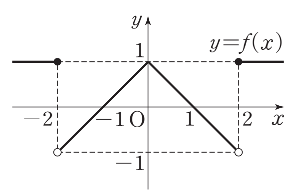
05 답 -1

1단계 함수 $y=f(x)$의 그래프 그리기

$$f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\geq 2)\\ 1-|x| & (|x|<2)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1 & (x\leq -2 \text{ 또는 } x\geq 2)\\ 1+x & (-2<x<0)\\ 1-x & (0\leq x<2)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



2단계 $g(x)$ 구하기

$g(x)=\lim_{t\to x+}\dfrac{|f(t)|}{f(t)}-\lim_{t\to x-}\dfrac{|f(t)|}{f(t)}$이므로 $t=x$의 좌우에서 $f(t)$의 값의 부호가 바뀌는 x의 값인 -2, -1, 1, 2를 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

이때 $t\leq -2$ 또는 $-1<t<1$ 또는 $t\geq 2$에서 $f(t)>0$이고, $-2<t<-1$ 또는 $1<t<2$에서 $f(t)<0$이다.

(i) $x<-2$ 또는 $-1<x<1$ 또는 $x>2$일 때,

$$g(x)=\lim_{t\to x+}\frac{|f(t)|}{f(t)}-\lim_{t\to x-}\frac{|f(t)|}{f(t)}$$

$$=\lim_{t\to x+}\frac{f(t)}{f(t)}-\lim_{t\to x-}\frac{f(t)}{f(t)}$$

$$=1-1=0$$

(ii) $-2<x<-1$ 또는 $1<x<2$일 때,

$$g(x)=\lim_{t\to x+}\frac{|f(t)|}{f(t)}-\lim_{t\to x-}\frac{|f(t)|}{f(t)}$$

$$=\lim_{t\to x+}\frac{-f(t)}{f(t)}-\lim_{t\to x-}\frac{-f(t)}{f(t)}$$

$$=-1-(-1)=0$$

(iii) $x=-2$일 때,

$$g(-2)=\lim_{t\to-2+}\frac{|f(t)|}{f(t)}-\lim_{t\to-2-}\frac{|f(t)|}{f(t)}$$
$$=\lim_{t\to-2+}\frac{-f(t)}{f(t)}-\lim_{t\to-2-}\frac{f(t)}{f(t)}$$
$$=-1-1=-2$$

(iv) $x=-1$일 때,

$$g(-1)=\lim_{t\to-1+}\frac{|f(t)|}{f(t)}-\lim_{t\to-1-}\frac{|f(t)|}{f(t)}$$
$$=\lim_{t\to-1+}\frac{f(t)}{f(t)}-\lim_{t\to-1-}\frac{-f(t)}{f(t)}$$
$$=1-(-1)=2$$

(v) $x=1$일 때,

$$g(1)=\lim_{t\to1+}\frac{|f(t)|}{f(t)}-\lim_{t\to1-}\frac{|f(t)|}{f(t)}$$
$$=\lim_{t\to1+}\frac{-f(t)}{f(t)}-\lim_{t\to1-}\frac{f(t)}{f(t)}$$
$$=-1-1=-2$$

(vi) $x=2$일 때,

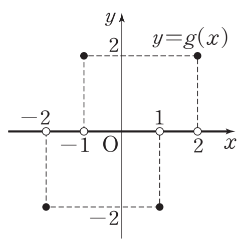
$$g(2)=\lim_{t\to2+}\frac{|f(t)|}{f(t)}-\lim_{t\to2-}\frac{|f(t)|}{f(t)}$$
$$=\lim_{t\to2+}\frac{f(t)}{f(t)}-\lim_{t\to2-}\frac{-f(t)}{f(t)}$$
$$=1-(-1)=2$$

(i)~(vi)에서

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x\neq-2,\ x\neq-1,\ x\neq1,\ x\neq2)\\ 2 & (x=-1 \text{ 또는 } x=2)\\ -2 & (x=-2 \text{ 또는 } x=1)\end{cases}$$

3단계 $\lim_{x\to2+}g(f(x))+\lim_{x\to1}f(g(x))+\lim_{x\to-1}g(g(x))$**의 값 구하기**

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)=s$로 놓으면 $x\to2+$일 때 $s=1$이므로

$\lim_{x\to2+}g(f(x))=g(1)=-2$

$g(x)=u$로 놓으면 $x\to1$일 때 $u=0$이므로 $\lim_{x\to1}f(g(x))=f(0)=1$

$x\to-1$일 때 $u=0$이므로 $\lim_{x\to-1}g(g(x))=g(0)=0$

$$\therefore \lim_{x\to2+}g(f(x))+\lim_{x\to1}f(g(x))+\lim_{x\to-1}g(g(x))=-2+1+0$$
$$=-1$$

06 답 ②

1단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재해야 하므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)$

$\lim_{x\to0+}|x-8|=\lim_{x\to0-}(x^2-2ax+8a)$

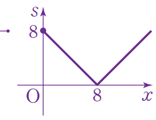
$8=8a \qquad \therefore a=1$

2단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. $\lim_{x\to0}f(f(x))$의 값이 존재해야 하므로

$\lim_{x\to0+}f(f(x))=\lim_{x\to0-}f(f(x)) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=s$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $s\to8-$이므로



$\lim_{x\to0+}f(f(x))=\lim_{s\to8-}f(s)$

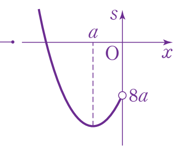
$=\lim_{s\to8-}|s-8|$

$=0$

$x<0$일 때 $f(x)=x^2-2ax+8a=(x-a)^2-a^2+8a$이므로 a의 값의 범위에 따라 $\lim_{x\to0-}f(f(x))$의 값을 구해 보자.

(i) $a<0$일 때,

$x\to0-$일 때 $s\to8a-$이므로



$\lim_{x\to0-}f(f(x))=\lim_{s\to8a-}f(s)$

$=\lim_{s\to8a-}(s^2-2as+8a)$

$=64a^2-16a^2+8a$

$=48a^2+8a$

㉠에서

$0=48a^2+8a$

$8a(6a+1)=0$

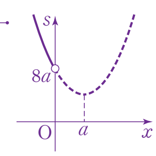
$\therefore a=0$ 또는 $a=-\frac{1}{6}$

그런데 $a<0$이므로

$a=-\frac{1}{6}$

(ii) $a\geq0$일 때,

$x\to0-$일 때 $s\to8a+$이므로



$\lim_{x\to0-}f(f(x))=\lim_{s\to8a+}f(s)$

$=\lim_{s\to8a+}|s-8|$

$=|8a-8|$

㉠에서

$0=|8a-8|$

$\therefore a=1$

(i), (ii)에서 모든 a의 값의 합은

$-\frac{1}{6}+1=\frac{5}{6}$

3단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. 0이 아닌 모든 실수 t에 대하여 $\lim_{x\to t}f(x)$의 값이 존재한다.

이때 $\lim_{x\to t}f(x)=k\ (k\neq0)$이면

$\lim_{x\to t}f(f(x))=f(k)$

즉, $\lim_{x\to t}f(x)$의 값이 0이 아니면 $\lim_{x\to t}f(f(x))$의 값이 항상 존재한다.

따라서 t의 값의 범위에 따라 $\lim_{x\to t}f(x)=0$일 때, $\lim_{x\to t}f(f(x))$의 값이 존재하는지 알아보자.

(i) $t>0$일 때,

$\lim_{x\to t}f(x)=0$이면 $\lim_{x\to t}|x-8|=0$

$|t-8|=0 \qquad \therefore t=8$

$f(x)=s$로 놓으면 $x\to8$일 때 $s\to0+$이므로

$\lim_{x\to8}f(f(x))=\lim_{s\to0+}f(s)=\lim_{s\to0+}|s-8|=8$

따라서 $\lim_{x\to t}f(f(x))$의 값이 존재한다.

(ii) $t<0$일 때,

$\lim_{x\to t} f(x)=0$이면 $\lim_{x\to t}(x^2-2ax+8a)=0$

$t^2-2at+8a=0$ ...... ㉡

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-8a$

ⓘ $D>0$인 경우

$a^2-8a>0$에서 $a(a-8)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>8$

이차방정식 ㉡에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $2a$, 곱은 $8a$이다.

$a>8$이면 두 근의 합과 곱이 모두 양수이므로 $t<0$에서 이차방정식 ㉡의 실근이 존재하지 않는다. 두 근이 모두 양수이다.

즉, $a>8$일 때 $\lim_{x\to t} f(x)\neq 0$이므로 $\lim_{x\to t} f(f(x))$의 값이 존재한다.

$a<0$이면 두 근의 합과 곱이 모두 음수이므로 $t<0$에서 이차방정식 ㉡은 한 실근만 존재한다. 한 근은 양수, 다른 한 근은 음수이다.

이 근을 α라 하자.

$f(x)=s$로 놓으면 $x\to\alpha+$일 때 $s\to 0-$이므로

$\lim_{x\to\alpha+} f(f(x))=\lim_{s\to 0-} f(s)=\lim_{s\to 0-}(s^2-2as+8a)=8a$

$x\to\alpha-$일 때 $s\to 0+$이므로

$\lim_{x\to\alpha-} f(f(x))=\lim_{s\to 0+} f(s)=\lim_{s\to 0+}|s-8|=8$

이때 $a<0$이므로

$\lim_{x\to\alpha+} f(f(x))\neq\lim_{x\to\alpha-} f(f(x))$

즉, $a<0$일 때 $\lim_{x\to t} f(f(x))$의 값이 존재하지 않는 경우가 있다.

ⓘⓘ $D=0$인 경우

$a^2-8a=0$에서

$a(a-8)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=8$

$a=0$이면 ㉡에서 $t^2=0$ $\therefore t=0$

따라서 $t<0$에서 이차방정식 ㉡의 실근이 존재하지 않는다.

즉, $a=0$이면 $t<0$에서 $\lim_{x\to t} f(x)\neq 0$이므로 $\lim_{x\to t} f(f(x))$의 값이 존재한다.

$a=8$이면 ㉡에서 $t^2-16t+64=0$

$(t-8)^2=0$ $\therefore t=8$

따라서 $t<0$에서 이차방정식 ㉡의 실근이 존재하지 않는다.

즉, $a=8$이면 $t<0$에서 $\lim_{x\to t} f(x)\neq 0$이므로 $\lim_{x\to t} f(f(x))$의 값이 존재한다.

ⓘⓘⓘ $D<0$인 경우

$a^2-8a<0$에서

$a(a-8)<0$

$\therefore 0<a<8$

이때 이차방정식 ㉡은 실근을 갖지 않는다.

즉, $0<a<8$일 때 $\lim_{x\to t} f(x)\neq 0$이므로 $\lim_{x\to t} f(f(x))$의 값이 존재한다.

ⓘ, ⓘⓘ, ⓘⓘⓘ에서 $a\geq 0$일 때 $\lim_{x\to t} f(f(x))$의 값이 존재한다.

(i), (ii)에서 $a\geq 0$

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

07 답 42

1단계 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 값이 존재함을 이용하여 $g(x)$ 파악하기

$f(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$이고, 모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 값이 존재한다.

(i) $a=1$일 때,

$$\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)f(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 1-}g(x)$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)\{-f(x)\}}{f(x)}=-\lim_{x\to 1+}g(x)$$

$\lim_{x\to 1-}g(x)=-\lim_{x\to 1+}g(x)=\lim_{x\to 1}g(x)$이어야 하므로 $\lim_{x\to 1}g(x)=0$

(ii) $a=2$일 때,

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)\{-f(x)\}}{f(x)}=-\lim_{x\to 2-}g(x)$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)f(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2+}g(x)$$

$-\lim_{x\to 2-}g(x)=\lim_{x\to 2+}g(x)=\lim_{x\to 2}g(x)$이어야 하므로 $\lim_{x\to 2}g(x)=0$

$g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 (i), (ii)에서

$g(1)=g(2)=0$

따라서 $g(x)=(x-1)(x-2)h(x)=f(x)h(x)$ ($h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)로 놓을 수 있다.

2단계 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$의 값이 존재함을 이용하여 $g(x)$ 구하기

모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$의 값이 존재해야 하고

$$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)h(x)-f(x)|}{f(x)h(x)}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)||h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

이므로

(iii) $a=1$일 때,

$$\lim_{x\to 1-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)|h(x)-1|}{f(x)h(x)}=\lim_{x\to 1-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}=\lim_{x\to 1+}\frac{-f(x)|h(x)-1|}{f(x)h(x)}=-\lim_{x\to 1+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

에서

$$\lim_{x\to 1-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}=-\lim_{x\to 1+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)} \quad\cdots\cdots ㉠$$

$h(1)=0$이면 ㉠의 값이 존재하지 않으므로 $h(1)\neq 0$이고

㉠에서 $\frac{|h(1)-1|}{h(1)}=-\frac{|h(1)-1|}{h(1)}$이므로

$h(1)=1$

(iv) $a=2$일 때,

$$\lim_{x\to 2-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}=\lim_{x\to 2-}\frac{-f(x)|h(x)-1|}{f(x)h(x)}=-\lim_{x\to 2-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}=\lim_{x\to2+}\frac{f(x)|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

에서

$$-\lim_{x\to2-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}=\lim_{x\to2+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}\quad\cdots\cdots ㉡$$

$h(2)=0$이면 ㉡의 값이 존재하지 않으므로 $h(2)\neq0$이고

㉡에서 $-\dfrac{|h(2)-1|}{h(2)}=\dfrac{|h(2)-1|}{h(2)}$이므로

$h(2)=1$

(iii), (iv)에서 $h(1)=1$, $h(2)=1$이고 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$h(x)=(x-1)(x-2)+1=x^2-3x+3$

$\therefore\ g(x)=(x-1)(x-2)(x^2-3x+3)$

3단계 $g(-1)$**의 값 구하기**

$\therefore\ g(-1)=(-2)\times(-3)\times7=42$

08 답 25

1단계 $g(x)$ **구하기**

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq g(x)$이면 $h(x)=g(x)+f(x)$이므로 (가)를 만족시키지 않는다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만난다.

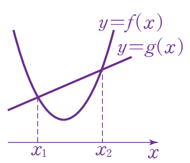
방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 두 실근을 x_1, $x_2\,(x_1<x_2)$라 하자.

$x\leq x_1$일 때 $f(x)\geq g(x)$,

$x_1<x<x_2$일 때 $f(x)<g(x)$,

$x\geq x_2$일 때 $f(x)\geq g(x)$

를 만족시키므로



$$h(x)=\begin{cases}g(x)+f(x) & (x\leq x_1 \text{ 또는 } x\geq x_2)\\ g(x)-f(x) & (x_1<x<x_2)\end{cases}$$

함수 $h(x)$는 $x=x_1$과 $x=x_2$를 제외한 모든 실수에서 극한값을 가지므로 (가)에서 $x_1=2$ 또는 $x_2=2$

(i) $x_1=2$일 때,

$\lim\limits_{x\to x_2-}h(x)=\lim\limits_{x\to x_2+}h(x)$이고

$\lim\limits_{x\to x_2-}h(x)=\lim\limits_{x\to x_2-}\{g(x)-f(x)\}=g(x_2)-f(x_2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to x_2+}h(x)=\lim\limits_{x\to x_2+}\{g(x)+f(x)\}=g(x_2)+f(x_2)=2g(x_2)=0$

$\therefore\ g(x_2)=0$

이때 직선 $y=g(x)$의 기울기가 양수이므로

$g(x_1)=g(2)<0$

$\lim\limits_{x\to2-}h(x)=\lim\limits_{x\to2-}\{g(x)+f(x)\}=g(2)+f(2)=2g(2)$이고

$\lim\limits_{x\to2+}h(x)=\lim\limits_{x\to2+}\{g(x)-f(x)\}=g(2)-f(2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to2-}|h(x)-1|=|2g(2)-1|>1\ (\because\ g(2)<0)$,

$\lim\limits_{x\to2+}|h(x)-1|=|0-1|=1$

따라서 $\lim\limits_{x\to2}|h(x)-1|$의 값이 존재하지 않으므로 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $x_2=2$일 때,

$\lim\limits_{x\to x_1-}h(x)=\lim\limits_{x\to x_1+}h(x)$이고, (i)과 같은 방법으로 하면 $g(x_1)=0$

이때 직선 $y=g(x)$의 기울기가 양수이므로 $g(x_2)=g(2)>0$

$\lim\limits_{x\to2-}h(x)=\lim\limits_{x\to2-}\{g(x)-f(x)\}=g(2)-f(2)=0$이고

$\lim\limits_{x\to2+}h(x)=\lim\limits_{x\to2+}\{g(x)+f(x)\}=g(2)+f(2)=2g(2)$이므로

$\lim\limits_{x\to2-}|h(x)-1|=|0-1|=1$,

$\lim\limits_{x\to2+}|h(x)-1|=|2g(2)-1|$

이때 $|2g(2)-1|=1$이어야 하므로

$g(2)=1\ (\because\ g(2)>0)$

(i), (ii)에서 $x_2=2$이고, $g(2)=1$이므로

$\dfrac{2}{3}+a=1\qquad\therefore\ a=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ g(x)=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$

2단계 $f(x)$ **구하기**

$g(x_1)=0$에서 $\dfrac{1}{3}x_1+\dfrac{1}{3}=0$이므로 $x_1=-1$이고,

$f(x_1)=f(-1)=g(-1)=0$, $f(x_2)=f(2)=g(2)=1$

즉, $f(-1)-g(-1)=0$, $f(2)-g(2)=0$이므로

$f(x)-g(x)=p(x+1)(x-2)\ (p>0)$로 놓을 수 있다.

$x=0$에서 $f(0)<g(0)$이므로 → $-1<x<2$에서 $f(x)-g(x)<0$

$h(0)=g(0)-f(0)=2p=\dfrac{7}{3}$

$\therefore\ p=\dfrac{7}{6}$

$$\therefore\ f(x)=\frac{7}{6}(x+1)(x-2)+g(x)$$
$$=\frac{7}{6}(x+1)(x-2)+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$$
$$=(x+1)\left(\frac{7}{6}x-2\right)$$

3단계 $h(5)$**의 값 구하기**

따라서 $x=5$에서 $f(5)>g(5)$이므로

$h(5)=g(5)+f(5)=\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{3}+6\times\dfrac{23}{6}=2+23=25$

09 답 ①

1단계 $S_1(t)$ **구하기**

원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P의 x좌표가 t이므로

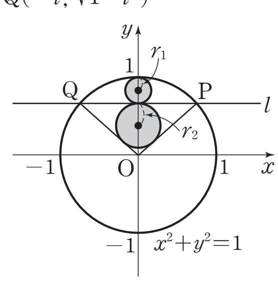
$t^2+y^2=1$, $y^2=1-t^2$

$\therefore\ y=\pm\sqrt{1-t^2}$

점 P는 제1사분면 위의 점이므로 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{1-t^2})$

점 Q는 점 P와 y축에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{Q}(-t,\ \sqrt{1-t^2})$

원 $x^2+y^2=1$과 점 $(0,\ 1)$에서 접하면서 직선 l과 접하는 원의 반지름의 길이를 r_1이라 하면



$r_1=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{1-t^2})$

$\therefore\ S_1(t)=\pi r_1^{\,2}$

$\qquad=\dfrac{\pi}{4}(1-\sqrt{1-t^2})^2$

2단계 $S_2(t)$ **구하기**

삼각형 OPQ의 내접원의 반지름의 길이를 r_2라 하면

$\dfrac{1}{2}\times r_2\times(\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{PQ}})=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\sqrt{1-t^2}$

$r_2\times(1+1+2t)=2t\times\sqrt{1-t^2}$

$\therefore\ r_2=\dfrac{2t\sqrt{1-t^2}}{2t+2}=\dfrac{t\sqrt{1-t^2}}{t+1}$

$$\therefore\ S_2(t)=\pi r_2^{\,2}=\frac{t^2(1-t^2)}{(t+1)^2}\pi$$
$$=\frac{t^2(1+t)(1-t)}{(t+1)^2}\pi$$
$$=\frac{t^2(1-t)}{t+1}\pi$$

3단계 $\dfrac{S_1(t)}{S_2(t)}$ **구하기**

$$\therefore\ \frac{S_1(t)}{S_2(t)}=\frac{\frac{\pi}{4}(1-\sqrt{1-t^2})^2}{\frac{t^2(1-t)}{t+1}\pi}$$
$$=\frac{(1-\sqrt{1-t^2})^2(t+1)}{4t^2(1-t)}$$
$$=\frac{(1-\sqrt{1-t^2})^2(1+\sqrt{1-t^2})^2(t+1)}{4t^2(1-t)(1+\sqrt{1-t^2})^2}$$
$$=\frac{t^4(t+1)}{4t^2(1-t)(1+\sqrt{1-t^2})^2}$$
$$=\frac{t^2(t+1)}{4(1-t)(1+\sqrt{1-t^2})^2}$$

4단계 조건을 만족시키는 n의 값의 합 구하기

(i) $n=1$일 때,

$$\lim_{t\to0+}\frac{S_1(t)}{tS_2(t)}=\lim_{t\to0+}\frac{t^2(t+1)}{4t(1-t)(1+\sqrt{1-t^2})^2}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{t(t+1)}{4(1-t)(1+\sqrt{1-t^2})^2}$$
$$=\frac{0}{4\times1\times2^2}=0$$

따라서 $\displaystyle\lim_{t\to0+}\frac{S_1(t)}{tS_2(t)}$의 값이 존재한다.

(ii) $n=2$일 때,

$$\lim_{t\to0+}\frac{S_1(t)}{t^2S_2(t)}=\lim_{t\to0+}\frac{t^2(t+1)}{4t^2(1-t)(1+\sqrt{1-t^2})^2}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{t+1}{4(1-t)(1+\sqrt{1-t^2})^2}$$
$$=\frac{1}{4\times1\times2^2}=\frac{1}{16}$$

따라서 $\displaystyle\lim_{t\to0+}\frac{S_1(t)}{t^2S_2(t)}$의 값이 존재한다.

(iii) $n\geq3$일 때,

$$\lim_{t\to0+}\frac{S_1(t)}{t^nS_2(t)}=\lim_{t\to0+}\frac{t^2(t+1)}{4t^n(1-t)(1+\sqrt{1-t^2})^2}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{t+1}{4t^{n-2}(1-t)(1+\sqrt{1-t^2})^2}$$

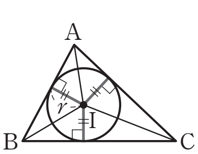
$t\to0+$일 때 (분모)$\to0$, (분자)$\to1$이므로 극한값이 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 1, 2이므로 그 합은 $1+2=3$

개념 NOTE

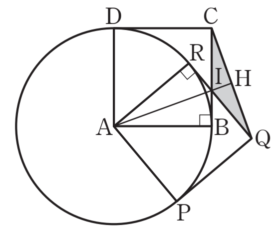
$\triangle$ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$



10 답 208

1단계 L, S**의 식 세우기**



$\overline{AB}=1$이므로 $\overline{BI}=x\ (x>0)$라 하면 직각삼각형 ABI에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AI}^2=1^2+x^2$

$\therefore\ \overline{AI}=\sqrt{x^2+1}\ (\because\ \overline{AI}>0)$

$\angle ABI=\angle ARI=90^\circ$이고

$\overline{AB}=\overline{AR}=1$, 변 AI는 공통이므로

$\triangle ABI\equiv\triangle ARI$ (RHS 합동)

$\therefore\ \angle AIB=\angle AIR,\ \overline{BI}=\overline{RI}$

직선 AI가 선분 CQ와 만나는 점을 H라 하면

$\angle CIH=\angle AIB$(맞꼭지각), $\angle QIH=\angle AIR$(맞꼭지각)이므로

$\angle CIH=\angle QIH$

또 $\overline{CI}=\overline{BC}-\overline{BI}=\overline{QR}-\overline{RI}=\overline{QI}$이고, 변 HI는 공통이므로

$\triangle CIH\equiv\triangle QIH$ (SAS 합동)

$\therefore\ \angle CHI=\angle QHI=90^\circ,\ \overline{CH}=\overline{QH}$

따라서 $\angle ABI=\angle CHI=90^\circ$, $\angle AIB=\angle CIH$이므로

$\triangle ABI\backsim\triangle CHI$ (AA 닮음)

이때 $\overline{AI}:\overline{CI}=\overline{BI}:\overline{HI}$이므로

$\sqrt{x^2+1}:(1-x)=x:\overline{HI}$ $\longrightarrow$ $\overline{CI}=\overline{BC}-\overline{BI}=1-x$

$$\therefore\ \overline{HI}=\frac{x(1-x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

또 $\overline{AI}:\overline{CI}=\overline{AB}:\overline{CH}$이므로

$\sqrt{x^2+1}:(1-x)=1:\overline{CH}$

$$\therefore\ \overline{CH}=\frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\therefore\ \overline{CQ}=2\overline{CH}=\frac{2(1-x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

삼각형 IQC의 둘레의 길이 L은

$$L=\overline{CI}+\overline{QI}+\overline{CQ}=2(1-x)+\frac{2(1-x)}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$=2(1-x)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

삼각형 IQC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{CQ}\times\overline{HI}=\frac{1}{2}\times\frac{2(1-x)}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{x(1-x)}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x(1-x)^2}{x^2+1}$$

2단계 점 P가 점 B에 한없이 가까워질 때 $\dfrac{L^2}{S}$의 값 구하기

점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 점 I는 점 C에 한없이 가까워지므로 선분 BI의 길이 x는 선분 BC의 길이 1에 한없이 가까워진다.

즉, 점 P가 점 B에 한없이 가까워질 때 $\dfrac{L^2}{S}$의 값은

$$\lim_{x\to1}\frac{4(1-x)^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}{\frac{x(1-x)^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to1}\frac{4\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2(x^2+1)}{x}$$
$$=4\times\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\times2$$
$$=12+8\sqrt{2}$$

3단계 a^2+b^2**의 값 구하기**

따라서 $a=12$, $b=8$이므로

$a^2+b^2=144+64=208$

02 함수의 연속

STEP 1 핵심 문제

28~29쪽

01 ⑤	02 17	03 20	04 ②	05 12	06 3
07 3	08 ①	09 ①	10 23	11 ⑤	12 5

01 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-} f(x)\times\lim_{x\to1-} g(x)$

$=0\times(-1)=0$ …… ㉠

ㄴ. $f(1)g(1)=0\times(-1)=0$

ㄷ. $\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to1+} f(x)\times\lim_{x\to1+} g(x)=1\times1=1$

그런데 ㉠에서 $\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=0$이므로

$\lim_{x\to1+} f(x)g(x)\neq\lim_{x\to1-} f(x)g(x)$

즉, $\lim_{x\to1} f(x)g(x)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

02 답 17

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 모든 실수 x에서 $g(x)\neq0$이어야 한다.

즉, $(x^2+ax+25)(ax^2-2x+2a+1)\neq0$이어야 하므로

$x^2+ax+25\neq0$, $ax^2-2x+2a+1\neq0$

따라서 두 방정식 $x^2+ax+25=0$, $ax^2-2x+2a+1=0$의 실근이 모두 존재하지 않아야 한다.

(i) 방정식 $x^2+ax+25=0$의 실근이 존재하지 않을 때,

이차방정식 $x^2+ax+25=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2-100<0$, $(a+10)(a-10)<0$

$\therefore -10<a<10$

(ii) 방정식 $ax^2-2x+2a+1=0$의 실근이 존재하지 않을 때,

$a=0$이면 $-2x+1=0$ $\quad\therefore x=\dfrac{1}{2}$

즉, 실근이 존재하므로 $a\neq0$

이차방정식 $ax^2-2x+2a+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=1-a(2a+1)<0$, $2a^2+a-1>0$

$(a+1)(2a-1)>0$ $\quad\therefore a<-1$ 또는 $a>\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $-10<a<-1$ 또는 $\dfrac{1}{2}<a<10$

따라서 정수 a는 $-9, -8, \dots, -2, 1, 2, \dots, 9$의 17개이다.

03 답 20

함수 $y=[x]$는 x가 정수일 때 불연속이고 나머지 구간에서는 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 임의의 정수 n에 대하여 $x=n$에서도 연속이다.

$\lim_{x\to n+}[x]=n$, $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$이므로

$\lim_{x\to n+} f(x)=\lim_{x\to n-} f(x)=f(n)$에서

$\lim_{x\to n+} f(x)=\lim_{x\to n+}\{(x-2)[x]^2+(ax^2+bx+c)[x]\}$

$=(n-2)n^2+(an^2+bn+c)n$

$\lim_{x\to n-} f(x)=\lim_{x\to n-}\{(x-2)[x]^2+(ax^2+bx+c)[x]\}$

$=(n-2)(n-1)^2+(an^2+bn+c)(n-1)$

$f(n)=(n-2)n^2+(an^2+bn+c)n$

$(n-2)n^2+(an^2+bn+c)n$

$=(n-2)(n-1)^2+(an^2+bn+c)(n-1)$

이므로

$(n-2)(2n-1)+an^2+bn+c=0$

$(a+2)n^2+(b-5)n+c+2=0$

이 등식은 모든 n의 값에 대하여 성립하므로

$a+2=0$, $b-5=0$, $c+2=0$

따라서 $a=-2$, $b=5$, $c=-2$이므로 $abc=20$

04 답 ②

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0-} g(x)=g(0)$

$x>0$일 때, $f(x)+2g(x)=2x^3-3x^2+5x+2$에서

$f(x)=2x^3-3x^2+5x+2-2g(x)$이므로

$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}\{2x^3-3x^2+5x+2-2g(x)\}$

$=\lim_{x\to0+}(2x^3-3x^2+5x+2)-2\lim_{x\to0+} g(x)$

$=2-2g(0)$

$x<0$일 때, $2f(x)-g(x)=5x^2-7x+6$에서

$f(x)=\dfrac{5}{2}x^2-\dfrac{7}{2}x+3+\dfrac{1}{2}g(x)$이므로

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}\left\{\dfrac{5}{2}x^2-\dfrac{7}{2}x+3+\dfrac{1}{2}g(x)\right\}$

$=\lim_{x\to0-}\left(\dfrac{5}{2}x^2-\dfrac{7}{2}x+3\right)+\dfrac{1}{2}\lim_{x\to0-} g(x)$

$=3+\dfrac{1}{2}g(0)$

$\lim_{x\to0+} f(x)-\lim_{x\to0-} f(x)=4$에서

$2-2g(0)-\left\{3+\dfrac{1}{2}g(0)\right\}=4$

$-\dfrac{5}{2}g(0)=5$ $\quad\therefore g(0)=-2$

05 답 12

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$

$\therefore \lim_{x\to2}\dfrac{a\sqrt{x+7}+b}{x-2}=\dfrac{1}{2}$ …… ㉠

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(a\sqrt{x+7}+b)=0$에서

$3a+b=0$ $\quad\therefore b=-3a$ …… ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to2}\dfrac{a\sqrt{x+7}+b}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{a\sqrt{x+7}-3a}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{a(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{a}{\sqrt{x+7}+3}=\dfrac{a}{3+3}=\dfrac{a}{6}$

즉, $\frac{a}{6}=\frac{1}{2}$이므로 $a=3$

이를 ㉡에 대입하면 $b=-9$

$\therefore a-b=3-(-9)=12$

비법 NOTE

함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\neq a) \\ b & (x=a) \end{cases}$가 $x=a$에서 연속이면

$\lim_{x\to a} g(x)=b$

06 답 3

$x^2+x-2=0$에서 $(x+2)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

$(x^2+x-2)f(x)=ax^3+2x^2+bx+c$에서 $x\neq-2$, $x\neq1$일 때,

$f(x)=\frac{ax^3+2x^2+bx+c}{x^2+x-2}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+2x^2+bx+c}{x(x^2+x-2)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{2}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=a$$

$\therefore a=1$ ······ 배점 30%

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=-2$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to-2} f(x)=f(-2)$

$\therefore \lim_{x\to-2}\frac{x^3+2x^2+bx+c}{x^2+x-2}=f(-2)$

$x\to-2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-2}(x^3+2x^2+bx+c)=0$에서

$-8+8-2b+c=0$ $\quad\therefore 2b-c=0$ ······ ㉠

또 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^3+2x^2+bx+c}{x^2+x-2}=f(1)$

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^3+2x^2+bx+c)=0$에서

$1+2+b+c=0$ $\quad\therefore b+c=-3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=-1$, $c=-2$ ······ 배점 40%

$x\neq-2$, $x\neq1$일 때, $f(x)=\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}$이므로

$f(0)=\frac{-2}{-2}=1$

$$f(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+1)=1+1=2$$

$\therefore f(0)+f(1)=1+2=3$ ······ 배점 30%

비법 NOTE

실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $(x-a)f(x)=g(x)$를 만족시키면

$f(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}$

07 답 3

$f(x+2)=(x+2)^2-(x+2)+a=x^2+3x+a+2$이므로

$g(x)=\begin{cases} x+6a & (x<a) \\ x^2+3x+a+2 & (x\geq a) \end{cases}$

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서도 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=f(a)g(a)$에서

$$\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a+}(x^2-x+a)(x^2+3x+a+2)$$
$$=a^2(a^2+4a+2)=a^4+4a^3+2a^2$$

$\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}(x^2-x+a)(x+6a)=a^2\times7a=7a^3$

$f(a)g(a)=f(a)f(a+2)=a^2(a^2+4a+2)=a^4+4a^3+2a^2$

즉, $a^4+4a^3+2a^2=7a^3$이므로

$a^4-3a^3+2a^2=0$, $a^2(a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$0+1+2=3$

비법 NOTE

함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x<a) \\ h(x) & (x\geq a) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=a$에서도 연속이므로 $\lim_{x\to a+}h(x)=\lim_{x\to a-}g(x)=f(a)$

08 답 ①

$(x-1)g(x)=|f(x)|$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=0$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면 $2g(3)=|f(3)|$이고

$g(3)=0$이므로 $f(3)=0$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-3)(x-a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$이어야 한다.

$x\neq1$일 때, $g(x)=\frac{|(x-1)(x-3)(x-a)|}{x-1}$이고,

$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1-}g(x)$에서

$$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1+}\frac{|(x-1)(x-3)(x-a)|}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\left\{\frac{|x-1|}{x-1}\times|x-3|\times|x-a|\right\}$$
$$=1\times|-2|\times|1-a|=2|1-a|$$
$$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}\frac{|(x-1)(x-3)(x-a)|}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\left\{\frac{|x-1|}{x-1}\times|x-3|\times|x-a|\right\}$$
$$=-1\times|-2|\times|1-a|=-2|1-a|$$

즉, $2|1-a|=-2|1-a|$에서 $|1-a|=0$ $\quad\therefore a=1$

따라서 $f(x)=(x-1)^2(x-3)$이므로 $f(4)=3^2\times1=9$

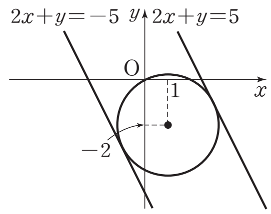
09 답 ①

$x^2+y^2-2x+4y=0$에서 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$

직선 $2x+y=t$가 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$에 접하면 원의 중심 $(1, -2)$와 직선 $2x+y=t$, 즉 $2x+y-t=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{5}$와 같으므로

$\frac{|2-2-t|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$, $|t|=5$ $\quad\therefore t=-5$ 또는 $t=5$

따라서 원과 직선이 만나는 점의 개수 $f(t)$를 구하면



$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<-5 \text{ 또는 } t>5) \\ 1 & (t=-5 \text{ 또는 } t=5) \\ 2 & (-5<t<5) \end{cases}$$

함수 $f(t)$는 $t=-5$, $t=5$에서 불연속이므로 $a=-5$ 또는 $a=5$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$-5\times5=-25$

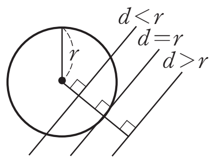
개념 NOTE

반지름의 길이가 r인 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라 하면 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

(1) $d<r$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $d=r$이면 한 점에서 만난다(접한다).

(3) $d>r$이면 만나지 않는다.



10 답 23

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-2$, $x=2$에서도 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-2+} f(x)=\lim_{x\to-2-} f(x)=f(-2)$에서

$\lim_{x\to-2+} (x^2+bx+7)=\lim_{x\to-2-} (-2x+a)=4-2b+7$

$4-2b+7=4+a \qquad \therefore a+2b=7$ …… ㉠ ·············· 배점 20%

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to2-} f(x)=f(2)$에서

$\lim_{x\to2+} (-2x+a)=\lim_{x\to2-} (x^2+bx+7)=4+2b+7$

$-4+a=4+2b+7 \qquad \therefore a-2b=15$ …… ㉡ ·············· 배점 20%

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=11$, $b=-2$ ································ 배점 10%

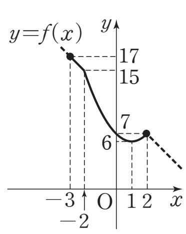
$$\therefore f(x)=\begin{cases} -2x+11 & (|x|>2) \\ x^2-2x+7 & (|x|\le2) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -2x+11 & (x<-2 \text{ 또는 } x>2) \\ (x-1)^2+6 & (-2\le x\le2) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 $-3\le x\le2$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 최댓값 17, $x=1$에서 최솟값 6을 갖는다. ···· 배점 40%

따라서 $M=17$, $m=6$이므로

$M+m=23$ ······································ 배점 10%



idea

11 답 ⑤

함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-1, 2)$, $(1, 0)$을 지나므로

$f(-1)=2$, $f(1)=0$

ㄱ. $f(x)=x$에서 $f(x)-x=0$

$g(x)=f(x)-x$라 하면

$g(-1)=f(-1)+1=2+1=3$,

$g(1)=f(1)-1=0-1=-1$

$g(-1)g(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $g(x)=f(x)+3x-1$이라 하면

$g(-1)=f(-1)-3-1=2-4=-2$,

$g(1)=f(1)+3-1=0+2=2$

$g(-1)g(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $xf(x)=2x^2-1$에서 $xf(x)-2x^2+1=0$

$g(x)=xf(x)-2x^2+1$이라 하면

$g(-1)=-f(-1)-2+1=-2-1=-3$,

$g(1)=f(1)-2+1=0-1=-1$

한편 $g(0)=0-0+1=1$

$g(-1)g(0)<0$, $g(0)g(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-1, 0)$, $(0, 1)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. 즉, 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-1, 1)$에서 적어도 두 개의 실근을 갖는다.

따라서 보기에서 반드시 실근이 존재하는 방정식인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

12 답 5

함수 $g(x)$를 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (0\le x<1,\ 1<x\le2) \\ 3f(2) & (x=1) \end{cases}$라 하면

(가)에서 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이다.

(나)에서 $g(0)\ne2$, $g(2)\ne2$이고 $\dfrac{g(0)+g(2)}{2}=2$이다.

즉, $g(0)<2<g(2)$ 또는 $g(2)<2<g(0)$이므로 사잇값 정리에 의하여 $g(c)=2$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

(나)에서 $0\le x<1$, $1<x\le2$에서 $g(x)=f(x)\ne2$이므로 $c=1$

즉, $g(1)=3f(2)=2$이므로 $f(2)=\dfrac{2}{3}$

$f(0)+f(2)=4$에서 $f(0)=4-f(2)=4-\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{3}$

$$\therefore \frac{f(0)}{f(2)}=\frac{\frac{10}{3}}{\frac{2}{3}}=5$$

STEP 2 고난도 문제 | 30~34쪽

01 ②	02 ④	03 ③	04 ②	05 30	06 ④
07 16	08 7	09 ④	10 ⑤	11 51	12 3
13 64	14 ①	15 14	16 28	17 ⑤	18 9
19 ①	20 36	21 3	22 ⑤	23 7	24 ①
25 5					

01 답 ②

ㄱ. $\lim_{x\to1+} \{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1+} f(x)+\lim_{x\to1+} g(x)=-1+2=1$

$\lim_{x\to1-} \{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1-} f(x)+\lim_{x\to1-} g(x)=0+(-1)=-1$

즉, $\lim_{x\to1+} \{f(x)+g(x)\}\ne\lim_{x\to1-} \{f(x)+g(x)\}$이므로

$\lim_{x\to1} \{f(x)+g(x)\}$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to2-$이므로

$\lim_{x\to1+}f(g(x))=\lim_{t\to2-}f(t)=-2$

$x\to1-$일 때 $t=-1$이므로

$\lim_{x\to1-}f(g(x))=f(-1)=-2$

$\therefore \lim_{x\to1}f(g(x))=-2$

또 $f(g(1))=f(0)=-2$이므로 $\lim_{x\to1}f(g(x))=f(g(1))$

따라서 함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{t\to1-}g(t)=-1$

$x\to0-$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to0-}g(f(x))=\lim_{t\to-1+}g(t)=-1$

$\therefore \lim_{x\to0}g(f(x))=-1$

또 $g(f(0))=g(-2)=0$이므로 $\lim_{x\to0}g(f(x))\neq g(f(0))$

따라서 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

02 답 ④

ㄱ. $x+1=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to1+$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x+1)=\lim_{t\to1+}f(t)=0$

$x\to0-$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x+1)=\lim_{t\to1-}f(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x+1)=0$

또 $f(0+1)=f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x+1)=f(0+1)$

따라서 함수 $f(x+1)$은 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $-x=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim_{x\to0+}\{f(x)+f(-x)\}=\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{t\to0-}f(t)$

$=1+(-1)=0$

$x\to0-$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to0-}\{f(x)+f(-x)\}=\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{t\to0+}f(t)$

$=-1+1=0$

$\therefore \lim_{x\to0}\{f(x)+f(-x)\}=0$

또 $f(0)+f(0)=-1+(-1)=-2$이므로

$\lim_{x\to0}\{f(x)+f(-x)\}\neq f(0)+f(0)$

따라서 함수 $f(x)+f(-x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $2-x=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to2-$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)f(2-x)=\lim_{x\to0+}f(x)\times\lim_{t\to2-}f(t)$

$=1\times(-1)=-1$

$x\to0-$일 때 $t\to2+$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)f(2-x)=\lim_{x\to0-}f(x)\times\lim_{t\to2+}f(t)$

$=(-1)\times1=-1$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)f(2-x)=-1$

또 $f(0)f(2-0)=f(0)f(2)=(-1)\times1=-1$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)f(2-x)=f(0)f(2-0)$

따라서 함수 $f(x)f(2-x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄹ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to0+}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to0+}f(f(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=0$

$x\to0-$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to0-}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to0-}f(f(x))=\lim_{t\to-1+}f(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}(f\circ f)(x)=0$

또 $(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(-1)=0$이므로

$\lim_{x\to0}(f\circ f)(x)=(f\circ f)(0)$

따라서 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 보기에서 $x=0$에서 연속인 함수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

03 답 ③

ㄱ. $\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}\{f(x)+|f(x)|\}$

$=\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{x\to0+}|f(x)|$

$=0+0=0$

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}\{f(x)+|f(x)|\}$

$=\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to0-}|f(x)|$

$=-1+|-1|=0$

$\therefore \lim_{x\to0}g(x)=0$ …… ㉠

ㄴ. $-x=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim_{x\to0+}h(x)=\lim_{x\to0+}\{f(x)+f(-x)\}$

$=\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{t\to0-}f(t)$

$=0+(-1)=-1$

$x\to0-$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to0-}h(x)=\lim_{x\to0-}\{f(x)+f(-x)\}$

$=\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{t\to0+}f(t)$

$=-1+0=-1$

$\therefore \lim_{x\to0}h(x)=-1$

$\therefore \lim_{x\to0}|h(x)|=1$ …… ㉡

또 $|h(0)|=|f(0)+f(0)|=\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right|=1$이므로 …… ㉢

$\lim_{x\to0}|h(x)|=|h(0)|$

따라서 함수 $|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. ㉠, ㉡에서

$\lim_{x\to0}g(x)|h(x)|=\lim_{x\to0}g(x)\times\lim_{x\to0}|h(x)|$

$=0\times1=0$

$g(0)=f(0)+|f(0)|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$이고 ㉢에서 $|h(0)|=1$이므로

$g(0)|h(0)|=1\times1=1$

$\therefore \lim_{x\to0}g(x)|h(x)|\neq g(0)|h(0)|$

따라서 함수 $g(x)|h(x)|$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

idea

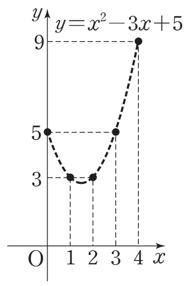
04 답 ②

함수 $f(x)$는 $0\le x\le4$에서 x가 정수인 경우를 기준으로 구간이 나누어지므로 함수 $f(x)$가 불연속인 x는 0, 1, 2, 3, 4 중 3개이다.

함수 $y=x^2-3x+5$의 그래프에서 $0\le x\le 4$이고 x좌표가 정수인 점의 좌표는

$(0,\ 5)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 9)$

함수 $f(x)$가 불연속인 x의 개수가 3이므로 직선 $y=ax+b$가 이 5개의 점 중 2개의 점을 지나야 한다.



(i) $a<0$일 때, ⟶ 직선의 기울기가 음수이다.

ⓘ 직선 $y=ax+b$가 두 점 $(0,\ 5)$, $(1,\ 3)$을 지날 때,

점 $(0,\ 5)$를 지나므로 $b=5$

점 $(1,\ 3)$을 지나므로 $a+b=3$

$a+5=3 \qquad \therefore a=-2$

$\therefore a-b=-2-5=-7$

ⓘⓘ 직선 $y=ax+b$가 두 점 $(0,\ 5)$, $(2,\ 3)$을 지날 때,

점 $(0,\ 5)$를 지나므로 $b=5$

점 $(2,\ 3)$을 지나므로 $2a+b=3$

$2a+5=3 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore a-b=-1-5=-6$

(ii) $a=0$일 때, ⟶ 직선이 x축에 평행하다.

ⓘ 직선 $y=ax+b$가 두 점 $(0,\ 5)$, $(3,\ 5)$를 지날 때,

$b=5$이므로

$a-b=0-5=-5$

ⓘⓘ 직선 $y=ax+b$가 두 점 $(1,\ 3)$, $(2,\ 3)$을 지날 때,

$b=3$이므로

$a-b=0-3=-3$

(i), (ii)에서 모든 $a-b$의 값의 합은

$-7+(-6)+(-5)+(-3)=-21$

05 답 30

(나)의 $f(x)=f(x+4)$의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=f(4)$

(가)에서 $f(0)=-c$, $f(4)=-24+30=6$이므로

$-c=6 \qquad \therefore c=-6$ .... 배점 **20%**

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$, $x=3$에서도 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$에서

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+bx-6}{x-1}=d$ ...... ㉠

$x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1}(ax^2+bx-6)=0$에서

$a+b-6=0 \qquad \therefore a+b=6$ ...... ㉡

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 3+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-} f(x)=f(3)$에서

$\lim\limits_{x\to 3+}(-6x+30)=\lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{ax^2+bx-6}{x-1}=12$

$\dfrac{9a+3b-6}{2}=12 \qquad \therefore 3a+b=10$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$ .... 배점 **40%**

이를 ㉠에 대입하면

$$d=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+4x-6}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x+3)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}2(x+3)=2\times 4=8$$ .... 배점 **20%**

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+4x-6}{x-1} & (0\le x<1 \text{ 또는 } 1<x<3)\\ 8 & (x=1)\\ -6x+30 & (3\le x\le 4)\end{cases}$$

따라서 $f(x)=f(x+4)$이므로

$f(53)+f(54)+f(55)=f(1)+f(2)+f(3)$

$=8+10+12$

$=30$ .... 배점 **20%**

06 답 ④

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+g(x)}{x}=0$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}=0$ ...... ㉠

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)-g(x)\}=0$이므로

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)+g(x)\}+\{f(x)-g(x)\}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\{f(x)-g(x)\}$$
$$=0+0=0$$

또 $f(0)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x<0)\\ 0 & (x\ge 0)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ 0 & (x\ge 0)\end{cases}$이면

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+g(x)}{x}=0$, $f(0)=g(0)=0$을 만족시킨다.

$x^4+x^2=t$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim\limits_{x\to 0} f(x^4+x^2)=\lim\limits_{t\to 0+} f(t)=0$

그런데 $\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=-1$, 즉 $\lim\limits_{x\to 0+} g(x)\ne\lim\limits_{x\to 0-} g(x)$

이므로 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. ㉠에서 $\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}=0$이고 $f(0)+g(0)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}=f(0)+g(0)$

따라서 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)=0$, $f(0)g(0)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)\}^2=0$, $\{f(0)\}^2=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)\}^2=\{f(0)\}^2$

따라서 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 연속이다.

즉, 세 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$, $\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 연속이고 $\{g(x)\}^2=\{f(x)+g(x)\}^2-2f(x)g(x)-\{f(x)\}^2$이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $\{g(x)\}^2$도 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}\{g(x)\}^2=0$

이때 $\lim\limits_{x\to 0}|g(x)|=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\{g(x)\}^2}=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

또 $g(0)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

07 답 16

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+4=0$은 적어도 하나의 실근을 가지므로 $f(\beta)=0$인 실수 β가 존재하고, 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $\lim_{x\to\beta} f(x)=f(\beta)=0$이다.

모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(2x+1)}{f(x)}$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to\beta}\frac{f(2x+1)}{f(x)}$의 값도 존재한다.

$x\to\beta$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

$\lim_{x\to\beta} f(2x+1)=0$이고, 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로

$f(2\beta+1)=\lim_{x\to\beta} f(2x+1)=0$이다.

즉, $x=2\beta+1$은 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

같은 방법으로 $2\beta+1$이 방정식 $f(x)=0$의 근이면

$2(2\beta+1)+1=4\beta+3$도 방정식 $f(x)=0$의 근이고

$2(4\beta+3)+1=8\beta+7$도 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

만약 $\beta\neq2\beta+1$, 즉 $\beta\neq-1$이면 β, $2\beta+1$, $4\beta+3$, $8\beta+7$이 방정식 $f(x)=0$의 네 근이다. ⟶ $f(x)=0$은 삼차방정식이므로 네 개의 근을 가질 수 없다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 $x=-1$만 실근으로 갖는다.

$f(-1)=0$에서 $f(-1)=-1+a-b+4=0$

$\therefore b=a+3$

$f(x)=x^3+ax^2+(a+3)x+4$

$\quad=(x+1)\{x^2+(a-1)x+4\}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $x^2+(a-1)x+4=0$이 실근을 갖는다면 실근은 $x=-1$이어야 한다.

그런데 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$, $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$에서 상수항이 서로 다르므로 이차방정식 $x^2+(a-1)x+4=0$은 실근을 갖지 않는다.

이차방정식 $x^2+(a-1)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-1)^2-16<0$

$a^2-2a-15<0$, $(a+3)(a-5)<0$

$\therefore -3<a<5$

㉠에서 $f(1)=2(a+4)=2a+8$

따라서 $f(1)$의 최댓값은 $a=4$일 때,

$2\times4+8=16$

08 답 7

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $g(x)$는 $x\neq1$, $x\neq3$인 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$, $x=3$에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속일 때,

$\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=f(1)g(1)$에서

$\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}(x^2-2ax+a^2-a+1)(x+b)$

$\quad=(a^2-3a+2)(b+1)$

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}(x^2-2ax+a^2-a+1)(7-b)$

$\quad=(a^2-3a+2)(7-b)$

$f(1)g(1)=(a^2-3a+2)(7-b)$

즉, $(a^2-3a+2)(b+1)=(a^2-3a+2)(7-b)$이므로

$(a^2-3a+2)(2b-6)=0$

$(a-1)(a-2)(b-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $b=3$

(ii) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=3$에서 연속일 때,

$\lim_{x\to3+} f(x)g(x)=\lim_{x\to3-} f(x)g(x)=f(3)g(3)$에서

$\lim_{x\to3+} f(x)g(x)=\lim_{x\to3+}(x^2-2ax+a^2-a+1)(7-b)$

$\quad=(a^2-7a+10)(7-b)$

$\lim_{x\to3-} f(x)g(x)=\lim_{x\to3-}(x^2-2ax+a^2-a+1)(x+b)$

$\quad=(a^2-7a+10)(3+b)$

$f(3)g(3)=(a^2-7a+10)(7-b)$

즉, $(a^2-7a+10)(7-b)=(a^2-7a+10)(3+b)$이므로

$(a^2-7a+10)(4-2b)=0$

$(a-2)(a-5)(b-2)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=5$ 또는 $b=2$

$a=1$일 때, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $x=3$에서도 연속이려면 $b=2$

$a=2$일 때, 함수 $f(x)g(x)$는 b의 값에 관계없이 $x=1$, $x=3$에서 연속이다.

$a=5$일 때, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=3$에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이려면 $b=3$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(5, 3)$의 7개이다.
└→ b는 5 이하의 자연수이다.

09 답 ④

$\lim_{x\to3} g(x)=g(3)-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이고, 함수 $g(x)$의 정의에 의하여 $f(3)\neq0$인 경우와 $f(3)=0$인 경우로 나누어 ㉠을 만족시키는 경우를 찾아보자.

(i) $f(3)\neq0$일 때,

$f(x)$가 연속함수이므로 $\lim_{x\to3} f(x)=f(3)\neq0$

즉, 3에 한없이 가까운 x에 대하여 $f(x)\neq0$이므로

$g(x)=\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$

이때 함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 $f(x)$, $f(x+3)$, $f(x)+1$은 모든 실수 x에서 각각 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to3} g(x)=g(3)$

이는 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(3)=0$일 때,

함수 $f(x)$가 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=0$은 많아야 서로 다른 세 실근을 갖는다.

따라서 3이 아니면서 3에 한없이 가까운 x에 대하여 $f(x)\neq0$이므로

$\lim_{x\to3} g(x)=\lim_{x\to3}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.
└→ $\lim_{x\to3} f(x)=f(3)=0$

$\therefore \lim_{x\to3}[f(x+3)\{f(x)+1\}]=0$

즉, $f(6)\{f(3)+1\}=0$에서

$f(6)=0$ ($\because f(3)=0$)

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(3)=0$, $f(6)=0$이므로

$f(x)=(x-3)(x-6)(x+a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

이 식을 ㉡에 대입하면

$$\lim_{x\to3} g(x)=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)(x+3+a)\{(x-3)(x-6)(x+a)+1\}}{(x-3)(x-6)(x+a)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x(x+3+a)\{(x-3)(x-6)(x+a)+1\}}{(x-6)(x+a)}$$

$$=\frac{3(a+6)}{-3(a+3)}=-\frac{a+6}{a+3}$$

이때 $f(3)=0$이므로 $g(3)=3$

이를 ㉠에 대입하면 $-\frac{a+6}{a+3}=3-1$

$-a-6=2a+6$, $3a=-12$　　$\therefore a=-4$

$\therefore f(x)=(x-3)(x-4)(x-6)$

(i), (ii)에서 $f(x)=(x-3)(x-4)(x-6)$이고, $f(5)\neq0$이므로

$$g(5)=\frac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}=\frac{(5\times4\times2)\times\{2\times1\times(-1)+1\}}{2\times1\times(-1)}$$

$$=\frac{40\times(-2+1)}{-2}=20$$

다른 풀이

함수 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(k)\neq0$인 임의의 실수 k에 대하여

$$\lim_{x\to k} g(x)=\lim_{x\to k}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=\frac{f(k+3)\{f(k)+1\}}{f(k)}$$

즉, $\lim_{x\to k} g(x)=g(k)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=k$에서 연속이다.

한편 $\lim_{x\to3} g(x)=g(3)-1$에서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이므로

$f(3)=0$

즉, $g(3)=3$이므로 $\lim_{x\to3} g(x)=2$이다.

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=2$$

$x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

$$\therefore \lim_{x\to3}[f(x+3)\{f(x)+1\}]=0$$

즉, $f(6)\{f(3)+1\}=0$에서 $f(6)=0$ ($\because f(3)=0$)

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(3)=0$, $f(6)=0$이므로

$f(x)=(x-3)(x-6)(x+a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=2\text{에서}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)(x+3+a)\{(x-3)(x-6)(x+a)+1\}}{(x-3)(x-6)(x+a)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x(x+3+a)\{(x-3)(x-6)(x+a)+1\}}{(x-6)(x+a)}$$

(i) $a=-3$일 때,

$$\lim_{x\to3}\frac{x(x+3+a)\{(x-3)(x-6)(x+a)+1\}}{(x-6)(x+a)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x^2\{(x-3)^2(x-6)+1\}}{(x-6)(x-3)}$$

$x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고 (분자)$\to9$이므로

$\lim_{x\to3}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $a\neq-3$일 때,

$$\lim_{x\to3}\frac{x(x+3+a)\{(x-3)(x-6)(x+a)+1\}}{(x-6)(x+a)}=\frac{3(a+6)}{-3(a+3)}$$

$$=-\frac{a+6}{a+3}$$

즉, $-\frac{a+6}{a+3}=2$에서 $-a-6=2a+6$

$3a=-12$　　$\therefore a=-4$

(i), (ii)에서 $f(x)=(x-3)(x-4)(x-6)$이고, $f(5)\neq0$이므로

$$g(5)=\frac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}=\frac{(5\times4\times2)\times\{2\times1\times(-1)+1\}}{2\times1\times(-1)}$$

$$=\frac{40\times(-2+1)}{-2}=20$$

10 답 ⑤

$$g(x-3)=\begin{cases} f(x-3) & (x<0\text{ 또는 }x\geq3) \\ -f(x-3) & (0\leq x<3)\end{cases}\text{이므로}$$

$$g(x)g(x-3)=\begin{cases} f(x)f(x-3) & (x<-3\text{ 또는 }x\geq3) \\ -f(x)f(x-3) & (-3\leq x<3)\end{cases}$$

ㄱ. $\lim_{x\to0} g(x)g(x-3)=-f(0)f(-3)$

따라서 함수 $g(x)g(x-3)$은 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 값이 한 개이므로 함수 $g(x)g(x-3)$은 $x=-3$에서 연속이고 $x=3$에서 불연속이거나 $x=-3$에서 불연속이고 $x=3$에서 연속이다.

$g(x)$는 $x=-3$ 또는 $x=0$에서 불연속일 수 있고, $g(x-3)$은 $x=0$ 또는 $x=3$에서 불연속일 수 있다. ㄱ에서 $g(x)g(x-3)$은 $x=0$에서 연속이므로 $g(x)g(x-3)$은 $x=-3$ 또는 $x=3$에서 불연속일 수 있다.

(i) 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=-3$에서 연속, $x=3$에서 불연속인 경우

함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=-3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-3+} g(x)g(x-3)=\lim_{x\to-3-} g(x)g(x-3)=g(-3)g(-6)$

에서

$-f(-3)f(-6)=f(-3)f(-6)$

$\therefore f(-3)f(-6)=0$　　…… ㉠

함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=3$에서 불연속이므로

$\lim_{x\to3+} g(x)g(x-3)=f(3)f(0)$,

$\lim_{x\to3-} g(x)g(x-3)=-f(3)f(0)$,

$g(3)g(0)=f(3)f(0)$에서

$f(3)f(0)\neq-f(3)f(0)$　　$\therefore f(3)f(0)\neq0$

$\therefore f(0)\neq0$, $f(3)\neq0$

이때 $f(-3)=f(0)$이므로 $f(-3)\neq0$

따라서 ㉠에서 $f(-6)=0$

(ii) 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=-3$에서 불연속, $x=3$에서 연속인 경우

함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=-3$에서 불연속이므로

$\lim_{x\to-3+} g(x)g(x-3)=-f(-3)f(-6)$,

$\lim_{x\to-3-} g(x)g(x-3)=f(-3)f(-6)$,

$g(-3)g(-6)=-f(-3)f(-6)$에서

$-f(-3)f(-6)\neq f(-3)f(-6)$

$\therefore f(-3)f(-6)\neq0$

$\therefore f(-6)\neq0$, $f(-3)\neq0$　　…… ㉡

함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3+} g(x)g(x-3)=\lim_{x\to3-} g(x)g(x-3)=g(3)g(0)$에서

$f(3)f(0)=-f(3)f(0)$

$\therefore f(3)f(0)=0$　　…… ㉢

㉡에서 $f(-3)\neq0$이고 $f(-3)=f(0)$이므로

$f(0)\neq0$

따라서 ㉢에서 $f(3)=0$　　…… ㉣

(i), (ii)에서 $f(-6)=0$ 또는 $f(3)=0$이므로

$f(-6)\times f(3)=0$

ㄷ. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k가 음수이므로

$k=-3$

㉣에서 $f(3)=0$이고, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-3)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

이때 $f(-3)=f(0)$이므로

$-6(9-3a+b)=-3b \qquad \therefore b=6a-18$

$\therefore f(x)=(x-3)(x^2+ax+6a-18)$

(i) 이차방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 3이 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합이 $-a$이고 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 합이 -1이므로

$3+(-a)=-1 \qquad \therefore a=4$

이때 이차방정식 $\underbrace{x^2+4x+6=0}_{\frac{D}{4}=4-6=-2<0}$은 실근을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 이차방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 $\underbrace{3\text{과 } -4}_{3+(-4)=-1}$를 실근으로 갖는 경우

근과 계수의 관계에 의하여

$3+(-4)=-a$, $3\times(-4)=6a-18$이므로 $a=1$

(iii) 이차방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+ax+6a-18=0$의 중근은 $-\dfrac{a}{2}$이고 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 합이 -1이므로

$3+\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-1 \qquad \therefore a=8$

이때 이차방정식 $\underbrace{x^2+8x+30=0}_{\frac{D}{4}=16-30=-14<0}$은 중근을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=1$

따라서 $f(x)=(x-3)(x^2+x-12)=(x-3)^2(x+4)$이므로

$g(-1)=-f(-1)=-16\times3=-48$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 답 51

a, b, c는 1부터 6까지의 자연수를 값으로 갖는다.

(i) $a=b$일 때,

c의 값에 관계없이 $f(x)=0$이므로

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(0)=2$

즉, 함수 $(g\circ f)(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $6\times1\times6=36$

(ii) $a\neq b$일 때,

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases}-1 & (f(x)<0)\\ 2 & (f(x)\geq0)\end{cases}$$

함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 모든 실수 x에서 $f(x)<0$이거나 모든 실수 x에서 $f(x)\geq0$이어야 한다.

ⓘ 모든 실수 x에서 $f(x)<0$일 때,

$f(x)<0$에서 $(a-b)(x^2+4bx+c)<0$

즉, $a-b<0$, $x^2+4bx+c>0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+4bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4b^2-c<0 \qquad \therefore c>4b^2$

$b=1$일 때, $c>4$이므로 c의 값은 5, 6이다.

이때 $a-b<0$, 즉 $a<1$이므로 a의 값은 존재하지 않는다.

$b\geq2$일 때, $c>16$이므로 c의 값은 존재하지 않는다.

ⓘⓘ 모든 실수 x에서 $f(x)\geq0$일 때,

$f(x)\geq0$에서 $(a-b)(x^2+4bx+c)\geq0$

즉, $a-b>0$, $x^2+4bx+c\geq0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+4bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4b^2-c\leq0 \qquad \therefore c\geq4b^2$

$b=1$일 때, $c\geq4$이므로 c의 값은 4, 5, 6이다.

이때 $a-b>0$, 즉 $a>1$이므로 a의 값은 2, 3, 4, 5, 6이다.

$b\geq2$일 때, $c\geq16$이므로 c의 값은 존재하지 않는다.

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $5\times1\times3=15$

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$36+15=51$

개념 NOTE

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다.

(1) $ax^2+bx+c>0 \Rightarrow a>0$, $D<0$

(2) $ax^2+bx+c\geq0 \Rightarrow a>0$, $D\leq0$

(3) $ax^2+bx+c<0 \Rightarrow a<0$, $D<0$

(4) $ax^2+bx+c\leq0 \Rightarrow a<0$, $D\leq0$

idea

12 답 3

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0-}g(x)=g(0)$

$x+1=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to1+$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}g(x)&=\lim_{x\to0+}\{f(x)+af(x+1)\}\\&=\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{t\to1+}af(t)\\&=\lim_{x\to0+}(x+1)+\lim_{t\to1+}a(t^2+a)\\&=1+a(1+a)\\&=a^2+a+1\end{aligned}$$

$x\to0-$일 때 $t\to1-$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0-}g(x)&=\lim_{x\to0-}\{f(x)+af(x+1)\}\\&=\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{t\to1-}af(t)\end{aligned}$$

이때 $f(x)=f(x+2)$에서 $\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0-}g(x)&=\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{t\to1-}af(t)\\&=\lim_{x\to2-}f(x)+\lim_{t\to1-}af(t)\\&=\lim_{x\to2-}(x^2+a)+\lim_{t\to1-}a(t+1)\\&=4+a+a\times2\\&=3a+4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(0)&=f(0)+af(1)\\&=1+a(1+a)\\&=a^2+a+1\end{aligned}$$

즉, $a^2+a+1=3a+4$이므로 $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=3$

$f(x)=f(x+2)$에서 $f(-1)=f(1)$이므로 $f(-1)>0$에서 $f(1)>0$

즉, $1+a>0$이므로 $a>-1$

$\therefore a=3$

13 답 64

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^3-x+5}=1$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이다.

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=8$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$에서 $f(1)=0$

$f(x)=2(x-1)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)라 하고 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=8$의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(x^2+ax+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}2(x^2+ax+b)=2(1+a+b)$$

즉, $2(1+a+b)=8$이므로 $b=-a+3$

$\therefore f(x)=2(x-1)(x^2+ax-a+3)$

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=-1$에서도 연속이다.

$\lim_{x\to-1}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$에서

$\lim_{x\to-1}\frac{4(x-1)(x^2+ax-a+3)}{x+1}=8a-16$

$x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}4(x-1)(x^2+ax-a+3)=0$에서

$4\times(-2)\times(1-a-a+3)=0$

$16a-32=0\qquad\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2(x-1)(x^2+2x+1)$이므로

$f(3)=2\times2\times(9+6+1)=64$

14 답 ①

이차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하자.

함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=3$에서 불연속이고 다항함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=-3$, $x=3$에서도 연속이다.

함수 $f(x)g(x)$가 $x=-3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-3+}f(x)g(x)=\lim_{x\to-3-}f(x)g(x)=f(-3)g(-3)$에서

$\lim_{x\to-3+}(3-|x|)(x^2+ax+b)=\lim_{x\to-3-}3(x^2+ax+b)=0$

$3(9-3a+b)=0$

$\therefore 3a-b=9\qquad\cdots\cdots$ ㉠

함수 $f(x)g(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3+}f(x)g(x)=\lim_{x\to3-}f(x)g(x)=f(3)g(3)$에서

$\lim_{x\to3+}3(x^2+ax+b)=\lim_{x\to3-}(3-|x|)(x^2+ax+b)=0$

$3(9+3a+b)=0$

$\therefore 3a+b=-9\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-9$

$\therefore g(x)=x^2-9$

함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=3$에서 불연속이고 다항함수 $g(x+k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x+k)$가 불연속인 실수 x의 개수가 1이려면 $x=-3$에서는 연속이거나 $x=3$에서는 연속이어야 한다.

(ⅰ) 함수 $f(x)g(x+k)$가 $x=-3$에서 연속인 경우

$\lim_{x\to-3+}f(x)g(x+k)=\lim_{x\to-3-}f(x)g(x+k)=f(-3)g(-3+k)$

에서

$\lim_{x\to-3+}(3-|x|)\{(x+k)^2-9\}=\lim_{x\to-3-}3\{(x+k)^2-9\}=0$

$3\{(-3+k)^2-9\}=0$

$k^2-6k=0$, $k(k-6)=0\qquad\therefore k=0$ 또는 $k=6$

(ⅱ) 함수 $f(x)g(x+k)$가 $x=3$에서 연속인 경우

$\lim_{x\to3+}f(x)g(x+k)=\lim_{x\to3-}f(x)g(x+k)=f(3)g(3+k)$에서

$\lim_{x\to3+}3\{(x+k)^2-9\}=\lim_{x\to3-}(3-|x|)\{(x+k)^2-9\}=0$

$3\{(3+k)^2-9\}=0$

$k^2+6k=0$, $k(k+6)=0\qquad\therefore k=-6$ 또는 $k=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k=0$이면 함수 $f(x)g(x+k)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 불연속인 실수 x의 개수가 1이려면

$k=6$ 또는 $k=-6$

따라서 모든 상수 k의 값의 곱은

$6\times(-6)=-36$

15 답 14

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고,

$R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^3Q(x)+ax^2+bx+c$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-x^3}{x-1}=3\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-x^3\}=0$에서

$\lim_{x\to1}\{(x-1)^3Q(x)+ax^2+bx+c-x^3\}=0$

$a+b+c-1=0$

$\therefore c=1-a-b\qquad\cdots\cdots$ ㉡

$f(x)=(x-1)^3Q(x)+ax^2+bx+1-a-b$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-x^3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^3Q(x)+ax^2+bx+1-a-b-x^3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^3Q(x)+a(x^2-1)+b(x-1)-(x^3-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^3Q(x)+a(x+1)(x-1)+b(x-1)-(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\{(x-1)^2Q(x)+a(x+1)+b-(x^2+x+1)\}$$
$$=2a+b-3$$

즉, $2a+b-3=3$이므로 $b=-2a+6$

이를 ㉡에 대입하면 $c=1-a-(-2a+6)=a-5$

$\therefore R(x)=ax^2+(-2a+6)x+a-5$

(ⅰ) $a=0$일 때,

방정식 $R(x)=0$에서

$6x-5=0\qquad\therefore x=\frac{5}{6}$

따라서 방정식 $R(x)=0$을 만족시키는 실수 x의 개수는 1이므로

$R(x)=6x-5$

$\therefore R(-1)=-6-5=-11$

(ii) $a\neq0$일 때,

방정식 $R(x)=0$에서

$ax^2+(-2a+6)x+a-5=0$

이 이차방정식이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-a+3)^2-a(a-5)=0$

$-a+9=0\qquad \therefore a=9$

따라서 $R(x)=9x^2-12x+4$이므로

$R(-1)=9+12+4=25$

(i), (ii)에서 모든 $R(-1)$의 값의 합은

$-11+25=14$

16 답 28

(가)에서 $\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때, $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^3g\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+3x+2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^3}g(t)-1}{\frac{1}{t^3}+\frac{3}{t}+2}=\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)-t^3}{2t^3+3t^2+1}=\frac{1}{2}$$

따라서 함수 $g(t)-t^3$은 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $g(t)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이다.

$g(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하자.

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 불연속이고 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 (나)에서 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서도 연속이다.

(i) $x=-1$에서 연속인 경우

$\displaystyle\lim_{x\to-1-}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to-1+}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(-1)$에서

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to-1-$일 때 $t=3$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-1-}(g\circ f)(x)=g(3)$

$x\to-1+$일 때 $t\to3-$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-1+}(g\circ f)(x)=\lim_{t\to3-}g(t)=g(3)$

$(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(2)$

즉, $g(3)=g(2)$

(ii) $x=0$에서 연속인 경우

$\displaystyle\lim_{x\to0-}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to0+}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(0)$에서

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to0-$일 때 $t\to2+$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0-}(g\circ f)(x)=\lim_{t\to2+}g(t)=g(2)$

$x\to0+$일 때 $t\to0+$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0+}(g\circ f)(x)=\lim_{t\to0+}g(t)=g(0)$

$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)$

즉, $g(2)=g(0)$

(iii) $x=1$에서 연속인 경우

$\displaystyle\lim_{x\to1-}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to1+}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(1)$에서

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to1-$일 때 $t\to3-$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1-}(g\circ f)(x)=\lim_{t\to3-}g(t)=g(3)$

$x\to1+$일 때 $t\to3-$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1+}(g\circ f)(x)=\lim_{t\to3-}g(t)=g(3)$

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(0)$

즉, $g(3)=g(0)$

(i), (ii), (iii)에서 $g(0)=g(2)=g(3)$

$g(0)=g(2)$에서 $c=16+4a+2b+c$

즉, $2a+b+8=0\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$g(0)=g(3)$에서 $c=54+9a+3b+c$

즉, $3a+b+18=0\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-10$, $b=12$이므로

$g(x)=2x^3-10x^2+12x+c$

$\therefore g(1)-g(-1)=(2-10+12+c)-(-2-10-12+c)=28$

17 답 ⑤

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

$\displaystyle\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0-}g(x)=g(0)$에서

$\displaystyle\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x^2-4x+5)=5$

$\displaystyle\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}\{f(x+a)+b\}=f(a)+b$

$g(0)=f(0)=5$

따라서 $f(a)+b=5$이어야 하므로

$a^2-4a+5+b=5$

$\therefore a^2-4a+b=0\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 1을 갖는다.

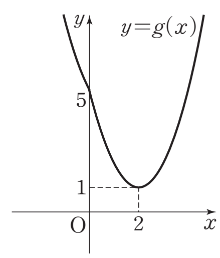
함수 $y=f(x+a)+b$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프이므로

$f(x+a)+b=\{x-(2-a)\}^2+1+b$

따라서 함수 $y=f(x+a)+b$는 $x=2-a$에서 최솟값 $1+b$를 갖는다.

(i) $2-a\geq0$인 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



즉, $h(t)=\begin{cases}0 & (t<1)\\ 1 & (t=1)\\ 2 & (t>1)\end{cases}$

이때 $k=4$ 또는 $k=5$이면

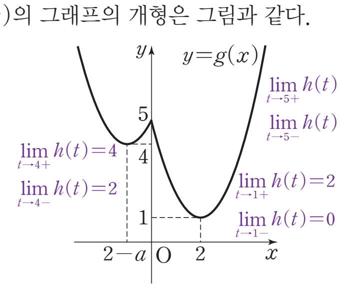
$\displaystyle\left|\lim_{t\to k+}h(t)-\lim_{t\to k-}h(t)\right|=0\neq2$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $2-a<0$인 경우

$\displaystyle\left|\lim_{t\to k+}h(t)-\lim_{t\to k-}h(t)\right|=2$를 만족시키는 k의 값이 1, 4, 5이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$$즉,\ h(t)=\begin{cases} 0\ (t<1) \\ 1\ (t=1) \\ 2\ (1<t<4\ \text{또는}\ t>5) \\ 3\ (t=4\ \text{또는}\ t=5) \\ 4\ (4<t<5) \end{cases}$$

따라서 $g(2-a)=1+b=4$이므로 $b=3$

㉠에 $b=3$을 대입하면

$a^2-4a+3=0,\ (a-1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=3$

그런데 $2-a<0$, 즉 $a>2$이므로 $a=3$

(i), (ii)에서 $g(x)=\begin{cases} f(x+3)+3\ (x<0) \\ f(x)\quad (x\geq 0) \end{cases}$이므로

$$\begin{aligned} g(-4)&=f(-4+3)+3 \\ &=f(-1)+3 \\ &=(1+4+5)+3 \\ &=13 \end{aligned}$$

18 답 9

함수 $f(x)=\begin{cases} 3x^2+12x+8\ (x<0) \\ 2x^2-8x+8\ (x\geq 0) \end{cases}$에서

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(2x^2-8x+8)=8$

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(3x^2+12x+8)=8$

$f(0)=8$

즉, $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $g(x)=\begin{cases} f(x)\quad (x<a) \\ 2k-f(x)\ (x\geq a) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서도 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to a+} g(x)=\lim_{x\to a-} g(x)=g(a)$에서

$\lim_{x\to a+}\{2k-f(x)\}=\lim_{x\to a-} f(x)=2k-f(a)$

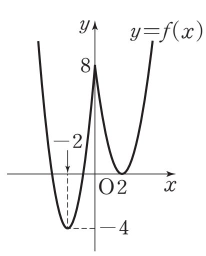
$2k-f(a)=f(a)$

$\therefore\ f(a)=k$ ······························ 배점 **50%**

이를 만족시키는 실수 a의 개수가 $h(k)$이므로 $h(k)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수와 같다.

$$\begin{aligned} f(x)&=\begin{cases} 3x^2+12x+8\ (x<0) \\ 2x^2-8x+8\ (x\geq 0) \end{cases} \\ &=\begin{cases} 3(x+2)^2-4\ (x<0) \\ 2(x-2)^2\quad (x\geq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로



$$h(k)=\begin{cases} 0\ (k<-4) \\ 1\ (k=-4) \\ 2\ (-4<k<0\ \text{또는}\ k>8) \\ 3\ (k=0\ \text{또는}\ k=8) \\ 4\ (0<k<8) \end{cases}$$

$h(k)=3$인 정수 k는 0, 8의 2개이므로 $m=2$

$h(k)=4$인 정수 k는 1, 2, 3, …, 7의 7개이므로 $n=7$

$\therefore\ m+n=2+7=9$ ······························ 배점 **50%**

19 답 ①

직선 $y=m(x+5)$는 기울기가 $m\ (m>0)$이고 점 $(-5,\ 0)$을 지나는 직선이다.

함수 $y=2|x|$의 그래프와 곡선 $x^2+y^2=5\ (y\geq 0)$는 두 점 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 2)$에서 만난다.

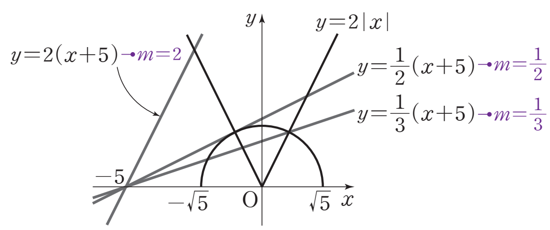
직선 $y=m(x+5)$가 점 $(1,\ 2)$를 지날 때 $m=\frac{1}{3}$이고, 점 $(-1,\ 2)$를 지날 때 $m=\frac{1}{2}$이다.

이때 두 점 $(0,\ 0)$, $(-1,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기가 -2이므로 곡선 $x^2+y^2=5\ (y\geq 0)$ 위의 점 $(-1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

즉, 직선 $y=\frac{1}{2}(x+5)$는 곡선 $x^2+y^2=5\ (y\geq 0)$ 위의 점 $(-1,\ 2)$에서의 접선이다.

직선 $y=m(x+5)$를 m의 값에 따라 나타내면 그림과 같다.



$0<m<\frac{1}{3}$일 때, $f(m)=4$

$m=\frac{1}{3}$일 때, $f(m)=3$

$\frac{1}{3}<m<\frac{1}{2}$일 때, $f(m)=4$

$\frac{1}{2}\leq m<2$일 때, $f(m)=2$

$m\geq 2$일 때, $f(m)=1$

$$\therefore\ f(m)=\begin{cases} 1\ (m\geq 2) \\ 2\ \left(\frac{1}{2}\leq m<2\right) \\ 3\ \left(m=\frac{1}{3}\right) \\ 4\ \left(0<m<\frac{1}{3}\ \text{또는}\ \frac{1}{3}<m<\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

따라서 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(m)$은 $m=\frac{1}{3}$, $m=\frac{1}{2}$, $m=2$에서만 불연속이므로

$$\begin{aligned} a_1+a_2+a_3&=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2 \\ &=\frac{17}{6} \end{aligned}$$

20 답 36

원점을 지나고 기울기가 t인 직선 $y=tx$가 곡선 $y=(x-1)^2$과 접할 때, t의 값을 구해 보자.

방정식 $(x-1)^2=tx$, 즉 $x^2-2x+1=tx$에서 $x^2-(2+t)x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

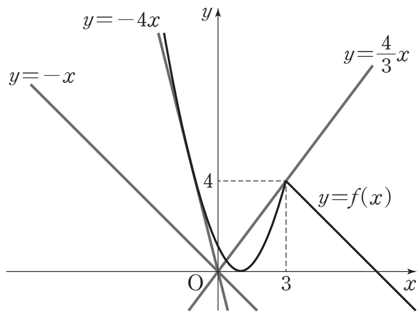
$D=(2+t)^2-4=0$

$t^2+4t=0,\ t(t+4)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=-4$

또 원점과 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{4}{3}x$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=tx$를 t의 값에 따라 나타내면 그림과 같다.



$t<-4$일 때, $g(t)=2$

$t=-4$일 때, $g(t)=1$

$-4<t\le-1$일 때, $g(t)=0$

$-1<t<0$일 때, $g(t)=1$

$t=0$일 때, $g(t)=2$

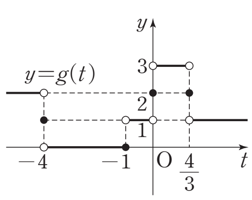
$0<t<\frac{4}{3}$일 때, $g(t)=3$

$t=\frac{4}{3}$일 때, $g(t)=2$

$t>\frac{4}{3}$일 때, $g(t)=1$

$$\therefore g(t)=\begin{cases}0 & (-4<t\le-1)\\ 1 & \left(t=-4 \text{ 또는 } -1<t<0 \text{ 또는 } t>\frac{4}{3}\right)\\ 2 & \left(t<-4 \text{ 또는 } t=0 \text{ 또는 } t=\frac{4}{3}\right)\\ 3 & \left(0<t<\frac{4}{3}\right)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $g(t)$는 열린구간 $(-\infty, -4)$, $(-4, -1)$, $(-1, 0)$, $\left(0, \frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$에서 연속이므로 함수 $g(t)h(t)$가 실수 전체의 집합에서 불연속인 점이 1개이려면 $t=-4$, $t=-1$, $t=0$, $t=\frac{4}{3}$ 중 3개의 점에서 연속이어야 한다.

함수 $g(t)h(t)$가 $t=-4$에서 연속이려면

$\lim_{t\to-4+} g(t)h(t)=\lim_{t\to-4-} g(t)h(t)=g(-4)h(-4)$이어야 한다.

즉, $0\times h(-4)=2\times h(-4)=1\times h(-4)$에서 $h(-4)=0$이다.

같은 방법으로 함수 $g(t)h(t)$가 $t=-1$ 또는 $t=0$ 또는 $t=\frac{4}{3}$에서 연속이려면 $h(-1)=0$ 또는 $h(0)=0$ 또는 $h\left(\frac{4}{3}\right)=0$이어야 한다.

이때 $h(t)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 가능한 $h(t)$는

$h(t)=t(t+4)(t+1)$, $h(t)=(t+4)(t+1)\left(t-\frac{4}{3}\right)$,

$h(t)=t(t+4)\left(t-\frac{4}{3}\right)$, $h(t)=t(t+1)\left(t-\frac{4}{3}\right)$이고 $h(2)$의 값을 구하면 각각 36, 12, 8, 4이다.

따라서 $h(2)$는 $h(t)=t(t+4)(t+1)$일 때, 최댓값 36을 갖는다.

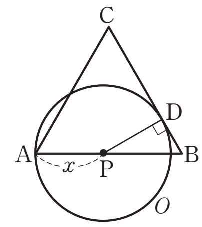
21 답 3

(i) 원 O가 삼각형 ABC의 변 BC에 접할 때,

접점을 D라 하면

$\overline{PD}=\overline{PA}=x$, $\overline{PB}=4-x$

$\angle BDP=90°$, $\angle PBD=60°$이므로 직각삼각형 PBD에서



$\sin 60°=\frac{\overline{PD}}{\overline{PB}}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{x}{4-x}$

$2x=4\sqrt{3}-\sqrt{3}x$

$(2+\sqrt{3})x=4\sqrt{3}$

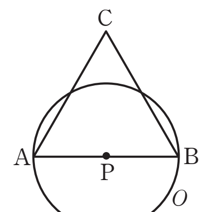
$\therefore x=\frac{4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=-12+8\sqrt{3}$

(ii) 원 O가 삼각형 ABC의 꼭짓점 B를 지날 때,

변 AB가 원 O의 지름과 같으므로

$x=\frac{1}{2}\times\overline{AB}$

$=\frac{1}{2}\times4=2$

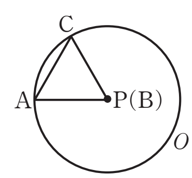


(iii) 원 O가 삼각형 ABC의 꼭짓점 C를 지날 때,

삼각형 ABC는 정삼각형이므로 점 B에서 두 점 A, C까지의 거리가 같다.

즉, 점 P는 점 B와 같으므로

$x=\overline{AB}=4$



(i), (ii), (iii)에서

$$f(x)=\begin{cases}3 & (0<x<-12+8\sqrt{3} \text{ 또는 } 2<x<4)\\ 4 & (x=-12+8\sqrt{3} \text{ 또는 } x=2)\\ 5 & (-12+8\sqrt{3}<x<2)\\ 2 & (x=4)\end{cases}$$

따라서 함수 $f(x)$가 불연속인 실수 x는 $-12+8\sqrt{3}$, 2, 4의 3개이다.

22 답 ⑤

(가)의 $f(-x)=-f(x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=-f(0)$

$\therefore f(0)=0$

따라서 방정식 $f(x)=0$은 0을 근으로 갖는다.

(나)에서 $n=1$, 2, 3일 때, $f(n)f(n+1)f(n+2)<0$이므로

$f(1)f(2)f(3)<0$, $f(2)f(3)f(4)<0$, $f(3)f(4)f(5)<0$

(다)에서 $f(3)>0$이므로

$f(1)f(2)<0$, $f(2)f(4)<0$, $f(4)f(5)<0$

(i) $f(2)>0$일 때,

$f(1)<0$, $f(4)<0$, $f(5)>0$이므로

$f(1)f(2)<0$, $f(3)f(4)<0$, $f(4)f(5)<0$

따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(ii) $f(2)<0$일 때,

$f(1)>0$, $f(4)>0$, $f(5)<0$이므로

$f(1)f(2)<0$, $f(2)f(3)<0$, $f(4)f(5)<0$

따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(4, 5)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1,\ 5)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.
이때 ㈎에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-5,\ -1)$에서도 적어도 3개의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-5,\ 5)$에서 적어도 7개의 실근을 가지므로
$k=7$

idea
23 답 7

함수 $f(x)$는 이차함수이고 $f(-3)=f(1)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{-3+1}{2}$, 즉 $x=-1$에 대하여 대칭이다.

$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$이므로

$-\frac{b}{2a}=-1 \qquad \therefore\ b=2a$

$\therefore\ f(x)=ax^2+2ax+c$

열린구간 $(-2,\ -1)$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재하므로

$f(-2)f(-1)<0$

$c(c-a)<0$

이때 $c<a$에서 $c-a<0$이므로 $c>0$

$\therefore\ 0<c<a$

$f(1)=a+2a+c=3a+c$이고 $0<c<a$이므로

$3a<3a+c<3a+a$

$\therefore\ 3a<f(1)<4a$ …… ㉠

a, c가 정수이므로 $f(1)$의 값은 정수이고 $a>0$이므로 $f(1)$의 값은 양의 정수이다.

(i) $a=1$일 때,
㉠에서 $3<f(1)<4$이므로 $f(1)$의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a=2$일 때,
㉠에서 $6<f(1)<8$이므로 $f(1)=7$

(iii) $a\geq 3$일 때,
㉠에서 $f(1)>9$이므로 $f(1)$의 값은 10 이상이다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(1)$의 최솟값은 7이다.

24 답 ①

함수 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2 & (x\leq a)\\(x-2)(x-a) & (x>a)\end{cases}$에서

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}(x-2)(x-a)=0$

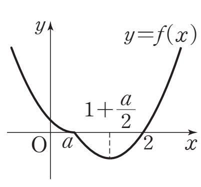
$\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}(x-a)^2=0$

$f(a)=(a-a)^2=0$

즉, $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}f(x)=f(a)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(i) $0<a<2$일 때,
함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고



$f(0)=(-a)^2=a^2>0$

$f\left(1+\frac{a}{2}\right)=\left(1+\frac{a}{2}-2\right)\left(1+\frac{a}{2}-a\right)$

$=-\left(\frac{a}{2}-1\right)^2<0$

따라서 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $\left(0,\ 1+\frac{a}{2}\right)$에 적어도 하나 존재하므로 ㈎를 만족시킨다.

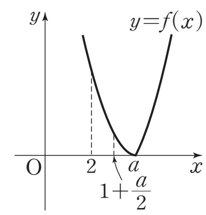
㈏에서 세 점 $\underbrace{(2,\ f(2))}_{(2,\ 0)}$, $\underbrace{(a,\ f(a))}_{(a,\ 0)}$, $\underbrace{\left(1+\frac{a}{2},\ f\left(1+\frac{a}{2}\right)\right)}_{\left(1+\frac{a}{2},\ -\left(\frac{a}{2}-1\right)^2\right)}$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{8}$이므로

$\frac{1}{2}\times(2-a)\times\left\{-f\left(1+\frac{a}{2}\right)\right\}=\frac{1}{8}$

$\frac{1}{2}(2-a)\left(\frac{a}{2}-1\right)^2=\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}(2-a)^3=\frac{1}{8}$

$(2-a)^3=1 \qquad \therefore\ a=1$ ($\because$ a는 실수)

(ii) $a>2$일 때,
함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $0<x<1+\frac{a}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로 ㈎를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=1$이므로 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & (x\leq 1)\\(x-2)(x-1) & (x>1)\end{cases}$

$\therefore\ f(3a)=f(3)=1\times 2=2$

25 답 5

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=4$에서 $x\to -1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=0$에서 $f(-1)=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$에서 $f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$에서 $f(1)=0$

따라서 다항함수 $g(x)$에 대하여

$f(x)=x(x+1)(x-1)g(x)$ …… ㉠

라 하자. ······································· 배점 **40%**

㉠을 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=4$의 좌변에 대입하면

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x(x+1)(x-1)g(x)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to -1}x(x-1)g(x)=2g(-1)$

즉, $2g(-1)=4$이므로 $g(-1)=2$

㉠을 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$의 좌변에 대입하면

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+1)(x-1)g(x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)(x-1)g(x)=-g(0)$

즉, $-g(0)=1$이므로 $g(0)=-1$

㉠을 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x+1)(x-1)g(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}x(x+1)g(x)=2g(1)$$

즉, $2g(1)=2$이므로 $g(1)=1$ ······ 배점 30%

다항함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $g(-1)g(0)<0$, $g(0)g(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 $g(c_1)=0$인 c_1이 열린구간 $(-1,\ 0)$에 적어도 하나 존재하고 $g(c_2)=0$인 c_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 $-1,\ c_1,\ 0,\ c_2,\ 1$은 방정식 $f(x)=0$, 즉 $x(x+1)(x-1)g(x)=0$의 실근이므로 방정식 $f(x)=0$은 적어도 5개의 실근을 갖는다.

$\therefore n=5$ ······ 배점 30%

STEP 3 최고난도 문제 | 35~37쪽

01 ④	02 ③	03 4	04 19	05 ④	06 -5
07 -15	08 ⑤	09 75	10 ③		

01 답 ④

1단계 b의 값 구하기

(가)에서 $a=1$이면 (좌변)$=0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $b(x-1)(x-2)=0$을 만족시켜야 하므로 $b=0$이어야 한다.

그런데 $b\neq0$이므로 $a\neq1$

(가)에서 $\sqrt{x^2+ax-3b}-\sqrt{x^2+x-3ab}\neq0$일 때,

$f(x)$

$$=\frac{b(x-1)(x-2)}{(x^4+2)(\sqrt{x^2+ax-3b}-\sqrt{x^2+x-3ab})}$$

$$=\frac{b(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+ax-3b}+\sqrt{x^2+x-3ab})}{(x^4+2)(\sqrt{x^2+ax-3b}-\sqrt{x^2+x-3ab})(\sqrt{x^2+ax-3b}+\sqrt{x^2+x-3ab})}$$

$$=\frac{b(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+ax-3b}+\sqrt{x^2+x-3ab})}{(x^4+2)\{(a-1)x+3b(a-1)\}}$$

$$=\frac{b(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+ax-3b}+\sqrt{x^2+x-3ab})}{(a-1)(x^4+2)(x+3b)}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

㉠에서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$3b=-1$ 또는 $3b=-2$

$\therefore b=-\frac{1}{3}$ 또는 $b=-\frac{2}{3}$

2단계 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수 구하기

(i) $b=-\frac{1}{3}$일 때,

㉠에서

$$f(x)=-\frac{(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+ax+1}+\sqrt{x^2+x+a})}{3(a-1)(x^4+2)(x-1)}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$$
$$=-\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+ax+1}+\sqrt{x^2+x+a})}{3(a-1)(x^4+2)(x-1)}$$
$$=-\lim_{x\to1}\frac{(x-2)(\sqrt{x^2+ax+1}+\sqrt{x^2+x+a})}{3(a-1)(x^4+2)}$$
$$=\frac{2\sqrt{a+2}}{9(a-1)}$$

$f(2)=0$이므로 (나)의 $|f(1)+f(2)|=\frac{4}{9}$에서

$\left|\frac{2\sqrt{a+2}}{9(a-1)}\right|=\frac{4}{9},\ \sqrt{a+2}=2|a-1|$

$a+2=4(a-1)^2$

$4a^2-9a+2=0$

$(4a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=\frac{1}{4}$ 또는 $a=2$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $\left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{3}\right),\ \left(2,\ -\frac{1}{3}\right)$의 2개이다.

(ii) $b=-\frac{2}{3}$일 때,

㉠에서

$$f(x)=-\frac{2(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+ax+2}+\sqrt{x^2+x+2a})}{3(a-1)(x^4+2)(x-2)}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=2$에서도 연속이므로

$$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)$$
$$=-\lim_{x\to2}\frac{2(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+ax+2}+\sqrt{x^2+x+2a})}{3(a-1)(x^4+2)(x-2)}$$
$$=-\lim_{x\to2}\frac{2(x-1)(\sqrt{x^2+ax+2}+\sqrt{x^2+x+2a})}{3(a-1)(x^4+2)}$$
$$=-\frac{2\sqrt{2a+6}}{27(a-1)}$$

$f(1)=0$이므로 (나)의 $|f(1)+f(2)|=\frac{4}{9}$에서

$\left|-\frac{2\sqrt{2a+6}}{27(a-1)}\right|=\frac{4}{9},\ \sqrt{2a+6}=6|a-1|$

$2a+6=36(a-1)^2,\ 18a^2-37a+15=0$

$(2a-3)(9a-5)=0$

$\therefore a=\frac{3}{2}$ 또는 $a=\frac{5}{9}$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{5}{9},\ -\frac{2}{3}\right)$의 2개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$2+2=4$

참고 ㉠에서 $\sqrt{x^2+ax-3b}+\sqrt{x^2+x-3ab}$가 $k(x+3b)$(k는 상수) 꼴이려면 $x^2+ax-3b,\ x^2+x-3ab$가 모두 완전제곱식 꼴이어야 한다.

$x^2+ax-3b$가 완전제곱식이면 이차방정식 $x^2+ax-3b=0$의 판별식을 D_1이라 할 때,

$D_1=a^2+12b=0\quad\cdots\cdots\ ㉡$

$x^2+x-3ab$가 완전제곱식이면 이차방정식 $x^2+x-3ab=0$의 판별식을 D_2라 할 때,

$D_2=1+12ab=0$

$ab=-\frac{1}{12}\qquad\therefore a=-\frac{1}{12b}\ (\because b\neq0)\quad\cdots\cdots\ ㉢$

이를 ㉡에 대입하면 $\frac{1}{12^2b^2}+12b=0$

$1+12^3b^3=0,\ b^3=-\frac{1}{12^3}$

$\therefore b=-\frac{1}{12}\ (\because b$는 실수)

이를 ㉢에 대입하면 $a=1$

이는 $a\neq1$을 만족시키지 않는다.

따라서 $\sqrt{x^2+ax-3b}+\sqrt{x^2+x-3ab}$가 $k(x+3b)$(k는 상수) 꼴이 되는 경우는 생각하지 않는다.

02 답 ③

1단계 함수 $f(x)$의 식 세우기

(가)의 $f(x)g(x)=2(x-3)(x-6)$의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(3)g(3)=0$

이때 (나)에서 $g(3)=-6$이므로

$f(3)=0$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-3)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)라 하자.

2단계 $g(2)$의 최댓값과 최솟값의 곱 구하기

(가)의 $f(x)g(x)=2(x-3)(x-6)$에서

$(x-3)(x^2+ax+b)g(x)=2(x-3)(x-6)$이므로

$x\neq3$, $x^2+ax+b\neq0$일 때,

$$g(x)=\frac{2(x-3)(x-6)}{(x-3)(x^2+ax+b)}=\frac{2(x-6)}{x^2+ax+b} \quad \cdots\cdots ㉠$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=3$에서도 연속이므로

$\lim\limits_{x\to3}g(x)=g(3)$에서

$\lim\limits_{x\to3}\frac{2(x-6)}{x^2+ax+b}=-6$

$\frac{-6}{9+3a+b}=-6$, $9+3a+b=1$

$\therefore\ b=-3a-8$

한편 ㉠에서 함수 $g(x)=\frac{2(x-6)}{x^2+ax-3a-8}$이 실수 전체의 집합에서 연속이면 모든 실수 x에 대하여

$x^2+ax-3a-8\neq0$

이차방정식 $x^2+ax-3a-8=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4(-3a-8)<0$

$a^2+12a+32<0$, $(a+8)(a+4)<0$

$\therefore\ -8<a<-4 \quad \cdots\cdots ㉡$

한편 $f(x)=(x-3)(x^2+ax-3a-8)$에서

$f(2)=-(4+2a-3a-8)=a+4$

$f(2)$의 값이 정수이므로 a도 정수이다.

이때 ㉡에서 $a=-7$ 또는 $a=-6$ 또는 $a=-5$

따라서 $g(2)=\frac{-8}{4+2a-3a-8}=\frac{8}{a+4}$은 $a=-7$에서 최댓값 $-\frac{8}{3}$,

$a=-5$에서 최솟값 -8을 가지므로 최댓값과 최솟값의 곱은

$-\frac{8}{3}\times(-8)=\frac{64}{3}$

03 답 4

1단계 함수 $f(2x)f(x+b)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건 알기

$$f(x)=\begin{cases} a(x+2)(x-4) & (x<0) \\ (x-1)(x-2)(x-4) & (x\geq0)\end{cases}\text{에서}$$

$$f(2x)=\begin{cases} a(2x+2)(2x-4) & (2x<0) \\ (2x-1)(2x-2)(2x-4) & (2x\geq0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 4a(x+1)(x-2) & (x<0) \\ 4(2x-1)(x-1)(x-2) & (x\geq0)\end{cases}$$

$$f(x+b)=\begin{cases} a(x+b+2)(x+b-4) & (x+b<0) \\ (x+b-1)(x+b-2)(x+b-4) & (x+b\geq0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} a(x+b+2)(x+b-4) & (x<-b) \\ (x+b-1)(x+b-2)(x+b-4) & (x\geq-b)\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to0+}f(2x)=-8$, $\lim\limits_{x\to0-}f(2x)=-8a$이고 $a\neq1$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}f(2x)\neq\lim\limits_{x\to0-}f(2x)$

즉, 함수 $f(2x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

또 $\lim\limits_{x\to-b+}f(x+b)=-8$, $\lim\limits_{x\to-b-}f(x+b)=-8a$이고 $a\neq1$이므로

$\lim\limits_{x\to-b+}f(x+b)\neq\lim\limits_{x\to-b-}f(x+b)$

즉, 함수 $f(x+b)$는 $x=-b$에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(2x)f(x+b)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$, $x=-b$에서도 연속이다.

2단계 $b-a^2$의 최댓값 구하기

(i) $b>0$일 때, $\to -b<0$

ⓘ 함수 $f(2x)f(x+b)$가 $x=0$에서 연속일 때,

$\lim\limits_{x\to0+}f(2x)f(x+b)=\lim\limits_{x\to0-}f(2x)f(x+b)=f(0)f(0+b)$에서

$\lim\limits_{x\to0+}4(2x-1)(x-1)(x-2)(x+b-1)(x+b-2)(x+b-4)$

$=-8(b-1)(b-2)(b-4)$

$\lim\limits_{x\to0-}4a(x+1)(x-2)(x+b-1)(x+b-2)(x+b-4)$

$=-8a(b-1)(b-2)(b-4)$

$f(0)f(0+b)=-8(b-1)(b-2)(b-4)$

즉, $-8(b-1)(b-2)(b-4)=-8a(b-1)(b-2)(b-4)$이므로

$(8a-8)(b-1)(b-2)(b-4)=0$

$(a-1)(b-1)(b-2)(b-4)=0$

$\therefore\ b=1$ 또는 $b=2$ 또는 $b=4$ ($\because\ a\neq1$)

ⓘⓘ 함수 $f(2x)f(x+b)$가 $x=-b$에서 연속일 때,

$\lim\limits_{x\to-b+}f(2x)f(x+b)=\lim\limits_{x\to-b-}f(2x)f(x+b)$

$=f(-2b)f(-b+b)$

에서

$\lim\limits_{x\to-b+}4a(x+1)(x-2)(x+b-1)(x+b-2)(x+b-4)$

$=-32a(-b+1)(-b-2)$

$\lim\limits_{x\to-b-}\{4a(x+1)(x-2)\times a(x+b+2)(x+b-4)\}$

$=-32a^2(-b+1)(-b-2)$

$f(-2b)f(-b+b)=-32a(-b+1)(-b-2)$

즉, $-32a(-b+1)(-b-2)=-32a^2(-b+1)(-b-2)$이므로

$(32a^2-32a)(-b+1)(-b-2)=0$

$a(a-1)(b-1)(b+2)=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 $b=1$ ($\because\ a\neq1$, $b>0$)

ⓘ, ⓘⓘ에서

$a=0$, $b=2$ 또는 $a=0$, $b=4$ 또는 a의 값에 관계없이 $b=1$

$\therefore\ b-a^2=2$ 또는 $b-a^2=4$ 또는 $b-a^2\leq1$

(ii) $b\leq0$일 때,

조건을 만족시키는 a, b의 값이 존재하면

$b-a^2\leq0$

(i), (ii)에서 $b-a^2$의 최댓값은 4이다.

04 답 19

1단계 $f(-b)$, $f(0)$의 값 사이의 관계 구하기

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서도 연속이다.

$\lim\limits_{x\to0+}g(x)=\lim\limits_{x\to0-}g(x)=g(0)$에서

$\lim\limits_{x\to0+}g(x)=\lim\limits_{x\to0+}(x+a)f(x-b)=af(-b)$

$\lim\limits_{x\to0-}g(x)=\lim\limits_{x\to0-}(x+3)f(x)=3f(0)$

$g(0)=af(-b)$
즉, $af(-b)=3f(0)$이므로

$f(0)=\frac{a}{3}f(-b)$ ...... ㉠

2단계 a, b의 값 구하기
$x<0$일 때 $g(x)=(x+3)f(x)$이므로

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|)(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|)}{(x+3)^2(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|)}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|)}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2(\sqrt{|(x+3)f(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|)}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2(\sqrt{\{g(t)\}^2}+|g(t)|)}\ (\because \lim_{x\to-3}\sqrt{|(x+3)f(x)|}=0)$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times2|g(t)|}\quad\cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡에서 $t\neq-3$, $t\neq6$인 모든 실수 t에 대하여 이 극한값이 존재하므로 $f(x)$는 $x+3$을 인수로 갖는다.
$f(x)=(x+3)(x+k)$ (k는 상수)라 하면 ㉡에서

$$\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times2|g(t)|}=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)^2(x+k)|}{(x+3)^2\times2|g(t)|}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{|x+k|}{2|g(t)|}$$

이때 $t=-3$과 $t=6$에서만 이 극한값이 존재하지 않으므로 방정식 $g(x)=0$의 근은 -3과 6뿐이다.
$\therefore g(-3)=0$, $g(6)=0$
$x<0$일 때 $g(x)=(x+3)f(x)$이므로 $g(-3)=0$을 만족시킨다.
$x\geq0$일 때 $g(x)=(x+a)f(x-b)$이므로 $g(6)=0$에서
$(6+a)f(6-b)=0$
$\therefore f(6-b)=0$ ($\because a>0$)
이때 $f(x)=(x+3)(x+k)$이므로
$(6-b+3)(6-b+k)=0$
$\therefore b=9$ 또는 $b=k+6$

(ⅰ) $b=9$일 때,
$f(x)=(x+3)(x+k)$에서
$f(x-b)=f(x-9)=(x-6)(x-9+k)$이므로

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)^2(x+k) & (x<0)\\(x+a)(x-6)(x-9+k) & (x\geq0)\end{cases}$$

$x<0$에서 방정식 $g(x)=0$의 근은 -3뿐이므로
$-k\geq0$ 또는 $k=3$
$\therefore k\leq0$ 또는 $k=3$ ...... ㉢
$x\geq0$에서 방정식 $g(x)=0$의 근은 6뿐이므로
$9-k<0$ 또는 $9-k=6$ ($\because a>0$)
$\therefore k>9$ 또는 $k=3$ ...... ㉣
㉢, ㉣에서 $k=3$

(ⅱ) $b=k+6$일 때,
$f(x)=(x+3)(x+k)$에서
$f(x-b)=f(x-k-6)=(x-k-3)(x-6)$이므로

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)^2(x+k) & (x<0)\\(x+a)(x-k-3)(x-6) & (x\geq0)\end{cases}$$

$b>3$이므로 $k+6>3$ $\therefore k>-3$
$x<0$에서 방정식 $g(x)=0$의 근은 -3뿐이므로
$-k\geq0$ 또는 $k=3$ $\therefore k\leq0$ 또는 $k=3$
그런데 $k>-3$이므로
$-3<k\leq0$ 또는 $k=3$ ...... ㉤
$x\geq0$에서 방정식 $g(x)=0$의 근은 6뿐이므로
$k+3<0$ 또는 $k+3=6$ ($\because a>0$)
$\therefore k<-3$ 또는 $k=3$
그런데 $k>-3$이므로
$k=3$ ...... ㉥
㉤, ㉥에서 $k=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k=3$, $b=9$
$f(x)=(x+3)^2$이고 ㉠에서 $f(0)=\frac{a}{3}f(-9)$이므로

$9=\frac{a}{3}\times36$, $12a=9$ $\therefore a=\frac{3}{4}$

3단계 $g(4)$의 값 구하기
따라서 $x\geq0$에서 $g(x)=\left(x+\frac{3}{4}\right)f(x-9)=\left(x+\frac{3}{4}\right)(x-6)^2$이므로

$g(4)=\frac{19}{4}\times4=19$

idea
05 답 ④

1단계 $g(x)-1=0$, $g(x)-4=0$의 근 알기
$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{|g(x)-1||g(x)-4|} & (g(x)\neq1,\ g(x)\neq4)\\0 & (g(x)=1\text{ 또는 }g(x)=4)\end{cases}$$

함수 $(f\circ g)(x)$가 불연속인 실수 x의 값이 -1, 0, 2, 3이므로 방정식 $|g(x)-1||g(x)-4|=0$의 네 근이 -1, 0, 2, 3이다.
$g(x)$는 이차함수이므로 $g(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하자.
이차방정식 $g(x)-1=0$, 즉 $ax^2+bx+c-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-\frac{b}{a}$, 두 근의 곱은 $\frac{c-1}{a}$이다.
또 이차방정식 $g(x)-4=0$, 즉 $ax^2+bx+c-4=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-\frac{b}{a}$, 두 근의 곱은 $\frac{c-4}{a}$이다.
두 이차방정식 $g(x)-1=0$, $g(x)-4=0$의 두 근의 합이 같으므로 $g(x)-1=0$의 두 근이 -1과 3, $g(x)-4=0$의 두 근이 0과 2이거나 $g(x)-1=0$의 두 근이 0과 2, $g(x)-4=0$의 두 근이 -1과 3이다.

2단계 $(g\circ f)(2)$의 모든 값의 합 구하기
(ⅰ) 이차방정식 $g(x)-1=0$의 두 근이 -1과 3, 이차방정식 $g(x)-4=0$의 두 근이 0과 2일 때,
두 이차방정식 $g(x)-1=0$, $g(x)-4=0$의 두 근의 곱은 각각
$\frac{c-1}{a}=-3$, $\frac{c-4}{a}=0$
$\therefore a=-1$, $c=4$
이차방정식 $g(x)-1=0$의 두 근의 합은
$-\frac{b}{a}=2$
$a=-1$을 대입하면 $b=2$
$\therefore g(x)=-x^2+2x+4$
$\therefore (g\circ f)(2)=g(f(2))=g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+1+4=\frac{19}{4}$

(ii) 이차방정식 $g(x)-1=0$의 두 근이 0과 2, 이차방정식 $g(x)-4=0$의 두 근이 -1과 3일 때,

두 이차방정식 $g(x)-1=0$, $g(x)-4=0$의 두 근의 곱은 각각

$\frac{c-1}{a}=0$, $\frac{c-4}{a}=-3$

$\therefore a=1, c=1$

이차방정식 $g(x)-1=0$의 두 근의 합은

$-\frac{b}{a}=2$

$a=1$을 대입하면 $-b=2$ $\quad\therefore b=-2$

$\therefore g(x)=x^2-2x+1$

$\therefore (g\circ f)(2)=g(f(2))=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-1+1=\frac{1}{4}$

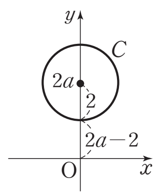
(i), (ii)에서 $(g\circ f)(2)$의 모든 값의 합은

$\frac{19}{4}+\frac{1}{4}=5$

06 답 -5

1단계 $f(r)$ 구하기

$a>1$에서 $2a>2$이므로 중심의 좌표가 $(0, 2a)$이고 반지름의 길이가 2인 원 C는 그림과 같다.



x축에 접하는 원과 원 C의 접점이 y축 위에 있으면 x축에 접하는 원의 지름이 $2a-2$ 또는 $2a+2$이므로 $r=a-1$, $r=a+1$일 때를 기준으로 경우를 나누어 $f(r)$를 구해 보자.

(i) $0<r<a-1$일 때,

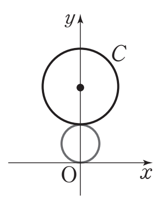
원 C와 한 점에서 만나면서 x축에 접하는 원은 존재하지 않으므로

$f(r)=0$

(ii) $r=a-1$일 때,

원 C와 한 점에서 만나면서 x축에 접하는 원은 중심이 $(0, a-1)$인 원 1개뿐이므로

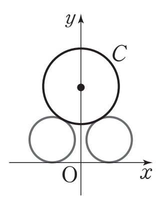
$f(r)=1$



(iii) $a-1<r<a+1$일 때,

원 C와 한 점에서 만나면서 x축에 접하는 원은 중심의 x좌표가 양수인 원과 음수인 원의 2개이므로

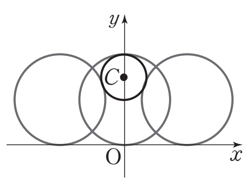
$f(r)=2$



(iv) $r=a+1$일 때,

원 C와 한 점에서 만나면서 x축에 접하는 원은 중심이 $(0, a+1)$인 원 1개와 원 C에 외접하는 원 2개이므로

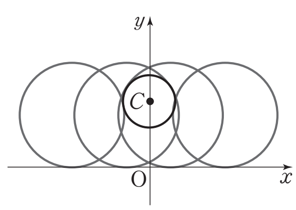
$f(r)=3$



(v) $r>a+1$일 때,

원 C와 한 점에서 만나면서 x축에 접하는 원은 원 C에 외접하는 원 2개와 내접하는 원 2개이므로

$f(r)=4$



(i)~(v)에서

$$f(r)=\begin{cases}0 & (0<r<a-1)\\ 1 & (r=a-1)\\ 2 & (a-1<r<a+1)\\ 3 & (r=a+1)\\ 4 & (r>a+1)\end{cases}$$

2단계 m, n을 a에 대한 식으로 나타내기

$g(x)=(x^2+mx+n)f(x)$에서 $h(x)=x^2+mx+n$이라 하자.

함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $f(x)$는 $x\neq a-1$, $x\neq a+1$인 양의 실수 x에서 연속이므로 함수 $g(x)=h(x)f(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=a-1$, $x=a+1$에서도 연속이다.

함수 $h(x)f(x)$가 $x=a-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to(a-1)+}h(x)f(x)=\lim_{x\to(a-1)-}h(x)f(x)=h(a-1)f(a-1)$에서

$h(a-1)\times2=h(a-1)\times0=h(a-1)\times1$

$\therefore h(a-1)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

함수 $h(x)f(x)$가 $x=a+1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to(a+1)+}h(x)f(x)=\lim_{x\to(a+1)-}h(x)f(x)=h(a+1)f(a+1)$에서

$h(a+1)\times4=h(a+1)\times2=h(a+1)\times3$

$\therefore h(a+1)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a-1$, $a+1$은 이차방정식 $h(x)=0$, 즉 $x^2+mx+n=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a-1+(a+1)=-m$, $(a-1)(a+1)=n$

$\therefore m=-2a$, $n=a^2-1$

3단계 $m+n-2a$의 최솟값 구하기

$\therefore m+n-2a=-2a+(a^2-1)-2a$

$\qquad\qquad\quad=a^2-4a-1=(a-2)^2-5$

따라서 $a>1$일 때, $m+n-2a$는 $a=2$에서 최솟값 -5를 갖는다.

07 답 -15

1단계 집합 $(A\cup B)\cap C$의 원소의 개수의 의미 알기

집합 $A=\{(x, y)\,|\,x^2+y^2=2\}$의 원소는 중심의 좌표가 $(0, 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원 위의 점이고, 집합 $B=\{(x, y)\,|\,y=x^2\}$의 원소는 꼭짓점의 좌표가 $(0, 0)$이고 아래로 볼록한 포물선 위의 점이다. 또 집합 $C=\{(x, y)\,|\,y=x+t,\ t\text{는 실수}\}$의 원소는 기울기가 1이고 y절편이 t인 직선 위의 점이다.

이때 집합 $(A\cup B)\cap C$의 원소의 개수는 직선 $y=x+t$가 원 $x^2+y^2=2$ 또는 곡선 $y=x^2$과 만나는 점의 개수와 같다.

2단계 $f(t)$ 구하기

(i) 직선 $y=x+t$가 원 $x^2+y^2=2$에 접할 때,

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=x+t$, 즉 $x-y+t=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이인 $\sqrt{2}$와 같으므로

$\frac{|t|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$, $|t|=2$ $\quad\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

(ii) 직선 $y=x+t$가 곡선 $y=x^2$에 접할 때,

$x+t=x^2$에서 $x^2-x-t=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1+4t=0$ $\quad\therefore t=-\frac{1}{4}$

(iii) 직선 $y=x+t$가 원 $x^2+y^2=2$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 점을 지날 때,

원 $x^2+y^2=2$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 점의 y좌표를 구하면

$y+y^2=2$, $y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0 \qquad \therefore y=1 \ (\because y\geq 0)$

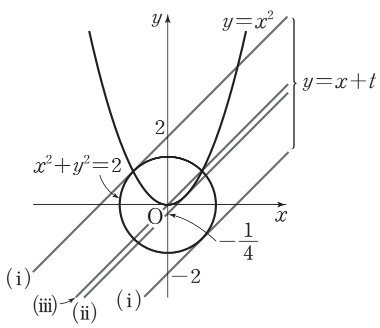
원 $x^2+y^2=2$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 점의 좌표는 $(-1,\ 1)$, $(1,\ 1)$이다.

직선 $y=x+t$가 점 $(-1,\ 1)$을 지나면

$1=-1+t \qquad \therefore t=2$ ⟶ (i)에서 구한 t의 값과 같다.

직선 $y=x+t$가 점 $(1,\ 1)$을 지나면

$1=1+t \qquad \therefore t=0$



(i), (ii), (iii)에서 t의 값이 -2, $-\frac{1}{4}$, 0, 2일 때를 기준으로 구간을 나누어 집합 $(A\cup B)\cap C$의 원소의 개수 $f(t)$를 구하면

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<-2) \\ 1 & (t=-2) \\ 2 & \left(-2<t<-\frac{1}{4} \text{ 또는 } t\geq 2\right) \\ 3 & \left(t=-\frac{1}{4} \text{ 또는 } t=0\right) \\ 4 & \left(-\frac{1}{4}<t<0 \text{ 또는 } 0<t<2\right) \end{cases}$$

3단계 함수 $g(x)$ 구하기

함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=-\frac{1}{4}$, $x=0$, $x=2$에서 불연속이고 다항함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=-2$, $x=-\frac{1}{4}$, $x=0$, $x=2$에서도 연속이다.

함수 $f(x)g(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -2+} f(x)g(x)=\lim_{x\to -2-} f(x)g(x)=f(-2)g(-2)$에서

$2\times g(-2)=0\times g(-2)=1\times g(-2)$

$\therefore g(-2)=0$

함수 $f(x)g(x)$는 $x=-\frac{1}{4}$, $x=0$, $x=2$에서도 연속이므로 같은 방법으로 하면

$g\left(-\frac{1}{4}\right)=0$, $g(0)=0$, $g(2)=0$

사차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x)=x(x+2)\left(x+\frac{1}{4}\right)(x-2)$

4단계 $f(1)g(1)$의 값 구하기

$\therefore f(1)g(1)=4\times 1\times 3\times \frac{5}{4}\times(-1)=-15$

08 답 ⑤

1단계 $f(t)$ 구하기

삼각형 ABP에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$이므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리를 h라 하면

$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{1}{2}\times 2\times h=h$

이때 삼각형 ABP의 넓이가 자연수이려면 점 P와 직선 AB 사이의 거리 h가 자연수이어야 한다.

직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}=1 \qquad \therefore x+y-\sqrt{2}=0$

원 C의 중심 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 직선 AB 사이의 거리는

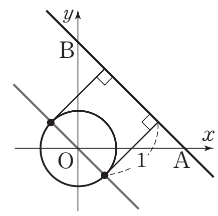
$\frac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$

따라서 원의 반지름의 길이 t의 값을 기준으로 구간을 나누어 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수 $f(t)$를 구한다.

(i) $0<t<1$일 때,

그림과 같이 직선 AB와 거리가 1인 직선을 그어 원과 만나는 점의 개수를 확인하면 $h=1$이 되는 점 P는 2개이다.

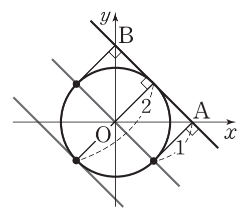
$\therefore f(t)=2$



(ii) $t=1$일 때,

그림과 같이 직선 AB와 거리가 각각 1, 2인 직선을 그어 원과 만나는 점의 개수를 확인하면 $h=1$이 되는 점 P는 2개, $h=2$가 되는 점 P는 1개이다.

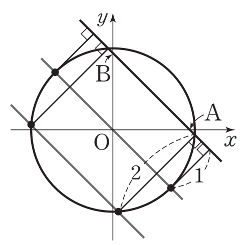
$\therefore f(t)=3$



(iii) $1<t<2$일 때,

그림과 같이 직선 AB와 거리가 각각 1, 2인 직선을 그어 원과 만나는 점의 개수를 확인하면 $h=1$이 되는 점 P는 2개, $h=2$가 되는 점 P는 2개이다.

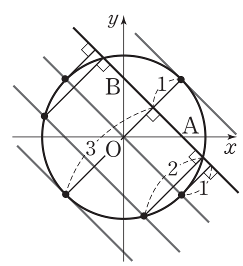
$\therefore f(t)=4$



(iv) $t=2$일 때,

그림과 같이 직선 AB와 거리가 각각 1, 2, 3인 직선을 그어 원과 만나는 점의 개수를 확인하면 $h=1$이 되는 점 P는 3개, $h=2$가 되는 점 P는 2개, $h=3$이 되는 점 P는 1개이다.

$\therefore f(t)=6$



(i)~(iv)와 같은 방법으로 점 P의 개수 $f(t)$를 구하면

$$f(t)=\begin{cases} 2 & (0<t<1) \\ 3 & (t=1) \\ 4 & (1<t<2) \\ 6 & (t=2) \\ 8 & (2<t<3) \\ 10 & (t=3) \\ 12 & (3<t<4) \\ \vdots & \end{cases}$$

2단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$

3단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. $\lim_{t \to 1+} f(t)=4$, $f(1)=3$이므로

$\lim_{t \to 1+} f(t) \neq f(1)$

4단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. 함수 $f(t)$는 $t=1$, $t=2$, $t=3$, …에서 불연속이므로 $0<a<4$인 실수 a에 대하여 $t=a$에서 불연속인 a는 1, 2, 3의 3개이다.

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

09 답 75

1단계 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 k에 대하여 $k>1$임을 알기

$y=\frac{bx}{x+a}=-\frac{ab}{x+a}+b$이므로 함수 $y=\frac{bx}{x+a}$의 그래프의 점근선은

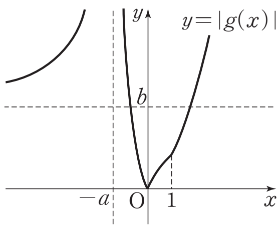
$x=-a$, $y=b$

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$g(1)=f(1)=\lim_{x \to 1-} \frac{bx}{x+a}=\frac{b}{1+a}<b$ ($\because$ $a>0$, $b>0$)

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표를 k(k는 상수)라 하자.

$k \le 1$일 때, 함수 $y=|g(x)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



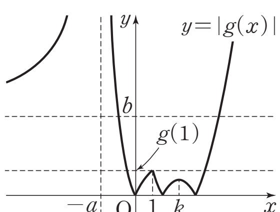
$0<t \le b$인 t에 대하여 $h(t)=2$이고, $t>b$인 t에 대하여 $h(t)=3$이므로 (가)를 만족시키지 않는다.

따라서 $k>1$이다.

2단계 $f(k)$의 값의 범위에 따라 함수 $h(t)$가 조건을 만족시키는지 확인하기

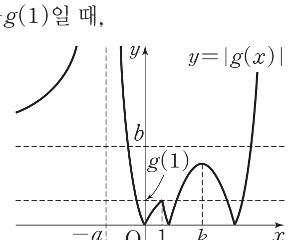
(i) $f(k)>-b$일 때,

ⓘ $f(k) \ge -g(1)$일 때,



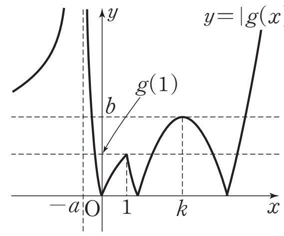
$|f(k)| \le g(1)$이므로 $g(1)<t \le b$인 t에 대하여 $h(t)=2$이고, $t>b$인 t에 대하여 $h(t)=3$이므로 (가)를 만족시키지 않는다.

ⓘⓘ $-b<f(k)<-g(1)$일 때,



$g(1)<|f(k)|<b$이므로 $|f(k)|<t \le b$인 t에 대하여 $h(t)=2$이고, $t>b$인 t에 대하여 $h(t)=3$이므로 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f(k)=-b$일 때,



$t<0$일 때, $h(t)=0$

$t=0$일 때, $h(0)=3$

$0<t<g(1)$일 때, $h(t)=6$

$t=g(1)$일 때, $h(g(1))=5$

$g(1)<t<b$일 때, $h(t)=4$

$t \ge b$일 때, $h(t)=3$

$$h(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 3 & (t=0 \text{ 또는 } t \ge b) \\ 6 & (0<t<g(1)) \\ 5 & (t=g(1)) \\ 4 & (g(1)<t<b) \end{cases}$$

이고 함수 $h(t)$는 (가)를 만족시킨다.

함수 $h(t)$가 $t=0$, $t=g(1)$, $t=b$에서만 불연속이므로 (나)에서

$\alpha=g(1)$, $\beta=b$

$g(1)=\alpha=h(0)=3$이므로

$\frac{b}{1+a}=3$

$h(\alpha)=h(g(1))=5$이고 $h(\alpha)=\beta-1=b-1$이므로

$b-1=5$ $\quad\therefore b=6$

$\frac{6}{1+a}=3$에서 $a=1$

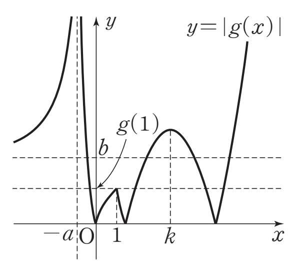
$f(k)=-6$이므로 $f(x)=(x-k)^2-6$

$f(1)=g(1)=3$이므로 $(1-k)^2-6=3$

$(k-1)^2=9$ $\quad\therefore k=4$ ($\because$ $k>1$)

$\therefore f(x)=(x-4)^2-6$

(iii) $f(k)<-b$일 때,



$|f(k)|>b$이므로 $g(1)<t \le b$인 t에 대하여 $h(t)=4$이고, $b<t<|f(k)|$인 t에 대하여 $h(t)=5$이므로 (가)를 만족시키지 않는다.

3단계 $f(a-b)$의 값 구하기

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)=(x-4)^2-6$이고, $a=1$, $b=6$이므로

$f(a-b)=f(-5)=81-6=75$

10 답 ③

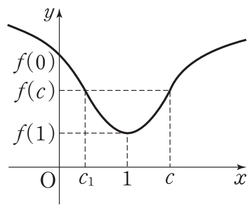
1단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. 함수 $f(x)$가 일대일함수이므로 열린구간 $(1, \infty)$에서 $f(c)=f(1)$인 c는 존재하지 않는다. 열린구간 $(1, \infty)$에서 $f(c)>f(1)$인 c가

존재한다고 가정하자. 이때 $f(x)$가 일대일함수이므로 $f(c)\neq f(0)$이다.

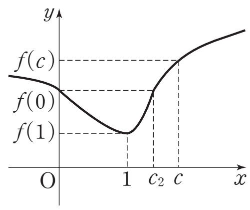
(i) $f(0)>f(c)$일 때,

$f(1)<f(c)<f(0)$이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c_1)=f(c)$인 c_1이 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다. 따라서 $f(c_1)=f(c)$이지만 $c_1\neq c$이므로 $f(x)$가 일대일함수라는 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $f(0)<f(c)$일 때,

$f(1)<f(0)<f(c)$이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c_2)=f(0)$인 c_2가 열린구간 $(1, c)$에 적어도 하나 존재한다. 따라서 $f(c_2)=f(0)$이지만 $c_2\neq 0$이므로 $f(x)$가 일대일함수라는 조건을 만족시키지 않는다.



(i), (ii)에서 열린구간 $(1, \infty)$에서 $f(c)>f(1)$인 c는 존재하지 않는다.

따라서 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<f(1)$이다.

2단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. (i) 닫힌구간 $[0, 1]$에 속하는 모든 실수 c에 대하여 $f(c)=f(0)$이면 $0<\alpha<\beta<1$인 실수 α, β에 대하여

$f(\alpha)=f(\beta)=f(0)$

(ii) 열린구간 $(0, 1)$에서 $f(c)\neq f(0)$인 c가 존재하면 $f(0)=f(1)$이므로 $f(0)$과 $f(c)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 k는 $f(c)$와 $f(1)$ 사이의 값이다. 따라서 사잇값 정리에 의하여 $f(\alpha)=k$인 α가 열린구간 $(0, c)$에 적어도 하나 존재하고, $f(\beta)=k$인 β가 열린구간 $(c, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, $f(\alpha)=f(\beta)$이고 $0<\alpha<c<\beta<1$인 실수 α, β가 존재한다.

(i), (ii)에서 $f(0)=f(1)$이면 $f(\alpha)=f(\beta)\ (0<\alpha<\beta<1)$인 실수 α, β가 존재한다.

3단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

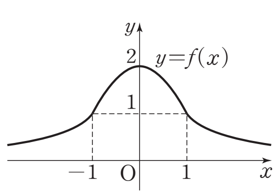
ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x} & (x\leq -1) \\ -x^2+2 & (-1<x<1) \\ \dfrac{1}{x} & (x\geq 1)\end{cases}$이라 하면

$\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=1$이므로

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 연속이다.

즉, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=0$이지만 함수 $f(x)$의 최솟값이 존재하지 않는다.



4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

기출 변형 문제로 단원 마스터

| 38~41쪽

01 ④	**02** 168	**03** 6	**04** ③	**05** ⑤	**06** 84
07 16	**08** 20	**09** ④	**10** 15	**11** 23	**12** 47
13 216	**14** ②	**15** $-\dfrac{87}{16}$			

01 답 ④

모든 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-1}{\{f(x)\}^2-k(x+1)f(x)}$의 값이 존재하는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) 모든 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}[\{f(x)\}^2-k(x+1)f(x)]\neq 0$인 경우

$\lim\limits_{x\to a}[\{f(x)\}^2-k(x+1)f(x)]$

$=\lim\limits_{x\to a}f(x)\{f(x)-k(x+1)\}$

$=\lim\limits_{x\to a}(x^2+4x+19)(x^2+4x+19-kx-k)$

$=\{(a+2)^2+15\}\{a^2+(4-k)a+19-k\}\neq 0$

이때 $(a+2)^2+15>0$이므로 방정식 $a^2+(4-k)a+19-k=0$을 만족시키는 실수 a가 존재하지 않아야 한다.

이차방정식 $a^2+(4-k)a+19-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(4-k)^2-4(19-k)<0$

$k^2-4k-60<0$

$(k+6)(k-10)<0$

$\therefore\ -6<k<10$

(ii) $\lim\limits_{x\to a}[\{f(x)\}^2-k(x+1)f(x)]=0$인 실수 a가 존재하는 경우

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-1}{\{f(x)\}^2-k(x+1)f(x)}$의 값이 존재하므로 $\lim\limits_{x\to a}(x-1)=0$이어야 한다.

즉, $a-1=0$ $\quad\therefore\ a=1$

$\lim\limits_{x\to 1}[\{f(x)\}^2-k(x+1)f(x)]$

$=\lim\limits_{x\to 1}f(x)\{f(x)-k(x+1)\}$

$=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+4x+19)(x^2+4x+19-kx-k)$

$=24(24-2k)$

즉, $24(24-2k)=0$에서 $k=12$

(i), (ii)에서 k의 값의 범위는 $-6<k<10$ 또는 $k=12$

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 k는 -5, -4, -3, $\dots$, 8, 9, 12의 16개이다.

02 답 168

(나)에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\{g(x)\}^2=0$에서 $f(0)\{g(0)\}^2=0$이고, $f(x)\{g(x)\}^2$은 x^6을 인수로 갖는다. 즉,

$f(x)\{g(x)\}^2=x^6h(x)\ (h(0)\neq 0)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

를 만족시키는 다항함수 $h(x)$가 존재한다.

그리고 (가)에서 $\{f(x)\}^2g(x)$의 차수가 6이므로 육차함수가 되는 경우를 다음과 같이 나누어 생각한다.

(i) $f(x)$와 $g(x)$가 모두 이차함수일 때,

㉠을 만족시키는 $f(x)$, $g(x)$는

$f(x)=ax^2$, $g(x)=bx^2$ (a, b는 양의 정수)으로 놓을 수 있다.

(가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2g(x)}{x^6}=\lim_{x\to\infty}\frac{(ax^2)^2\times bx^2}{x^6}=a^2b=2$$

(나)에서

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)\{g(x)\}^2}{x^6}=\lim_{x\to0}\frac{ax^2\times(bx^2)^2}{x^6}=ab^2=9$$

(다)에서

$$\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}bx^2=b=5$$

따라서 조건을 만족시키는 양의 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(ii) $f(x)$는 일차함수, $g(x)$는 사차함수일 때,
㉠을 만족시키는 $f(x)$, $g(x)$는
$f(x)=ax+b$, $g(x)=x^3(cx+d)$ (a, c는 양의 정수, $bd\neq0$)로 놓을 수 있다.

(가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2g(x)}{x^6}=\lim_{x\to\infty}\frac{(ax+b)^2\times x^3(cx+d)}{x^6}=a^2c=2$$

(나)에서

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)\{g(x)\}^2}{x^6}=\lim_{x\to0}\frac{(ax+b)\{x^3(cx+d)\}^2}{x^6}=bd^2=9$$

(다)에서

$$\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\{x^3(cx+d)\}=c+d=5$$

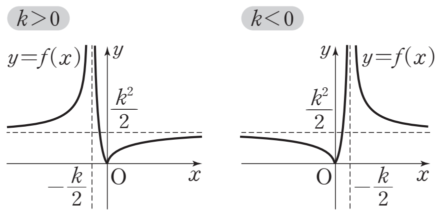
$a^2c=2$, $bd^2=9$, $c+d=5$를 만족시키는 네 상수 a, b, c, d는
$a=1$, $b=1$, $c=2$, $d=3$
$\therefore f(x)=x+1$, $g(x)=x^3(2x+3)$

(i), (ii)에서 $f(x)=x+1$, $g(x)=x^3(2x+3)$이므로
$f(2)\times g(2)=3\times(8\times7)=168$

03 답 6

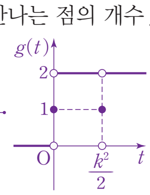
$$f(x)=\left|\frac{k^2x}{2x+k}\right|=\left|\frac{k^2\left(x+\frac{k}{2}\right)-\frac{k^3}{2}}{2\left(x+\frac{k}{2}\right)}\right|=\left|-\frac{k^3}{4\left(x+\frac{k}{2}\right)}+\frac{k^2}{2}\right|$$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 k의 값의 부호에 따라 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & \left(t=0 \text{ 또는 } t=\frac{k^2}{2}\right)\\ 2 & \left(0<t<\frac{k^2}{2} \text{ 또는 } t>\frac{k^2}{2}\right)\end{cases}$$



모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t\to a+}g(t)$, $\lim_{t\to a-}g(t)$의 값은 0 또는 2이고,
$g(a)$의 값은 0 또는 1 또는 2이다.
즉, $\lim_{t\to(k-4)-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)$의 값은 0 또는 2 또는 4이다.
이때 $\lim_{t\to(k-4)-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)+g(k+4)=3$을 만족시키려면
$\lim_{t\to(k-4)-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=2$, $g(k+4)=1$이어야 한다.
$g(k+4)=1$에서 $k+4=0$ 또는 $k+4=\frac{k^2}{2}$

$k+4=0$에서 $k=-4$
$k+4=\frac{k^2}{2}$에서 $k^2-2k-8=0$
$(k+2)(k-4)=0$ $\quad\therefore k=-2$ 또는 $k=4$

(i) $k=-4$일 때,

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t=0 \text{ 또는 } t=8)\\ 2 & (0<t<8 \text{ 또는 } t>8)\end{cases}$$ 이므로

$$\lim_{t\to(k-4)-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)+g(k+4)$$
$$=\lim_{t\to-8-}g(t)+\lim_{t\to-4+}g(t)+g(0)=0+0+1=1$$

따라서 $k=-4$이면 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k=-2$일 때,

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t=0 \text{ 또는 } t=2)\\ 2 & (0<t<2 \text{ 또는 } t>2)\end{cases}$$ 이므로

$$\lim_{t\to(k-4)-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)+g(k+4)$$
$$=\lim_{t\to-6-}g(t)+\lim_{t\to-2+}g(t)+g(2)=0+0+1=1$$

따라서 $k=-2$이면 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $k=4$일 때,

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t=0 \text{ 또는 } t=8)\\ 2 & (0<t<8 \text{ 또는 } t>8)\end{cases}$$ 이므로

$$\lim_{t\to(k-4)-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)+g(k+4)$$
$$=\lim_{t\to0-}g(t)+\lim_{t\to4+}g(t)+g(8)=0+2+1=3$$

따라서 $k=4$이면 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 $k=4$

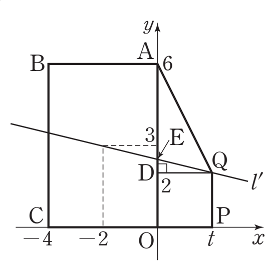
따라서 $f(x)=\left|\frac{16x}{2x+4}\right|=\left|\frac{8x}{x+2}\right|$이므로

$f(k+2)=f(6)=\left|\frac{48}{6+2}\right|=6$

04 답 ③

직선 l이 사각형 OPQA의 넓이와 오각형 ABCPQ의 넓이를 각각 이등분하므로 사각형 ABCO의 넓이도 이등분한다.
직사각형 ABCO의 넓이를 이등분하는 직선 l은 직사각형 ABCO의 두 대각선이 만나는 점 $(-2, 3)$을 지난다.
직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은
$y-3=m(x+2)$ $\quad\therefore y=mx+2m+3$

점 Q에서 y축에 내린 수선의 발을 D, 점 $(-2, 3)$과 점 Q를 지나는 직선을 l'이라 하고, 직선 l'과 y축이 만나는 점을 E라 하자.



직사각형 OPQD의 넓이는 $2t$이고 사각형 OPQE의 넓이는 사각형 OPQD와 삼각형 DQE의 넓이의 합과 같으므로 $2t$보다 크다.
이때 사각형 OPQA의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(2+6)\times t=4t$이므로 직선 l이 사각형 OPQA의 넓이를 이등분하기 위해서는 직선 l이 변 PQ와 만나야 한다.

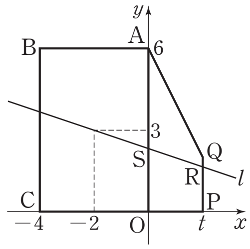
직선 l이 변 PQ와 만나는 점을 R라 하면

$R(t,\ mt+2m+3)$

직선 l이 y축과 만나는 점을 S라 하면

$S(0,\ 2m+3)$

이때 사각형 OPRS의 넓이가 $2t$이므로



$\frac{1}{2}(mt+2m+3+2m+3)\times t=2t$

$mt+4m+6=4,\ m(t+4)=-2$

$\therefore\ m=-\frac{2}{t+4}$

따라서 직선 l의 y절편 $f(t)$는

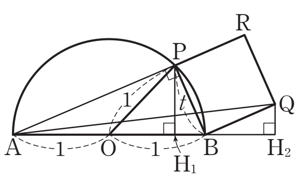
$f(t)=2m+3=-\frac{4}{t+4}+3$

$\therefore\ \lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{t\to0+}\left(-\frac{4}{t+4}+3\right)=-1+3=2$

05 답 ⑤

반원의 중심을 O라 하면 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OP}=1$

그림과 같이 두 점 P, Q에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.



원의 지름에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 $\angle APB=90^\circ$

직각삼각형 ABP에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{AB}^2,\ \overline{AP}^2+t^2=2^2$

$\overline{AP}^2=4-t^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\therefore\ \overline{AP}=\sqrt{4-t^2}\ (\because\ \overline{AP}>0)$

직각삼각형 OH_1P에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OH_1}^2+\overline{PH_1}^2=\overline{OP}^2,\ \overline{OH_1}^2+\overline{PH_1}^2=1^2$

$\therefore\ \overline{PH_1}^2=1-\overline{OH_1}^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

직각삼각형 AH_1P에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AH_1}^2+\overline{PH_1}^2=\overline{AP}^2$

$(1+\overline{OH_1})^2+(1-\overline{OH_1}^2)=4-t^2\ (\because$ ㉠, ㉡$)$

$2+2\overline{OH_1}=4-t^2\qquad\therefore\ \overline{OH_1}=1-\frac{t^2}{2}$

㉡에서 $\overline{PH_1}^2=1-\left(1-\frac{t^2}{2}\right)^2=t^2-\frac{t^4}{4}$

$\therefore\ \overline{PH_1}=\sqrt{t^2-\frac{t^4}{4}}=\frac{t\sqrt{4-t^2}}{2}\ (\because\ \overline{PH_1}>0)$

$\angle PH_1B=\angle BH_2Q=90^\circ$이고 $\overline{PB}=\overline{BQ}$, $\angle PBH_1=\angle BQH_2$이므로

$\triangle PH_1B\equiv\triangle BH_2Q$ (RHA 합동)

$\therefore\ \overline{QH_2}=\overline{BH_1}=1-\overline{OH_1}=\frac{t^2}{2},\ \overline{BH_2}=\overline{PH_1}=\frac{t\sqrt{4-t^2}}{2}$

직각삼각형 AH_2Q에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AQ}^2=\overline{AH_2}^2+\overline{QH_2}^2=(2+\overline{BH_2})^2+\overline{QH_2}^2$

$=\left(2+\frac{t\sqrt{4-t^2}}{2}\right)^2+\left(\frac{t^2}{2}\right)^2=4+2t\sqrt{4-t^2}+t^2$

$\therefore\ \lim_{t\to0+}\frac{\overline{AQ}^2-4}{t\,\overline{AP}}=\lim_{t\to0+}\frac{2t\sqrt{4-t^2}+t^2}{t\sqrt{4-t^2}}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{2\sqrt{4-t^2}+t}{\sqrt{4-t^2}}=\frac{4}{2}=2$

06 답 84

(가)에서 $\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{4x^2}-2f(x)}{x+f(x)}=\lim_{x\to0-}\frac{-2\{x+f(x)\}}{x+f(x)}=-2$이므로

$\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{4x^2}-2f(x)}{x+f(x)}=\lim_{x\to0+}\frac{2\{x-f(x)\}}{x+f(x)}=3$

$f(x)=px^2+qx+r$ (p, q, r는 상수, $p>0$)라 하면

$\lim_{x\to0+}\frac{2\{x-f(x)\}}{x+f(x)}=3$이므로

$\lim_{x\to0+}\frac{-2px^2-2(q-1)x-2r}{px^2+(q+1)x+r}=3$

이때 $r\neq0$이라 하면 $\lim_{x\to0+}\frac{-2px^2-2(q-1)x-2r}{px^2+(q+1)x+r}=\frac{-2r}{r}=-2$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ r=0$

$r=0$을 대입하면

$\lim_{x\to0+}\frac{-2px^2-2(q-1)x}{px^2+(q+1)x}=\lim_{x\to0+}\frac{-2px-2(q-1)}{px+(q+1)}=\frac{-2(q-1)}{q+1}=3$

$-2q+2=3q+3\qquad\therefore\ q=-\frac{1}{5}$

$\therefore\ f(x)=px^2-\frac{1}{5}x=x\left(px-\frac{1}{5}\right)$

(나)에서 $\lim_{x\to a}(\sqrt{4x^2}-5)\neq0$이면 $\lim_{x\to a}\frac{f(2x-7)f(2x-3)}{\sqrt{4x^2}-5}$의 값이 존재하므로 $\lim_{x\to a}(\sqrt{4x^2}-5)=0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to a}(\sqrt{4x^2}-5)=\sqrt{4a^2}-5=0,\ |2a|=5$

$\therefore\ a=-\frac{5}{2}$ 또는 $a=\frac{5}{2}$

(i) $\lim_{x\to a}\frac{f(2x-7)f(2x-3)}{\sqrt{4x^2}-5}$의 값이 존재하지 않는 실수 a의 값이 $-\frac{5}{2}$이면 $x=\frac{5}{2}$에서 극한값이 존재하고 $\lim_{x\to\frac{5}{2}}(\sqrt{4x^2}-5)=0$이므로

$\lim_{x\to\frac{5}{2}}f(2x-7)f(2x-3)=f(-2)\times f(2)=0$

$x\to\frac{5}{2}$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0

$f(-2)\times f(2)=-2\left(-2p-\frac{1}{5}\right)\times2\left(2p-\frac{1}{5}\right)=0$

$\left(2p+\frac{1}{5}\right)\left(2p-\frac{1}{5}\right)=0$

$\therefore\ p=\frac{1}{10}\ (\because\ p>0)$

(ii) $\lim_{x\to a}\frac{f(2x-7)f(2x-3)}{\sqrt{4x^2}-5}$의 값이 존재하지 않는 실수 a의 값이 $\frac{5}{2}$이면 $x=-\frac{5}{2}$에서 극한값이 존재하고 $\lim_{x\to-\frac{5}{2}}(\sqrt{4x^2}-5)=0$이므로

$\lim_{x\to-\frac{5}{2}}f(2x-7)f(2x-3)=f(-12)\times f(-8)=0$

$x\to-\frac{5}{2}$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0

$f(-12)\times f(-8)=-12\left(-12p-\frac{1}{5}\right)\times(-8)\left(-8p-\frac{1}{5}\right)=0$

$\left(12p+\frac{1}{5}\right)\left(8p+\frac{1}{5}\right)=0$

이때 $p>0$을 만족시키는 p의 값은 없다.

(i), (ii)에서 $p=\frac{1}{10}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{5}x=\frac{1}{10}x(x-2)$이므로

$f(30)=\frac{1}{10}\times30\times28=84$

07 답 16

$f(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=3$이고, 모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a}\frac{\{g(x)-x\}\times|xf(x)|}{f(x)}$의 값이 존재한다.

(ⅰ) $a=2$일 때,

$$\lim_{x\to 2-}\frac{\{g(x)-x\}\times|xf(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to 2-}\frac{\{g(x)-x\}\times xf(x)}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\{xg(x)-x^2\}$$
$$=2g(2)-4$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{\{g(x)-x\}\times|xf(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to 2+}\frac{\{g(x)-x\}\times\{-xf(x)\}}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\{-xg(x)+x^2\}$$
$$=-2g(2)+4$$

즉, $2g(2)-4=-2g(2)+4$에서 $4g(2)=8$이므로 $g(2)=2$

(ⅱ) $a=3$일 때,

$$\lim_{x\to 3-}\frac{\{g(x)-x\}\times|xf(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to 3-}\frac{\{g(x)-x\}\times\{-xf(x)\}}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to 3-}\{-xg(x)+x^2\}$$
$$=-3g(3)+9$$

$$\lim_{x\to 3+}\frac{\{g(x)-x\}\times|xf(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to 3+}\frac{\{g(x)-x\}\times xf(x)}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to 3+}\{xg(x)-x^2\}$$
$$=3g(3)-9$$

즉, $-3g(3)+9=3g(3)-9$에서 $6g(3)=18$이므로 $g(3)=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $g(2)=2$, $g(3)=3$이고, $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 $g(x)-x=(x-2)(x-3)h(x)=f(x)h(x)$ ($h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-x-xf(x)|}{g(x)-x}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)h(x)-xf(x)|}{f(x)h(x)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)||h(x)-x|}{f(x)h(x)}$$

이고, 모든 실수 a에서 이 극한값이 존재하므로

(ⅲ) $a=2$일 때,

$$\lim_{x\to 2-}\frac{|g(x)-x-xf(x)|}{g(x)-x}=\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)|h(x)-x|}{f(x)h(x)}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\frac{|h(x)-x|}{h(x)}$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{|g(x)-x-xf(x)|}{g(x)-x}=\lim_{x\to 2+}\frac{-f(x)|h(x)-x|}{f(x)h(x)}$$
$$=-\lim_{x\to 2+}\frac{|h(x)-x|}{h(x)}$$

에서

$$\lim_{x\to 2-}\frac{|h(x)-x|}{h(x)}=-\lim_{x\to 2+}\frac{|h(x)-x|}{h(x)}\quad\cdots\cdots ㉠$$

$h(2)=0$이면 ㉠의 값이 존재하지 않으므로 $h(2)\neq 0$이고

㉠에서 $\frac{|h(2)-2|}{h(2)}=-\frac{|h(2)-2|}{h(2)}$이므로 $h(2)=2$

(ⅳ) $a=3$일 때,

$$\lim_{x\to 3-}\frac{|g(x)-x-xf(x)|}{g(x)-x}=\lim_{x\to 3-}\frac{-f(x)|h(x)-x|}{f(x)h(x)}$$
$$=-\lim_{x\to 3-}\frac{|h(x)-x|}{h(x)}$$

$$\lim_{x\to 3+}\frac{|g(x)-x-xf(x)|}{g(x)-x}=\lim_{x\to 3+}\frac{f(x)|h(x)-x|}{f(x)h(x)}$$
$$=\lim_{x\to 3+}\frac{|h(x)-x|}{h(x)}$$

에서

$$-\lim_{x\to 3-}\frac{|h(x)-x|}{h(x)}=\lim_{x\to 3+}\frac{|h(x)-x|}{h(x)}\quad\cdots\cdots ㉡$$

$h(3)=0$이면 ㉡의 값이 존재하지 않으므로 $h(3)\neq 0$이고

㉡에서 $-\frac{|h(3)-3|}{h(3)}=\frac{|h(3)-3|}{h(3)}$이므로 $h(3)=3$

(ⅲ), (ⅳ)에서 $h(2)=2$, $h(3)=3$이고 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$h(x)-x=(x-2)(x-3)$

즉, $h(x)=(x-2)(x-3)+x$

이를 $g(x)-x=f(x)h(x)$에 대입하면

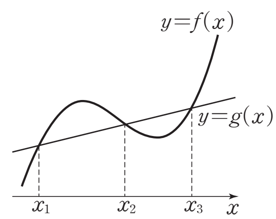
$g(x)-x=(x-2)(x-3)\{(x-2)(x-3)+x\}$

즉, $g(x)=(x-2)^2(x-3)^2+x(x-2)(x-3)+x$

$\therefore g(4)=4+8+4=16$

08 답 20

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 세 실근을 x_1, x_2, x_3 $(x_1<x_2<x_3)$이라 하자.



$x_1\le x\le x_2$ 또는 $x\ge x_3$일 때 $f(x)\ge g(x)$,

$x<x_1$ 또는 $x_2<x<x_3$일 때 $f(x)<g(x)$를 만족시키므로

$$h(x)=\begin{cases} g(x)+f(x) & (x_1\le x\le x_2 \text{ 또는 } x\ge x_3)\\ g(x)-f(x) & (x<x_1 \text{ 또는 } x_2<x<x_3)\end{cases}$$

함수 $h(x)$는 $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$을 제외한 모든 실수에서 극한값을 가지므로 (가)에서 $x_1=2$, $x_2=4$ 또는 $x_1=2$, $x_3=4$ 또는 $x_2=2$, $x_3=4$이다.

(ⅰ) $x_1=2$, $x_2=4$일 때,

$\lim_{x\to x_3-}h(x)=\lim_{x\to x_3+}h(x)$이고

$\lim_{x\to x_3-}h(x)=\lim_{x\to x_3-}\{g(x)-f(x)\}=g(x_3)-f(x_3)=0$이므로

$\lim_{x\to x_3+}h(x)=\lim_{x\to x_3+}\{g(x)+f(x)\}=g(x_3)+f(x_3)=2g(x_3)=0$

$\therefore g(x_3)=0$

이때 직선 $y=g(x)$의 기울기가 양수이므로

$g(x_2)=g(4)<0\quad\cdots\cdots ㉠$

$\lim_{x\to 4-}h(x)=\lim_{x\to 4-}\{g(x)+f(x)\}=g(4)+f(4)=2g(4)$이고

$\lim_{x\to 4+}h(x)=\lim_{x\to 4+}\{g(x)-f(x)\}=g(4)-f(4)=0$이므로

$\lim_{x\to 4-}|h(x)-x|=|2g(4)-4|>4$ ($\because$ ㉠),

$\lim_{x\to 4+}|h(x)-x|=|0-4|=4$

따라서 $\lim_{x\to 4}|h(x)-x|$의 값이 존재하지 않으므로 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $x_1=2$, $x_3=4$일 때,

$\lim_{x\to x_2-} h(x)=\lim_{x\to x_2+} h(x)$이고, (i)과 같은 방법으로 하면 $g(x_2)=0$

이때 직선 $y=g(x)$의 기울기가 양수이므로

$g(x_1)=g(2)<0$ …… ㉡

$\lim_{x\to 2-} h(x)=\lim_{x\to 2-} \{g(x)-f(x)\}=g(2)-f(2)=0$이고

$\lim_{x\to 2+} h(x)=\lim_{x\to 2+} \{g(x)+f(x)\}=g(2)+f(2)=2g(2)$이므로

$\lim_{x\to 2-} |h(x)-x|=|0-2|=2$,

$\lim_{x\to 2+} |h(x)-x|=|2g(2)-2|>2$ ($\because$ ㉡)

따라서 $\lim_{x\to 2} |h(x)-x|$의 값이 존재하지 않으므로 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $x_2=2$, $x_3=4$일 때,

$\lim_{x\to x_1-} h(x)=\lim_{x\to x_1+} h(x)$이고, (i)과 같은 방법으로 하면 $g(x_1)=0$

이때 직선 $y=g(x)$의 기울기가 양수이므로

$g(x_2)=g(2)>0$, $g(x_3)=g(4)>0$

$\lim_{x\to 2-} h(x)=\lim_{x\to 2-} \{g(x)+f(x)\}=g(2)+f(2)=2g(2)$이고

$\lim_{x\to 2+} h(x)=\lim_{x\to 2+} \{g(x)-f(x)\}=g(2)-f(2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2-} |h(x)-x|=|2g(2)-2|$, $\lim_{x\to 2+} |h(x)-x|=|0-2|=2$

이때 $|2g(2)-2|=2$이어야 하므로 $g(2)=2$ ($\because g(2)>0$)

또 $\lim_{x\to 4-} h(x)=\lim_{x\to 4-} \{g(x)-f(x)\}=g(4)-f(4)=0$이고

$\lim_{x\to 4+} h(x)=\lim_{x\to 4+} \{g(x)+f(x)\}=g(4)+f(4)=2g(4)$이므로

$\lim_{x\to 4-} |h(x)-x|=|0-4|=4$, $\lim_{x\to 4+} |h(x)-x|=|2g(4)-4|$

이때 $|2g(4)-4|=4$이어야 하므로 $g(4)=4$ ($\because g(4)>0$)

(i), (ii), (iii)에서 $g(2)=2$, $g(4)=4$이므로 일차함수 $g(x)$는

$g(x)=x$

$g(x_1)=0$에서 $x_1=0$이고,

$f(x_1)=f(0)=g(0)=0$, $f(x_2)=f(2)=g(2)=2$,

$f(x_3)=f(4)=g(4)=4$

따라서 $f(x)-g(x)=px(x-2)(x-4)$ ($p>0$인 상수)로 놓을 수 있다.

$x=3$에서 $f(3)<g(3)$이므로

$h(3)=g(3)-f(3)=3p=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore p=\frac{1}{6}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{6}x(x-2)(x-4)+g(x)=\frac{1}{6}x(x-2)(x-4)+x$

따라서 $x=6$에서 $f(6)>g(6)$이므로

$h(6)=g(6)+f(6)=6+\frac{1}{6}\times 6\times 4\times 2+6=20$

09 답 ④

$\lim_{x\to 2} g(x)=g(2)-6$ …… ㉠

이고, 함수 $g(x)$의 정의에 의하여 $f(2)\neq 1$인 경우와 $f(2)=1$인 경우로 나누어 ㉠을 만족시키는 경우를 찾아보자.

(i) $f(2)\neq 1$일 때,

$f(x)$가 연속함수이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)\neq 1$

즉, 2에 한없이 가까운 x에 대하여 $f(x)\neq 1$이므로

$g(x)=\frac{\{f(x+2)-1\}\{2f(x)+1\}}{f(x)-1}$

이때 함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 $f(x+2)-1$, $2f(x)+1$, $f(x)-1$은 모든 실수 x에서 각각 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2} g(x)=g(2)$

이는 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(2)=1$일 때,

함수 $f(x)$가 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=1$은 많아야 서로 다른 세 실근을 갖는다.

따라서 2가 아니면서 2에 한없이 가까운 x에 대하여 $f(x)\neq 1$이므로

$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x+2)-1\}\{2f(x)+1\}}{f(x)-1}$ …… ㉡

㉡에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

$\therefore \lim_{x\to 2}\{f(x+2)-1\}\{2f(x)+1\}=0$

즉, $\{f(4)-1\}\{2f(2)+1\}=0$에서 $f(4)=1$ ($\because f(2)=1$)

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=1$, $f(4)=1$이므로 $f(x)-1=(x-2)(x-4)(x+a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

이 식을 ㉡에 대입하면

$$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)(x+2+a)\{2(x-2)(x-4)(x+a)+3\}}{(x-2)(x-4)(x+a)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x(x+2+a)\{2(x-2)(x-4)(x+a)+3\}}{(x-4)(x+a)}$$
$$=\frac{6(4+a)}{-2(2+a)}=\frac{3(4+a)}{-2-a}$$

이때 $f(2)=1$이므로 $g(2)=4$

이를 ㉠에 대입하면 $\frac{3(4+a)}{-2-a}=4-6$

$12+3a=4+2a$ $\quad\therefore a=-8$

$\therefore f(x)-1=(x-2)(x-4)(x-8)$

(i), (ii)에서 $f(x)=(x-2)(x-4)(x-8)+1$이고, $f(3)\neq 1$이므로

$g(3)=\frac{\{f(5)-1\}\{2f(3)+1\}}{f(3)-1}=\frac{(-9)\times 13}{5}=-\frac{117}{5}$

10 답 15

$g(x-2)=\begin{cases} f(x-2) & (x<0 \text{ 또는 } x\geq 2) \\ -f(x-2) & (0\leq x<2)\end{cases}$이므로

$g(x)g(x-2)=\begin{cases} f(x)f(x-2) & (x<-2 \text{ 또는 } x\geq 2) \\ -f(x)f(x-2) & (-2\leq x<2)\end{cases}$이다.

$\lim_{x\to 0-} g(x)g(x-2)=-f(0)f(-2)$,

$\lim_{x\to 0+} g(x)g(x-2)=-f(0)f(-2)$,

$g(0)g(-2)=-f(0)f(-2)$

이므로 함수 $g(x)g(x-2)$는 $x=0$에서 연속이다.

함수 $g(x)$는 $x=-2$ 또는 $x=0$에서 불연속일 수 있고, 함수 $g(x-2)$는 $x=0$ 또는 $x=2$에서 불연속일 수 있다. 이때 함수 $g(x)g(x-2)$는 $x=0$에서 연속이므로 함수 $g(x)g(x-2)$는 $x=-2$ 또는 $x=2$에서 불연속일 수 있다. 즉, $k=-2$ 또는 $k=2$

그런데 k는 양수이므로 $k=2$

따라서 함수 $g(x)g(x-2)$는 $x=-2$에서 연속이고, $x=2$에서 불연속이다.

$\lim_{x\to -2-} g(x)g(x-2)=\lim_{x\to -2+} g(x)g(x-2)=g(-2)g(-4)$에서

$f(-2)f(-4)=-f(-2)f(-4)$

$\therefore f(-2)f(-4)=0$

이때 $f(-2)=f(0)$이므로 $f(0)f(-4)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\lim\limits_{x\to 2-} g(x)g(x-2)=-f(2)f(0)$,

$\lim\limits_{x\to 2+} g(x)g(x-2)=f(2)f(0)$,

$g(2)g(0)=f(2)f(0)$에서

$-f(2)f(0)\neq f(2)f(0)$, 즉 $f(2)f(0)\neq 0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $f(-4)=0$ ($\because$ ㉡)

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=(x+4)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

이때 $f(-2)=f(0)$이므로 $2(4-2a+b)=4b$ $\quad\therefore b=-2a+4$

$\therefore f(x)=(x+4)(x^2+ax-2a+4)$

(i) 이차방정식 $x^2+ax-2a+4=0$이 -4가 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합이 $-a$이고 방정식 $f(x)=0$의 세 실근의 합이 $-\frac{10}{3}$이므로

$-4-a=-\frac{10}{3}$ $\quad\therefore a=-\frac{2}{3}$

이때 이차방정식 $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{16}{3}=0$은 실근을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다. $\frac{D}{4}=\frac{1}{9}-\frac{16}{3}=-\frac{47}{9}<0$

(ii) 이차방정식 $x^2+ax-2a+4=0$이 -4와 $\frac{2}{3}$를 실근으로 갖는 경우 $-4+\frac{2}{3}=-\frac{10}{3}$

근과 계수의 관계에 의하여

$-4+\frac{2}{3}=-a$, $-4\times\frac{2}{3}=-2a+4$이므로 $a=\frac{10}{3}$

(iii) 이차방정식 $x^2+ax-2a+4=0$이 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+ax-2a+4=0$의 중근은 $-\frac{a}{2}$이고 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근의 합이 $-\frac{10}{3}$이므로

$-4+\left(-\frac{a}{2}\right)=-\frac{10}{3}$ $\quad\therefore a=-\frac{4}{3}$

이때 이차방정식 $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}=0$은 중근을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다. $\frac{D}{4}=\frac{4}{9}-\frac{20}{3}=-\frac{56}{9}<0$

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)=(x+4)\left(x^2+\frac{10}{3}x-\frac{8}{3}\right)=(x+4)^2\left(x-\frac{2}{3}\right)$

따라서 $f(-1)=9\times\left(-\frac{5}{3}\right)=-15$이므로

$g(-1)=-f(-1)=15$

11 답 23

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=g(0)$에서

$\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0+} \{f(x-a)+b\}=f(-a)+b$

$\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-} (x^2+6x+11)=11$

$g(0)=f(-a)+b$

따라서 $f(-a)+b=11$이어야 하므로 $a^2-6a+b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=x^2+6x+11=(x+3)^2+2$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 최솟값 2를 갖는다.

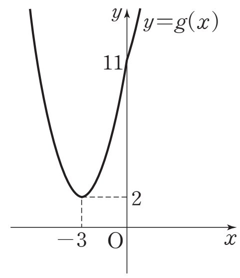
함수 $y=f(x-a)+b$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프이므로

$f(x-a)+b=(x-a+3)^2+2+b$

따라서 함수 $y=f(x-a)+b$는 $x=a-3$에서 최솟값 $2+b$를 갖는다.

(i) $a-3\le 0$인 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



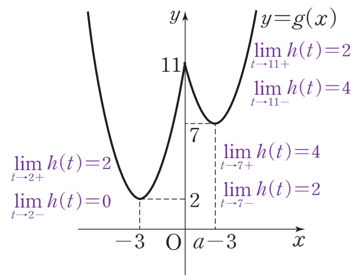
즉, $h(t)=\begin{cases} 0 & (t<2) \\ 1 & (t=2) \\ 2 & (t>2) \end{cases}$

따라서 $\left|\lim\limits_{t\to k+} h(t)-\lim\limits_{t\to k-} h(t)\right|=2$를 만족시키는 실수 k의 값은 2뿐이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a-3>0$인 경우

$\left|\lim\limits_{t\to k+} h(t)-\lim\limits_{t\to k-} h(t)\right|=2$를 만족시키는 k의 값이 2, 7, 11이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



즉, $h(t)=\begin{cases} 0 & (t<2) \\ 1 & (t=2) \\ 2 & (2<t<7 \text{ 또는 } t>11) \\ 3 & (t=7 \text{ 또는 } t=11) \\ 4 & (7<t<11) \end{cases}$

따라서 $g(a-3)=2+b=7$이므로 $b=5$

㉠에 $b=5$를 대입하면 $a^2-6a+5=0$, $(a-1)(a-5)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=5$

그런데 $a-3>0$, 즉 $a>3$이므로 $a=5$

(i), (ii)에서 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ f(x-5)+5 & (x\ge 0) \end{cases}$이므로

$g(6)=f(6-5)+5=f(1)+5=(1+6+11)+5=23$

12 답 47

직선 $y=m(x+6)$은 기울기가 m ($m>0$)이고 점 $(-6,\ 0)$을 지나는 직선이다.

함수 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ ($x\ge 0$)의 그래프와 곡선 $x^2+y^2=12$ ($y\ge 0$)는 한 점 $(3,\ \sqrt{3})$에서 만나고, 함수 $y=-\sqrt{2}x$ ($x<0$)의 그래프와 곡선 $x^2+y^2=12$ ($y\ge 0$)는 한 점 $(-2,\ 2\sqrt{2})$에서 만난다.

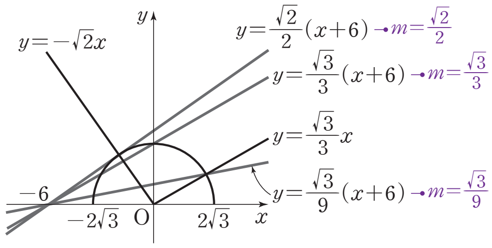
직선 $y=m(x+6)$이 점 $(3,\ \sqrt{3})$을 지날 때 $m=\frac{\sqrt{3}}{9}$이고,

점 $(-2,\ 2\sqrt{2})$를 지날 때 $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

이때 두 점 $(0,\ 0)$, $(-2,\ 2\sqrt{2})$를 지나는 직선의 기울기가 $-\sqrt{2}$이므로

곡선 $x^2+y^2=12\,(y\ge 0)$ 위의 점 $(-2,\ 2\sqrt{2})$에서의 접선의 기울기는
서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.
$\frac{\sqrt{2}}{2}$이다. 즉, 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+6)$은 곡선 $x^2+y^2=12\,(y\ge 0)$ 위의 점 $(-2,\ 2\sqrt{2})$에서의 접선이다.

직선 $y=m(x+6)$을 m의 값에 따라 나타내면 그림과 같다.



$0<m<\frac{\sqrt{3}}{9}$일 때, $f(m)=4$

$m=\frac{\sqrt{3}}{9}$일 때, $f(m)=3$

$\frac{\sqrt{3}}{9}<m<\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때, $f(m)=4$

$\frac{\sqrt{3}}{3}\le m<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $f(m)=3$

$m\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $f(m)=1$

$$\therefore f(m)=\begin{cases} 1 & \left(m\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ 3 & \left(m=\frac{\sqrt{3}}{9} \text{ 또는 } \frac{\sqrt{3}}{3}\le m<\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ 4 & \left(0<m<\frac{\sqrt{3}}{9} \text{ 또는 } \frac{\sqrt{3}}{9}<m<\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\end{cases}$$

따라서 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(m)$은 $m=\frac{\sqrt{3}}{9}$, $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서만 불연속이므로

$54(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)=54\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=47$

13 답 216

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서도 연속이다.

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0+} g(x)=g(0)$에서

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-} (x+2)f(x)=2f(0)$

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+} (x+a)f(x-b)=af(-b)$

$g(0)=af(-b)$

즉, $2f(0)=af(-b)$ …… ㉠

$x<0$일 때 $g(x)=(x+2)f(x)$이므로

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+2)^2}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|)(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|)}{(x+2)^2(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{|g(x)|}{(x+2)^2(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{|(x+2)f(x)|}{(x+2)^2(\sqrt{|(x+2)f(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{|(x+2)f(x)|}{(x+2)^2(\sqrt{\{g(t)\}^2}+|g(t)|)}\ \left(\because \lim_{x\to -2}\sqrt{|(x+2)f(x)|}=0\right)$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{|(x+2)f(x)|}{(x+2)^2\times 2|g(t)|} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서 $t\ne -2$, $t\ne 5$인 모든 실수 t에 대하여 이 극한값이 존재하므로 $f(x)$는 $x+2$를 인수로 갖는다.

$f(x)=(x+2)(x+k)$ (k는 상수)라 하면 ㉡에서

$$\lim_{x\to -2}\frac{|(x+2)f(x)|}{(x+2)^2\times 2|g(t)|}=\lim_{x\to -2}\frac{|(x+2)^2(x+k)|}{(x+2)^2\times 2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{|x+k|}{2|g(t)|}$$

이때 $t=-2$와 $t=5$에서만 이 극한값이 존재하지 않으므로 방정식 $g(x)=0$의 근은 -2와 5뿐이다.

$\therefore g(-2)=0,\ g(5)=0$

$x<0$일 때 $g(x)=(x+2)f(x)$이므로 $g(-2)=0$을 만족시킨다.

$x\ge 0$일 때 $g(x)=(x+a)f(x-b)$이므로 $g(5)=0$에서

$(5+a)f(5-b)=0$

$\therefore f(5-b)=0\ (\because a>0)$

이때 $f(x)=(x+2)(x+k)$이므로

$(5-b+2)(5-b+k)=0$

$\therefore b=7$ 또는 $b=k+5$

(i) $b=7$일 때,

$f(x)=(x+2)(x+k)$에서

$f(x-b)=f(x-7)=(x-5)(x-7+k)$이므로

$$g(x)=\begin{cases}(x+2)^2(x+k) & (x<0)\\ (x+a)(x-5)(x-7+k) & (x\ge 0)\end{cases}$$

$x<0$에서 방정식 $g(x)=0$의 근은 -2뿐이므로

$-k\ge 0$ 또는 $k=2$

$\therefore k\le 0$ 또는 $k=2$ …… ㉢

$x\ge 0$에서 방정식 $g(x)=0$의 근은 5뿐이므로

$7-k<0$ 또는 $7-k=5\ (\because a>0)$

$\therefore k>7$ 또는 $k=2$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $k=2$

(ii) $b=k+5$일 때,

$f(x)=(x+2)(x+k)$에서

$f(x-b)=f(x-k-5)=(x-k-3)(x-5)$이므로

$$g(x)=\begin{cases}(x+2)^2(x+k) & (x<0)\\ (x+a)(x-k-3)(x-5) & (x\ge 0)\end{cases}$$

$b>2$이므로 $k+5>2$ $\quad\therefore k>-3$

$x<0$에서 방정식 $g(x)=0$의 근은 -2뿐이므로

$-k\ge 0$ 또는 $k=2$

$\therefore k\le 0$ 또는 $k=2$

그런데 $k>-3$이므로

$-3<k\le 0$ 또는 $k=2$ …… ㉤

$x\ge 0$에서 방정식 $g(x)=0$의 근은 5뿐이므로

$k+3<0$ 또는 $k+3=5\ (\because a>0)$

$\therefore k<-3$ 또는 $k=2$

그런데 $k>-3$이므로 $k=2$ …… ㉥

㉤, ㉥에서 $k=2$

(i), (ii)에서 $k=2$, $b=7$

$f(x)=(x+2)^2$이고 ㉠에서 $2f(0)=af(-7)$이므로

$8=25a \quad \therefore a=\frac{8}{25}$

따라서 $x\ge 0$에서 $g(x)=\left(x+\frac{8}{25}\right)f(x-7)=\left(x+\frac{8}{25}\right)(x-5)^2$이므로

$50g(4)=50\times\frac{108}{25}\times 1=216$

14 답 ②

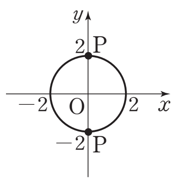
삼각형 OAP에서 변 OA의 길이는 1이므로 점 P와 직선 OA 사이의 거리를 h라 하면
점 P의 y좌표와 같다.

$\triangle OAP=\frac{1}{2}\times1\times h=\frac{1}{2}h$

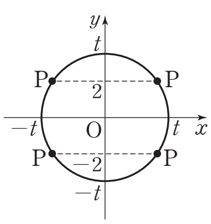
이때 삼각형 OAP의 넓이가 자연수이려면 점 P와 직선 OA 사이의 거리 h가 2의 배수이어야 한다.

(i) $0<t<2$일 때,
점 P는 원 C 위의 점이므로 $h<2$
따라서 h가 2의 배수가 되는 점 P가 존재하지 않는다.
$\therefore f(t)=0$

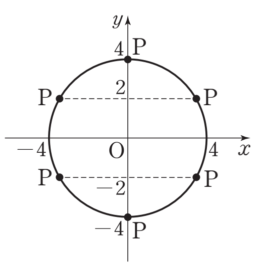
(ii) $t=2$일 때,
그림과 같이 $h=2$가 되는 점 P는 2개이므로
$f(t)=2$



(iii) $2<t<4$일 때,
그림과 같이 $h=2$가 되는 점 P는 4개이므로
$f(t)=4$



(iv) $t=4$일 때,
그림과 같이 $h=2$가 되는 점 P는 4개,
$h=4$가 되는 점 P는 2개이므로
$f(t)=6$



(i)~(iv)와 같은 방법으로 점 P의 개수 $f(t)$를 구하면

$$f(t)=\begin{cases}0 & (0<t<2)\\ 2 & (t=2)\\ 4 & (2<t<4)\\ 6 & (t=4)\\ 8 & (4<t<6)\\ \vdots\end{cases}$$

ㄱ. $f(3)=4$

ㄴ. $\lim_{t\to4+}f(t)=8$, $f(4)=6$이므로
$\lim_{t\to4+}f(t)\neq f(4)$

ㄷ. 함수 $f(t)$는 t가 2의 배수일 때 불연속이므로 $0<a<50$인 실수 a에 대하여 $t=a$에서 불연속인 a는 2, 4, 6, …, 48의 24개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

15 답 $-\frac{87}{16}$

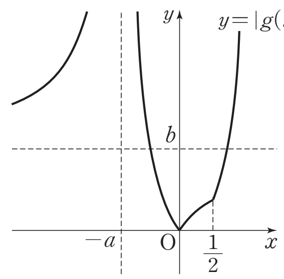
$y=\frac{bx}{x+a}=-\frac{ab}{x+a}+b$이므로 함수 $y=\frac{bx}{x+a}$의 그래프의 점근선은
$x=-a$, $y=b$

함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 연속이므로

$g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}-}\frac{bx}{x+a}=\frac{b}{1+2a}<b$ ($\because$ $a>0$, $b>0$)

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표를 k(k는 상수)라 하자.

$k\le\frac{1}{2}$일 때, 함수 $y=|g(x)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

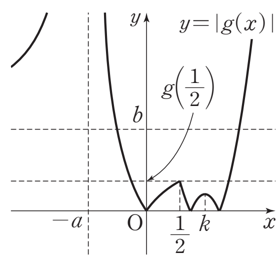


$0<t\le b$인 t에 대하여 $h(t)=2$이고, $t>b$인 t에 대하여 $h(t)=3$이므로 (가)를 만족시키지 않는다.

따라서 $k>\frac{1}{2}$이다.

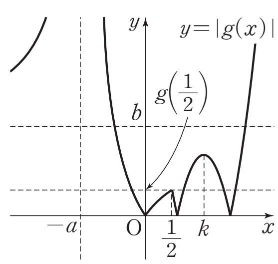
(i) $f(k)>-b$일 때,

ⓘ $f(k)\ge-g\left(\frac{1}{2}\right)$일 때,



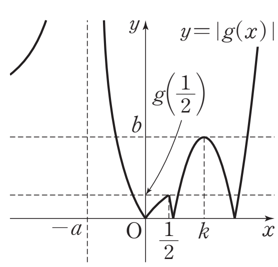
$|f(k)|\le g\left(\frac{1}{2}\right)$이므로 $g\left(\frac{1}{2}\right)<t\le b$인 t에 대하여 $h(t)=2$이고, $t>b$인 t에 대하여 $h(t)=3$이므로 (가)를 만족시키지 않는다.

ⓘⓘ $-b<f(k)<-g\left(\frac{1}{2}\right)$일 때,



$g\left(\frac{1}{2}\right)<|f(k)|<b$이므로 $|f(k)|<t\le b$인 t에 대하여 $h(t)=2$이고, $t>b$인 t에 대하여 $h(t)=3$이므로 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f(k)=-b$일 때,



$t<0$일 때, $h(t)=0$

$t=0$일 때, $h(0)=3$

$0<t<g\left(\frac{1}{2}\right)$일 때, $h(t)=6$

$t=g\left(\frac{1}{2}\right)$일 때, $h\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)=5$

$g\left(\frac{1}{2}\right)<t<b$일 때, $h(t)=4$

$t\geq b$일 때, $h(t)=3$

$$h(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 3 & (t=0 \text{ 또는 } t\geq b) \\ 6 & \left(0<t<g\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ 5 & \left(t=g\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ 4 & \left(g\left(\frac{1}{2}\right)<t<b\right) \end{cases}$$

이고 함수 $h(t)$는 ㈎를 만족시킨다.

함수 $h(t)$가 $t=0$, $t=g\left(\frac{1}{2}\right)$, $t=b$에서만 불연속이므로 ㈏에서

$\alpha=g\left(\frac{1}{2}\right)$, $\beta=b$

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha=h(0)-1=3-1=2$이므로

$\frac{b}{1+2a}=2$

$h(\alpha)=h\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)=5$이고 $h(\alpha)=\beta-2=b-2$이므로

$b-2=5 \qquad \therefore b=7$

$\frac{7}{1+2a}=2$에서 $a=\frac{5}{4}$

$f(k)=-7$이므로 $f(x)=(x-k)^2-7$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=2$이므로

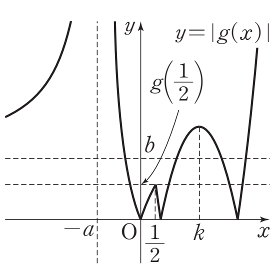
$\left(\frac{1}{2}-k\right)^2-7=2$

즉, $\left(k-\frac{1}{2}\right)^2=9$에서

$k=\frac{7}{2}\ \left(\because k>\frac{1}{2}\right)$

$\therefore f(x)=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-7$

(iii) $f(k)<-b$일 때,



$|f(k)|>b$이므로 $g\left(\frac{1}{2}\right)<t\leq b$인 t에 대하여 $h(t)=4$이고, $b<t<|f(k)|$인 t에 대하여 $h(t)=5$이므로 ㈎를 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-7$이고, $a=\frac{5}{4}$, $b=7$이므로

$f\left(a+\frac{b}{2}\right)=f\left(\frac{5}{4}+\frac{7}{2}\right)$

$=\frac{25}{16}-7=-\frac{87}{16}$

03 미분계수와 도함수

STEP 1 핵심 문제

44~45쪽

01 ①	02 24	03 ⑤	04 ③	05 $\frac{3}{4}$	06 ③
07 ②	08 ②	09 10	10 ③	11 15	12 7

01 답 ①

$A(n)=\frac{f(n)-f(1)}{n-1}=\frac{(n^3+an^2+bn)-(1+a+b)}{n-1}$

$=\frac{(n-1)\{n^2+(a+1)n+a+b+1\}}{n-1}$

$=n^2+(a+1)n+a+b+1$

$A(2)=1$에서 $4+2(a+1)+a+b+1=1$

$\therefore 3a+b=-6$ ⋯⋯ ㉠

$A(3)=3$에서 $9+3(a+1)+a+b+1=3$

$\therefore 4a+b=-10$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=6$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2+6x$이므로 $f'(x)=3x^2-8x+6$

$\therefore f'(1)=3-8+6=1$

다른 풀이 정의를 이용하여 미분계수 구하기

$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3-4x^2+6x-3}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-3x+3)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2-3x+3)=1$

02 답 24

$\lim_{x\to2}\frac{g(x-1)-3}{x-2}=2$에서 $x-1=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to1$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{g(x-1)-3}{x-2}=\lim_{t\to1}\frac{g(t)-3}{t-1}=2$

이때 $\lim_{t\to1}\frac{g(t)-3}{t-1}=2$에서 $t\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{t\to1}\{g(t)-3\}=0$에서

$g(1)-3=0 \qquad \therefore g(1)=3$

따라서 $\lim_{t\to1}\frac{g(t)-3}{t-1}=\lim_{t\to1}\frac{g(t)-g(1)}{t-1}=g'(1)$이므로

$g'(1)=2$

$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)+3g\left(1+\frac{2}{n}\right)-13\right\}$에서

$\frac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $h\to0+$이므로

$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)+3g\left(1+\frac{2}{n}\right)-13\right\}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{f(1+3h)+3g(1+2h)-13}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{f(1+3h)-4}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{3\{g(1+2h)-3\}}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times3+\lim_{h\to0+}\frac{g(1+2h)-g(1)}{2h}\times6$

$=3f'(1)+6g'(1)$

$=3\times4+6\times2=24$

03 답 ⑤

$\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(1)+f(1)-f(x^2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{(x^2-1)f(1)}{x-1}-\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}\right\}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{(x+1)(x-1)f(1)}{x-1}-\frac{f(x^2)-f(1)}{(x-1)(x+1)}\times(x+1)\right\}$

$=\lim_{x\to1}\left\{(x+1)f(1)-\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$

$=\lim_{x\to1}(x+1)f(1)-\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\lim_{x\to1}(x+1)$

$=2f(1)-f'(1)\times2=2\times3-2\times2=2$

$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{f(x)-f(1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{f(x)-f(1)}$

$=\lim_{x\to1}(x+1)\times\frac{1}{\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}$

$=2\times\frac{1}{f'(1)}=2\times\frac{1}{2}=1$

$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}+\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{f(x)-f(1)}=2+1=3$

04 답 ③

(가)에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=0$에서

$f(1)-g(1)=0 \qquad \therefore\ f(1)=g(1)$

$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)+f(1)-g(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)-g(x)+g(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$=f'(1)-g'(1)$

$\therefore\ f'(1)-g'(1)=5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(나)에서

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)+g(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)+g(x)-g(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}+\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$=f'(1)+g'(1)$

$\therefore\ f'(1)+g'(1)=7 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $f'(1)=6$, $g'(1)=1$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-a\}=0$에서

$f(1)-a=0 \qquad \therefore\ a=f(1) \qquad \cdots\cdots$ ㉢

이때 $f(1)=g(1)$이므로 $g(1)=a \qquad \cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$에 대입하면

$ab=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=6$

05 답 $\frac{3}{4}$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)+g(x)}{x^2-4}$에서 $x-2=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)+g(x)}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)+g(x)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{f(t)+g(2+t)}{t(t+4)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t(t+4)}+\lim_{t\to0}\frac{g(2+t)}{t(t+4)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\times\lim_{t\to0}\frac{1}{t+4}+\lim_{t\to0}\frac{g(2+t)-g(2)}{t}\times\lim_{t\to0}\frac{1}{t+4}$

$=2\times\frac{1}{4}+g'(2)\times\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

06 답 ③

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ -4)$에서의 접선의 기울기가 m이므로

$f'(2)=m$

$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(2+2h)-f(2-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+2h)-f(2)+f(2)-f(2-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{2h}\times2+\lim_{h\to0}\frac{f(2-3h)-f(2)}{-3h}\times3$

$=2f'(2)+3f'(2)$

$=5f'(2)=5m$

즉, $5m=-m+2$이므로 $6m=2 \qquad \therefore\ m=\frac{1}{3}$

07 답 ②

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore\ f(0)=0$

도함수의 정의에 의하여

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+f(h)+2xh\}-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}2x$

$=f'(0)+2x$

$=2x+1$

$\therefore\ f'(-1)+f'(1)+f'(3)=(-2+1)+(2+1)+(6+1)=9$

08 답 ②

$g(x)=(x^2-2x+2)f(x)$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g(2)=2f(2)$

$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x+2)f'(x)$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g'(2)=2f(2)+2f'(2)$

$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1}=-2$에서 $f(2)\neq\frac{1}{2}$이라 하면

$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1}=\frac{g(2)-1}{2f(2)-1}=\frac{2f(2)-1}{2f(2)-1}=1\neq-2$이므로 $f(2)=\frac{1}{2}$

즉, $g(2)=2f(2)=1$이고, $g'(2)=2f(2)+2f'(2)=1+2f'(2)$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{2f(x)-2f(2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\frac{g(x)-g(2)}{x-2}}{2\times\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}$$

$$=\frac{g'(2)}{2f'(2)} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

그런데 $f'(2)=0$이라 하면 $g'(2)=1$이므로 $\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1}$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $f'(2)\neq0$이므로 ㉠에서

$$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1}=\frac{g'(2)}{2f'(2)}=\frac{g'(2)}{g'(2)-1}$$

즉, $\frac{g'(2)}{g'(2)-1}=-2$이므로

$g'(2)=-2g'(2)+2$, $3g'(2)=2$ $\quad\therefore g'(2)=\frac{2}{3}$

09 답 10

$f(x)=x^n+3x^2+ax+b$에서 $g(x)=f'(x)=nx^{n-1}+6x+a$

$\{g(x)\}^2$의 차수는 $2(n-1)=2n-2$이므로 $\frac{d}{dx}\{g(x)\}^2$의 차수는 $2n-3$이다.

$\frac{d}{dx}\{g(x)\}^2=36f(x)$에서 $\frac{d}{dx}\{g(x)\}^2$의 차수와 $f(x)$의 차수가 같으므로

$2n-3=n \quad \therefore n=3$

$\therefore f(x)=x^3+3x^2+ax+b$, $g(x)=3x^2+6x+a$

$\frac{d}{dx}\{g(x)\}^2=2g(x)g'(x)$이고, $g'(x)=6x+6$이므로

$\frac{d}{dx}\{g(x)\}^2=36f(x)$에서

$2(3x^2+6x+a)(6x+6)=36(x^3+3x^2+ax+b)$

$(x+1)(3x^2+6x+a)=3(x^3+3x^2+ax+b)$

$3x^3+9x^2+(a+6)x+a=3x^3+9x^2+3ax+3b$

즉, $a+6=3a$, $a=3b$이므로 $a=3$, $b=1$

$\therefore n+2a+b=3+6+1=10$

10 답 ③

$x^{10}(x^2+ax+b)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $2^{10}(x-2)$이므로

$x^{10}(x^2+ax+b)=(x-2)^2Q(x)+2^{10}(x-2) \quad \cdots\cdots$ ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{10}(4+2a+b)=0 \quad \therefore 4+2a+b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9(x^2+ax+b)+x^{10}(2x+a)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+2^{10}$

양변에 $x=2$를 대입하면

$10\times2^9(4+2a+b)+2^{10}(4+a)=2^{10}$

$2^{10}(4+a)=2^{10}$ ($\because$ ㉡)

$a+4=1 \quad \therefore a=-3$

이를 ㉡에 대입하면

$4-6+b=0 \quad \therefore b=2$

$\therefore a+2b=-3+4=1$

11 답 15

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$\lim_{x\to1+}(3ax^2+x+b)=\lim_{x\to1-}(ax^3+4x)=3a+1+b$

$3a+1+b=a+4 \quad \therefore 2a+b=3 \quad \cdots\cdots$ ㉠ ······ **배점 30%**

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=1$에서도 미분가능하다.

즉, 미분계수 $f'(1)$이 존재하고, $f'(x)=\begin{cases}3ax^2+4 & (x<1)\\ 6ax+1 & (x>1)\end{cases}$이므로

$\lim_{x\to1+}f'(x)=\lim_{x\to1-}f'(x)$에서

$\lim_{x\to1+}(6ax+1)=\lim_{x\to1-}(3ax^2+4)$

$6a+1=3a+4$, $3a=3 \quad \therefore a=1$ ······ **배점 40%**

이를 ㉠에 대입하면

$2+b=3 \quad \therefore b=1$ ······ **배점 10%**

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^3+4x & (x<1)\\ 3x^2+x+1 & (x\geq1)\end{cases}$이므로

$f(-2)+f(3)=(-8-8)+(27+3+1)=15$ ······ **배점 20%**

다른 풀이 미분계수의 정의를 이용하여 a의 값 구하기

미분계수 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{3ax^2+x+b-(3a+1+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{3ax^2+x-3a-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(3ax+3a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(3ax+3a+1)=6a+1$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{ax^3+4x-(3a+1+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{ax^3+4x-(a+4)}{x-1}\ (\because \text{㉠})$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(ax^2+ax+a+4)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(ax^2+ax+a+4)=3a+4$$

즉, $6a+1=3a+4$이므로 $3a=3 \quad \therefore a=1$

12 답 7

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 $m=4$

한편 함수 $y=x$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $xf(x)$의 미분가능성은 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 x에 대해서만 미분가능성을 확인하면 된다.

(i) $x=-1$일 때,

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 불연속이므로 함수 $xf(x)$도 $x=-1$에서 불연속이다.

즉, 함수 $xf(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

(ii) $x=0$일 때,

$\lim_{x\to0+}\frac{xf(x)}{x}=\lim_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to0-}\frac{xf(x)}{x}=\lim_{x\to0-}f(x)=0$

즉, $\lim_{x\to0+}\frac{xf(x)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{xf(x)}{x}$이므로 함수 $xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(iii) $x=1$일 때,

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속이므로 함수 $xf(x)$도 $x=1$에서 불연속이다.

즉, 함수 $xf(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(iv) $x=3$일 때,

$f(x)=\begin{cases} -x+3 & (1<x<3) \\ 3x-9 & (x\ge3) \end{cases}$이므로

$xf(x)=\begin{cases} -x^2+3x & (1<x<3) \\ 3x^2-9x & (x\ge3) \end{cases}$

이때 $g(x)=xf(x)$라 하면

$g'(x)=\begin{cases} -2x+3 & (1<x<3) \\ 6x-9 & (x>3) \end{cases}$이므로

$\lim\limits_{x\to3+} g'(x)=\lim\limits_{x\to3+}(6x-9)=9$

$\lim\limits_{x\to3-} g'(x)=\lim\limits_{x\to3-}(-2x+3)=-3$

즉, $\lim\limits_{x\to3+} g'(x)\ne\lim\limits_{x\to3-} g'(x)$이므로 함수 $g(x)$, 즉 함수 $xf(x)$는 $x=3$에서 미분가능하지 않다.

(i)~(iv)에서 함수 $xf(x)$는 $x=-1$, $x=1$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 $n=3$

$\therefore m+n=7$

다른 풀이 미분계수의 정의를 이용하여 $x=3$에서의 미분가능성 확인하기

(iv) $x=3$일 때,

$$\lim_{x\to3+}\frac{xf(x)-3f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{3x(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}3x=9$$

$$\lim_{x\to3-}\frac{xf(x)-3f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}\frac{-x(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}(-x)=-3$$

즉, $\lim\limits_{x\to3+}\frac{xf(x)-3f(3)}{x-3}\ne\lim\limits_{x\to3-}\frac{xf(x)-3f(3)}{x-3}$이므로 함수 $xf(x)$는 $x=3$에서 미분가능하지 않다.

STEP 2 고난도 문제

46~50쪽

01 17	02 ④	03 9	04 ③	05 ⑤	06 $\frac{5}{2}$
07 $\frac{3}{2}$	08 ③	09 29	10 ②	11 7	12 5
13 ⑤	14 52	15 18	16 36	17 4	18 ③
19 ⑤	20 ④	21 12	22 11	23 ④	24 $\frac{1}{32}$
25 147	26 ④				

01 답 17

$f(x)=\frac{1}{1-x}$에서

$$f^2(x)=f(f(x))=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1}{\frac{-x}{1-x}}=\frac{x-1}{x}$$

$$f^3(x)=f(f^2(x))=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

$$f^4(x)=f(f^3(x))=\frac{1}{1-x}=f(x)$$

즉, 음이 아닌 정수 k에 대하여

$f^{3k+1}(x)=\frac{1}{1-x}$, $f^{3k+2}(x)=\frac{x-1}{x}$, $f^{3k+3}(x)=x$ ············ 배점 30%

(i) $n=3k+1$일 때,

$g(x)=f^{3k+1}(x)=\frac{1}{1-x}$이므로 x의 값이 2에서 3까지 변할 때의 함수 $g(x)$의 평균변화율은

$\frac{g(3)-g(2)}{3-2}=\frac{-\frac{1}{2}-(-1)}{3-2}=\frac{1}{2}$ ············ 배점 20%

(ii) $n=3k+2$일 때,

$g(x)=f^{3k+2}(x)=\frac{x-1}{x}$이므로 x의 값이 2에서 3까지 변할 때의 함수 $g(x)$의 평균변화율은

$\frac{g(3)-g(2)}{3-2}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{3-2}=\frac{1}{6}$ ············ 배점 20%

(iii) $n=3k+3$일 때,

$g(x)=f^{3k+3}(x)=x$이므로 x의 값이 2에서 3까지 변할 때의 함수 $g(x)$의 평균변화율은

$\frac{g(3)-g(2)}{3-2}=\frac{3-2}{3-2}=1$ ············ 배점 20%

(i), (ii), (iii)에서 x의 값이 2에서 3까지 변할 때의 함수 $g(x)$의 평균변화율이 $\frac{1}{6}$이 되도록 하는 자연수 n은 $n=3k+2$ 꼴이다.

이때 $1\le n\le50$이므로 자연수 n은 2, 5, 8, …, 50의 17개이다.

············ 배점 10%

02 답 ④

$$\lim_{x\to3}\frac{27f(x)-x^3f(3)}{9g(x)-x^2g(3)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{27f(x)-27f(3)+27f(3)-x^3f(3)}{9g(x)-9g(3)+9g(3)-x^2g(3)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{27\{f(x)-f(3)\}-(x^3-27)f(3)}{9\{g(x)-g(3)\}-(x^2-9)g(3)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{27\{f(x)-f(3)\}-(x-3)(x^2+3x+9)f(3)}{9\{g(x)-g(3)\}-(x+3)(x-3)g(3)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to3}\left\{27\times\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right\}-\lim\limits_{x\to3}\{(x^2+3x+9)f(3)\}}{\lim\limits_{x\to3}\left\{9\times\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\right\}-\lim\limits_{x\to3}\{(x+3)g(3)\}}$$

$$=\frac{27f'(3)-27f(3)}{9g'(3)-6g(3)}=\frac{9\{f'(3)-f(3)\}}{3g'(3)-2g(3)}$$

이때 $f'(3)=f(3)+8$에서 $f'(3)-f(3)=8$, $g'(3)=\frac{2}{3}g(3)+2$에서 $3g'(3)-2g(3)=6$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{27f(x)-x^3f(3)}{9g(x)-x^2g(3)}=\frac{9\{f'(3)-f(3)\}}{3g'(3)-2g(3)}=\frac{9\times8}{6}=12$$

03 답 9

함수 $f(x)=\begin{cases} -ax+2a & (x<2) \\ ax-2a & (x\geq 2)\end{cases}$에 대하여

(ⅰ) $k<2$일 때,

$$\lim_{x\to k}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=f'(k)=-a \text{이므로}$$

$$\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=-a$$

$$\therefore \lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}-\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=-a-(-a)=0\neq 6$$

(ⅱ) $k=2$일 때,

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{ax-2a}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{a(x-2)}{x-2}=a,$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{-ax+2a}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{-a(x-2)}{x-2}=-a$$

이므로

$$\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}-\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=a-(-a)=2a$$

즉, $2a=6$이므로 $a=3$

(ⅲ) $k>2$일 때,

$$\lim_{x\to k}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=f'(k)=a \text{이므로}$$

$$\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=a$$

$$\therefore \lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}-\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=a-a=0\neq 6$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a=3$, $k=2$이므로

$f(a+k)=f(3+2)=f(5)=15-6=9$

04 답 ③

(가)에서 $f(a)$와 $f(b)$의 값의 부호가 서로 다르고 $f(a)\neq 0$, $f(b)\neq 0$ …… ㉠

(나)의 $\lim_{x\to a}\frac{x-a}{f(x)-3}=\frac{1}{3}$에서 $x\to a$일 때 (분자)$\to 0$이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to a}\{f(x)-3\}=0$에서 $f(a)-3=0$ $\quad\therefore f(a)=3$ …… ㉡

$f(a)$의 값은 양수이다.

$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{x-a}{f(x)-3}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{f(x)-f(a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}=\frac{1}{f'(a)}$$

즉, $\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{3}$이므로 $f'(a)=3$ …… ㉢

$x=a$인 점에서의 접선의 기울기가 양수이다.

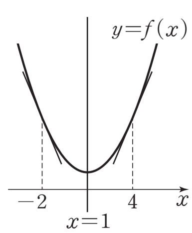
(다)에서 $f'(a)+f'(b)=3$이고, $f'(a)=3$이므로 $f'(b)=0$ …… ㉣

$x=b$인 점에서의 접선의 기울기가 0이다.

따라서 ㉠~㉣에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형으로 가능한 것은 ③이다.

05 답 ⑤

ㄱ. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 그림과 같다.



이때 $x=-2$인 점에서의 접선의 기울기와 $x=4$인 점에서의 접선의 기울기는 부호가 반대이고, 그 절댓값의 크기가 같으므로

$f'(-2)=-f'(4)$

ㄴ. $m=0$이면 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$에서

$f(a)=f(b)$

이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고, $a<b$이므로

$a<1$, $b>1$

ㄷ. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $f(x)=p(x-1)^2+q$ (p, q는 상수, $p>0$)라 하면

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$=\frac{\{p(b-1)^2+q\}-\{p(a-1)^2+q\}}{b-a}$$

$$=\frac{pb^2-2pb+p+q-pa^2+2pa-p-q}{b-a}$$

$$=\frac{p(b^2-a^2)-2p(b-a)}{b-a}$$

$$=\frac{p(b-a)(b+a)-2p(b-a)}{b-a}$$

$$=\frac{p(b-a)(b+a-2)}{b-a}$$

$$=p(a+b-2)$$

이때 $a+b>2$이면 $p(a+b-2)>0$이므로

$m>0$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

06 답 $\frac{5}{2}$

$(x-2)f'(x)=3f(x)-x^2-x$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=3f(2)-6$, $3f(2)=6$

$\therefore f(2)=2$

$x\neq 2$일 때, $f'(x)=\frac{3f(x)-x^2-x}{x-2}$

다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, $x=2$에서도 연속이므로

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}f'(x)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3f(x)-x^2-x}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3f(x)-3f(2)+3f(2)-x^2-x}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3\{f(x)-f(2)\}-x^2-x+6}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3\{f(x)-f(2)\}-(x+3)(x-2)}{x-2}$$

$$=3\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to 2}(x+3)$$

$$=3f'(2)-5$$

따라서 $f'(2)=3f'(2)-5$이므로

$2f'(2)=5 \quad \therefore f'(2)=\frac{5}{2}$

07 답 $\frac{3}{2}$

$f(x-y)=f(x)-f(y)+axy(x-y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)-f(0)$

$\therefore f(0)=0$ ………… 배점 **20%**

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)-f(-h)-axh(x+h)\}-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-h)-f(0)}{-h}-\lim_{h\to0}ax(x+h)$$
$$=f'(0)-ax^2$$
$$=-ax^2+2$$ ······ 배점 **40%**

이때 $f'(a)=-6$에서

$-a^3+2=-6,\ a^3=8$

$\therefore\ a=2$ ($\because$ a는 실수) ······ 배점 **20%**

따라서 $f'(x)=-2x^2+2$이므로

$f'\left(\frac{a}{4}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$ ······ 배점 **20%**

08 답 ③

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x+y)$ ······ ㉠

ㄱ. ㉠의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$

$\therefore\ f(0)=0$

㉠의 양변에 $y=-x$를 대입하면 $f(0)=f(x)+f(-x)$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+f(h)+2xh(x+h)\}-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}2x(x+h)$$
$$=f'(0)+2x^2$$
$$=2x^2+a$$ ······ ㉡

이때 $f'(3)=2f'(1)+1$에서

$18+a=2(2+a)+1$

$\therefore\ a=13$

ㄷ. $\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-4bx}{x-2}=3-2b$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}\{2f(x)-4bx\}=0$에서

$2f(2)-8b=0,\ 2f(2)=8b$

$\therefore\ f(2)=4b$

$$\therefore\ \lim_{x\to2}\frac{2f(x)-4bx}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-8b+8b-4bx}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2\{f(x)-4b\}-4b(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2\{f(x)-f(2)\}}{x-2}-\lim_{x\to2}4b$$
$$=2f'(2)-4b$$
$$=2(8+a)-4b\ (\because\ ㉡)$$
$$=16+2a-4b$$

즉, $16+2a-4b=3-2b$이므로

$2a-2b=-13\qquad\therefore\ a-b=-\frac{13}{2}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

09 답 29

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)g(x-h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)g(x-h)-f(x)g(x-h)+f(x)g(x-h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+2h)-f(x)\}g(x-h)+f(x)\{g(x-h)-g(x)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\times2g(x-h)\right\}-\lim_{h\to0}\left\{\frac{g(x-h)-g(x)}{-h}\times f(x)\right\}$$
$$=2f'(x)g(x)-g'(x)f(x)$$
$$=2\{g(x)\}^2-g'(x)f(x)\ (\because\ f'(x)=g(x))$$

이때 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a>0$)라 하면

$g(x)=f'(x)=2ax+b,\ g'(x)=2a$

$$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)g(x-h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$=2\{g(x)\}^2-g'(x)f(x)$$
$$=2(2ax+b)^2-2a(ax^2+bx+c)$$
$$=6a^2x^2+6abx+2b^2-2ac$$

즉, $6a^2x^2+6abx+2b^2-2ac=24x^2-12x-10$이므로

$6a^2=24,\ 6ab=-12,\ 2b^2-2ac=-10$

$6a^2=24$에서 $a^2=4\qquad\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

$a=2$를 $6ab=-12$에 대입하면

$12b=-12\qquad\therefore\ b=-1$

$a=2,\ b=-1$을 $2b^2-2ac=-10$에 대입하면

$2-4c=-10,\ 4c=12\qquad\therefore\ c=3$

따라서 $f(x)=2x^2-x+3,\ g(x)=4x-1$이므로

$f(3)+g(3)=(18-3+3)+(12-1)=29$

10 답 ②

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 a이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$이므로 $f(x)=a(x-1)^2+b$ (b는 상수)라 하면

$f'(x)=2a(x-1)=2ax-2a$

$|f'(x)|\le4x^2+5$에서

$|2ax-2a|\le4x^2+5$

$-4x^2-5\le2ax-2a\le4x^2+5$

(i) $-4x^2-5\le2ax-2a$에서 $4x^2+2ax-2a+5\ge0$

모든 실수 x에 대하여 이 부등식이 성립하려면 이차방정식 $4x^2+2ax-2a+5=0$의 판별식을 D_1이라 할 때,

$\frac{D_1}{4}=a^2-4(-2a+5)\le0$

$a^2+8a-20\le0,\ (a+10)(a-2)\le0$

$\therefore\ -10\le a\le2$

(ii) $2ax-2a\le4x^2+5$에서 $4x^2-2ax+2a+5\ge0$

모든 실수 x에 대하여 이 부등식이 성립하려면 이차방정식 $4x^2-2ax+2a+5=0$의 판별식을 D_2라 할 때,

$\frac{D_2}{4}=a^2-4(2a+5)\le0$

$a^2-8a-20\le0,\ (a+2)(a-10)\le0$

$\therefore\ -2\le a\le10$

(i), (ii)에서 $-2\le a\le2$

그런데 $a\ne0$이므로 $-2\le a<0$ 또는 $0<a\le2$

따라서 a의 최댓값은 2이다.

idea

11 답 7

$x^4-2x^2+3x \le f(x) \le 2x^4+x^2+3x$의 각 변에 $x=0$을 대입하면

$0 \le f(0) \le 0 \quad \therefore f(0)=0$

(i) $x<0$일 때,

$x^4-2x^2+3x \le f(x) \le 2x^4+x^2+3x$에서

$2x^3+x+3 \le \dfrac{f(x)}{x} \le x^3-2x+3$

$\therefore 2x^3+x+3 \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \le x^3-2x+3$

이때 $\lim\limits_{x \to 0-}(2x^3+x+3)=3$, $\lim\limits_{x \to 0-}(x^3-2x+3)=3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x \to 0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=3$

(ii) $x>0$일 때,

$x^4-2x^2+3x \le f(x) \le 2x^4+x^2+3x$에서

$x^3-2x+3 \le \dfrac{f(x)}{x} \le 2x^3+x+3$

$\therefore x^3-2x+3 \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \le 2x^3+x+3$

이때 $\lim\limits_{x \to 0+}(x^3-2x+3)=3$, $\lim\limits_{x \to 0+}(2x^3+x+3)=3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x \to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=3$

(i), (ii)에서 $\lim\limits_{x \to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=3$, $\lim\limits_{x \to 0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=3$이므로

$f'(0)=3$

한편 $g(x)=(2x+1)f(x)+3x^2+4x$에서

$g'(x)=2f(x)+(2x+1)f'(x)+6x+4$

$\therefore g'(0)=2f(0)+f'(0)+4=0+3+4=7$

12 답 5

$g(x)=x^{n+1}+3x^n$이라 하면 $g(1)=4$이므로

$$f(n)=\lim_{x \to 1}\frac{x-1}{x^{n+1}+3x^n-4}=\lim_{x \to 1}\frac{x-1}{g(x)-g(1)}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\frac{1}{g'(1)}$$

$g'(x)=(n+1)x^n+3nx^{n-1}$이므로

$g'(1)=n+1+3n=4n+1$

$\therefore f(n)=\dfrac{1}{4n+1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{k} f(n)f(n+1)=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+5}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{17}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+5}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4k+5}\right)$$

즉, $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{4k+5}\right)=\dfrac{1}{25}$이므로

$\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{4k+5}=\dfrac{4}{25}$, $\dfrac{1}{4k+5}=\dfrac{1}{25}$

$4k+5=25$, $4k=20 \quad \therefore k=5$

개념 NOTE

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $A \ne B$)

idea

13 답 ⑤

$f(x+p)+f(x-p)=2f(x)$에서

$f(x)-f(x-p)=f(x+p)-f(x)$

$\dfrac{f(x)-f(x-p)}{p}=\dfrac{f(x+p)-f(x)}{p}$

$\therefore \dfrac{f(x)-f(x-p)}{x-(x-p)}=\dfrac{f(x+p)-f(x)}{(x+p)-x}$

즉, 모든 실수 x에 대하여 두 점 $(x-p,\ f(x-p))$, $(x,\ f(x))$를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(x,\ f(x))$, $(x+p,\ f(x+p))$를 지나는 직선의 기울기가 서로 같으므로 $f(x)$는 일차 이하의 다항함수이다.

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=a$

이때 $f'(p)=3$에서 $a=3$

따라서 $f'(x)=3$이므로

$f'(-p)+f'(0)+f'(2p)=3+3+3=9$

14 답 52

상수 k에 대하여 $f(1)=f(2)=f(3)=k$라 하면

방정식 $f(x)-k=0$의 세 근이 1, 2, 3이다.

이때 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로

$f(x)-k=2(x-1)(x-2)(x-3)$

즉, $f(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)+k$이므로

$g(x)=(x-a)f(x)=2(x-a)(x-1)(x-2)(x-3)+k(x-a)$

$\therefore g'(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)+2(x-a)(x-2)(x-3)$
$\quad +2(x-a)(x-1)(x-3)+2(x-a)(x-1)(x-2)+k$ ······ 배점 30%

이때 곡선 $y=g(x)$ 위의 x좌표가 1, 2인 점에서의 접선의 기울기가 각각 -12, 10이므로

$g'(1)=-12$, $g'(2)=10$ ······ 배점 20%

$g'(1)=-12$에서 $4(1-a)+k=-12$

$\therefore 4a-k=16$ ······ ㉠

$g'(2)=10$에서 $-2(2-a)+k=10$

$\therefore 2a+k=14$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=5$, $k=4$ ······ 배점 30%

$\therefore g'(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)+2(x-2)(x-3)(x-5)$
$\quad +2(x-1)(x-3)(x-5)+2(x-1)(x-2)(x-5)+4$

$\therefore g'(a)=g'(5)=2\times4\times3\times2+4=52$ ······ 배점 20%

15 답 18

(가)의 $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=3$에서 $x \to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x \to 1}f(x)=0$에서 $f(1)=0$

(나)의 $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{f(x)}{(x-2)f'(x)}=a$에서 $x \to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to2} f(x)=0$에서 $f(2)=0$

$f(1)=0$, $f(2)=0$이므로

$f(x)=a(x-1)(x-2)(x+b)$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=a(x-2)(x+b)+a(x-1)(x+b)+a(x-1)(x-2)$

이때 $b\neq-2$이면

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}=\lim_{x\to2}\frac{a(x-1)(x-2)(x+b)}{(x-2)f'(x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{a(x-1)(x+b)}{f'(x)}$$
$$=\frac{a(2+b)}{a(2+b)}=1$$

그런데 (나)에서 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}\neq1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ b=-2$

즉, $f(x)=a(x-1)(x-2)^2$이므로 (가)에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)(x-2)^2}{x-1}=\lim_{x\to1}a(x-2)^2=a$$

$\therefore\ a=3$

따라서 $f(x)=3(x-1)(x-2)^2$, $f'(x)=3(x-2)^2+6(x-1)(x-2)$이므로 (나)에서

$$a=\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{3(x-1)(x-2)^2}{3(x-2)^3+6(x-1)(x-2)^2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x-1}{x-2+2(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x-1}{3x-4}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ a\times f(4)=\frac{1}{2}\times(3\times3\times4)=18$

16 답 36

(가)에서 $f(1)=-\frac{4}{5}$이므로 $a+2b=-\frac{4}{5}$ …… ㉠

(나)에서 $g(x)=x^{n+1}+ax^n+b$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$x^{n+1}+ax^n+b=(x-1)^2Q_1(x)$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b=0$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-\frac{6}{5}$, $b=\frac{1}{5}$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(n+1)x^n+anx^{n-1}=2(x-1)Q_1(x)+(x-1)^2Q_1'(x)$

양변에 $x=1$을 대입하면

$n+1+an=0$

$a=-\frac{6}{5}$이므로 $n+1-\frac{6}{5}n=0$, $\frac{1}{5}n=1$ $\therefore\ n=5$

따라서 다항식 $bx^{n+1}-ax^n=\frac{1}{5}x^6+\frac{6}{5}x^5$을 $(x-1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지가 $h(x)$이므로

$\frac{1}{5}x^6+\frac{6}{5}x^5=(x-1)^2(x-2)Q_2(x)+h(x)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{6}{5}x^5+6x^4=2(x-1)(x-2)Q_2(x)+(x-1)^2Q_2(x)$$
$$+(x-1)^2(x-2)Q_2'(x)+h'(x)$$

양변에 $x=1$을 대입하면

$h'(1)=\frac{36}{5}$ $\therefore\ 5h'(1)=36$

개념 NOTE

다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=f(\alpha)$

17 답 4

(나)에서 $f(1)=f(2)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ (a는 상수)라 하자.

또 (가)에서 $g(1)=0$이므로

$g(x)=(x-1)(x^2+bx+c)$ (b, c는 상수)라 하자.

이때 (나)에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-1)(x^2+bx+c)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-2)(x-a)}{x^2+bx+c}=0$$

$\therefore\ a=1$

$\therefore\ f(x)=(x-1)^2(x-2)=x^3-4x^2+5x-2$

따라서 $f'(x)=3x^2-8x+5$이고, $g'(x)\neq0$이므로 (다)에서

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{g(x)-g(2)}=\frac{\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}{\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}}=\frac{f'(2)}{g'(2)}=\frac{1}{g'(2)}$$

즉, $\frac{1}{g'(2)}=\frac{1}{13}$이므로 $g'(2)=13$

같은 방법으로 하면 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{g(x)-g(3)}=\frac{8}{g'(3)}$

즉, $\frac{8}{g'(3)}=\frac{2}{7}$이므로 $g'(3)=28$

이때 $g(x)=x^3+(b-1)x^2+(c-b)x-c$에서

$g'(x)=3x^2+2(b-1)x+c-b$

$g'(2)=13$에서 $3b+c+8=13$ $\therefore\ 3b+c=5$ …… ㉠

$g'(3)=28$에서 $5b+c+21=28$ $\therefore\ 5b+c=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=1$, $c=2$

따라서 $g'(x)=3x^2+1$이므로 $g'(-1)=3+1=4$

18 답 ③

(가)에서 $-1+a-b>-1$ $\therefore\ a>b$ …… ㉠

(나)에서 $(1+a+b)-(-1+a-b)>8$

$2+2b>8$, $2b>6$ $\therefore\ b>3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a>b>3$ …… ㉢

ㄱ. $f(x)=x^3+ax^2+bx$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-3b$

이때 ㉢에 의하여

$a^2-3b>b^2-3b=b(b-3)>0$

즉, $D_1>0$이므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $f'(x)=3x^2+2ax+b$에서

$f'(-1)=3-2a+b=(3-a)+(b-a)<0$ ($\because$ ㉢)

$f'(x)$는 연속함수이고, $f'(-1)<0$이므로 $-1<x<1$에서

$f'(x)<0$인 x가 존재한다.

ㄷ. 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$에서

$x^3+ax^2+bx-(3k^2+2ak+b)x=0$

$x(x^2+ax-3k^2-2ak)=0$ …… ㉣

즉, 삼차방정식 ㉣의 한 근이 0이므로 삼차방정식 ㉣의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 이차방정식 $x^2+ax-3k^2-2ak=0$이 0이 아닌 중근을 갖거나 0과 0이 아닌 한 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2+ax-3k^2-2ak=0$이 0이 아닌 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+ax-3k^2-2ak=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=a^2-4(-3k^2-2ak)=0$

$12k^2+8ak+a^2=0$, $(2k+a)(6k+a)=0$

$\therefore\ k=-\dfrac{a}{2}$ 또는 $k=-\dfrac{a}{6}$ ㉣에 k의 값을 대입하면 $x\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2=0$이고, $a\neq0$이므로 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

(ii) 이차방정식 $x^2+ax-3k^2-2ak=0$이 0과 0이 아닌 한 실근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+ax-3k^2-2ak=0$의 한 근이 0이므로

$-3k^2-2ak=0$, $k(3k+2a)=0$

$\therefore\ k=0$ 또는 $k=-\dfrac{2}{3}a$ ⟶ ㉣에 k의 값을 대입하면 $x^2(x+a)=0$이고, $a\neq0$이므로 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 개수는 4이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

19 답 ⑤

함수 $f(x)$의 최고차항을 x^n (n은 자연수)이라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 nx^{n-1}이다.

$(2x+1)f(x)-\left(x^2-x-\dfrac{3}{4}\right)f'(x)=x^2+4x+\dfrac{7}{4}$에서 좌변의 최고차항은 $2x^{n+1}-nx^{n+1}$, 즉 $(2-n)x^{n+1}$이고 우변의 최고차항은 x^2이므로

$n=1$ 또는 $n=2$

(i) $n=1$일 때,

$f(x)=x+a$ (a는 상수)라 하면 $f'(x)=1$이므로

$(2x+1)f(x)-\left(x^2-x-\dfrac{3}{4}\right)f'(x)$

$=(2x+1)(x+a)-\left(x^2-x-\dfrac{3}{4}\right)$

$=x^2+2(a+1)x+a+\dfrac{3}{4}$

즉, $x^2+2(a+1)x+a+\dfrac{3}{4}=x^2+4x+\dfrac{7}{4}$이므로

$2(a+1)=4$, $a+\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{4}$ $\qquad\therefore\ a=1$

따라서 $f(x)=x+1$이므로 $f(1)=1+1=2$

(ii) $n=2$일 때,

$f(x)=x^2+bx+c$ (b, c는 상수)라 하면 $f'(x)=2x+b$이므로

$(2x+1)f(x)-\left(x^2-x-\dfrac{3}{4}\right)f'(x)$

$=(2x+1)(x^2+bx+c)-\left(x^2-x-\dfrac{3}{4}\right)(2x+b)$

$=(b+3)x^2+\left(2b+2c+\dfrac{3}{2}\right)x+\dfrac{3}{4}b+c$

즉, $(b+3)x^2+\left(2b+2c+\dfrac{3}{2}\right)x+\dfrac{3}{4}b+c=x^2+4x+\dfrac{7}{4}$이므로

$b+3=1$, $2b+2c+\dfrac{3}{2}=4$, $\dfrac{3}{4}b+c=\dfrac{7}{4}$

$\therefore\ b=-2$, $c=\dfrac{13}{4}$

따라서 $f(x)=x^2-2x+\dfrac{13}{4}$이므로

$f(1)=1-2+\dfrac{13}{4}=\dfrac{9}{4}$

(i), (ii)에서 모든 $f(1)$의 값의 합은 $2+\dfrac{9}{4}=\dfrac{17}{4}$

20 답 ④

(나)의 $g(x)=x^2f(x)$에서

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

이를 (가)의 등식에 대입하면

$xf'(x)+2xf(x)+x^2f'(x)=4x\{f(x)+1\}$

$(x^2+x)f'(x)=2xf(x)+4x$

$x(x+1)f'(x)=2x\{f(x)+2\}$

$\therefore\ (x+1)f'(x)=2\{f(x)+2\}$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

(i) $f(x)$가 상수함수일 때,

$f(0)=0$이므로 $f(x)=0$이고, $f'(x)=0$

이는 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)$가 일차 이상의 함수일 때,

함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n ($a\neq0$, n은 자연수)이라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 anx^{n-1}이다.

㉠에서 좌변의 최고차항은 anx^n이고, 우변의 최고차항은 $2ax^n$이므로

$an=2a$ $\qquad\therefore\ n=2$ ($\because\ a\neq0$)

따라서 $f(x)$는 이차함수이고, $f(0)=0$이므로

$f(x)=ax^2+bx$ (b는 상수)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

이를 ㉠에 대입하면

$(x+1)(2ax+b)=2(ax^2+bx+2)$

$2ax^2+(2a+b)x+b=2ax^2+2bx+4$

즉, $2a+b=2b$, $b=4$이므로 $a=2$

$\therefore\ f(x)=2x^2+4x$

(i), (ii)에서 $f(x)=2x^2+4x$이므로

$f(1)=2+4=6$

21 답 12

(가)의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=g(1)+1$ $\qquad\therefore\ g(1)=-1$

(가)의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)$

$=2(x-2)g(x)+(x-2)^2g'(x)+3x^2-4x-1$

양변에 $x=1$을 대입하면

$0=-2g(1)+g'(1)-2$

이때 $g(1)=-1$이므로

$0=2+g'(1)-2$ $\qquad\therefore\ g'(1)=0$

(i) $g(x)$가 일차함수일 때,

(나)에서 함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x)=x+a$ (a는 상수)라 하면 $g'(x)=1$

그런데 $g'(1)=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $g(x)$가 이차함수일 때,

(나)에서 함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x)=x^2+bx+c$ (b, c는 상수)라 하면

$g'(x)=2x+b$

$g(1)=-1$에서 $1+b+c=-1$

$\therefore\ b+c=-2$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$g'(1)=0$에서 $2+b=0$ $\qquad\therefore\ b=-2$

이를 ㉠에 대입하면

$-2+c=-2$ $\qquad\therefore\ c=0$

(i), (ii)에서 $g_1(x)=x^2-2x$

이를 ㈎의 등식의 우변 $g(x)$에 대입하면

$$\begin{aligned}(x-2)^2g(x)+x^3-2x^2-x+3&=(x-2)^2(x^2-2x)+x^3-2x^2-x+3\\&=x^4-5x^3+10x^2-9x+3\\&=(x-1)^2(x^2-3x+3)\end{aligned}$$

즉, $(x-1)^2f_1(x)=(x-1)^2(x^2-3x+3)$이므로

$f_1(x)=x^2-3x+3$

따라서 $f_1'(x)=2x-3$, $g_1'(x)=2x-2$이므로

$f_1'(3)g_1'(3)=(6-3)\times(6-2)=12$

22 답 11

㈏의 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)}{x-2}$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}g(x)=0$에서 $g(2)=0$ …… ㉠

(i) $g(x)$가 일차함수일 때,

㉠에서 $g(x)=-2(x-2)=-2x+4$이므로 $g'(x)=-2$

이를 ㈎의 등식에 대입하면

$-2(x^2-1)=2x(-2x+4)+ax^2+bx-5$

$-2x^2+2=(a-4)x^2+(b+8)x-5$

이때 모든 실수 x에 대하여 등식을 만족시키는 상수 a, b는 존재하지 않는다.

(ii) $g(x)$가 이차 이상의 함수일 때,

함수 $g(x)$의 최고차항을 $-2x^n$ $(n\geq2)$이라 하면 $g'(x)$의 최고차항은 $-2nx^{n-1}$이다.

㈎의 등식에서 좌변의 최고차항은 $-2nx^{n+1}$이고, 우변의 최고차항은 $-4x^{n+1}$이므로

$-2n=-4$ $\quad\therefore n=2$

따라서 $g(x)$는 이차함수이고, ㉠에서 $g(2)=0$이므로

$g(x)=(x-2)(-2x+k)=-2x^2+(k+4)x-2k$ (k는 상수)라 하면 $g'(x)=-4x+k+4$

이를 ㈎의 등식에 대입하면

$(x^2-1)(-4x+k+4)$

$=2x\{-2x^2+(k+4)x-2k\}+ax^2+bx-5$ …… ㉡

이때 좌변의 상수항은 $-k-4$, 우변의 상수항은 -5이므로

$-k-4=-5$ $\quad\therefore k=1$

이를 ㉡에 대입하면

$(x^2-1)(-4x+5)=2x(-2x^2+5x-2)+ax^2+bx-5$

$-4x^3+5x^2+4x-5=-4x^3+(a+10)x^2+(b-4)x-5$

즉, $5=a+10$, $4=b-4$이므로

$a=-5$, $b=8$

(i), (ii)에서 $a=-5$, $b=8$이므로

$a+2b=-5+16=11$

23 답 ④

ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 각각 $x=2$에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$도 $x=2$에서 연속이다.

$1<x\leq2$에서 $f(x)=-x+3$, $g(x)=x$이고, $2<x<3$에서 $f(x)=2x-3$, $g(x)=-x+4$이므로

$$f(x)g(x)=\begin{cases}(-x+3)x & (1<x\leq2)\\(2x-3)(-x+4) & (2<x<3)\end{cases}=\begin{cases}-x^2+3x & (1<x\leq2)\\-2x^2+11x-12 & (2<x<3)\end{cases}$$

이때 $h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$$h'(x)=\begin{cases}-2x+3 & (1<x<2)\\-4x+11 & (2<x<3)\end{cases}$$

즉, $\lim\limits_{x\to2+}h'(x)=\lim\limits_{x\to2+}(-4x+11)=3$,

$\lim\limits_{x\to2-}h'(x)=\lim\limits_{x\to2-}(-2x+3)=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to2+}h'(x)\neq\lim\limits_{x\to2-}h'(x)$

따라서 미분계수 $h'(2)$가 존재하지 않으므로 함수 $h(x)$, 즉 함수 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$도 $x=4$에서 연속이다.

$3<x\leq4$에서 $f(x)=x-2$이고, $4<x<6$에서 $f(x)=-x+6$이므로

$$\{f(x)\}^2=\begin{cases}(x-2)^2 & (3<x\leq4)\\(-x+6)^2 & (4<x<6)\end{cases}=\begin{cases}x^2-4x+4 & (3<x\leq4)\\x^2-12x+36 & (4<x<6)\end{cases}$$

이때 $k(x)=\{f(x)\}^2$이라 하면

$$k'(x)=\begin{cases}2x-4 & (3<x<4)\\2x-12 & (4<x<6)\end{cases}$$

즉, $\lim\limits_{x\to4+}k'(x)=\lim\limits_{x\to4+}(2x-12)=-4$,

$\lim\limits_{x\to4-}k'(x)=\lim\limits_{x\to4-}(2x-4)=4$이므로

$\lim\limits_{x\to4+}k'(x)\neq\lim\limits_{x\to4-}k'(x)$

따라서 미분계수 $k'(4)$가 존재하지 않으므로 함수 $k(x)$, 즉 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=4$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. 함수 $g(x)$는 $x=1$, $x=3$, $x=4$에서 불연속이므로 함수 $\{g(x)\}^2$도 $x=1$, $x=3$, $x=4$에서 불연속이다.

즉, 함수 $\{g(x)\}^2$은 $x=1$, $x=3$, $x=4$에서 미분가능하지 않다.

(i) $x=2$일 때,

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 함수 $\{g(x)\}^2$도 $x=2$에서 연속이다.

$1\leq x\leq2$에서 $g(x)=x$이고, $2<x<3$에서 $g(x)=-x+4$이므로

$$\{g(x)\}^2=\begin{cases}x^2 & (1\leq x\leq2)\\(-x+4)^2 & (2<x<3)\end{cases}=\begin{cases}x^2 & (1\leq x\leq2)\\x^2-8x+16 & (2<x<3)\end{cases}$$

이때 $p(x)=\{g(x)\}^2$이라 하면

$$p'(x)=\begin{cases}2x & (1<x<2)\\2x-8 & (2<x<3)\end{cases}$$

즉, $\lim\limits_{x\to2+}p'(x)=\lim\limits_{x\to2+}(2x-8)=-4$,

$\lim\limits_{x\to2-}p'(x)=\lim\limits_{x\to2-}2x=4$이므로

$\lim\limits_{x\to2+}p'(x)\neq\lim\limits_{x\to2-}p'(x)$

따라서 미분계수 $p'(2)$가 존재하지 않으므로 함수 $p(x)$, 즉 함수 $\{g(x)\}^2$은 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

(ii) $x=5$일 때,

함수 $g(x)$가 $x=5$에서 연속이므로 함수 $\{g(x)\}^2$도 $x=5$에서 연속이다.

$4\leq x\leq5$에서 $g(x)=-x+5$이고, $5<x<6$에서 $g(x)=x-5$이므로

$$\{g(x)\}^2=\begin{cases}(-x+5)^2 & (4\le x\le 5)\\ (x-5)^2 & (5<x<6)\end{cases}$$

$$=x^2-10x+25\ (4\le x<6)$$

이때 $q(x)=\{g(x)\}^2$이라 하면

$q'(x)=2x-10\ (4<x<6)$

따라서 $q'(5)=0$에서 미분계수 $q'(5)$가 존재하므로 함수 $q(x)$, 즉 함수 $\{g(x)\}^2$은 $x=5$에서 미분가능하다.

즉, 열린구간 $(0,\ 6)$에서 함수 $\{g(x)\}^2$이 미분가능하지 않은 x는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

24 답 $\frac{1}{32}$

$1<x<2$일 때 $[x]=1$, $2\le x<3$일 때 $[x]=2$이므로

$$f(x)=\frac{ax^2+bx-4}{[x]}=\begin{cases}ax^2+bx-4 & (1<x<2)\\ \dfrac{ax^2+bx-4}{2} & (2\le x<3)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하면 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2-}f(x)=f(2)$에서

$$\lim_{x\to 2+}\frac{ax^2+bx-4}{2}=\lim_{x\to 2-}(ax^2+bx-4)=2a+b-2$$

$2a+b-2=4a+2b-4 \qquad \therefore\ 2a+b=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$가 열린구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하면 $x=2$에서도 미분가능하다.

즉, 미분계수 $f'(2)$가 존재하고, $f'(x)=\begin{cases}2ax+b & (1<x<2)\\ ax+\dfrac{b}{2} & (2<x<3)\end{cases}$이므로

$\lim_{x\to 2+}f'(x)=\lim_{x\to 2-}f'(x)$에서

$$\lim_{x\to 2+}\left(ax+\frac{b}{2}\right)=\lim_{x\to 2-}(2ax+b)$$

$2a+\dfrac{b}{2}=4a+b \qquad \therefore\ 4a+b=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=4$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}-x^2+4x-4 & (1<x<2)\\ \dfrac{-x^2+4x-4}{2} & (2\le x<3)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-(x-2)^2 & (1<x<2)\\ -\dfrac{1}{2}(x-2)^2 & (2\le x<3)\end{cases}$$

$$\therefore\ f\left(\frac{3}{2}\right)f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{32}$$

25 답 147

(i) $n=1$일 때,

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x(1+|x|)}{|x|} & (x\ne 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}=\begin{cases}x-1 & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ x+1 & (x>0)\end{cases}\text{이므로}$$

$\lim_{x\to 0+}f_1(x)=\lim_{x\to 0+}(x+1)=1$

$\lim_{x\to 0-}f_1(x)=\lim_{x\to 0-}(x-1)=-1$

즉, $\lim_{x\to 0+}f_1(x)\ne\lim_{x\to 0-}f_1(x)$이므로 함수 $f_1(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

$\therefore\ 《f_1(0)》=1$

(ii) $n=2$일 때,

$$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2(1+|x|)}{|x|} & (x\ne 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}=\begin{cases}x(x-1) & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ x(x+1) & (x>0)\end{cases}\text{이므로}$$

$\lim_{x\to 0+}f_2(x)=\lim_{x\to 0+}x(x+1)=0$

$\lim_{x\to 0-}f_2(x)=\lim_{x\to 0-}x(x-1)=0$

$f_2(0)=0$

즉, $\lim_{x\to 0+}f_2(x)=\lim_{x\to 0-}f_2(x)=f_2(0)$이므로 함수 $f_2(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$f_2'(x)=\begin{cases}2x-1 & (x<0)\\ 2x+1 & (x>0)\end{cases}$이므로

$\lim_{x\to 0+}f_2'(x)=\lim_{x\to 0+}(2x+1)=1$

$\lim_{x\to 0-}f_2'(x)=\lim_{x\to 0-}(2x-1)=-1$

즉, $\lim_{x\to 0+}f_2'(x)\ne\lim_{x\to 0-}f_2'(x)$에서 미분계수 $f_2'(0)$이 존재하지 않으므로 함수 $f_2(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

$\therefore\ 《f_2(0)》=2$

(iii) $n\ge 3$일 때,

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x^n(1+|x|)}{|x|} & (x\ne 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}=\begin{cases}x^{n-1}(x-1) & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ x^{n-1}(x+1) & (x>0)\end{cases}\text{이므로}$$

$\lim_{x\to 0+}f_n(x)=\lim_{x\to 0+}x^{n-1}(x+1)=0$

$\lim_{x\to 0-}f_n(x)=\lim_{x\to 0-}x^{n-1}(x-1)=0$

$f_n(0)=0$

즉, $\lim_{x\to 0+}f_n(x)=\lim_{x\to 0-}f_n(x)=f_n(0)$이므로 함수 $f_n(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$f_n'(x)=\begin{cases}nx^{n-1}-(n-1)x^{n-2} & (x<0)\\ nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2} & (x>0)\end{cases}$이므로

$\lim_{x\to 0+}f_n'(x)=\lim_{x\to 0+}\{nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}\}=0$

$\lim_{x\to 0-}f_n'(x)=\lim_{x\to 0-}\{nx^{n-1}-(n-1)x^{n-2}\}=0$

즉, $\lim_{x\to 0+}f_n'(x)=\lim_{x\to 0-}f_n'(x)$에서 미분계수 $f_n'(0)$이 존재하므로 함수 $f_n(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

$\therefore\ 《f_3(0)》=《f_4(0)》=《f_5(0)》=\cdots=3$

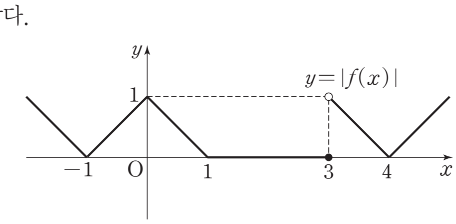
(i), (ii), (iii)에서

$《f_1(0)》+《f_2(0)》+《f_3(0)》+\cdots+《f_{50}(0)》=1+2+3\times 48=147$

26 답 ④

$$|f(x)|=\begin{cases}-x-1 & (x<-1)\\ x+1 & (-1\le x<0)\\ -x+1 & (0\le x<1)\\ 0 & (1\le x\le 3)\\ -x+4 & (3<x<4)\\ x-4 & (x\ge 4)\end{cases}$$ 이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는

그림과 같다.



$\therefore g(x)=|f(x-k)|$

$$=\begin{cases} -x+k-1 & (x<k-1) \\ x-k+1 & (k-1\le x<k) \\ -x+k+1 & (k\le x<k+1) \\ 0 & (k+1\le x\le k+3) \\ -x+k+4 & (k+3<x<k+4) \\ x-k-4 & (x\ge k+4) \end{cases}$$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이고, 함수 $|f(x)|$는 $x=3$에서 불연속이므로 함수 $g(x)$는 $x=k+3$에서 불연속이다.

ㄱ. $k=-3$일 때, $-2\le x\le 0$에서 $g(x)=|f(x+3)|=0$이므로

$\lim_{x\to 0-} g(x)=0$

$g(0)=|f(3)|=0$

$\therefore \lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

ㄴ. $\lim_{x\to 0-} f(x)=1$, $f(0)=-1$에서 $\lim_{x\to 0-} f(x)\ne f(0)$

(i) $k=-3$일 때,

㉠에서 $\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이므로

$\lim_{x\to 0-} \{f(x)+g(x)\}\ne f(0)+g(0)$

(ii) $k\ne -3$일 때,

함수 $g(x)$는 $x=k+3$에서만 불연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이므로

$\lim_{x\to 0-} \{f(x)+g(x)\}\ne f(0)+g(0)$

(i), (ii)에서 모든 정수 k에 대하여 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=f(0)g(0)$

$-\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0-} g(x)=-g(0)$

$\therefore \lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)=0$ ($\because g(x)\ge 0$)

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)g(x)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이때 $\lim_{x\to 0+} f(x)=-1$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=1$이므로 ㉡을 만족시키려면

$\lim_{x\to 0} g(x)=0$ $\quad \therefore \lim_{x\to 0} |f(x-k)|=0$

$\lim_{x\to a} |f(x)|=0$을 만족시키는 정수 a의 값은 -1, 1, 2, 4이므로

$\lim_{x\to 0} |f(x-k)|=0$을 만족시키는 정수 k의 값은 -4, -2, -1, 1이다.

(i) $k=-4$인 경우

$0\le x<1$일 때 $f(x)=x-1$, $x<0$일 때 $f(x)=x+1$이고,
$x\ge 0$일 때 $g(x)=x$, $-1<x<0$일 때 $g(x)=-x$이므로

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+} \frac{(x-1)x}{x}=\lim_{x\to 0+} (x-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-} \frac{(x+1)\times(-x)}{x}=\lim_{x\to 0-} (-x-1)=-1$$

즉, $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(ii) $k=-2$인 경우

$0\le x<1$일 때 $f(x)=x-1$, $x<0$일 때 $f(x)=x+1$이고,
$-1\le x\le 1$일 때 $g(x)=0$이므로

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}=0$$

즉, $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(iii) $k=-1$인 경우

$0\le x<1$일 때 $f(x)=x-1$, $x<0$일 때 $f(x)=x+1$이고,
$0\le x\le 2$일 때 $g(x)=0$, $-1\le x<0$일 때 $g(x)=-x$이므로

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-} \frac{(x+1)\times(-x)}{x}=\lim_{x\to 0-} (-x-1)=-1$$

즉, $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}\ne\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(iv) $k=1$인 경우

$0\le x<1$일 때 $f(x)=x-1$, $x<0$일 때 $f(x)=x+1$이고,
$0\le x<1$일 때 $g(x)=x$, $x<0$일 때 $g(x)=-x$이므로

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+} \frac{(x-1)x}{x}=\lim_{x\to 0+} (x-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-} \frac{(x+1)\times(-x)}{x}=\lim_{x\to 0-} (-x-1)=-1$$

즉, $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(i)~(iv)에서 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은

$-4+(-2)+1=-5$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

STEP 3 최고난도 문제

51~53쪽

01 30	**02** ③	**03** $\frac{17}{4}$	**04** 17	**05** 154	**06** ①
07 13	**08** 8	**09** ②	**10** ⑤		

01 답 30

1단계 $f'(a)$의 값 구하기

㈎에서

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$
$$=f'(a)+f'(a)$$
$$=2f'(a)$$

즉, $2f'(a)=12$이므로 $f'(a)=6$

2단계 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+2g(x))-f(a-h(x))}{g(x)-h(x)}$의 값 구하기

$\dfrac{h(x)}{g(x)}=k(x)$로 놓으면 $h(x)=k(x)g(x)$이고,

㈐의 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{h(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{2}$에서 $\lim\limits_{x\to0}k(x)=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(a+2g(x))-f(a-h(x))}{g(x)-h(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(a+2g(x))-f(a-k(x)g(x))}{g(x)-k(x)g(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(a+2g(x))-f(a)+f(a)-f(a-k(x)g(x))}{\{1-k(x)\}g(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(a+2g(x))-f(a)-f(a-k(x)g(x))+f(a)}{g(x)}\times\lim_{x\to0}\frac{1}{1-k(x)}$$
$$=\left[\lim_{x\to0}\frac{f(a+2g(x))-f(a)}{2g(x)}\times2+\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(a-k(x)g(x))-f(a)}{-k(x)g(x)}\times k(x)\right\}\right]\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=\left\{2f'(a)+f'(a)\times\frac{1}{2}\right\}\times2$$
$$=4f'(a)+f'(a)$$
$$=5f'(a)$$
$$=5\times6=30$$

02 답 ③

1단계 $f(0)$의 값 구하기

$f(xy)=f(x)g(y)+f(x)+g(y)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)g(y)+f(0)+g(y)$

$\therefore\ \{f(0)+1\}g(y)=0$

이때 모든 실수 y에 대하여 $g(y)=0$이 성립하지 않으므로

$f(0)=-1$ …… ㉡

2단계 $f'(x)$ 구하기

$x\neq0$일 때, ㉠의 양변에 $y=1+\dfrac{h}{x}$(h는 0이 아닌 실수)를 대입하면

$$f(x+h)=f(x)g\left(1+\frac{h}{x}\right)+f(x)+g\left(1+\frac{h}{x}\right)$$
$$f(x+h)-f(x)=\{f(x)+1\}g\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$\therefore\ f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\{f(x)+1\}\lim_{h\to0}\frac{g\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$
$$=\{f(x)+1\}\lim_{h\to0}\frac{g\left(1+\frac{h}{x}\right)-g(1)}{\frac{h}{x}}\times\frac{1}{x}\ (\because\ g(1)=0)$$
$$=\frac{1}{x}\{f(x)+1\}g'(1)$$
$$=\frac{2}{x}\{f(x)+1\}\ (\because\ g'(1)=2)$$

3단계 $f(x)$ 구하기

$f'(x)=\dfrac{2}{x}\{f(x)+1\}$에서

$xf'(x)=2\{f(x)+1\}$ …… ㉢

함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n($a\neq0$, n은 자연수)이라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 anx^{n-1}이다.

㉢에서 좌변의 최고차항은 anx^n이고, 우변의 최고차항은 $2ax^n$이므로

$an=2a\qquad\therefore\ n=2\ (\because\ a\neq0)$

따라서 $f(x)$는 이차함수이고, ㉡에서 $f(0)=-1$이므로

$f(x)=ax^2+bx-1$(b는 상수)이라 하면

$f'(x)=2ax+b$

이를 ㉢에 대입하면 $x(2ax+b)=2(ax^2+bx)$

$2ax^2+bx=2ax^2+2bx$

즉, $b=2b$이므로 $b=0$

$\therefore\ f(x)=ax^2-1$

이때 $f(1)=3$에서 $a-1=3\qquad\therefore\ a=4$

$\therefore\ f(x)=4x^2-1$

4단계 $g(x)$ 구하기

㉠에서 $4(xy)^2-1=(4x^2-1)g(y)+4x^2-1+g(y)$

$4(xy)^2=4x^2\{g(y)+1\}$, $g(y)+1=y^2$

$g(y)=y^2-1\qquad\therefore\ g(x)=x^2-1$

5단계 $f'(2)+g'(3)$의 값 구하기

따라서 $f'(x)=8x$, $g'(x)=2x$이므로

$f'(2)+g'(3)=16+6=22$

idea

03 답 $\dfrac{17}{4}$

1단계 ㈎, ㈏를 이용하여 $f'(0)$, $g'(0)$ 사이의 관계식 구하기

두 다항함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 모두 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$f(0)=1$, $g(0)=1$

㈎에서

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{2ax-3+3f(x)}{ax-1+f(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2ax+3\{f(x)-1\}}{ax+\{f(x)-1\}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2ax+3\{f(x)-f(0)\}}{ax+\{f(x)-f(0)\}}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to0}2a+\lim\limits_{x\to0}\left\{3\times\frac{f(x)-f(0)}{x}\right\}}{\lim\limits_{x\to0}a+\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}}$$
$$=\frac{2a+3f'(0)}{a+f'(0)}$$

즉, $f'(0)\{a+f'(0)\}=2a+3f'(0)$이므로

$\{f'(0)\}^2+(a-3)f'(0)-2a=0$ ...... ㉠

㈏에서

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{2ax+a-ag(x)}{-3x-1+g(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2ax-a\{g(x)-1\}}{-3x+\{g(x)-1\}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2ax-a\{g(x)-g(0)\}}{-3x+\{g(x)-g(0)\}}$$
$$=\frac{\lim_{x\to0}2a-\lim_{x\to0}\left\{a\times\frac{g(x)-g(0)}{x}\right\}}{\lim_{x\to0}(-3)+\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}}$$
$$=\frac{2a-ag'(0)}{-3+g'(0)}$$

즉, $g'(0)\{-3+g'(0)\}=2a-ag'(0)$이므로

$\{g'(0)\}^2+(a-3)g'(0)-2a=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $f'(0)$, $g'(0)$은 이차방정식

$t^2+(a-3)t-2a=0$ ...... ㉢

의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$f'(0)+g'(0)=-(a-3)$ ...... ㉣

2단계 **모든 $\frac{g'(0)}{f'(0)}$의 값의 합 구하기**

㈐에서 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

$=f'(0)+g'(0)$

$=-(a-3)$ ($\because$ ㉣)

이때 ㈐의 $h'(0)=5$에서

$-(a-3)=5$ $\quad\therefore a=-2$

㉢에서 $t^2-5t+4=0$

$(t-1)(t-4)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=4$

즉, $f'(0)=1$, $g'(0)=4$ 또는 $f'(0)=4$, $g'(0)=1$이므로

$\frac{g'(0)}{f'(0)}=4$ 또는 $\frac{g'(0)}{f'(0)}=\frac{1}{4}$

따라서 모든 $\frac{g'(0)}{f'(0)}$의 값의 합은 $4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$

04 답 17

1단계 **$f(x)$의 차수의 범위 구하기**

$f(x)$가 상수함수이면 ㈎에서 좌변은 0이고, 우변은 이차함수이므로 조건이 성립하지 않는다.

또 $f(x)$가 일차함수이면 ㈎에서 좌변은 일차함수이고, 우변은 이차함수이므로 조건이 성립하지 않는다.

이때 $f(x)$가 n($n\ge2$)차 함수이면 ㈎에서 좌변은 n차 함수이고, 우변도 n차 함수이므로 조건을 만족시킨다.

2단계 **$f(x)$가 이차함수일 때, $g(0)$의 값 구하기**

(i) $f(x)$가 이차함수일 때,

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1이므로

$f(x)=-x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=-2x+a$

이를 ㈎의 등식에 대입하면

$(x-1)(-2x+a)=3(-x^2+ax+b)+(x-1)^2$

$-2x^2+(a+2)x-a=-2x^2+(3a-2)x+3b+1$

즉, $a+2=3a-2$, $-a=3b+1$이므로

$a=2$, $b=-1$

$\therefore f(x)=-x^2+2x-1=-(x-1)^2$

이때 ㈏에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}$는 0이 아닌 실수로 수렴하고, 사차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x)=(x-1)^2(x^2+px+q)$ (p, q는 상수)라 하자.

㈐에서 $k=1$일 때,

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{g(x)-g(1)}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\left(-\frac{1}{x^2+px+q}\right)$$
$$=-\frac{1}{1+p+q}$$

즉, $-\frac{1}{1+p+q}=-\frac{1}{3}$이므로

$1+p+q=3$ $\quad\therefore p+q=2$ ...... ㉠

또 ㈐에서 $k=2$일 때,

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{g(x)-g(2)}=\frac{\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}{\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}}$$
$$=\frac{f'(2)}{g'(2)}$$

이때 $f'(x)=-2x+2$이고,

$g'(x)=2(x-1)(x^2+px+q)+(x-1)^2(2x+p)$이므로

$\frac{f'(2)}{g'(2)}=\frac{-2}{5p+2q+12}$

즉, $\frac{-2}{5p+2q+12}=1$이므로

$5p+2q+12=-2$ $\quad\therefore 5p+2q=-14$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=-6$, $q=8$

따라서 $g(x)=(x-1)^2(x^2-6x+8)$이므로

$g(0)=8$

3단계 **$f(x)$가 삼차 이상의 함수일 때, $g(0)$의 값 구하기**

(ii) $f(x)$가 삼차 이상의 함수일 때,

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1이므로 $f(x)$의 최고차항을 $-x^n$ ($n\ge3$)이라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 $-nx^{n-1}$이다.

㈎의 등식에서 좌변의 최고차항은 $-nx^n$이고, 우변의 최고차항은 $-3x^n$이므로 $n=3$

$f(x)$는 삼차함수이므로 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

이를 ㈎의 등식에 대입하면

$(x-1)(-3x^2+2ax+b)=3(-x^3+ax^2+bx+c)+(x-1)^2$

$-3x^3+(2a+3)x^2+(b-2a)x-b$

$=-3x^3+(3a+1)x^2+(3b-2)x+3c+1$

즉, $2a+3=3a+1$, $b-2a=3b-2$, $-b=3c+1$이므로

$a=2$, $b=-1$, $c=0$

$\therefore f(x)=-x^3+2x^2-x=-x(x-1)^2$

이때 ㈏에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}$는 0이 아닌 실수로 수렴하고, 사차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x)=(x-1)^2(x^2+px+q)$ (p, q는 상수)라 하자.

㈐에서 $k=1$일 때,

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{g(x)-g(1)}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-x}{x^2+px+q}=-\frac{1}{1+p+q}$$

즉, $-\frac{1}{1+p+q}=-\frac{1}{3}$이므로

$1+p+q=3$　　∴ $p+q=2$　　…… ㉢

또 ㈐에서 $k=2$일 때,

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{g(x)-g(2)}=\frac{\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}{\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}}=\frac{f'(2)}{g'(2)}$$

이때 $f'(x)=-3x^2+4x-1$이고,

$g'(x)=2(x-1)(x^2+px+q)+(x-1)^2(2x+p)$이므로

$$\frac{f'(2)}{g'(2)}=\frac{-5}{5p+2q+12}$$

즉, $\frac{-5}{5p+2q+12}=1$이므로

$5p+2q+12=-5$　　∴ $5p+2q=-17$　　…… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $p=-7$, $q=9$

따라서 $g(x)=(x-1)^2(x^2-7x+9)$이므로 $g(0)=9$

4단계 모든 $g(0)$의 값의 합 구하기

(i), (ii)에서 모든 $g(0)$의 값의 합은

$8+9=17$

05 답 154

1단계 $f(0)$, $f'(0)$의 값 구하기

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0-}g(x)=g(0)$에서

$\lim_{x\to0+}\{|f(x)|-|2x^2-8|\}=\lim_{x\to0-}\{-f(x)\}=|f(0)|-8$

$|f(0)|-8=-f(0)$

이때 $f(0)$의 값이 음수이면 $-f(0)-8=-f(0)$, 즉 $0=8$이 되므로 $f(0)$의 값은 음수가 아니다.

따라서 $f(0)-8=-f(0)$이므로 $2f(0)=8$　　∴ $f(0)=4$　　…… ㉠

∴ $g(0)=|f(0)|-8=-4$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$에서도 미분가능하다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|f(0+h)|-|2(0+h)^2-8|+4}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{|f(0+h)|+2h^2-8+4}{h}$$

→ $h\to0+$일 때, $2h^2-8<0$이므로 $|2h^2-8|=-(2h^2-8)$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{|f(0+h)|-4}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{2h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{|f(0+h)|-f(0)}{h}+\lim_{h\to0+}2h$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+0$$

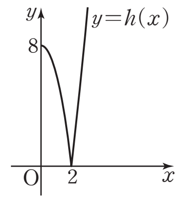
→ $f(0)>0$이므로 충분히 작은 양수 h에 대하여 $f(0+h)>0$이다.

$$=f'(0)$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-f(0+h)+4}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{-f(0+h)+f(0)}{h}=-f'(0)$$

즉, $f'(0)=-f'(0)$이므로 $f'(0)=0$　　…… ㉡

2단계 $f(2)$, $f'(2)$의 값 구하기



$h(x)=|2x^2-8|$이라 하면 함수 $y=h(x)\,(x\ge0)$의 그래프는 그림과 같다.

이때 $h(2)=0$이고, 함수 $h(x)$의 $x=2$에서의 우미분계수는 8, 좌미분계수는 -8이므로 함수 $h(x)$는

$\lim_{x\to2+}(2x^2-8)'=\lim_{x\to2+}4x=8$

$\lim_{x\to2-}(-2x^2+8)'=\lim_{x\to2-}(-4x)=-8$

$x=2$에서 미분가능하지 않다.

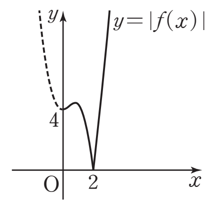
그런데 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=2$에서도 미분가능해야 한다.

$x\ge0$에서 $g(x)$는 두 함수 $|f(x)|$와 $h(x)$의 차로 이루어진 함수이므로 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하려면

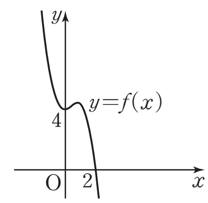
$f(2)=0$　　…… ㉢

이어야 하고, 함수 $|f(x)|$의 $x=2$에서의 우미분계수도 8, 좌미분계수도 -8이어야 한다.

또 $x\ge0$에서 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서만 미분가능하지 않아야 하므로 $y=|f(x)|\,(x\ge0)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



즉, $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고, $f'(2)=-8$이다.　　…… ㉣



3단계 $f(x)$ 구하기

㉠, ㉡에서 $f(x)=ax^3+bx^2+4$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

㉢에서 $f(2)=0$이므로

$8a+4b+4=0$　　∴ $2a+b=-1$　　…… ㉤

$f(x)=ax^3+bx^2+4$에서 $f'(x)=3ax^2+2bx$이고,

㉣에서 $f'(2)=-8$이므로

$12a+4b=-8$　　∴ $3a+b=-2$　　…… ㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=1$

∴ $f(x)=-x^3+x^2+4$

4단계 $f(-5)$의 값 구하기

∴ $f(-5)=125+25+4=154$

06 답 ①

1단계 $g(x)$ 구하기

$$g(x)=\begin{cases}|x^2+ax+b|-x^2 & (x\le0)\\ (x^2+ax+b)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

구간 $(0, \infty)$에서 함수 $g(x)$는 미분가능하므로 ㈎에서 $b\le0$이다.

(i) $b=0$인 경우

$$g(x)=\begin{cases}|x(x+a)|-x^2 & (x\le0)\\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

ⓘ $a>0$일 때,

$$g(x)=\begin{cases}ax & (x\le-a)\\ -2x^2-ax & (-a<x\le0)\\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

$x=-a$에서의 미분가능성을 조사하면

$$\lim_{x\to -a+}\frac{g(x)-g(-a)}{x-(-a)}=\lim_{x\to -a+}\frac{(-2x^2-ax)-(-a^2)}{x+a}$$
$$=\lim_{x\to -a+}\frac{-(2x-a)(x+a)}{x+a}$$
$$=\lim_{x\to -a+}\{-(2x-a)\}=3a$$

$$\lim_{x\to -a-}\frac{g(x)-g(-a)}{x-(-a)}=\lim_{x\to -a-}\frac{ax-(-a^2)}{x+a}=a$$

이때 $a>0$이므로 $3a\neq a$

즉, 함수 $g(x)$는 $x=-a$에서 미분가능하지 않으므로 ㈎를 만족시키지 않는다.

ⓑ $a=0$일 때,

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ x^4+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

$x=0$에서의 미분가능성을 조사하면

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^4+x^3-0}{x}=\lim_{x\to 0+}(x^3+x^2)=0$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{0-0}{x}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$

즉, 함수 $g(x)$는 $x=0$, 즉 $x=b$에서 미분가능하므로 ㈎를 만족시키지 않는다.

ⓒ $a<0$일 때,

$$g(x)=\begin{cases}ax & (x\le 0)\\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

$x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=ax\neq 0$이므로 ㈏를 만족시키지 않는다.

(ii) $b<0$인 경우

㈎에서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)$에서

$$\lim_{x\to 0+}\{(x^2+ax+b)^2+x^3\}=\lim_{x\to 0-}(|x^2+ax+b|-x^2)=|b|$$

$b^2=-b$

이때 $b<0$이므로 $b=-1$이고, ㈎에서 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.

$$\therefore g(x)=\begin{cases}|x^2+ax-1|-x^2 & (x\le 0)\\ (x^2+ax-1)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

이차방정식 $x^2+ax-1=0$의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=-1$이므로 $\alpha<0<\beta$

$$\therefore g(x)=\begin{cases}ax-1 & (x\le \alpha)\\ -2x^2-ax+1 & (\alpha<x\le 0)\\ (x^2+ax-1)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\{(x^2+ax-1)^2+x^3\}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\{x^3+(2a+1)x^2+(a^2-2)x-2a\}=-2a$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{(-2x^2-ax+1)-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}(-2x-a)=-a$$

에서 $-2a=-a$ $\quad\therefore a=0$

$$\therefore g(x)=\begin{cases}|x^2-1|-x^2 & (x\le 0)\\ (x^2-1)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

(i), (ii)에서 $g(x)=\begin{cases}|x^2-1|-x^2 & (x\le 0)\\ (x^2-1)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$

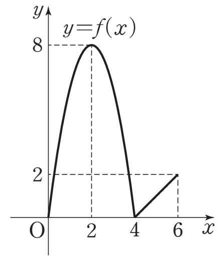
2단계 $g\left(-\frac{1}{2}\right)+g(3)$**의 값 구하기**

$$\therefore g\left(-\frac{1}{2}\right)+g(3)=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)+(64+27)$$
$$=\frac{183}{2}$$

07 답 13

1단계 $y=f(x)$**의 그래프 그리기**

$y=-2x(x-4)=-2(x-2)^2+8$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



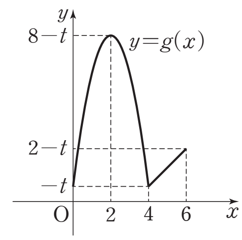
2단계 $h(t)$ **구하기**

함수 $g(x)=|t-f(x)|=|f(x)-t|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $-t$만큼 평행이동한 후 x축보다 아래쪽에 있는 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

(i) $t\le 0$일 때,

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같고, 꺾인 점이 1개 있으므로 열린구간 $(0, 6)$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1이다.

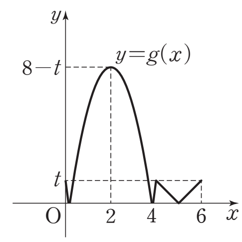
$\therefore h(t)=1$



(ii) $0<t<2$일 때,

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같고, 꺾인 점이 4개 있으므로 열린구간 $(0, 6)$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 4이다.

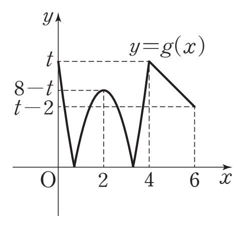
$\therefore h(t)=4$



(iii) $2\le t<8$일 때,

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같고, 꺾인 점이 3개 있으므로 열린구간 $(0, 6)$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 3이다.

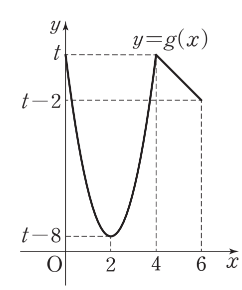
$\therefore h(t)=3$



(iv) $t\ge 8$일 때,

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같고, 꺾인 점이 1개 있으므로 열린구간 $(0, 6)$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1이다.

$\therefore h(t)=1$



(i)~(iv)에서 $h(t)=\begin{cases} 1 & (t\le 0 \text{ 또는 } t\ge 8) \\ 4 & (0<t<2) \\ 3 & (2\le t<8) \end{cases}$

3단계 $m+n$의 값 구하기

함수 $h(t)$는 $t=0$, $t=2$, $t=8$에서 불연속이므로

$m=3$, $n=0+2+8=10$

$\therefore m+n=13$

08 답 8

1단계 m의 값 구하기

$f(x)=\begin{cases} -\sqrt{2}(x^2-2) & (x<1) \\ \sqrt{2}(x-2)^2 & (x\ge 1) \end{cases}$에서 $f'(x)=\begin{cases} -2\sqrt{2}x & (x<1) \\ 2\sqrt{2}(x-2) & (x>1) \end{cases}$

$\lim_{x\to 1+} f'(x)=\lim_{x\to 1-} f'(x)=-2\sqrt{2}$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

이때 $f'(0)=0$, $f'(2)=0$이므로 0과 2가 아닌 유리수 p에 대하여 $f'(p)$의 값은 무리수이다. …… ㉠

또 $g(x)=\begin{cases} (x+2)^2-4 & (x<0) \\ -(x-2)^2+4 & (x\ge 0) \end{cases}$에서 $g'(x)=\begin{cases} 2(x+2) & (x<0) \\ -2(x-2) & (x>0) \end{cases}$

$\lim_{x\to 0+} g'(x)=\lim_{x\to 0-} g'(x)=4$이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

이때 유리수 p에 대하여 $g'(p)$의 값은 유리수이다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 0과 2가 아닌 유리수 p에 대하여 $f'(p)$의 값과 $g'(p)$의 값은 같을 수 없다.

따라서 함수 $h(x)=\begin{cases} g(x-a)+2 & (x<p) \\ f(x)+b & (x\ge p) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $p=0$ 또는 $p=2$

$\therefore m=2$

2단계 n의 값 구하기

$f(x)+b=\begin{cases} -\sqrt{2}(x^2-2)+b & (x<1) \\ \sqrt{2}(x-2)^2+b & (x\ge 1) \end{cases}$에서

$\{f(x)+b\}'=\begin{cases} -2\sqrt{2}x & (x<1) \\ 2\sqrt{2}(x-2) & (x>1) \end{cases}$

$g(x-a)+2=\begin{cases} (x-a+2)^2-2 & (x<a) \\ -(x-a-2)^2+6 & (x\ge a) \end{cases}$에서

$\{g(x-a)+2\}'=\begin{cases} 2(x-a+2) & (x<a) \\ -2(x-a-2) & (x>a) \end{cases}$

(i) $p=0$인 경우

ⓘ $a\ge 0$일 때,

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0+} h(x)=\lim_{x\to 0-} h(x)=h(0)$에서

$\lim_{x\to 0+}\{-\sqrt{2}(x^2-2)+b\}=\lim_{x\to 0-}\{(x-a+2)^2-2\}=2\sqrt{2}+b$

$2\sqrt{2}+b=(-a+2)^2-2$ …… ㉢

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$에서도 미분가능하다.

즉, $\lim_{x\to 0+} h'(x)=\lim_{x\to 0-} h'(x)$에서

$\lim_{x\to 0+}(-2\sqrt{2}x)=\lim_{x\to 0-} 2(x-a+2)$

$0=-2a+4$, $2a=4$ $\quad\therefore a=2$

이를 ㉢에 대입하면 $2\sqrt{2}+b=-2$ $\quad\therefore b=-2-2\sqrt{2}$

ⓘⓘ $a<0$일 때,

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0+} h(x)=\lim_{x\to 0-} h(x)=h(0)$에서

$\lim_{x\to 0+}\{-\sqrt{2}(x^2-2)+b\}=\lim_{x\to 0-}\{-(x-a-2)^2+6\}=2\sqrt{2}+b$

$2\sqrt{2}+b=-(a+2)^2+6$ …… ㉣

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$에서도 미분가능하다.

즉, $\lim_{x\to 0+} h'(x)=\lim_{x\to 0-} h'(x)$에서

$\lim_{x\to 0+}(-2\sqrt{2}x)=\lim_{x\to 0-}\{-2(x-a-2)\}$

$0=2a+4$, $2a=-4$ $\quad\therefore a=-2$

이를 ㉣에 대입하면 $2\sqrt{2}+b=6$ $\quad\therefore b=6-2\sqrt{2}$

(ii) $p=2$인 경우

ⓘ $a\ge 2$일 때,

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2+} h(x)=\lim_{x\to 2-} h(x)=h(2)$에서

$\lim_{x\to 2+}\{\sqrt{2}(x-2)^2+b\}=\lim_{x\to 2-}\{(x-a+2)^2-2\}=b$

$b=(4-a)^2-2$ …… ㉤

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=2$에서도 미분가능하다.

즉, $\lim_{x\to 2+} h'(x)=\lim_{x\to 2-} h'(x)$에서

$\lim_{x\to 2+} 2\sqrt{2}(x-2)=\lim_{x\to 2-} 2(x-a+2)$

$0=-2a+8$, $2a=8$ $\quad\therefore a=4$

이를 ㉤에 대입하면 $b=-2$

ⓘⓘ $a<2$일 때,

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2+} h(x)=\lim_{x\to 2-} h(x)=h(2)$에서

$\lim_{x\to 2+}\{\sqrt{2}(x-2)^2+b\}=\lim_{x\to 2-}\{-(x-a-2)^2+6\}=b$

$b=-a^2+6$ …… ㉥

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=2$에서도 미분가능하다.

즉, $\lim_{x\to 2+} h'(x)=\lim_{x\to 2-} h'(x)$에서

$\lim_{x\to 2+} 2\sqrt{2}(x-2)=\lim_{x\to 2-}\{-2(x-a-2)\}$

$0=2a$ $\quad\therefore a=0$

이를 ㉥에 대입하면 $b=6$

(i), (ii)에서 b의 최솟값은 $-2-2\sqrt{2}$이므로

$n=-2-2\sqrt{2}$

3단계 $(m+n)^2$의 값 구하기

$\therefore (m+n)^2=(2-2-2\sqrt{2})^2=8$

09 답 ②

1단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서도 연속이므로 $\lim_{x\to 0+} p(x)f(x)=\lim_{x\to 0-} p(x)f(x)=p(0)f(0)$에서

$\lim_{x\to 0+}(x-1)p(x)=\lim_{x\to 0-}\{-xp(x)\}=0$

$-p(0)=0 \qquad \therefore p(0)=0$

2단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=2$에서도 미분가능하므로

$$\lim_{x\to2+}\frac{p(x)f(x)-p(2)f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{(2x-3)p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{(2x-3)p(x)-p(x)+p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{2(x-2)p(x)}{x-2}+\lim_{x\to2+}\frac{p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=2p(2)+p'(2)$$

$$\lim_{x\to2-}\frac{p(x)f(x)-p(2)f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{(x-1)p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{(x-1)p(x)-p(x)+p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{(x-2)p(x)}{x-2}+\lim_{x\to2-}\frac{p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=p(2)+p'(2)$$

즉, $2p(2)+p'(2)=p(2)+p'(2)$이므로

$p(2)=0$

3단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. $\{f(x)\}^2=\begin{cases} x^2 & (x\le0) \\ (x-1)^2 & (0<x\le2) \\ (2x-3)^2 & (x>2)\end{cases}$이고, 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$, $x=2$에서도 미분가능하다.

(i) $x=0$일 때,

$$\lim_{x\to0+}\frac{p(x)\{f(x)\}^2-p(0)\{f(0)\}^2}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{(x-1)^2p(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{p(x)\{f(x)\}^2-p(0)\{f(0)\}^2}{x}$$
$$=\lim_{x\to0-}\frac{x^2p(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0-}xp(x)$$
$$=0$$

즉, $\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{(x-1)^2p(x)}{x}=0$이어야 하므로 $p(x)$는 x^2을 인수로 가져야 한다.

(ii) $x=2$일 때,

$$\lim_{x\to2+}\frac{p(x)\{f(x)\}^2-p(2)\{f(2)\}^2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{(2x-3)^2p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{(2x-3)^2p(x)-p(x)+p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{\{(2x-3)^2-1\}p(x)}{x-2}+\lim_{x\to2+}\frac{p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{4(x-1)(x-2)p(x)}{x-2}+p'(2)$$
$$=\lim_{x\to2+}4(x-1)p(x)+p'(2)$$
$$=4p(2)+p'(2)$$

$$\lim_{x\to2-}\frac{p(x)\{f(x)\}^2-p(2)\{f(2)\}^2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{(x-1)^2p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{(x-1)^2p(x)-p(x)+p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{\{(x-1)^2-1\}p(x)}{x-2}+\lim_{x\to2-}\frac{p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{x(x-2)p(x)}{x-2}+p'(2)$$
$$=\lim_{x\to2-}xp(x)+p'(2)=2p(2)+p'(2)$$

즉, $4p(2)+p'(2)=2p(2)+p'(2)$이므로 $p(2)=0$

(i), (ii)에서 $p(x)=x^2(x-2)g(x)$ ($g(x)$는 다항식) 꼴이므로 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 항상 나누어떨어지는 것은 아니다.

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

10 답 ⑤

1단계 a, k, m에 대한 식 세우기

$f(x)=x^2-2x+a$이므로

$$g(x)=\begin{cases}-f(-x) & (x<-k)\\ mx & (-k\le x<k)\\ f(x) & (x\ge k)\end{cases}=\begin{cases}-(x^2+2x+a) & (x<-k)\\ mx & (-k\le x<k)\\ x^2-2x+a & (x\ge k)\end{cases}$$

$$\therefore g'(x)=\begin{cases}-2x-2 & (x<-k)\\ m & (-k<x<k)\\ 2x-2 & (x>k)\end{cases}$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=k$에서도 연속이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to k+}g(x)=\lim_{x\to k-}g(x)=g(k)$에서

$\displaystyle\lim_{x\to k+}(x^2-2x+a)=\lim_{x\to k-}mx=k^2-2k+a$

$\therefore k^2-2k+a=mk$ …… ㉠

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=k$에서도 미분가능하다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to k+}g'(x)=\lim_{x\to k-}g'(x)$에서

$\displaystyle\lim_{x\to k+}(2x-2)=\lim_{x\to k-}m$

$\therefore 2k-2=m$ …… ㉡

이를 ㉠에 대입하면

$k^2-2k+a=(2k-2)k$, $k^2-2k+a=2k^2-2k$

$\therefore a=k^2$ …… ㉢

2단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. $a=1$을 ㉢에 대입하면

$k^2=1 \qquad \therefore k=1$ ($\because k>0$)

이를 ㉡에 대입하면

$m=2\times1-2=0$

$\therefore k+m=1+0=1$

3단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. (i) $0<a<1$일 때,

㉢에서 $0<k^2<1$이고, $k>0$이므로 $0<k<1$

이때 $g(-1)=-(1-2+a)=-(a-1)$,

$g(1)=1-2+a=a-1$이므로

$g(-1)g(1)=-(a-1)^2<0$

(ii) $a>1$일 때,

㉢에서 $k^2>1$이고, $k>0$이므로 $k>1$

㉡에서 $2k-2=m$이고, $2k-2>0$이므로 $m>0$

이때 $g(-1)=-m$, $g(1)=m$이므로

$g(-1)g(1)=-m^2<0$

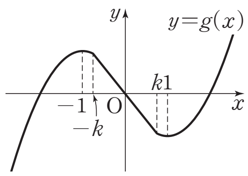
(i), (ii)에서 $a\neq1$이면 $g(-1)g(1)<0$

4단계 **ㄷ이 옳은지 확인하기**

ㄷ. (i) $0<a<1$일 때,

㉡, ㉢에서 $0<k<1$, $-2<m<0$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $\frac{g(k)}{k}$는 두 점 (0, 0), $(k, g(k))$를 지나는 직선의 기울기와 같으므로 $\frac{g(k)}{k}=m$

또 $g(1)=1-2+a=a-1$이므로 $\frac{g(k)}{k}=g(1)$이라 가정하면

$m=a-1$

㉡, ㉢을 대입하면

$2k-2=k^2-1$, $k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0$ $\quad\therefore k=1$

이는 $0<k<1$을 만족시키지 않는다.

$\therefore \frac{g(k)}{k}\neq g(1)$

이때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만난다.

(ii) $a=1$일 때,

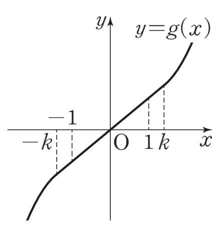
㉢에서 $k=1$

이때 $\frac{g(k)}{k}=g(1)$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a>1$일 때,

㉡, ㉢에서 $k>1$, $m>0$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $\frac{g(k)}{k}$는 두 점 (0, 0), $(k, g(k))$를 지나는 직선의 기울기와 같으므로 $\frac{g(k)}{k}=m$

이때 $g(1)=m$이므로 $\frac{g(k)}{k}=g(1)$

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 함수 $y=g(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만난다.

5단계 **옳은 것 구하기**

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

04 도함수의 활용(1)

STEP 1 핵심 문제

54~55쪽

01 ④	02 $\frac{4}{3}$	03 48	04 -9	05 ③	06 -1
07 ①	08 13	09 ①	10 $\frac{1}{2}$	11 ①	

01 답 ④

점 (3, 1)은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(3)=1$

또 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (3, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(3)$이므로

$f'(3)=2$

$g(x)=(x^2-2x+1)f(x)$라 하면 $g(3)=4f(3)=4\times1=4$

이때 $g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x+1)f'(x)$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 (3, 4)에서의 접선의 기울기는

$g'(3)=4f(3)+4f'(3)=4\times1+4\times2=12$

즉, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 (3, 4)에서의 접선의 방정식은

$y-4=12(x-3)$ $\quad\therefore y=12x-32$

이 직선이 점 $(k, 16)$을 지나므로

$16=12k-32$, $12k=48$ $\quad\therefore k=4$

02 답 $\frac{4}{3}$

$f(x)=x^3-ax$에서 $f'(x)=3x^2-a$

점 P의 좌표를 (t, t^3-at)라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-a$이므로 접선 l의 방정식은

$y-(t^3-at)=(3t^2-a)(x-t)$ $\quad\therefore y=(3t^2-a)x-2t^3$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=(3t^2-a)x-2t^3$이 만나는 점의 x좌표를 구하면

$x^3-ax=(3t^2-a)x-2t^3$

$x^3-3t^2x+2t^3=0$, $(x+2t)(x-t)^2=0$

$\therefore x=-2t$ 또는 $x=t$

그런데 점 P의 x좌표가 t이므로 $Q(-2t, -8t^3+2at)$

점 Q에서의 접선 m의 기울기는 $f'(-2t)=12t^2-a$

두 직선 l과 m이 서로 수직으로 만나므로

$(3t^2-a)(12t^2-a)=-1$

$36t^4-15at^2+a^2+1=0$

$t^2=s\,(s\geq0)$로 놓으면 이차방정식 $36s^2-15as+a^2+1=0$을 만족시키는 음이 아닌 실수 s가 존재해야 한다.

$g(x)=36x^2-15ax+a^2+1$이라 하면

함수 $y=g(x)$의 그래프에서 대칭축은 $x=\frac{5}{24}a>0$이고,

$g(0)=a^2+1>0$이므로 이차방정식 $36x^2-15ax+a^2+1=0$이 실근을 가지면 된다.

이때 이차방정식 $36x^2-15ax+a^2+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=225a^2-144(a^2+1)\geq0$

$81a^2-144\geq0$, $(3a+4)(3a-4)\geq0$

$\therefore a\leq-\frac{4}{3}$ 또는 $a\geq\frac{4}{3}$

따라서 양수 a의 최솟값은 $\frac{4}{3}$이다.

개념 NOTE

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 서로 수직이면 $mm'=-1$이다.

03 답 48

$f(x)=x^3-ax$에서

$f'(x)=3x^2-a$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-at)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-a$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-at)=(3t^2-a)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-a)x-2t^3$

이 직선이 점 $(0,\ 16)$을 지나므로

$16=-2t^3,\ t^3=-8 \qquad \therefore\ t=-2$ ($\because$ t는 실수)

이때 접선의 기울기가 8이므로 $f'(-2)=8$에서

$12-a=8 \qquad \therefore\ a=4$

따라서 $f(x)=x^3-4x$이므로

$f(a)=f(4)=64-16=48$

04 답 -9

$f(x)=-x^3-2x^2+3,\ g(x)=2x^2+4x+3$이라 하면

$f'(x)=-3x^2-4x,\ g'(x)=4x+4$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하자.

$x=t$인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$에서

$-t^3-2t^2+3=2t^2+4t+3$

$t^3+4t^2+4t=0,\ t(t+2)^2=0$

$\therefore\ t=-2$ 또는 $t=0$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$x=t$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로 $f'(t)=g'(t)$에서

$-3t^2-4t=4t+4$

$3t^2+8t+4=0,\ (t+2)(3t+2)=0$

$\therefore\ t=-2$ 또는 $t=-\dfrac{2}{3}$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $t=-2$

즉, 접점의 좌표는 $(-2,\ 3)$이고, 접선의 기울기는 -4이므로 접선의 방정식은

$y-3=-4(x+2) \qquad \therefore\ y=-4x-5$

따라서 $a=-4,\ b=-5$이므로

$a+b=-9$

05 답 ③

점 P와 직선 $y=2tx-1$ 사이의 거리가 최소이려면 점 P가 기울기가 $2t$인 곡선 $y=x^2$의 접선의 접점이어야 한다.

$f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$

점 P에서의 접선의 기울기가 $2t$이므로 점 P의 x좌표는 t이다.

$\therefore\ \mathrm{P}(t,\ t^2)$

따라서 직선 OP의 방정식은 $y=tx$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

두 직선 $y=tx,\ y=2tx-1$이 만나는 점 Q의 x좌표를 구하면

$tx=2tx-1,\ tx=1 \qquad \therefore\ x=\dfrac{1}{t}$

이를 ㉠에 대입하면 $y=t\times\dfrac{1}{t}=1$

$\therefore\ \mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 1\right)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{t}-t\right)^2+(1-t^2)^2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{t\to 1-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}&=\lim_{t\to 1-}\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-t\right)^2+(1-t^2)^2}}{1-t}\\&=\lim_{t\to 1-}\frac{\sqrt{\left\{\frac{1}{t}(1-t^2)\right\}^2+(1-t^2)^2}}{1-t}\\&=\lim_{t\to 1-}\frac{\sqrt{(1-t^2)^2\left(\frac{1}{t^2}+1\right)}}{1-t}\\&=\lim_{t\to 1-}\sqrt{\frac{(1+t)^2(1-t)^2\left(\frac{1}{t^2}+1\right)}{(1-t)^2}}\\&=\lim_{t\to 1-}\sqrt{(1+t)^2\left(\frac{1}{t^2}+1\right)}\\&=\sqrt{2^2\times 2}\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

06 답 -1

함수 $f(x)=x^3-ax+2$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하다.

이때 $f(-1)=f(2)$이면

$a+1=-2a+10$

$3a=9$

$\therefore\ a=3$

즉, 함수 $f(x)=x^3-3x+2$에서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-3$이므로

$f'(c)=0$에서 $3c^2-3=0$

$3c^2=3,\ c^2=1$

$\therefore\ c=1$ ($\because$ $-1<c<2$)

또 닫힌구간 $[b,\ 4]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수가 2이므로

$\dfrac{f(4)-f(b)}{4-b}=f'(2)$에서 $\dfrac{54-(b^3-3b+2)}{4-b}=9$

$b^3-12b-16=0$

$(b+2)^2(b-4)=0$

$\therefore\ b=-2$ ($\because$ $b<2$)

$\therefore\ b+c=-1$

07 답 ①

$y=\{f(x)\}^2$에서

$y'=2f(x)f'(x)$

ㄱ. 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 $f(x)\le 0,\ f'(x)\ge 0$이므로
   $2f(x)f'(x)\le 0$
   즉, 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 감소한다.

ㄴ. 닫힌구간 $[3,\ 4]$에서 $f(x)\ge 0,\ f'(x)\le 0$이므로
   $2f(x)f'(x)\le 0$
   즉, 닫힌구간 $[3,\ 4]$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 감소한다.

ㄷ. 닫힌구간 $[4,\ 5]$에서 $f(x)\le 0,\ f'(x)\le 0$이므로
   $2f(x)f'(x)\ge 0$
   즉, 닫힌구간 $[4,\ 5]$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 증가한다.

ㄹ. 닫힌구간 $[6,\ 7]$에서 $f(x)\ge 0,\ f'(x)>0$이므로
   $2f(x)f'(x)\ge 0$
   즉, 닫힌구간 $[6,\ 7]$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 증가한다.

따라서 보기에서 함수 $\{f(x)\}^2$이 감소하는 구간이 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

08 답 13

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 역함수가 존재하려면 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다. ………………… 배점 40%

$f(x)=2x^3+ax^2+(2a+1)x+1$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+2a+1$

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-6(2a+1)\leq 0$

$a^2-12a-6\leq 0$

$\therefore\ 6-\sqrt{42}\leq a\leq 6+\sqrt{42}$ ………………… 배점 40%

따라서 정수 a는 0, 1, 2, …, 12의 13개이다. ………………… 배점 20%

비법 NOTE

함수의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 증가하거나 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

09 답 ①

$f(x)=x^3+3ax^2+4a$에서

$f'(x)=3x^2+6ax=3x(x+2a)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2a$ 또는 $x=0$

(i) $a>0$일 때,

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	$-2a$	…	0	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고, 극솟값이 -40이므로

$f(0)=-40$에서

$4a=-40\qquad \therefore\ a=-10$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때,

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	0	…	$-2a$	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2a$에서 극소이고, 극솟값이 -40이므로

$f(-2a)=-40$에서

$4a^3+4a=-40,\ a^3+a+10=0$

$(a+2)(a^2-2a+5)=0$

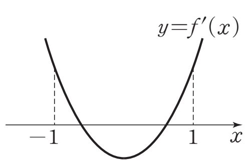
$\therefore\ a=-2$ ($\because$ a는 실수)

(i), (ii)에서 $f(x)=x^3-6x^2-8$이므로

$f(2)=8-24-8=-24$

10 답 $\frac{1}{2}$

(가)에서 함수 $f(x)$는 $-1<x<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지므로 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-1<x<1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



$f(x)=x^3+ax^2+ax$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+a$

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a>0$

$a(a-3)>0\qquad \therefore\ a<0$ 또는 $a>3$ …… ㉠

$f'(-1)>0$이어야 하므로

$3-a>0\qquad \therefore\ a<3$ …… ㉡

$f'(1)>0$이어야 하므로

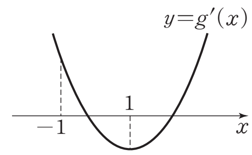
$3+3a>0,\ 3a>-3\qquad \therefore\ a>-1$ …… ㉢

함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{a}{3}$이므로

$-1<-\frac{a}{3}<1\qquad \therefore\ -3<a<3$ …… ㉣

㉠~㉣에서 a의 값의 범위는 $-1<a<0$ …… ㉤

(나)에서 함수 $g(x)$는 $-1<x<1$에서 극댓값을 갖고, $x>1$에서 극솟값을 가지므로 이차방정식 $g'(x)=0$이 $-1<x<1$에서 한 실근을 갖고, $x>1$에서 다른 한 실근을 가져야 한다.



$g(x)=x^3+2ax^2-4a^2x$에서

$g'(x)=3x^2+4ax-4a^2$

$g'(-1)>0$이어야 하므로

$3-4a-4a^2>0,\ 4a^2+4a-3<0$

$(2a+3)(2a-1)<0\qquad \therefore\ -\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}$ …… ㉥

$g'(1)<0$이어야 하므로

$3+4a-4a^2<0,\ 4a^2-4a-3>0$

$(2a+1)(2a-3)>0\qquad \therefore\ a<-\frac{1}{2}$ 또는 $a>\frac{3}{2}$ …… ㉦

㉥, ㉦에서 a의 값의 범위는 $-\frac{3}{2}<a<-\frac{1}{2}$ …… ㉧

㉤, ㉧에서 a의 값의 범위는 $-1<a<-\frac{1}{2}$이므로

$\alpha=-1,\ \beta=-\frac{1}{2}\qquad \therefore\ \alpha\beta=\frac{1}{2}$

11 답 ①

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 -1, 1, 3, 5이므로 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	1	…	3	…	5	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗	극대	↘

ㄱ. 닫힌구간 $[-2,\ 6]$에서 함수 $f(x)$가 극댓값을 갖는 x의 값은 -1, 5이므로 그 합은 $-1+5=4$

ㄴ. 함수 $y=-f(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가지므로 함수 $-f(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.

즉, 닫힌구간 $[-2,\ 6]$에서 함수 $-f(x)$의 극댓값은 1개이다.

ㄷ. 함수 $y=f(x-2)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가지므로 함수 $f(x-2)$는 $x=5$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

STEP 2 고난도 문제 | 56~60쪽

01 $\sqrt{2}$	02 15	03 ③	04 5	05 29	06 ①
07 79	08 ㄱ, ㄴ		09 25	10 5	11 6
12 20	13 ④	14 ①	15 ⑤	16 ③	17 128
18 24	19 8	20 3	21 10	22 160	23 6
24 40	25 ①	26 ③			

01 답 $\sqrt{2}$

$f(x)=ax^3-ax$에서

$f'(x)=3ax^2-a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=2a$

즉, 점 P에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는

$-\dfrac{1}{f'(-1)}=-\dfrac{1}{2a}$

기울기가 $-\dfrac{1}{2a}$이고 점 P를 지나는 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2a}(x+1)$ $\cdots\cdots$ ㉠

이 직선과 곡선 $y=ax^3-ax$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$ax^3-ax=-\dfrac{1}{2a}(x+1)$

$ax^3-\left(a-\dfrac{1}{2a}\right)x+\dfrac{1}{2a}=0$

$(x+1)\left(ax^2-ax+\dfrac{1}{2a}\right)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $ax^2-ax+\dfrac{1}{2a}=0$

즉, 곡선 $y=f(x)$와 직선 ㉠이 점 P가 아닌 점에서 만나려면 이차방정식 $ax^2-ax+\dfrac{1}{2a}=0$이 $x\neq-1$인 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $ax^2-ax+\dfrac{1}{2a}=0$에 $x=-1$을 대입하면

$2a+\dfrac{1}{2a}=0$ → $a>0$이므로 $2a+\dfrac{1}{2a}>0$이다.

이 등식은 성립하지 않으므로 $x=-1$은 이차방정식 $ax^2-ax+\dfrac{1}{2a}=0$의 근이 아니다.

이때 이차방정식 $ax^2-ax+\dfrac{1}{2a}=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4a\times\dfrac{1}{2a}\geq0$

$a^2-2\geq0,\ a^2\geq2$ $\quad\therefore\ a\geq\sqrt{2}\ (\because\ a>0)$

따라서 양수 a의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

02 답 15

$f(x)=x^3-3x^2-5x+6$에서

$f'(x)=3x^2-6x-5$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2-5t+6)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-6t-5$

이때 직선 l의 기울기를 m이라 하면

$3t^2-6t-5=m$ $\cdots\cdots$ ㉠

직선 l을 제외한 곡선 $y=f(x)$의 접선 중 기울기가 m인 직선이 존재하지 않으려면 이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $3t^2-6t-5-m=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=9-3(-5-m)=0$

$24+3m=0,\ 3m=-24$

$\therefore\ m=-8$

이를 ㉠에 대입하면

$3t^2-6t-5=-8,\ 3t^2-6t+3=0$

$(t-1)^2=0$ $\quad\therefore\ t=1$

즉, 곡선 $y=f(x)$와 직선 l의 접점의 좌표는 $(1,\ -1)$이므로 직선 l의 방정식은

$y+1=-8(x-1)$ $\quad\therefore\ y=-8x+7$

따라서 직선 l의 x절편은 $\dfrac{7}{8}$이므로

$p=8,\ q=7$

$\therefore\ p+q=15$

03 답 ③

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ g(0))$에서의 접선의 방정식이 $y=2x+1$이므로 $g(0)=1,\ g'(0)=2$, 즉 $f(0)=1,\ f'(0)=2$이다.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1+}g(x)=\lim\limits_{x\to1-}g(x)=g(1)$에서

$\lim\limits_{x\to1+}\{f(x-1)+2\}=\lim\limits_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$f(0)+2=f(1)$ $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=1$에서도 미분가능하다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1+}\frac{\{f(x-1)+2\}-f(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}\frac{f(x-1)-f(0)}{x-1}\ (\because\ ㉠)\\&=f'(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\&=f'(1)\end{aligned}$$

$\therefore\ f'(0)=f'(1)$

따라서 $f(0)=1,\ f(1)=1+2=3,\ f'(0)=f'(1)=2$이고,

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ ($a,\ b,\ c$는 상수)이라 하면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$이므로

$f'(0)=c=2$

$f(1)=1+a+b+2+1=3$

$\therefore\ a+b=-1$ $\cdots\cdots$ ㉡

$f'(1)=4+3a+2b+2=2$

$\therefore\ 3a+2b=-4$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=1$

$\therefore\ f(x)=x^4-2x^3+x^2+2x+1$

$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x\leq1)\\ f(x-1)+2 & (x>1)\end{cases}$이므로 $g'(t)=2$를 만족시키는 t의 값은

$t\leq1$일 때 $f'(t)=2$에서

$4t^3-6t^2+2t+2=2$

$2t(2t-1)(t-1)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=\dfrac{1}{2}$ 또는 $t=1$ $\cdots\cdots$ ㉣

또 $x>1$일 때 $g(x)=f(x-1)+2$이고 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 곡선이므로 $t>1$에서 $g'(t)=2$를 만족시키는 t의 값은

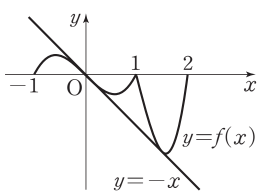
$t=\frac{3}{2}$ 또는 $t=2$ ...... ㉤

㉣, ㉤에서 $g'(t)=2$인 모든 실수 t의 값의 합은

$0+\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2=5$

04 답 5

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x$가 두 점에서 접하려면 그림과 같이 $-1<x<1$에서 한 점에서 접하고, $1<x<2$에서 한 점에서 접해야 한다.



$g(x)=ax(x+1)(x-1)\ (-1\le x\le 1)$

이라 하면

$g'(x)=a(x+1)(x-1)+ax(x-1)+ax(x+1)$

$\quad=a(3x^2-1)\ (-1<x<1)$

$h(x)=bx(x-1)(x-2)\ (1<x\le 2)$라 하면

$h'(x)=b(x-1)(x-2)+bx(x-2)+bx(x-1)$

$\quad=b(3x^2-6x+2)\ (1<x<2)$

(i) $-1<x<1$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=-x$가 접할 때,
접점의 좌표를 $(\alpha,\ a\alpha(\alpha+1)(\alpha-1))\ (-1<\alpha<1)$이라 하면 접선의 기울기는 $g'(\alpha)=a(3\alpha^2-1)$이므로 접선의 방정식은

$y-a\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)=a(3\alpha^2-1)(x-\alpha)$

$\therefore\ y=a(3\alpha^2-1)x-2a\alpha^3$

이 접선은 직선 $y=-x$와 같으므로

$a(3\alpha^2-1)=-1,\ -2a\alpha^3=0$

$-2a\alpha^3=0$에서 a는 양수이므로

$\alpha^3=0 \qquad \therefore\ \alpha=0$

이를 $a(3\alpha^2-1)=-1$에 대입하면

$-a=-1 \qquad \therefore\ a=1$

(ii) $1<x<2$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=-x$가 접할 때,
접점의 좌표를 $(\beta,\ b\beta(\beta-1)(\beta-2))\ (1<\beta<2)$라 하면 접선의 기울기는 $h'(\beta)=b(3\beta^2-6\beta+2)$이므로 접선의 방정식은

$y-b\beta(\beta-1)(\beta-2)=b(3\beta^2-6\beta+2)(x-\beta)$

$\therefore\ y=b(3\beta^2-6\beta+2)x-b(2\beta^3-3\beta^2)$

이 접선은 직선 $y=-x$와 같으므로

$b(3\beta^2-6\beta+2)=-1,\ -b(2\beta^3-3\beta^2)=0$

$-b(2\beta^3-3\beta^2)=0$에서 b는 양수이므로

$2\beta^3-3\beta^2=0,\ 2\beta^2\left(\beta-\frac{3}{2}\right)=0$

$\therefore\ \beta=\frac{3}{2}\ (\because\ 1<\beta<2)$

이를 $b(3\beta^2-6\beta+2)=-1$에 대입하면

$-\frac{b}{4}=-1 \qquad \therefore\ b=4$

(i), (ii)에서 $a=1,\ b=4$이므로

$a+b=5$

05 답 29

$f(x)=x^3-3x,\ g(x)=x^3-3x+a$라 하면

$f'(x)=3x^2-3,\ g'(x)=3x^2-3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x_1,\ x_1^3-3x_1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(x_1)=3x_1^2-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(x_1^3-3x_1)=(3x_1^2-3)(x-x_1)$

$\therefore\ y=(3x_1^2-3)x-2x_1^3$ ...... ㉠

또 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(x_2,\ x_2^3-3x_2+a)$에서의 접선의 기울기는 $g'(x_2)=3x_2^2-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(x_2^3-3x_2+a)=(3x_2^2-3)(x-x_2)$

$\therefore\ y=(3x_2^2-3)x-2x_2^3+a$ ...... ㉡

이때 ㉠, ㉡이 서로 같은 직선이므로

$3x_1^2-3=3x_2^2-3$ ...... ㉢

$-2x_1^3=-2x_2^3+a$ ...... ㉣

㉢에서 $x_1^2-x_2^2=0$

$(x_1+x_2)(x_1-x_2)=0$

그런데 $|x_2-x_1|=3$이므로 $x_1\ne x_2 \qquad \therefore\ x_1=-x_2$

이를 ㉣에 대입하면

$2x_2^3=-2x_2^3+a \qquad \therefore\ a=4x_2^3$ ...... ㉤

또 $|x_2-x_1|=3$에서

$|2x_2|=3 \qquad \therefore\ x_2=-\frac{3}{2}$ 또는 $x_2=\frac{3}{2}$

이를 ㉤에 대입하면

$x_2=-\frac{3}{2}$일 때 $a=-\frac{27}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}$일 때 $a=\frac{27}{2}$

그런데 $a>0$이므로 $a=\frac{27}{2}$

따라서 $p=2,\ q=27$이므로 $p+q=29$

06 답 ①

$f(x)=x^4-2x^2+2$라 하면 $f'(x)=4x^3-4x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^4-2t^2+2)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3-4t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^4-2t^2+2)=(4t^3-4t)(x-t)$

$\therefore\ y=(4t^3-4t)x-3t^4+2t^2+2$ ...... ㉠

이 직선이 점 $(a,\ 1)$을 지나므로

$1=(4t^3-4t)a-3t^4+2t^2+2$

$3t^4-4at^3-2t^2+4at-1=0$

$(t+1)(t-1)(3t^2-4at+1)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$ 또는 $3t^2-4at+1=0$

이때 $t=-1,\ t=1$을 각각 ㉠에 대입하면 $y=1$

즉, 직선 $y=1$은 곡선 $y=x^4-2x^2+2$에 접하는 직선 중 하나이므로 점 $(a,\ 1)$에서 곡선 $y=x^4-2x^2+2$에 그은 접선이 두 개 존재하려면 이차방정식 $3t^2-4at+1=0$이 $t\ne-1,\ t\ne1$인 중근을 갖거나 $t=-1$ 또는 $t=1$을 한 근으로 갖고 $t\ne-1,\ t\ne1$인 한 근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $3t^2-4at+1=0$이 $t\ne-1,\ t\ne1$인 중근을 가질 때,
이차방정식 $3t^2-4at+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-3=0,\ 4a^2=3,\ a^2=\frac{3}{4}$

$\therefore\ a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ⓘ $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$을 이차방정식 $3t^2-4at+1=0$에 대입하면

$3t^2+2\sqrt{3}t+1=0$

$(\sqrt{3}t+1)^2=0 \qquad \therefore\ t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

이는 $t\ne-1,\ t\ne1$이라는 조건을 만족시킨다.

ⓘ $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$을 이차방정식 $3t^2-4at+1=0$에 대입하면

$3t^2-2\sqrt{3}t+1=0$

$(\sqrt{3}t-1)^2=0 \qquad \therefore t=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이는 $t\neq-1$, $t\neq1$이라는 조건을 만족시킨다.

(ii) 이차방정식 $3t^2-4at+1=0$이 $t=-1$ 또는 $t=1$을 한 근으로 갖고 $t\neq-1$, $t\neq1$인 한 근을 가질 때,

ⓘ $t=-1$을 이차방정식 $3t^2-4at+1=0$에 대입하면

$4+4a=0$, $4a=-4 \qquad \therefore a=-1$

이를 $3t^2-4at+1=0$에 대입하면

$3t^2+4t+1=0$, $(t+1)(3t+1)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=-\frac{1}{3}$

이는 조건을 만족시킨다.

ⓘ $t=1$을 이차방정식 $3t^2-4at+1=0$에 대입하면

$4-4a=0$, $4a=4 \qquad \therefore a=1$

이를 $3t^2-4at+1=0$에 대입하면

$3t^2-4t+1=0$, $(3t-1)(t-1)=0$

$\therefore t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=1$

이는 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a의 값은 $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, ±1이므로 그 곱은

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-1)\times1=\frac{3}{4}$

07 답 79

(가)에서 삼차식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지와 x^2-3x+2로 나누었을 때의 나머지가 서로 같으므로 나머지를 k (k는 상수)라 하면 $f(x)-k$는 $x+1$과 x^2-3x+2로 나누어떨어진다.

$f(x)$의 최고차항의 계수를 a ($a\neq0$)라 하면

$f(x)-k=a(x+1)(x^2-3x+2)$

$=a(x+1)(x-1)(x-2)$

$=a(x^2-1)(x-2)$

$\therefore f(x)=a(x^2-1)(x-2)+k$ ······ **배점 30%**

이때 (나)에서 점 $(1, f(1))$은 직선 $y=-4x+1$ 위의 점이므로

$f(1)=-3$

$f(1)=-3$에서 $k=-3$ ······ **배점 10%**

또 $f'(x)=a\times2x(x-2)+a(x^2-1)=a(3x^2-4x-1)$이고, (나)에서 $f'(1)=-4$이므로

$-2a=-4 \qquad \therefore a=2$ ······ **배점 10%**

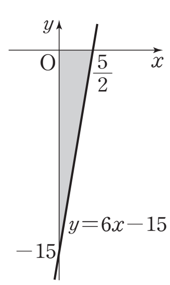
따라서 $f(x)=2(x^2-1)(x-2)-3$, $f'(x)=2(3x^2-4x-1)$이므로

$f(2)=-3$, $f'(2)=6$

이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, -3)$에서의 접선의 방정식은

$y+3=6(x-2) \qquad \therefore y=6x-15$ ······ **배점 20%**

즉, 직선 $y=6x-15$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times15=\frac{75}{4}$ ······ **배점 20%**

따라서 $p=4$, $q=75$이므로

$p+q=79$ ······ **배점 10%**

개념 NOTE

다항식 A를 다항식 B ($B\neq0$)로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$A=BQ+R$ (단, R는 상수 또는 (R의 차수)<(B의 차수))

08 답 ㄱ, ㄴ

$f(x)=\frac{1}{3}x^3$이라 하면

$f'(x)=x^2$

접점 P의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{3}t^3\right)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=t^2$이므로

접선의 방정식은

$y-\frac{1}{3}t^3=t^2(x-t) \qquad \therefore y=t^2x-\frac{2}{3}t^3$ ······ ㉠

직선 ㉠이 점 $A(0, a)$를 지나므로

$a=-\frac{2}{3}t^3 \qquad \therefore A\left(0, -\frac{2}{3}t^3\right)$

이때 $a>0$이므로 $t<0$ ······ ㉡

곡선 $y=\frac{1}{3}x^3$과 직선 ㉠이 만나는 점의 x좌표를 구하면

$\frac{1}{3}x^3=t^2x-\frac{2}{3}t^3$

$x^3-3t^2x+2t^3=0$, $(x+2t)(x-t)^2=0$

$\therefore x=-2t$ 또는 $x=t$

그런데 점 P의 x좌표가 t이므로

$Q\left(-2t, -\frac{8}{3}t^3\right)$

직선 ㉠이 x축과 만나는 점 B의 x좌표를 구하면

$t^2x-\frac{2}{3}t^3=0$, $t^2x=\frac{2}{3}t^3 \qquad \therefore x=\frac{2}{3}t$ ($\because t\neq0$)

$\therefore B\left(\frac{2}{3}t, 0\right)$

ㄱ. $\overline{AP}=\sqrt{t^2+(t^3)^2}=\sqrt{t^2(1+t^4)}$

$=|t|\sqrt{1+t^4}$

$\overline{AQ}=\sqrt{(-2t)^2+(-2t^3)^2}=\sqrt{4t^2(1+t^4)}$

$=2|t|\sqrt{1+t^4}$

$\therefore \overline{AP}:\overline{AQ}=1:2$

ㄴ. $a=-\frac{2}{3}t^3$이므로 $-\frac{2}{3}t^3=\frac{16}{3}$

$t^3=-8 \qquad \therefore t=-2$ ($\because$ t는 실수)

즉, $P\left(-2, -\frac{8}{3}\right)$, $B\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$이므로

$\overline{PB}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{17}}{3}$

ㄷ. 삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{9}{8}$이므로

$\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}t\right)\times\left(-\frac{2}{3}t^3\right)=\frac{9}{8}$

$\frac{2}{9}t^4=\frac{9}{8}$, $t^4=\frac{81}{16} \qquad \therefore t=-\frac{3}{2}$ ($\because$ ㉡)

$\therefore A\left(0, \frac{9}{4}\right)$, $B(-1, 0)$, $P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{8}\right)$, $Q(3, 9)$

$\therefore$ (삼각형 OBP의 넓이)$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{9}{8}=\frac{9}{16}$,

(삼각형 OAQ의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}\times3=\frac{27}{8}$

즉, 삼각형 OBP의 넓이는 삼각형 OAQ의 넓이의 $\frac{1}{6}$배이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

09 답 25

$f(x)=-x^3+ax^2+2x$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+2$

점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=2$이므로 접선의 방정식은

$y=2x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

곡선 $y=-x^3+ax^2+2x$와 직선 $y=2x$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$-x^3+ax^2+2x=2x,\ x^3-ax^2=0$

$x^2(x-a)=0 \qquad \therefore\ x=0$ 또는 $x=a$

그런데 점 O의 x좌표가 0이므로

$\mathrm{A}(a,\ 2a)$

점 A에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=-3a^2+2a^2+2=-a^2+2$이므로 접선의 방정식은

$y-2a=(-a^2+2)(x-a)$

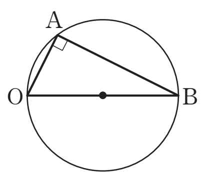
$\therefore\ y=(-a^2+2)x+a^3$

이 직선이 x축과 만나는 점 B의 x좌표를 구하면

$(-a^2+2)x+a^3=0,\ (a^2-2)x=a^3$

$\therefore\ x=\dfrac{a^3}{a^2-2}$

$\therefore\ \mathrm{B}\left(\dfrac{a^3}{a^2-2},\ 0\right)$



점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로 직선 OA와 직선 AB는 서로 수직이다.

이때 ㉠에서 직선 OA의 기울기가 2이고, 직선 AB의 기울기는 $f'(a)=-a^2+2$이므로

$2\times(-a^2+2)=-1,\ 2a^2=5$

$a^2=\dfrac{5}{2} \qquad \therefore\ a=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\ (\because\ a>\sqrt{2})$

따라서 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2},\ \sqrt{10}\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{5\sqrt{10}}{2},\ 0\right)$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+(\sqrt{10})^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2\sqrt{10})^2+(-\sqrt{10})^2}=5\sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}=25$

10 답 5

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(x_1,\ x_2)$에 적어도 하나 존재한다.

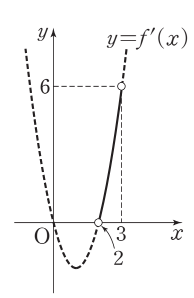
$f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-2x^2+4$에서

$f'(x)=2x^2-4x$이므로

$f'(c)=2c^2-4c$

이때 $2\le x_1<c<x_2\le 3$에서 $2<c<3$이므로

$0<f'(c)<6$



따라서 $A=\{a\,|\,0<a<6\}$이므로 집합 A의 원소 중 정수인 것은 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

11 답 6

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 ㈏에서 $-1<c<3$인 c에 대하여 $|f'(c)|\le 4$이므로

$\left|\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}\right|\le 4,\ \left|\dfrac{3-f(-1)}{4}\right|\le 4\ (\because$ ㈎$)$

$-4\le\dfrac{3-f(-1)}{4}\le 4,\ -19\le -f(-1)\le 13$

$\therefore\ -13\le f(-1)\le 19$

따라서 $f(-1)$의 최댓값은 19, 최솟값은 -13이므로 구하는 합은

$19+(-13)=6$

12 답 20

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[x-2,\ x+2]$에서 연속이고 열린구간 $(x-2,\ x+2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(x+2)-f(x-2)}{(x+2)-(x-2)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(x-2,\ x+2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x-2<c<x+2$에서 $x\to\infty$이면 $c\to\infty$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\{f(x+2)-f(x-2)\}&=4\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+2)-f(x-2)}{(x+2)-(x-2)}\\&=4\lim_{c\to\infty}f'(c)\\&=4\times 3\ (\because\ \lim_{x\to\infty}f'(x)=3)\\&=12\end{aligned}$$

또 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-x-2,\ -x+2]$에서 연속이고 열린구간 $(-x-2,\ -x+2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(-x+2)-f(-x-2)}{(-x+2)-(-x-2)}=f'(d)$인 d가 열린구간 $(-x-2,\ -x+2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $-x-2<d<-x+2$에서 $x\to\infty$이면 $d\to-\infty$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\{f(-x+2)-f(-x-2)\}&=4\lim_{x\to\infty}\frac{f(-x+2)-f(-x-2)}{(-x+2)-(-x-2)}\\&=4\lim_{d\to-\infty}f'(d)\\&=4\times 2\ (\because\ \lim_{x\to-\infty}f'(x)=2)\\&=8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\lim_{x\to\infty}\{f(-x+2)+f(x+2)-f(-x-2)-f(x-2)\}\\&=\lim_{x\to\infty}\{f(x+2)-f(x-2)\}+\lim_{x\to\infty}\{f(-x+2)-f(-x-2)\}\\&=12+8=20\end{aligned}$$

13 답 ④

$f(x)=x^3+6x^2+36|x-3a|+3$에서

(i) $x\ge 3a$일 때,

$f(x)=x^3+6x^2+36(x-3a)+3$이므로

$f'(x)=3x^2+12x+36=3(x+2)^2+24>0$

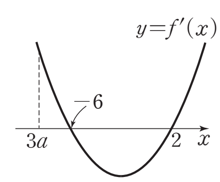
즉, 함수 $f(x)$는 $x\ge 3a$에서 증가한다.

(ii) $x<3a$일 때,

$f(x)=x^3+6x^2-36(x-3a)+3$이므로

$f'(x)=3x^2+12x-36=3(x+6)(x-2)$

함수 $f(x)$가 $x<3a$에서 증가하려면 $x<3a$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로



$3a\le -6$

$\therefore\ a\le -2$

(i), (ii)에서 $a\le -2$

따라서 상수 a의 최댓값은 -2이다.

14 답 ①

ㄱ. 함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 역함수가 존재하려면 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.
즉, 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\ge0$이어야 한다.
$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서
$g'(x)=3x^2+2ax+b$
이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=a^2-3b\le0$ $\quad\therefore a^2\le3b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

ㄴ. $2f(x)=g(x)-g(-x)$에서
$f(x)=\frac{1}{2}\{g(x)-g(-x)\}$
$\quad=\frac{1}{2}\{x^3+ax^2+bx+c-(-x^3+ax^2-bx+c)\}$
$\quad=x^3+bx$
$\therefore f'(x)=3x^2+b$
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=-12b$
이때 ㉠에서 $a^2\ge0$이므로 $3b\ge0$ $\quad\therefore b\ge0$
$\therefore D_2=-12b\le0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
즉, 이차방정식 $f'(x)=0$은 중근 또는 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄷ. ㉡에서 이차방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지면
$-12b=0$ $\quad\therefore b=0$
이를 ㉠에 대입하면 $a^2\le0$
이때 a는 실수이므로 $a=0$
즉, $g'(x)=3x^2$이므로 $g'(1)=3$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

15 답 ⑤

㈎에서 $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $g(2)=1$, $g'(2)=0$
$f(0)=1$이므로 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$(a는 자연수, b, c는 상수)이라 하면
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$f'(0)=0$에서 $c=0$
$\therefore f(x)=ax^3+bx^2+1$
이차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 -1이므로
$g(x)=-x^2+dx+e$(d, e는 상수)라 하면
$g'(x)=-2x+d$
$g(2)=1$, $g'(2)=0$에서
$-4+2d+e=1$, $-4+d=0$
$\therefore d=4$, $e=-3$
즉, $g(x)=-x^2+4x-3$이므로
$h(x)=f(x)-g(x)$
$\quad=(ax^3+bx^2+1)-(-x^2+4x-3)$
$\quad=ax^3+(b+1)x^2-4x+4$
$\therefore h'(x)=3ax^2+2(b+1)x-4$
㈏에서 함수 $h(x)$가 증가하는 x의 값의 범위가 $x\le-\frac{4}{3}$ 또는 $x\ge1$이므로 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗		↘		↗

이차방정식 $h'(x)=0$, 즉 $3ax^2+2(b+1)x-4=0$의 두 근이 $-\frac{4}{3}$, 1이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$-\frac{1}{3}=-\frac{2(b+1)}{3a}$, $-\frac{4}{3}=-\frac{4}{3a}$
$\therefore a=1$, $b=-\frac{1}{2}$
따라서 $h(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-4x+4$이므로
$h(-2)=-8+2+8+4=6$

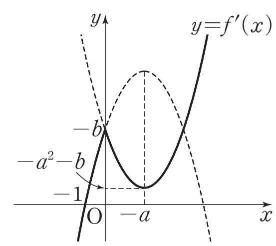
16 답 ③

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0)\\ \frac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\ge0)\end{cases}$$ 에서

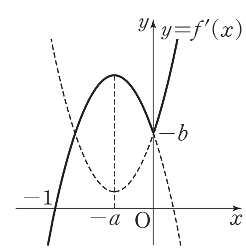
$$f'(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-b & (x<0)\\ x^2+2ax-b & (x>0)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-(x+a)^2+a^2-b & (x<0)\\ (x+a)^2-a^2-b & (x>0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하므로 $f'(x)\le0$, 구간 $[-1, \infty)$에서 증가하므로 $f'(x)\ge0$
즉, $f'(-1)=0$이므로
$-1+2a-b=0$ $\quad\therefore b=2a-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
조건을 만족시키도록 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형을 a의 값에 따라 경우를 나누어 그려 보면 다음과 같다.

(ⅰ) $-a>0$, 즉 $a<0$일 때,
$x\ge-1$에서 $f'(x)\ge0$이려면
$f'(-a)\ge0$이어야 하므로
$-a^2-b\ge0$ $\quad\therefore a^2+b\le0$
㉠을 대입하면 $a^2+2a-1\le0$
$\therefore -1-\sqrt{2}\le a\le-1+\sqrt{2}$
그런데 $a<0$이므로
$-1-\sqrt{2}\le a<0$



(ⅱ) $-a\le0$, 즉 $a\ge0$일 때,
$x\ge-1$에서 $f'(x)\ge0$이려면
$f'(0)\ge0$이어야 하므로
$-b\ge0$ $\quad\therefore b\le0$
㉠을 대입하면 $2a-1\le0$
$\therefore a\le\frac{1}{2}$
그런데 $a\ge0$이므로 $0\le a\le\frac{1}{2}$



(ⅰ), (ⅱ)에서 $-1-\sqrt{2}\le a\le\frac{1}{2}$
이때 $a+b=a+(2a-1)=3a-1$의 값의 범위는
$-4-3\sqrt{2}\le3a-1\le\frac{1}{2}$
따라서 $a+b$의 최댓값은 $M=\frac{1}{2}$이고, 최솟값은 $m=-4-3\sqrt{2}$이므로
$M-m=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$

17 답 128

함수 $f(x)$의 최고차항은 x^3이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $3x^2$이고, 최고차항의 계수는 3이다.

함수 $f(x)$의 극대인 점을 $(\alpha,\ f(\alpha))$, 극소인 점을 $(\beta,\ f(\beta))$라 하면

$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$

다항식 $f(x)$를 $f'(x)$로 나눈 나머지를 $px+q$(p, q는 상수)라 하면

㈎에서

$f(x)=f'(x)\left\{\frac{1}{3}(x-1)\right\}+px+q=(x-\alpha)(x-\beta)(x-1)+px+q$

이므로 $f(\alpha)=p\alpha+q$, $f(\beta)=p\beta+q$

직선 $y=px+q$는 두 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$를 지나므로 ㈏에서

$p=-4$, $q=3$

$\therefore\ f(x)=f'(x)\left\{\frac{1}{3}(x-1)\right\}-4x+3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(\alpha)=-4\alpha+3,\ f(\beta)=-4\beta+3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

이때 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$(a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 ㉠에서

$$x^3+ax^2+bx+c=\frac{1}{3}(3x^2+2ax+b)(x-1)-4x+3$$
$$=\frac{1}{3}\{3x^3+(2a-3)x^2+(b-2a-12)x+9-b\}$$

$\therefore\ 3x^3+3ax^2+3bx+3c=3x^3+(2a-3)x^2+(b-2a-12)x+9-b$

즉, $3a=2a-3$, $3b=b-2a-12$, $3c=9-b$이므로

$a=-3$, $b=-3$, $c=4$

$\therefore\ f(x)=x^3-3x^2-3x+4$, $f'(x)=3x^2-6x-3$

방정식 $f'(x)=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

이고, $M=f(\alpha)$, $m=f(\beta)$이므로 ㉡에서

$M-m=f(\alpha)-f(\beta)=(-4\alpha+3)-(-4\beta+3)=-4(\alpha-\beta)$

$$\therefore\ (M-m)^2=16(\alpha-\beta)^2=16\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$$
$$=16\{2^2-4\times(-1)\}=128$$

idea

18 답 24

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 $x=1$인 점에서 만나고 $x=4$인 점에서 접하므로 삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$은 한 근 1과 중근 4를 갖는다.

이때 삼차함수 $f(x)-g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-g(x)=(x-1)(x-4)^2$

일차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x)=x+a$(a는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)(x-4)^2+x+a=x^3-9x^2+25x+a-16$

$\therefore\ f'(x)=3x^2-18x+25$

이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=\frac{25}{3} \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합이 46이므로

$f(\alpha)+f(\beta)=46$

$(\alpha^3-9\alpha^2+25\alpha+a-16)+(\beta^3-9\beta^2+25\beta+a-16)=46$

$\alpha^3+\beta^3-9(\alpha^2+\beta^2)+25(\alpha+\beta)+2a-32=46$

$\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}-9\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+25(\alpha+\beta)+2a=78$

$\left(6^3-3\times\frac{25}{3}\times6\right)-9\left(6^2-2\times\frac{25}{3}\right)+25\times6+2a=78$ ($\because$ ㉠)

$66-174+150+2a=78$

$2a=36 \qquad \therefore\ a=18$

따라서 $f(x)=x^3-9x^2+25x+2$이므로

$f(2)=8-36+50+2=24$

19 답 8

$f(x)=x^3-2x^2$에서

$f'(x)=3x^2-4x$

$\therefore\ f(1)=1-2=-1$, $f'(1)=3-4=-1$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$y+1=-(x-1) \qquad \therefore\ y=-x$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$x^3-2x^2=-x$, $x^3-2x^2+x=0$

$x(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

그런데 점 A의 x좌표가 1이므로 $\mathrm{B}(0,\ 0)$

$g(x)=ax^2+bx+c$(a, b, c는 상수, $a>0$)라 하면 ㈎에서

$g(1)=-1$, $g(0)=0$이므로

$a+b+c=-1$, $c=0$

$\therefore\ b=-a-1$

$\therefore\ g(x)=ax^2-(a+1)x \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)+g(x)=x^3+(a-2)x^2-(a+1)x$에서

$\{f(x)+g(x)\}'=3x^2+2(a-2)x-(a+1)$

이때 이차방정식 $\{f(x)+g(x)\}'=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2+3(a+1)=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{4}>0$

즉, 이차방정식 $\{f(x)+g(x)\}'=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 ㈏에서 함수 $f(x)+g(x)$가 극값을 갖는 모든 x의 값의 합이 $\frac{2}{3}$이므로 이차방정식 $\{f(x)+g(x)\}'=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$-\frac{2(a-2)}{3}=\frac{2}{3} \qquad \therefore\ a=1$

이를 ㉠에 대입하면 $g(x)=x^2-2x$이므로

$g(4)=16-8=8$

20 답 3

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고, ㈎에서 $f(2n)=0$이므로

$f(x)=(x-2n)(x^2+ax+b)$(a, b는 상수)라 하자.

㈏에서 모든 실수 x에 대하여 $(x-n)(x-2n)(x^2+ax+b)\geq0$이려면

좌변이 완전제곱식이어야 한다.

$x^2+ax+b=(x-n)(x-2n)$

$\therefore\ f(x)=(x-n)(x-2n)^2$

$$\therefore\ f'(x)=(x-2n)^2+(x-n)\times2(x-2n)$$
$$=(3x-4n)(x-2n)$$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=\frac{4}{3}n$ 또는 $x=2n$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}n$	$\cdots$	$2n$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}n^3$ 극대	↘	0 극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=\frac{4}{3}n$에서 극댓값 $\frac{4}{27}n^3$을 가지므로

$a_n=\frac{4}{27}n^3$

이때 n은 자연수이므로 a_n이 자연수가 되려면 n^3이 27의 배수이어야 한다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 3이다.

21 답 10

$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$이고, 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가지면 $g'(2)=0$이므로 $g(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다.

이때 삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이므로

$g(x)=3(x-1)(x-2)^2$ 또는 $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$

(i) $g(x)=3(x-1)(x-2)^2$일 때,

$$g'(x)=3(x-2)^2+3(x-1)\times 2(x-2)$$
$$=3(3x-4)(x-2)$$

$g'(x)=0$인 x의 값은 $x=\frac{4}{3}$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 $x=2$에서 극댓값을 갖는다는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$일 때,

$$g'(x)=3\times 2(x-2)(x-3)+3(x-2)^2$$
$$=3(x-2)(3x-8)$$

$g'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ 또는 $x=\frac{8}{3}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 가지므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$

이때 $f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$이므로

$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$

$\therefore\ f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)(x-3)+\frac{1}{3}(x-1)^2$

$\therefore\ f'(0)=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

따라서 $p=3$, $q=7$이므로

$p+q=10$

22 답 160

방정식 $f(x)=0$에서

$2x^3-3(a+1)x^2+6ax=0$

$x\{2x^2-3(a+1)x+6a\}=0$

이 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $2x^2-3(a+1)x+6a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2-3(a+1)x+6a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9(a+1)^2-48a>0$

$9a^2-30a+9>0$, $3(3a-1)(a-3)>0$

$\therefore\ a>3$ ($\because$ a는 자연수)

자연수 a를 차례로 나열하면 4, 5, 6, …이므로

$a_n=n+3$

한편 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$에서

$f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6(x-1)(x-a)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=a$

$a>3$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$3a-1$ 극대	↘	$-a^3+3a^2$ 극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, 극댓값 $3a-1$을 갖는다.

$a=a_n$일 때, $f(x)$의 극댓값이 b_n이므로

$b_n=3a_n-1=3(n+3)-1=3n+8$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)=\sum_{n=1}^{10}\{3n+8-(n+3)\}$$
$$=\sum_{n=1}^{10}(2n+5)$$
$$=2\times\frac{10\times 11}{2}+10\times 5$$
$$=160$$

23 답 6

$f(x)=x^4+2mx^3+(m^2+1)x^2-m^3+m+n$에서

$$f'(x)=4x^3+6mx^2+2(m^2+1)x$$
$$=2x(2x^2+3mx+m^2+1)$$

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 항상 극솟값을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$는 오직 하나의 극값을 가지므로 삼차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

$2x(2x^2+3mx+m^2+1)=0$에서

$x=0$ 또는 $2x^2+3mx+m^2+1=0$

즉, 이차방정식 $2x^2+3mx+m^2+1=0$의 한 근이 0이거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $2x^2+3mx+m^2+1=0$의 한 근이 0일 때,

$m^2+1=0$, $m^2=-1$

$\therefore\ m=\pm i$

이는 m이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 이차방정식 $2x^2+3mx+m^2+1=0$이 중근 또는 허근을 가질 때,

이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=9m^2-8(m^2+1)\le 0$

$m^2-8\le 0$, $-2\sqrt{2}\le m\le 2\sqrt{2}$

$\therefore\ m=1$ 또는 $m=2$ ($\because$ m은 자연수)

ⓘ $m=1$일 때,

함수 $f(x)=x^4+2x^3+2x^2+n$의 극솟값은 $f(0)$이므로

$f(0)\le 0$에서 $n\le 0$

이를 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

ⓘⓘ $m=2$일 때,

함수 $f(x)=x^4+4x^3+5x^2-6+n$의 극솟값은 $f(0)$이므로

$f(0)\le 0$에서 $-6+n\le 0$ $\quad\therefore\ n\le 6$

따라서 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 순서쌍 (m, n)은 6개이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는 6이다.

24 답 40

$f(x)=3x^3-9x^2-27x+k$에서

$f'(x)=9x^2-18x-27=9(x+1)(x-3)$

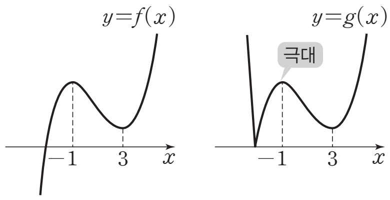
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$k+15$ 극대	$\searrow$	$k-81$ 극소	$\nearrow$

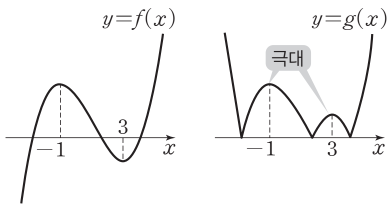
(i) $k-81\geq 0$, 즉 $k\geq 81$일 때, ⟶ (극솟값)≥ 0이면 (극댓값)>0이다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



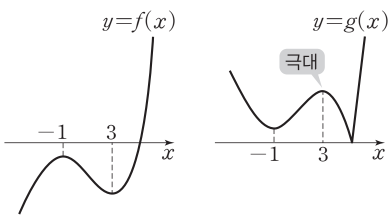
(ii) $k+15>0$, $k-81<0$, 즉 $-15<k<81$일 때,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



(iii) $k+15\leq 0$, 즉 $k\leq -15$일 때, ⟶ (극댓값)≤ 0이면 (극솟값)<0이다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



(i), (ii), (iii)에서 함수 $g(x)$가 2개의 극댓값을 가지려면

$-15<k<81$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 $g(a)=g(-1)=f(-1)=k+15$,

$g(b)=g(3)=-f(3)=-k+81$이므로 $|g(a)-g(b)|>54$에서

$|k+15+k-81|>54$, $|2k-66|>54$

$2k-66<-54$ 또는 $2k-66>54$

$\therefore$ $k<6$ 또는 $k>60$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-15<k<6$ 또는 $60<k<81$

따라서 정수 k의 개수는

$\{6-(-15)-1\}+(81-60-1)=40$

25 답 ①

함수 $g(x)=|(x-a)f(x)|$에 대하여 $g(a)=0$이고, 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로 $x=a$에서의 미분계수가 존재한다.

└⟶ 함수 $g(x)$는 $x=3$에서만 미분가능하지 않다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$에서

$$\lim_{x\to a+}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a+}\frac{(x-a)|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{-(x-a)|f(x)|}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a+}|f(x)|=-\lim_{x\to a-}|f(x)|$$

$|f(a)|=-|f(a)|$, $2|f(a)|=0$

$\therefore$ $f(a)=0$

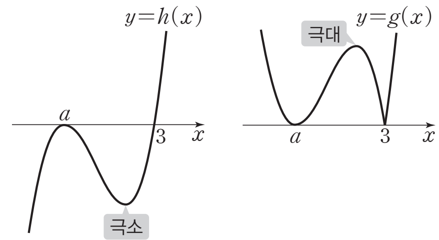
이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고, 함수 $g(x)$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로

$f(x)=(x-a)(x-3)$

한편 $h(x)=(x-a)f(x)$라 하면

$h(x)=(x-a)^2(x-3)$, $g(x)=|(x-a)^2(x-3)|$

따라서 두 함수 $y=h(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 함수 $g(x)$의 극댓값이 32이므로 함수 $h(x)$의 극솟값은 -32이다.

$h(x)=(x-a)^2(x-3)$에서

$h'(x)=2(x-a)(x-3)+(x-a)^2=(x-a)(3x-a-6)$

$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=a$ 또는 $x=\dfrac{a+6}{3}$

즉, 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극대이고, $x=\dfrac{a+6}{3}$에서 극소이다.

이때 함수 $h(x)$의 극솟값이 -32이므로

$h\left(\dfrac{a+6}{3}\right)=-32$에서

$\left(\dfrac{a+6}{3}-a\right)^2\left(\dfrac{a+6}{3}-3\right)=-32$

$\left\{-\dfrac{2}{3}(a-3)\right\}^2\times\dfrac{1}{3}(a-3)=-32$

$(a-3)^3=-216$, $a-3=-6$ ($\because$ a는 실수)

$\therefore$ $a=-3$

따라서 $f(x)=(x+3)(x-3)$이므로

$f(4)=7\times 1=7$

26 답 ③

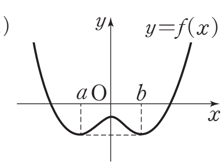
함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 a, 0, b이므로 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

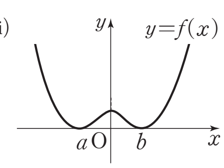
이때 함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수도 양수이다.

또 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나고 $f(a)=f(b)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 있는 것은 그림과 같이 2가지 경우가 있다.

(i)

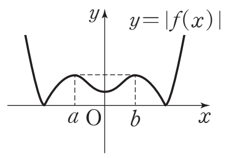


(ii)

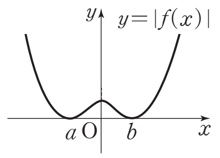


즉, 각각의 경우에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.

(i)



(ii)



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=a$, $x=b$에서 극소이다.
이때 $f(a)=f(b)$이므로 서로 다른 극값은 2개이다.

ㄴ. $f(0)<0$인 경우는 (i)이므로 함수 $|f(x)|$의 서로 다른 극솟값은 2개이다.

ㄷ. $f(0)>0$인 경우는 (ii)이므로 닫힌구간 $[a, b]$에서 $|f(x)| \geq |f(a)|$이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

STEP 3 최고난도 문제

61~63쪽

01 ②	02 $\frac{5}{2}$	03 ④	04 ①	05 90	06 ③
07 380	08 $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$		09 39	10 $\frac{39}{16}$	11 29

01 답 ②

1단계 접점의 x좌표 사이의 관계식 구하기

$f(x)=x^4-6x^2-8x+10$이라 하면

$f'(x)=4x^3-12x-8$

접점의 x좌표를 각각 α, $\beta\ (\alpha\neq\beta)$라 하자.

점 $(\alpha,\ \alpha^4-6\alpha^2-8\alpha+10)$에서의 접선의 기울기는

$f'(\alpha)=4\alpha^3-12\alpha-8$이므로 접선의 방정식은

$y-(\alpha^4-6\alpha^2-8\alpha+10)=(4\alpha^3-12\alpha-8)(x-\alpha)$

$\therefore\ y=(4\alpha^3-12\alpha-8)x-3\alpha^4+6\alpha^2+10$ …… ㉠

점 $(\beta,\ \beta^4-6\beta^2-8\beta+10)$에서의 접선의 기울기는

$f'(\beta)=4\beta^3-12\beta-8$이므로 접선의 방정식은

$y-(\beta^4-6\beta^2-8\beta+10)=(4\beta^3-12\beta-8)(x-\beta)$

$\therefore\ y=(4\beta^3-12\beta-8)x-3\beta^4+6\beta^2+10$

이때 두 접선이 일치하므로

$4\alpha^3-12\alpha-8=4\beta^3-12\beta-8$ …… ㉡

$-3\alpha^4+6\alpha^2+10=-3\beta^4+6\beta^2+10$ …… ㉢

㉡에서 $4(\alpha^3-\beta^3)=12(\alpha-\beta)$이므로

$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=3(\alpha-\beta)$

$\therefore\ \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=3\ (\because\ \alpha\neq\beta)$ …… ㉣

㉢에서 $3(\alpha^4-\beta^4)=6(\alpha^2-\beta^2)$이므로

$(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

$(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)-2(\alpha+\beta)=0\ (\because\ \alpha\neq\beta)$

$\therefore\ (\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-2)=0$

2단계 접점의 x좌표 구하기

(i) $\alpha+\beta=0$일 때,

$\beta=-\alpha$이므로 ㉣에 대입하면

$\alpha^2=3\quad \therefore\ \alpha=-\sqrt{3}$ 또는 $\alpha=\sqrt{3}$

이를 $\beta=-\alpha$에 대입하면

$\alpha=-\sqrt{3}$일 때 $\beta=\sqrt{3}$, $\alpha=\sqrt{3}$일 때 $\beta=-\sqrt{3}$

(ii) $\alpha^2+\beta^2-2=0$일 때,

$\alpha^2+\beta^2=2$이므로 ㉣에 대입하면

$\alpha\beta+2=3\quad \therefore\ \alpha\beta=1$

즉, $\alpha^2+\beta^2-2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2=0$에서 $\alpha=\beta$

이는 $\alpha\neq\beta$라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\alpha=-\sqrt{3}$, $\beta=\sqrt{3}$ 또는 $\alpha=\sqrt{3}$, $\beta=-\sqrt{3}$

3단계 a^2+b^2의 값 구하기

$\alpha=-\sqrt{3}$ 또는 $\alpha=\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-8x+1$

따라서 $a=-8$, $b=1$이므로 $a^2+b^2=64+1=65$

다른 풀이

1단계 접점의 x좌표 사이의 관계식 구하기

$f(x)=x^4-6x^2-8x+10$이라 하면 $f'(x)=4x^3-12x-8$

접점의 좌표를 $(t,\ t^4-6t^2-8t+10)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=4t^3-12t-8$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^4-6t^2-8t+10)=(4t^3-12t-8)(x-t)$

$\therefore\ y=(4t^3-12t-8)x-3t^4+6t^2+10$ …… ㉠

직선 ㉠과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$x^4-6x^2-8x+10=(4t^3-12t-8)x-3t^4+6t^2+10$

$x^4-6x^2-(4t^3-12t)x+3t^4-6t^2=0$

$(x-t)^2(x^2+2tx+3t^2-6)=0$ …… ㉡

2단계 접점의 x좌표 구하기

이때 직선 ㉠과 곡선 $y=f(x)$가 서로 다른 두 점에서 각각 접하려면 방정식 ㉡이 서로 다른 두 중근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2+2tx+3t^2-6=0$이 $x\neq t$인 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=t^2-(3t^2-6)=0$

$-2t^2+6=0$, $t^2=3\quad \therefore\ t=-\sqrt{3}$ 또는 $t=\sqrt{3}$ …… ㉢

이때 이차방정식 $x^2+2tx+3t^2-6=0$의 근이 t가 아니어야 하므로

$t^2+2t^2+3t^2-6\neq0$, $6t^2\neq6$

$t^2\neq1\quad \therefore\ t\neq-1$, $t\neq1$

즉, ㉢은 조건을 만족시킨다.

3단계 a^2+b^2의 값 구하기

$t=-\sqrt{3}$ 또는 $t=\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-8x+1$

따라서 $a=-8$, $b=1$이므로 $a^2+b^2=64+1=65$

02 답 $\frac{5}{2}$

1단계 접선의 방정식 구하기

원 C의 중심을 $\mathrm{A}(0,\ a)$라 하고, 원 C와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점 P의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{3}t^3-3t+1\right)\ (t<0)$이라 하자.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x+1$에서

$f'(x)=x^2-3$

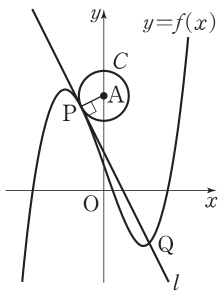
점 P에서의 접선을 l이라 하면 접선 l의 기울기는 $f'(t)=t^2-3$이므로

접선 l의 방정식은

$$y-\left(\frac{1}{3}t^3-3t+1\right)=(t^2-3)(x-t)$$

$$\therefore\ y=(t^2-3)x-\frac{2}{3}t^3+1 \qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

2단계 점 P의 좌표 구하기



직선 AP와 직선 l이 수직이므로

$$\frac{\frac{1}{3}t^3-3t+1-a}{t}\times(t^2-3)=-1$$

└→ (직선 AP의 기울기)×(직선 l의 기울기)$=-1$

$$\frac{1}{3}t^3-3t+1-a=-\frac{t}{t^2-3}$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{3}t^3-3t+1+\frac{t}{t^2-3} \qquad \cdots\cdots\ ㉡$$

$\overline{\mathrm{AP}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$이므로 ⟶ $\overline{\mathrm{AP}}$는 원 C의 반지름의 길이이다.

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\frac{5}{4}$에서

$$t^2+\left(\frac{1}{3}t^3-3t+1-a\right)^2=\frac{5}{4}$$

㉡을 대입하면

$$t^2+\left(-\frac{t}{t^2-3}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$t^2=s\,(s>0)$로 놓으면

$$s+\frac{s}{(s-3)^2}=\frac{5}{4}$$

$$4s(s-3)^2+4s=5(s-3)^2$$

$$4s^3-29s^2+70s-45=0$$

$$(s-1)(4s^2-25s+45)=0$$

이때 $4s^2-25s+45>0$이므로

$s=1$

즉, $t^2=1$이므로 $t=-1$ ($\because\ t<0$)

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(-1,\ \frac{11}{3}\right)$$

3단계 점 Q의 좌표 구하기

㉠에서 직선 l의 방정식은

$$y=-2x+\frac{5}{3}$$

직선 l과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$$\frac{1}{3}x^3-3x+1=-2x+\frac{5}{3}$$

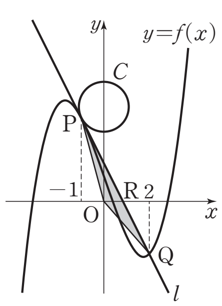
$$x^3-3x-2=0,\ (x+1)^2(x-2)=0$$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 점 P의 x좌표가 -1이므로

$$\mathrm{Q}\left(2,\ -\frac{7}{3}\right)$$

4단계 삼각형 OPQ의 넓이 구하기



직선 l이 x축과 만나는 점을 R라 하면

$$\mathrm{R}\left(\frac{5}{6},\ 0\right)$$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$\triangle\mathrm{OPR}+\triangle\mathrm{OQR}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}\times\frac{11}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{3}$$

$$=\frac{5}{2}$$

03 답 ④

1단계 점 B의 x좌표 구하기

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1이므로

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값을 가지므로 $f'(-1)=0$

점 B의 x좌표를 $\alpha\,(\alpha>-1)$라 하면 $x=\alpha$에서 극댓값을 가지므로

└→ $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 $\alpha>-1$이다.

$f'(\alpha)=0$

즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 -1, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+\alpha=\frac{2}{3}a,\ -\alpha=-\frac{b}{3}$$

$$\therefore\ a=\frac{3}{2}(\alpha-1),\ b=3\alpha \qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

점 A$(-1,\ 1+a-b+c)$는 직선 $y=8x$ 위의 점이므로

$1+a-b+c=-8 \qquad \therefore\ a-b+c=-9$

㉠을 대입하면 $\frac{3}{2}(\alpha-1)-3\alpha+c=-9$

$$\therefore\ c=\frac{3}{2}\alpha-\frac{15}{2} \qquad \cdots\cdots\ ㉡$$

점 B$(\alpha,\ -\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)$는 직선 $y=8x$ 위의 점이므로

$$-\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=8\alpha$$

$$\alpha^3-a\alpha^2+(8-b)\alpha-c=0$$

㉠, ㉡을 대입하면

$$\alpha^3-\frac{3}{2}(\alpha-1)\alpha^2+(8-3\alpha)\alpha-\left(\frac{3}{2}\alpha-\frac{15}{2}\right)=0$$

$$-\frac{1}{2}\alpha^3-\frac{3}{2}\alpha^2+\frac{13}{2}\alpha+\frac{15}{2}=0$$

$$\alpha^3+3\alpha^2-13\alpha-15=0$$

$$(\alpha+5)(\alpha+1)(\alpha-3)=0$$

$\therefore\ \alpha=-5$ 또는 $\alpha=-1$ 또는 $\alpha=3$

그런데 $\alpha>-1$이므로 $\alpha=3$

2단계 $f'(x)$ 구하기

㉠, ㉡에서 $a=3$, $b=9$, $c=-3$이므로

$f'(x)=-3x^2+6x+9$

3단계 $f'(x)$의 최댓값 구하기

따라서 $f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x-1)^2+12$이므로 $f'(x)$의 최댓값은 12이다.

04 답 ①

1단계 a의 값 구하기

$x<0$일 때,

$$\begin{aligned}f(x)&=(-x-a)^3-6(-x-a)^2-15(-x-a)+b\\&=-x^3-3ax^2-3a^2x-a^3-6(x^2+2ax+a^2)+15x+15a+b\\&=-x^3-3(a+2)x^2-3(a^2+4a-5)x-a^3-6a^2+15a+b\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=-3x^2-6(a+2)x-3(a^2+4a-5)\\&=-3\{x^2+(2a+4)x+(a+5)(a-1)\}\\&=-3(x+a+5)(x+a-1)\end{aligned}$$

$x\geq 0$일 때,

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-a)^3-6(x-a)^2-15(x-a)+b\\&=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3-6(x^2-2ax+a^2)-15x+15a+b\\&=x^3-3(a+2)x^2+3(a^2+4a-5)x-a^3-6a^2+15a+b\end{aligned}$$

이므로

$f'(x)=3x^2-6(a+2)x+3(a^2+4a-5)$
$=3\{x^2-(2a+4)x+(a+5)(a-1)\}$
$=3(x-a-5)(x-a+1)$

$\therefore f'(x)=\begin{cases} -3(x+a+5)(x+a-1) & (x<0) \\ 3(x-a-5)(x-a+1) & (x>0) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$에서도 미분가능하다.

즉, 미분계수 $f'(0)$이 존재하므로 $\lim_{x\to0+} f'(x)=\lim_{x\to0-} f'(x)$에서

$\lim_{x\to0+} 3(x-a-5)(x-a+1)$
$=\lim_{x\to0-} \{-3(x+a+5)(x+a-1)\}$

$3(a+5)(a-1)=-3(a+5)(a-1)$
$6(a+5)(a-1)=0 \quad \therefore a=-5$ 또는 $a=1$

2단계 b의 값 구하기

(i) $a=-5$일 때,

$f'(x)=\begin{cases} -3x(x-6) & (x<0) \\ 3x(x+6) & (x\ge0) \end{cases}$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 함수 $f(x)$가 극댓값 0을 갖는다는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=1$일 때,

$f'(x)=\begin{cases} -3x(x+6) & (x<0) \\ 3x(x-6) & (x\ge0) \end{cases}$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-6$ 또는 $x=0$ 또는 $x=6$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-6	$\cdots$	0	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고, 극댓값이 0이므로 $f(0)=0$에서
$-a^3-6a^2+15a+b=0$
이때 $a=1$이므로
$8+b=0 \quad \therefore b=-8$

3단계 ab의 값 구하기

(i), (ii)에서 $a=1$, $b=-8$이므로 $ab=-8$

idea
05 답 90

1단계 b의 값 구하기

$f(x)=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)$에서
$f'(x)=3(x-1)^2+2a(x-1)+b$
(가)에서 $f'(1)=-1$이므로 $b=-1$

2단계 a의 값의 부호 파악하기

$\therefore f(x)=(x-1)^3+a(x-1)^2-(x-1)$

이때 $g(x)=x^3+ax^2-x$라 하면 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=g(x)$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 극댓값과 극솟값은 각각 같다.

$g(x)=x^3+ax^2-x$에서 $g'(x)=3x^2+2ax-1$

이차방정식 $g'(x)=0$의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2}{3}a,\ \alpha\beta=-\frac{1}{3}$ …… ㉠

한편 함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $x=\alpha$에서 극대이고, $x=\beta$에서 극소이다.

$g(\alpha)=\alpha^3+a\alpha^2-\alpha$, $g(\beta)=\beta^3+a\beta^2-\beta$이고,
(나)에서 $g(\alpha)+g(\beta)>0$이므로
$(\alpha^3+a\alpha^2-\alpha)+(\beta^3+a\beta^2-\beta)>0$
$(\alpha^3+\beta^3)+a(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha+\beta)>0$
$(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}-(\alpha+\beta)>0$
㉠을 대입하면
$-\frac{8}{27}a^3-\frac{2}{3}a+a\left(\frac{4}{9}a^2+\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}a>0$
$\frac{4}{27}a\left(a^2+\frac{9}{2}\right)>0$
그런데 $a^2+\frac{9}{2}>0$이므로 $a>0$

3단계 a의 값 구하기

(나)에서 $g(\alpha)-g(\beta)=\frac{7\sqrt{21}}{18}$이므로
$(\alpha^3+a\alpha^2-\alpha)-(\beta^3+a\beta^2-\beta)=\frac{7\sqrt{21}}{18}$
$(\alpha^3-\beta^3)+a(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha-\beta)=\frac{7\sqrt{21}}{18}$
$(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)+a(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)=\frac{7\sqrt{21}}{18}$
$(\alpha-\beta)\{(\alpha-\beta)^2+3\alpha\beta+a(\alpha+\beta)-1\}=\frac{7\sqrt{21}}{18}$ …… ㉡
이때 ㉠에서
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{4}{9}a^2+\frac{4}{3}=\frac{4}{9}(a^2+3)$
$\therefore \alpha-\beta=-\frac{2}{3}\sqrt{a^2+3}$ $(\because \alpha<\beta)$ …… ㉢
㉠, ㉢을 ㉡에 대입하면
$\left(-\frac{2}{3}\sqrt{a^2+3}\right)\times\left\{\frac{4}{9}(a^2+3)-\frac{2}{3}a^2-2\right\}=\frac{7\sqrt{21}}{18}$
$\left(-\frac{2}{3}\sqrt{a^2+3}\right)\times\left\{-\frac{2}{9}(a^2+3)\right\}=\frac{7\sqrt{21}}{18}$
$\frac{4}{27}\sqrt{(a^2+3)^3}=\frac{7\sqrt{21}}{18}$, $\sqrt{(a^2+3)^3}=\frac{21\sqrt{21}}{8}$
양변을 제곱하면 $(a^2+3)^3=\frac{21^3}{64}=\left(\frac{21}{4}\right)^3$
$a^2+3=\frac{21}{4}$, $a^2=\frac{9}{4}$
$\therefore a=\frac{3}{2}$ $(\because a>0)$

4단계 $36(a-b)$의 값 구하기

$\therefore 36(a-b)=36\left\{\frac{3}{2}-(-1)\right\}=36\times\frac{5}{2}=90$

06 답 ③

1단계 집합 A 구하기

$f(x)=-\frac{1}{2}k(x^3+3x^2)+8$에서
$f'(x)=-\frac{1}{2}k(3x^2+6x)=-\frac{3}{2}kx(x+2)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$

$k>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-2k+8$ 극소	↗	8 극대	↘

$\therefore A=\{-2k+8,\ 8\}$

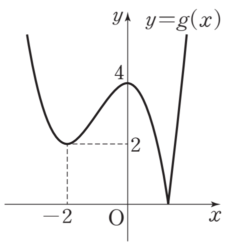
2단계 모든 자연수 k의 값의 합 구하기

$g(x)=|f(x)-4|$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 후 x축보다 아래쪽에 있는 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

(i) $k=1$일 때,

$g(x)=|f(x)-4|$에서

$f(-2)-4=-2k+8-4=2$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, 함수 $g(x)$는 0, 2, 4를 극값으로 가지므로 $B=\{0,\ 2,\ 4\}$

이때 $A=\{6,\ 8\}$이므로

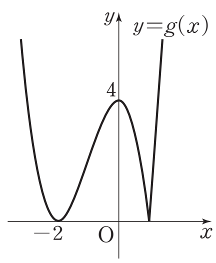
$A\cap B=\varnothing$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k=2$일 때,

$g(x)=|f(x)-4|$에서

$f(-2)-4=-2k+8-4=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, 함수 $g(x)$는 0, 4를 극값으로 가지므로 $B=\{0,\ 4\}$

이때 $A=\{4,\ 8\}$이므로 $A\cap B\neq\varnothing$

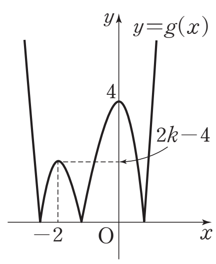
따라서 조건을 만족시킨다.

(iii) $k\geq 3$일 때,

$g(x)=|f(x)-4|$에서

$f(-2)-4=-2k+8-4=-2k+4<0$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, 함수 $g(x)$는 0, $2k-4$, 4를 극값으로 가지므로 $B=\{0,\ 2k-4,\ 4\}$

이때 $A=\{-2k+8,\ 8\}$이므로

$A\cap B\neq\varnothing$이려면

$-2k+8=0$ 또는 $-2k+8=2k-4$ 또는 $2k-4=8$

$-2k+8\leq 2$이므로 $-2k+8\neq 4$

ⓘ $-2k+8=0$일 때, $k=4$

ⓘⓘ $-2k+8=2k-4$일 때, $k=3$

ⓘⓘⓘ $2k-4=8$일 때, $k=6$

ⓘ, ⓘⓘ, ⓘⓘⓘ에서 $k=3$ 또는 $k=4$ 또는 $k=6$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 자연수 k의 값은 2, 3, 4, 6이므로 그 합은

$2+3+4+6=15$

07 답 380

1단계 조건 파악하기

주어진 조건을 만족시키려면 두 점 $(x_1,\ f(x_1))$, $(x_2,\ f(x_2))$를 지나는 직선과 두 점 $(x_2,\ f(x_2))$, $(x_3,\ f(x_3))$을 지나는 직선의 기울기의 부호가 다른 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재해야 한다.

이때 삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재해야 한다.

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\alpha)$, $\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}=f'(\beta)$라 할 때, $f'(\alpha)\times f'(\beta)<0$이 성립하려면 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 x의 값이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재해야 한다.

2단계 a의 값 구하기

$f(x)=x^3-2ax^2$에서

$f'(x)=3x^2-4ax=x(3x-4a)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}a$에서 극값을 가지므로 $x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}a$가 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재하도록 하는 정수 k의 값을 구하면 다음과 같다.

$x=0$이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재하려면

$k=-1$ ($\because$ k는 정수)

$x=\frac{4}{3}a$가 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재하려면

$k<\frac{4}{3}a<k+\frac{3}{2}$

즉, $\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<k<\frac{4}{3}a$ …… ㉠

이때 부등식 ㉠을 만족시키는 정수 k의 개수는 1 또는 2이고, $k=-1$을 포함하여 모든 정수 k의 값의 곱이 -12이므로 부등식 ㉠을 만족시키는 정수 k의 값은 12이거나 곱이 12가 되는 연속한 정수이어야 한다.

(i) $k=12$일 때,

㉠에서 $11\leq\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<12$, $12<\frac{4}{3}a\leq 13$

$\therefore \frac{75}{8}\leq a\leq\frac{39}{4}$

그런데 이 부등식을 만족시키는 정수 a는 존재하지 않는다.

(ii) $k=3$, $k=4$일 때,

㉠에서 $2\leq\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<3$, $4<\frac{4}{3}a\leq 5$

$\therefore 3<a<\frac{27}{8}$

그런데 이 부등식을 만족시키는 정수 a는 존재하지 않는다.

(iii) $k=-4$, $k=-3$일 때,

㉠에서 $-5\leq\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<-4$, $-3<\frac{4}{3}a\leq-2$

$\therefore -\frac{9}{4}<a<-\frac{15}{8}$

이때 a는 정수이므로 $a=-2$

(i), (ii)에서 $a=-2$

3단계 $f'(10)$의 값 구하기

따라서 $f'(x)=3x^2+8x$이므로

$f'(10)=300+80=380$

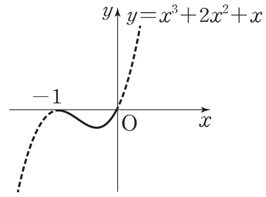
08 답 $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

1단계 $y=g(x)$의 그래프 그리기

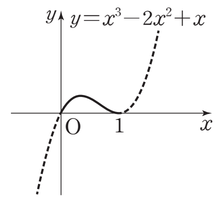
(가), (나)에서

$$g(x)=\begin{cases} x^3+2x^2+x & (-1\leq x\leq 0) \\ x^3-2x^2+x & (0<x\leq 1) \end{cases}$$

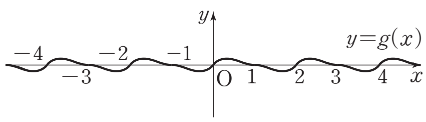
$y=x^3+2x^2+x=x(x+1)^2$이므로
$-1\le x\le 0$에서 함수 $y=x^3+2x^2+x$의
그래프는 그림과 같다.



또 $y=x^3-2x^2+x=x(x-1)^2$이므로
$0<x\le 1$에서 함수 $y=x^3-2x^2+x$의 그래프는 그림과 같다.

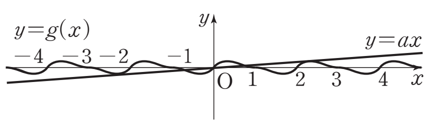


이때 ㈐에서 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



2단계 직선의 방정식 구하기

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=ax\,(a>0)$가 서로 다른 5개의 점에서 만나는 경우는 그림과 같이 직선 $y=ax$가 $-3<x<-2$와 $2<x<3$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 접할 때이다.



이때 $2<x<3$에서의 접점이 점 P가 되므로 점 P의 x좌표를 $t\,(2<t<3)$라 하자.
$2<x\le 3$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=x^3-2x^2+x\,(0<x\le 1)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로
$g(x)=(x-2)^3-2(x-2)^2+(x-2)=x^3-8x^2+21x-18$
$\therefore\ g'(x)=3x^2-16x+21\ (2<x\le 3)$
함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^3-8t^2+21t-18)$에서의 접선의 기울기는 $g'(t)=3t^2-16t+21$이므로 접선의 방정식은
$y-(t^3-8t^2+21t-18)=(3t^2-16t+21)(x-t)$
$\therefore\ y=(3t^2-16t+21)x-2t^3+8t^2-18$ ...... ㉠

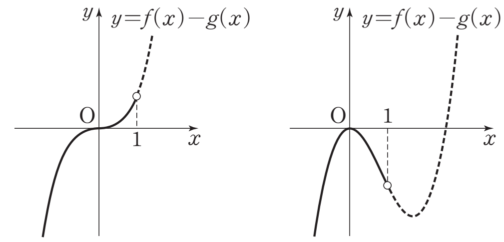
3단계 점 P의 x좌표 구하기

직선 ㉠이 원점을 지나므로
$0=-2t^3+8t^2-18$
$t^3-4t^2+9=0,\ (t-3)(t^2-t-3)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$
그런데 $2<t<3$이므로
$t=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$
따라서 점 P의 x좌표는 $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$이다.

09 답 39

1단계 $f(0)-g(0)$, $f'(0)-g'(0)$의 값 구하기

$h(0)=0$에서 $|f(0)-g(0)|=0$
$\therefore\ f(0)-g(0)=0$ ...... ㉠
즉, 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프는 원점을 지난다.
이때 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x<1$에서 함수 $|f(x)-g(x)|$가 미분가능하다.
즉, $x<1$에서 함수 $y=|f(x)-g(x)|$의 그래프에 꺾인 점이 없어야 하므로 삼차함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$\therefore\ f'(0)-g'(0)=0$ ...... ㉡

2단계 $f'(1)$, $f(1)$의 값 구하기

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=1$에서도 미분가능하다.
즉, 미분계수 $h'(1)$이 존재하므로
$\displaystyle\lim_{x\to 1+}h'(x)=\lim_{x\to 1-}h'(x)$ ...... ㉢
$x\to 1-$일 때 $f(x)\ge g(x)$라 가정하면
$|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$
㉢에서 $\displaystyle\lim_{x\to 1+}\{f'(x)+g'(x)\}=\lim_{x\to 1-}\{f'(x)-g'(x)\}$
$f'(1)+g'(1)=f'(1)-g'(1)\qquad \therefore\ g'(1)=0$
이는 $g(x)$가 일차함수라는 조건을 만족시키지 않는다.
$g(x)=px+q$라 하면 $g'(x)=p$이므로 $g'(1)=p=0$에서 $g(x)$는 상수함수이다.
따라서 $x\to 1-$일 때 $f(x)<g(x)$이므로
$|f(x)-g(x)|=g(x)-f(x)$
㉢에서 $\displaystyle\lim_{x\to 1+}\{f'(x)+g'(x)\}=\lim_{x\to 1-}\{g'(x)-f'(x)\}$
$f'(1)+g'(1)=g'(1)-f'(1)\qquad \therefore\ f'(1)=0$
함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.
즉, $\displaystyle\lim_{x\to 1+}h(x)=\lim_{x\to 1-}h(x)=h(1)$에서
$\displaystyle\lim_{x\to 1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 1-}\{g(x)-f(x)\}=f(1)+g(1)$
$f(1)+g(1)=g(1)-f(1)$
$\therefore\ f(1)=0$

3단계 $f(x)$, $g(x)$ 구하기

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고, $f(1)=0$, $f'(1)=0$이므로
$f(x)=(x-1)^2(x+a)\,(a$는 상수$)$라 하고, $g(x)$는 일차함수이므로
$g(x)=px+q\,(p,\ q$는 상수, $p\ne 0)$라 하면
$f'(x)=2(x-1)(x+a)+(x-1)^2,\ g'(x)=p$
㉠에서 $a-q=0\qquad \therefore\ q=a$ ...... ㉣
㉡에서 $-2a+1-p=0\qquad \therefore\ p=-2a+1$ ...... ㉤
$h(2)=5$에서 $f(2)+g(2)=5$
$2+a+2p+q=5$
㉣, ㉤을 대입하면
$2+a+2(-2a+1)+a=5$
$-2a=1\qquad \therefore\ a=-\dfrac{1}{2}$
이를 ㉣, ㉤에 각각 대입하면
$q=-\dfrac{1}{2},\ p=2$
$\therefore\ f(x)=(x-1)^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right),\ g(x)=2x-\dfrac{1}{2}$

4단계 $h(4)$의 값 구하기

$\therefore h(4)=f(4)+g(4)=9\times\frac{7}{2}+\left(8-\frac{1}{2}\right)=39$

idea

10 답 $\frac{39}{16}$

1단계 $f(x)$의 상수항 구하기

(가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^4+ax^2+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=4x^3+2ax=2x(2x^2+a)$

이때 (나)에서 함수 $f(x)$는 극댓값을 가지므로

$a<0$ ⟶ $a\geq0$이면 $2x^2+a\geq0$이므로 함수 $f(x)$는 극솟값 $f(0)$만을 갖는다.

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{-\frac{a}{2}}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{-\frac{a}{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{-\frac{a}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고, (나)에서 극댓값이 $\frac{5}{2}$이므로

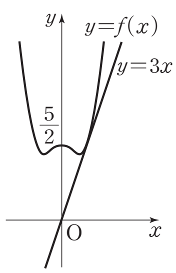
$f(0)=\frac{5}{2}$에서 $b=\frac{5}{2}$

2단계 $f(x)$의 이차항의 계수 구하기

한편 $g(x)=f(x)-kx$라 할 때, 함수 $|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 접하거나 x축보다 위쪽에 있어야 한다.

즉, $f(x)-kx\geq0$이어야 하므로 $f(x)\geq kx$

이때 (다)에서 함수 $|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 k의 최댓값이 3이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3x$는 $x>0$인 점에서 서로 접한다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3x$의 접점의 x좌표를 t $(t>0)$라 하면

$f(t)=3t$에서 $t^4+at^2+\frac{5}{2}=3t$ ······ ㉠

$f'(t)=3$에서 $4t^3+2at=3$

$\therefore a=-2t^2+\frac{3}{2t}$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$t^4+\left(-2t^2+\frac{3}{2t}\right)t^2+\frac{5}{2}=3t$

$t^4+\frac{3}{2}t-\frac{5}{2}=0$, $2t^4+3t-5=0$

$(t-1)(2t^3+2t^2+2t+5)=0$

이때 $t>0$이므로 $2t^3+2t^2+2t+5>0$

$\therefore t=1$

이를 ㉡에 대입하면

$a=-\frac{1}{2}$

3단계 $f(x)$의 극솟값 구하기

따라서 $f(x)=x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$이므로 극솟값은

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}-\frac{1}{8}+\frac{5}{2}=\frac{39}{16}$

11 답 29

1단계 $f(x)$의 식 세우기

함수 $g(x)$가 $x>0$에서 미분가능하면 $x>0$에서 연속이므로 $x=4$에서도 연속이다.

$h(x)=x^3-8x^2+16x$라 하면 $h(4)=f(4)$이므로 $f(4)=0$

함수 $g(x)$가 $x>0$에서 미분가능하면 $x=4$에서도 미분가능하다.

즉, 미분계수 $g'(4)$가 존재하고 $h'(x)=3x^2-16x+16$이므로

$f'(4)=h'(4)=0$

따라서 $f(4)=f'(4)=0$이고, (가)에서 $g\left(\frac{21}{2}\right)=f\left(\frac{21}{2}\right)=0$이므로 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a $(a\neq0)$라 하면

$f(x)=a(x-4)^2\left(x-\frac{21}{2}\right)=\frac{a}{2}(x-4)^2(2x-21)$

2단계 $f(x)$ 구하기

(i) 점 $(-2, 0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선이 $0<x\leq4$에서 접할 때,

접점의 좌표를 $(t, h(t))$ $(0<t\leq4)$라 하면 접선의 기울기는

$h'(t)=3t^2-16t+16$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-8t^2+16t)=(3t^2-16t+16)(x-t)$

이 직선이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$-(t^3-8t^2+16t)=(3t^2-16t+16)(-2-t)$

$t^3-t^2-16t+16=0$

$(t+4)(t-1)(t-4)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=4$ ($\because 0<t\leq4$)

$t=1$일 때, 접선의 방정식은

$y-9=3(x-1)$　　$\therefore y=3x+6$

$t=4$일 때, 접선의 방정식은 $y=0$

이때 (나)에서 접선의 기울기는 0이 아니므로

$y=3x+6$ ······ ㉠

(ii) 점 $(-2, 0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선이 $x>4$에서 접할 때,

$f(x)=\frac{a}{2}(x-4)^2(2x-21)$이므로

$f'(x)=a(x-4)(2x-21)+a(x-4)^2=a(x-4)(3x-25)$

접점의 좌표를 $(s, f(s))$ $(s>4)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(s)=a(s-4)(3s-25)$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{a}{2}(s-4)^2(2s-21)=a(s-4)(3s-25)(x-s)$ ······ ㉡

이 직선이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$-\frac{a}{2}(s-4)^2(2s-21)=a(s-4)(3s-25)(-2-s)$

$(s-4)(2s-21)=2(3s-25)(s+2)$ ($\because a\neq0$, $s>4$)

$4s^2-9s-184=0$, $(4s+23)(s-8)=0$

$\therefore s=8$ ($\because s>4$)

이를 ㉡에 대입하면 접선의 방정식은

$y+40a=-4a(x-8)$　　$\therefore y=-4ax-8a$ ······ ㉢

(i), (ii)에서 (나)를 만족시키려면 두 직선 ㉠, ㉢이 일치해야 하므로

$-4a=3$, $-8a=6$　　$\therefore a=-\frac{3}{4}$

$\therefore f(x)=-\frac{3}{8}(x-4)^2(2x-21)$

3단계 $p+q$의 값 구하기

$\therefore g(10)=f(10)=-\frac{3}{8}\times36\times(-1)=\frac{27}{2}$

따라서 $p=2$, $q=27$이므로

$p+q=29$

05 도함수의 활용(2)

STEP 1 핵심 문제 | 64~65쪽

01 ②	02 ④	03 $\frac{64}{3}$	04 9	05 27	06 26
07 ④	08 2	09 3	10 ③	11 ③	12 $-\frac{5\sqrt{3}}{8}$

01 답 ②

$f(x)=ax^4-4ax^3+b+3$에서

$f'(x)=4ax^3-12ax^2=4ax^2(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=3$

$a>0$이므로 $-2\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$48a+b+3$	↘	$b+3$	↘	$-27a+b+3$ 극소	↗	$b+3$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최대이고 최댓값이 66, $x=3$에서 최소이고 최솟값이 -9이므로 $f(-2)=66$, $f(3)=-9$에서

$48a+b+3=66$, $-27a+b+3=-9$

$\therefore$ $48a+b=63$, $27a-b=12$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=15$

$\therefore$ $ab=15$

02 답 ④

$g(x)=x^2-6x+8=(x-3)^2-1$이므로 모든 실수 x에 대하여

$g(x)\ge -1$

이때 $g(x)=t$로 놓으면 $t\ge -1$이고,

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=-t^3+3t+5$에서

$f'(t)=-3t^2+3=-3(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$인 t의 값은 $t=-1$ 또는 $t=1$

$t\ge -1$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$	3	↗	7 극대	↘

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 최댓값 7을 가지므로 함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값은 7이다.

03 답 $\frac{64}{3}$

$f(x)=x^3$이라 하면 $f'(x)=3x^2$

점 A$(0, 16)$에서 곡선 $y=x^3$에 그은 접점의 좌표를 (a, a^3)이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2$이므로 접선의 방정식은

$y-a^3=3a^2(x-a)$ $\qquad\therefore$ $y=3a^2(x-a)+a^3$

이 직선이 점 A$(0, 16)$을 지나므로

$16=-3a^3+a^3$, $a^3=-8$

$\therefore$ $a=-2$ ($\because$ a는 실수)

즉, 접선 l의 방정식은 $y=12(x+2)-8$ $\qquad\therefore$ $y=12x+16$

점 P의 좌표를 $(t, t^3)(0<t^3<16)$이라 하면 점 Q의 x좌표는

$t^3=12x+16$, $12x=t^3-16$ $\qquad\therefore$ $x=\frac{1}{12}t^3-\frac{4}{3}$

$\therefore$ $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{12}t^3-\frac{4}{3}, t^3\right)$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{PQ}}=t-\left(\frac{1}{12}t^3-\frac{4}{3}\right)=-\frac{1}{12}t^3+t+\frac{4}{3}$

이때 사각형 OPAQ의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\times16\times\left(-\frac{1}{12}t^3+t+\frac{4}{3}\right)=-\frac{2}{3}t^3+8t+\frac{32}{3}$

$\therefore$ $S'(t)=-2t^2+8=-2(t+2)(t-2)$

$S'(t)=0$인 t의 값은 $t=2$ ($\because$ $0<t^3<16$)

$0<t<\sqrt[3]{16}$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$\sqrt[3]{16}$
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	$\frac{64}{3}$ 극대	↘	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=2$에서 최댓값 $\frac{64}{3}$를 가지므로 사각형 OPAQ의 넓이의 최댓값은 $\frac{64}{3}$이다.

개념 NOTE

실수 a와 2 이상인 자연수 n에 대하여

a의 n제곱근 ⟺ n제곱하여 a가 되는 수 ⟺ 방정식 $x^n=a$의 근 x

04 답 9

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면

겉넓이가 54π이므로

$2\pi r^2+2\pi rh=54\pi$에서 $rh=27-r^2$

$r>0$이므로 양변을 r로 나누면 $h=\frac{27}{r}-r$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $h>0$이므로 $\frac{27}{r}-r>0$

$r^2-27<0$, $(r+3\sqrt{3})(r-3\sqrt{3})<0$ $\qquad\therefore$ $0<r<3\sqrt{3}$ ($\because$ $r>0$)

원기둥의 부피를 $V(r)$라 하면

$V(r)=\pi r^2h=\pi r^2\left(\frac{27}{r}-r\right)$ ($\because$ ㉠)

$\quad=\pi(27r-r^3)$

$\therefore$ $V'(r)=\pi(27-3r^2)=3\pi(3+r)(3-r)$

$V'(r)=0$인 r의 값은 $r=3$ ($\because$ $0<r<3\sqrt{3}$)

$0<r<3\sqrt{3}$에서 함수 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	$\cdots$	3	$\cdots$	$3\sqrt{3}$
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	54π 극대	↘	

원기둥의 부피 $V(r)$는 $r=3$에서 최대이고 그때의 h의 값은 ㉠에서

$h=9-3=6$

따라서 $a=3$, $b=6$이므로 $a+b=9$

05 답 27

방정식 $|x^3-6x^2+9x-4|=k$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|x^3-6x^2+9x-4|$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수와 같다.

$f(x)=x^3-6x^2+9x-4$라 하면

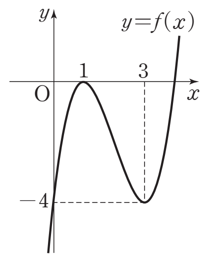
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

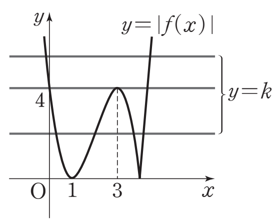
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0 극대	↘	-4 극소	↗

이때 $f(0)=-4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같으므로 k의 값에 따라 직선 $y=k$를 그어 보면 실근의 개수 a_k는



$$a_k=\begin{cases}4\ (k=1,\ 2,\ 3)\\3\ (k=4)\\2\ (k=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10)\end{cases}$$

$\therefore\ a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=4\times3+3\times1+2\times6$

$=27$

06 답 26

두 곡선 $y=2x^3+x^2-7x+a$, $y=4x^2+5x$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $2x^3+x^2-7x+a=4x^2+5x$, 즉 $-2x^3+3x^2+12x=a$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

즉, 함수 $y=-2x^3+3x^2+12x$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점이 3개이어야 한다.

$f(x)=-2x^3+3x^2+12x$라 하면

$f'(x)=-6x^2+6x+12$

$=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

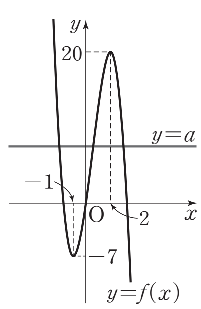
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-7 극소	↗	20 극대	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 만나는 점이 3개가 되도록 직선 $y=a$를 그어 보면 a의 값의 범위는

$-7<a<20$

따라서 정수 a는 -6, -5, -4, $\dots$, 19의 26개이다.



다른 풀이

두 곡선 $y=2x^3+x^2-7x+a$, $y=4x^2+5x$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $2x^3+x^2-7x+a=4x^2+5x$, 즉 $2x^3-3x^2-12x+a=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 극값은 $f(-1)=a+7$, $f(2)=a-20$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(-1)f(2)<0$이어야 하므로

$(a+7)(a-20)<0\qquad\therefore\ -7<a<20$

따라서 정수 a는 -6, -5, -4, $\dots$, 19의 26개이다.

07 답 ④

방정식 $x^4-4x^3-2x^2+12x+3-a=0$에서

$x^4-4x^3-2x^2+12x+3=a$

이 방정식의 실근은 함수 $y=x^4-4x^3-2x^2+12x+3$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점의 x좌표와 같다.

$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+3$이라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$

$=4(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

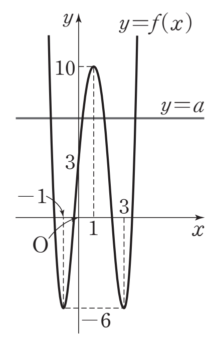
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-6 극소	↗	10 극대	↘	-6 극소	↗

이때 $f(0)=3$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

따라서 주어진 조건을 만족시키도록 직선 $y=a$를 그어 보면 a의 값의 범위는

$3<a<10$



08 답 2

$f(x)=x^4-2a^2x^2+16$이라 하면

$f'(x)=4x^3-4a^2x=4x(x+a)(x-a)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=a$

$a>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$16-a^4$ 극소	↗	16 극대	↘	$16-a^4$ 극소	↗

························· 배점 30%

함수 $f(x)$는 $x=-a$ 또는 $x=a$에서 최솟값 $16-a^4$을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면

$16-a^4>0$ ························· 배점 30%

$a^4-16<0$, $(a^2+4)(a^2-4)<0$

이때 $a^2+4>0$이므로 $a^2-4<0$

$(a+2)(a-2)<0\qquad\therefore\ 0<a<2\ (\because\ a>0)$ ························· 배점 30%

따라서 $\alpha=0$, $\beta=2$이므로

$\beta-\alpha=2$ ························· 배점 10%

09 답 3

$f(x) \geq 3g(x)$에서

$x^3+3x^2-k \geq 3(2x^2+3x-10)$

$\therefore\ x^3-3x^2-9x+30-k \geq 0$

$h(x)=x^3-3x^2-9x+30-k$라 하면

$h'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

$-1 \leq x \leq 4$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$35-k$	↘	$3-k$ 극소	↗	$10-k$

함수 $h(x)$는 $x=3$에서 최솟값 $3-k$를 가지므로 닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 부등식 $h(x) \geq 0$이 성립하려면

$3-k \geq 0 \qquad \therefore\ k \leq 3$

따라서 k의 최댓값은 3이다.

10 답 ③

시각 $t(t \geq 0)$에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$|x_1-x_2|=\left|t^3-5t^2+10t-\left(\frac{5}{2}t^2-2t-10\right)\right|$$

$$=\left|t^3-\frac{15}{2}t^2+12t+10\right|$$

$f(t)=t^3-\frac{15}{2}t^2+12t+10(t \geq 0)$이라 하면

$f'(t)=3t^2-15t+12=3(t-1)(t-4)$

$f'(t)=0$인 t의 값은 $t=1$ 또는 $t=4$

$t \geq 0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	10	↗	$\frac{31}{2}$ 극대	↘	2 극소	↗

함수 $f(t)$는 $t=4$에서 최솟값 2를 가지므로 $t \geq 0$에서 $f(t)>0$

즉, $|x_1-x_2|=t^3-\frac{15}{2}t^2+12t+10$이고, 두 점 P, Q 사이의 거리는 $t=4$에서 최소이다.

시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면

$v=\frac{dx_1}{dt}=3t^2-10t+10,\ a=\frac{dv}{dt}=6t-10$

따라서 $t=4$에서의 점 P의 가속도는

$a=24-10=14$

11 답 ③

ㄱ. $0 \leq t \leq 6$에서 $t=3$일 때 $|x(t)|$의 값이 가장 크므로 $t=3$일 때 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

ㄴ. $0<t<1$에서 t의 값이 커질수록 그 점에서의 접선의 기울기는 점점 작아지므로 속도는 감소한다.

ㄷ. $t=2.5$인 점에서의 접선의 기울기는 음수이므로 (속도)<0
$t=5.5$인 점에서의 접선의 기울기는 음수이므로 (속도)<0
즉, $t=2.5$일 때와 $t=5.5$일 때 속도의 부호가 서로 같으므로 운동 방향이 서로 같다.

ㄹ. $t=1$, $t=3$, $t=5$인 점에서의 접선의 기울기는 0이고, 좌우에서 접선의 기울기의 부호가 바뀌므로 $0<t<6$에서 운동 방향을 세 번 바꾼다.

ㅁ. 출발 후 두 번째로 원점을 지나는 시각은 $t=4$이고, $t=4$인 점에서의 접선의 기울기는 0보다 크므로 출발 후 두 번째로 원점을 지나는 순간의 속도는 0보다 크다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다.

12 답 $-\frac{5\sqrt{3}}{8}$

두 점 P, Q가 동시에 출발한 지 t초 후의 두 선분 PB, BQ의 길이는

$\overline{PB}=3-\frac{t}{2},\ \overline{BQ}=3+t\ (0 \leq t \leq 6)$

삼각형 PBQ의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{BQ}\times\overline{PB}\times\sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\times(3+t)\times\left(3-\frac{t}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{8}(t^2-3t-18)$$

이때 $S=\frac{7\sqrt{3}}{4}$에서 $-\frac{\sqrt{3}}{8}(t^2-3t-18)=\frac{7\sqrt{3}}{4}$

$t^2-3t-4=0,\ (t+1)(t-4)=0$

$\therefore\ t=4\ (\because\ 0 \leq t \leq 6)$

시각 t에 대한 넓이 S의 변화율은

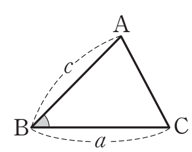
$$\frac{dS}{dt}=-\frac{\sqrt{3}}{8}(2t-3)$$

따라서 $t=4$에서의 삼각형 PBQ의 넓이의 변화율은 $-\frac{5\sqrt{3}}{8}$이다.

개념 NOTE

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}ac\sin B$



STEP 2 고난도 문제 | 66~70쪽

01 ⑤	02 15	03 12	04 ②	05 ⑤	06 2
07 ③	08 9	09 ②	10 ④	11 13	12 21
13 ㄴ, ㄷ	14 ②	15 52	16 5	17 130	18 ②
19 32	20 ④	21 $\frac{5}{6}$	22 11	23 3	
24 $12\sqrt{3}\,\text{cm}^2$		25 ④	26 90		

01 답 ⑤

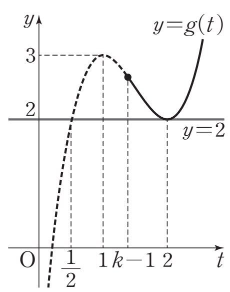
$f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x) \geq k-1$

이때 $f(x)=t$로 놓으면 $t\geq k-1$이고,
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(t)=2t^3-9t^2+12t-2$에서
$g'(t)=6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)$
$g'(t)=0$인 t의 값은 $t=1$ 또는 $t=2$
함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$	+	0	−	0	+
$g(t)$	↗	3 극대	↘	2 극소	↗

주어진 조건에서 함수 $(g\circ f)(x)$의 최솟값이 2이므로 $g(t)=2$인 t의 값을 구하면
$2t^3-9t^2+12t-2=2$, $2t^3-9t^2+12t-4=0$
$(2t-1)(t-2)^2=0$ $\quad\therefore\ t=\dfrac{1}{2}$ 또는 $t=2$
함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=2$는 그림과 같으므로 $t\geq k-1$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 2가 되려면
$\dfrac{1}{2}\leq k-1\leq 2$ $\quad\therefore\ \dfrac{3}{2}\leq k\leq 3$
따라서 k의 최솟값은 $\dfrac{3}{2}$이다.



02 답 15

$x^2+x-2y=5$에서
$y=\dfrac{1}{2}(x^2+x-5)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
이때 $y\leq\dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{1}{2}(x^2+x-5)\leq\dfrac{1}{2}$
$x^2+x-6\leq 0$, $(x+3)(x-2)\leq 0$
$\therefore\ 0\leq x\leq 2$ ($\because\ x\geq 0$)
㉠에서 $xy=\dfrac{1}{2}(x^3+x^2-5x)$이므로 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x^3+x^2-5x)$라 하면
$f'(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2+2x-5)=\dfrac{1}{2}(3x+5)(x-1)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because\ 0\leq x\leq 2$)
$0\leq x\leq 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{3}{2}$ 극소	↗	1

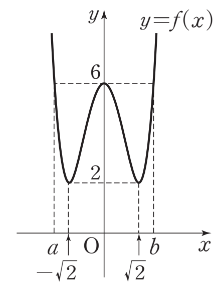
따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 1, $x=1$에서 최솟값 $-\dfrac{3}{2}$을 가지므로 $M=1$, $m=-\dfrac{3}{2}$
$\therefore\ 6(M-m)=6\times\dfrac{5}{2}=15$

idea
03 답 12

$f(x)=x^4-4x^2+6$에서
$f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	2 극소	↗	6 극대	↘	2 극소	↗

한편 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\leq f(c)$이면 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(c)$이다.
이때 $f(x)\leq f(c)$를 만족시키는 실수 c가 3개이려면 그림과 같이 $a<0<b$이고, $f(a)=f(b)=6$이어야 한다.



$f(a)=6$에서
$a^4-4a^2+6=6$
$a^4-4a^2=0$, $a^2(a+2)(a-2)=0$
$\therefore\ a=-2$ ($\because\ a<0$)
같은 방법으로 하면
$b=2$ ($\because\ b>0$)
따라서 $-2\leq x\leq 2$에서 함수 $f(x)$는
$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$에서 최댓값 6,
$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$에서 최솟값 2를 가지므로
$M=6$, $m=2$
$\therefore\ M+m-ab=6+2-(-4)=12$

04 답 ②

$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{3}{2}ax^2-3a$에서
$f'(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+3ax=-\dfrac{3}{2}x(x-2a)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2a$
(i) $2a\leq 0$, 즉 $a\leq 0$일 때,
$0\leq x\leq 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	−	
$f(x)$	$-3a$	↘	$3a-4$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값을 가지므로
$g(a)=f(0)=-3a$
(ii) $0<2a<2$, 즉 $0<a<1$일 때,
$0\leq x\leq 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-3a$	↗	$2a^3-3a$ 극대	↘	$3a-4$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2a$에서 최댓값을 가지므로
$g(a)=f(2a)=2a^3-3a$
(iii) $2a\geq 2$, 즉 $a\geq 1$일 때,
$0\leq x\leq 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	$-3a$	↗	$3a-4$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 가지므로
$g(a)=f(2)=3a-4$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $g(a)=\begin{cases} -3a & (a\le 0) \\ 2a^3-3a & (0<a<1) \\ 3a-4 & (a\ge 1) \end{cases}$

$a\le 0$일 때, $g(a)=-3a$는 감소하므로 함수 $g(a)$는 $a=0$에서 최소이고 이때의 최솟값은

$g(0)=0$

$0<a<1$일 때, $g(a)=2a^3-3a$이므로

$g'(a)=6a^2-3=6\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$g'(a)=0$인 a의 값은 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because$ $0<a<1$)

$0<a<1$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		$\searrow$	$-\sqrt{2}$ 극소	$\nearrow$	

즉, 함수 $g(a)$는 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 최소이고 이때의 최솟값은

$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}$

$a\ge 1$일 때, $g(a)=3a-4$는 증가하므로 함수 $g(a)$는 $a=1$에서 최소이고 이때의 최솟값은

$g(1)=-1$

따라서 함수 $g(a)$의 최솟값은 $-\sqrt{2}$이다.

05 답 ⑤

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$에서

$f(0)=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore c=\frac{1}{2}$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$에서도 미분가능하다.

즉, 미분계수 $g'(0)$이 존재하고, $g'(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ f'(x) & (x>0) \end{cases}$이므로

$\lim_{x\to 0+} g'(x)=\lim_{x\to 0-} g'(x)$에서

$f'(0)=0$ $\quad\therefore b=0$

$\therefore f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{2}$

ㄱ. $g(0)+g'(0)=f(0)+f'(0)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$

ㄴ. $f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$이므로

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

그런데 $-\frac{2}{3}a\le 0$이면 $x\ge 0$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

즉, $x\ge 0$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 $\frac{1}{2}$을 가지므로 함수 $g(x)$의 최솟값도 $\frac{1}{2}$이다.

이는 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작다는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $-\frac{2}{3}a>0$이므로 $a<0$

$\therefore g(1)=f(1)=a+\frac{3}{2}<\frac{3}{2}$

ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 0이면 $x\ge 0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이다.

$x\ge 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{2}{3}a$에서 최소이고 최솟값이 0이므로

$f\left(-\frac{2}{3}a\right)=0$에서 $\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}=0$

$a^3=-\frac{27}{8}$ $\quad\therefore a=-\frac{3}{2}$ ($\because$ a는 실수)

따라서 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$이므로

$g(2)=f(2)=\frac{5}{2}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

06 답 2

점 P(1, 2)를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-2=m(x-1)$ $\quad\therefore y=mx-m+2$

이 직선과 곡선 $y=x^2+\frac{3}{4}$이 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2+\frac{3}{4}=mx-m+2$의 두 근이다.

$x^2+\frac{3}{4}=mx-m+2$에서 $x^2-mx+m-\frac{5}{4}=0$

이 이차방정식에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=m-\frac{5}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠ ········· 배점 **30%**

이때 A$(\alpha, m\alpha-m+2)$, B$(\beta, m\beta-m+2)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(m\alpha-m\beta)^2}$

$=\sqrt{(1+m^2)(\alpha-\beta)^2}$

$=\sqrt{(1+m^2)\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}$

$=\sqrt{(1+m^2)\left\{m^2-4\left(m-\frac{5}{4}\right)\right\}}$ ($\because$ ㉠)

$=\sqrt{(1+m^2)(m^2-4m+5)}$

$=\sqrt{m^4-4m^3+6m^2-4m+5}$ ········· 배점 **30%**

$f(m)=m^4-4m^3+6m^2-4m+5$라 하면

$f'(m)=4m^3-12m^2+12m-4=4(m-1)^3$

$f'(m)=0$인 m의 값은 $m=1$

함수 $f(m)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

m	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(m)$	$-$	0	$+$
$f(m)$	$\searrow$	4 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(m)$은 $m=1$에서 최솟값 4를 가지므로 $\overline{AB}$의 최솟값은

$\sqrt{4}=2$ ········· 배점 **40%**

07 답 ③

$f(x)=x(x-a)(x-6)=x^3-(a+6)x^2+6ax$라 하면

$f'(x)=3x^2-2(a+6)x+6a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=6a$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편 원점을 지나고 다른 한 점에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-(a+6)t^2+6at)\ (t\neq0)$라 하면

접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2(a+6)t+6a$이므로

접선의 방정식은

$y-\{t^3-(a+6)t^2+6at\}=\{3t^2-2(a+6)t+6a\}(x-t)$

$\therefore\ y=\{3t^2-2(a+6)t+6a\}x-2t^3+(a+6)t^2$

이 직선이 원점을 지나므로

$0=-2t^3+(a+6)t^2,\ t^2\{2t-(a+6)\}=0$

$\therefore\ t=\dfrac{a+6}{2}\ (\because\ t\neq0)$

이때 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{a+6}{2}\right)=\frac{3(a+6)^2}{4}-(a+6)^2+6a$$

$$=-\frac{1}{4}a^2+3a-9 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 두 접선의 기울기의 곱을 $g(a)$라 하면

$g(a)=6a\left(-\dfrac{1}{4}a^2+3a-9\right)=-\dfrac{3}{2}a^3+18a^2-54a$

$g'(a)=-\dfrac{9}{2}a^2+36a-54=-\dfrac{9}{2}(a-2)(a-6)$

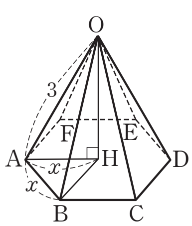
$g'(a)=0$인 a의 값은 $a=2\ (\because\ 0<a<6)$

$0<a<6$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		↘	-48 극소	↗	

따라서 함수 $g(a)$는 $a=2$에서 최솟값 -48을 가지므로 두 접선의 기울기의 곱의 최솟값은 -48이다.

08 답 9



그림과 같이 꼭짓점 O에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하고, 밑면의 한 변의 길이를 x라 하자.

이때 밑면 ABCDEF는 정육각형이므로 삼각형 ABH는 정삼각형이다.

$\overline{AH}=x$이므로 삼각형 OAH에서

$\overline{OH}=\sqrt{9-x^2}$

이때 $x>0,\ 9-x^2>0$에서

$0<x<3$

또 밑면의 넓이는 삼각형 ABH의 넓이의 6배이므로

$6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x^2$

즉, 정육각뿔 O$-$ABCDEF의 부피는

$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x^2\times\sqrt{9-x^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{9x^4-x^6}$

$f(x)=9x^4-x^6$이라 하면

$f'(x)=36x^3-6x^5$

$\quad=-6x^3(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=\sqrt{6}\ (\because\ 0<x<3)$

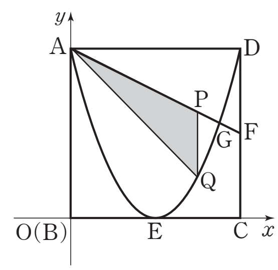
$0<x<3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\sqrt{6}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	108 극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{6}$에서 최댓값 108을 가지므로 정육각뿔의 부피의 최댓값은

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{108}=9$

09 답 ②



정사각형 ABCD를 점 B를 원점, 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하여 그림과 같이 좌표평면 위에 나타내자.

포물선의 꼭짓점이 E$(2,\ 0)$이므로 포물선이 나타내는 식을

$y=a(x-2)^2\ (a>0)$이라 하면 이 포물선이 점 A$(0,\ 4)$를 지나므로

$4=4a \quad \therefore\ a=1$

$\therefore\ y=(x-2)^2$

또 A$(0,\ 4)$, F$(4,\ 2)$이므로 직선 AF의 방정식은

$y-4=\dfrac{2-4}{4-0}x \quad \therefore\ y=-\dfrac{1}{2}x+4$

포물선 $y=(x-2)^2$과 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+4$가 만나는 점 G의 x좌표를 구하면

$(x-2)^2=-\dfrac{1}{2}x+4$

$x^2-4x+4=-\dfrac{1}{2}x+4,\ x^2-\dfrac{7}{2}x=0$

$x\left(x-\dfrac{7}{2}\right)=0 \quad \therefore\ x=\dfrac{7}{2}\ (\because\ x>0)$

$\therefore$ G$\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{9}{4}\right)$

점 P의 x좌표를 $t\left(0<t<\dfrac{7}{2}\right)$라 하면

P$\left(t,\ -\dfrac{1}{2}t+4\right)$, Q$(t,\ (t-2)^2)$

이때 삼각형 AQP의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\dfrac{1}{2}t\left\{-\dfrac{1}{2}t+4-(t-2)^2\right\}=-\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{7}{4}t^2$

$\therefore\ S'(t)=-\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{7}{2}t=-\dfrac{3}{2}t\left(t-\dfrac{7}{3}\right)$

$S'(t)=0$인 t의 값은 $t=\dfrac{7}{3}\ \left(\because\ 0<t<\dfrac{7}{2}\right)$

$0<t<\dfrac{7}{2}$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{7}{3}$	$\cdots$	$\frac{7}{2}$
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	$\frac{343}{108}$ 극대	↘	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=\dfrac{7}{3}$에서 최댓값 $\dfrac{343}{108}$을 가지므로 삼각형 AQP의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{343}{108}$이다.

10 답 ④

두 점 A(1, 3), B(−2, −3)을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-3-3}{-2-1}(x-1) \qquad \therefore\ y=2x+1$

곡선 $y=x^3-3x^2-7x+a$와 선분 AB가 만나려면 $-2\le x\le 1$에서 방정식 $x^3-3x^2-7x+a=2x+1$, 즉 $-x^3+3x^2+9x+1=a$가 실근을 가져야 한다.

즉, 함수 $y=-x^3+3x^2+9x+1$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점이 존재해야 한다.

$f(x)=-x^3+3x^2+9x+1$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ ($\because\ -2\le x\le 1$)

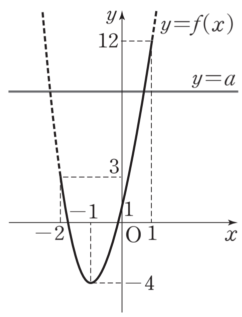
$-2\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	-4 극소	↗	12

이때 $f(0)=1$이므로 $-2\le x\le 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고, 만나는 점을 갖도록 직선 $y=a$를 그어 보면 a의 값의 범위는

$-4\le a\le 12$

따라서 정수 a는 $-4, -3, -2, \dots, 12$의 17개이다.



11 답 13

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2$이라 하면

$f'(x)=x^3-3x$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2\right)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=t^3-3t$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2\right)=(t^3-3t)(x-t)$

$\therefore\ y=(t^3-3t)x-\frac{3}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2$

이 직선이 점 $\left(\frac{1}{3},\ a\right)$를 지나므로

$a=(t^3-3t)\times\frac{1}{3}-\frac{3}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2$

$\therefore\ -\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-t=a \qquad \cdots\cdots$ ㉠

점 $\left(\frac{1}{3},\ a\right)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선이 3개 존재하려면 사차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

즉, 함수 $y=-\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-t$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점이 3개이어야 한다.

$g(t)=-\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-t$라 하면

$g'(t)=-3t^3+t^2+3t-1$

$\quad=-(t+1)(t-1)(3t-1)$

$g'(t)=0$인 t의 값은 $t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=1$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

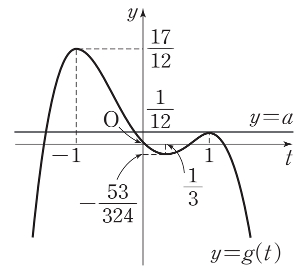
t	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↗	$\frac{17}{12}$ 극대	↘	$-\frac{53}{324}$ 극소	↗	$\frac{1}{12}$ 극대	↘

이때 $g(0)=0$이므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같고, 만나는 점이 3개가 되도록 직선 $y=a$를 그어 보면 양수 a의 값은

$a=\frac{1}{12}$

따라서 $p=12$, $q=1$이므로

$p+q=13$



12 답 21

$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$에서

$f(x)+|f(x)+x|-6x=k$

즉, 함수 $y=f(x)+|f(x)+x|-6x$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점이 4개이어야 한다.

$g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$라 하면

$f(x)+x=\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x\right)+x$

$\quad=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+11x$

$\quad=\frac{1}{2}x(x^2-9x+22)$

이때 $x^2-9x+22=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로 $x<0$일 때 $f(x)+x<0$, $x\ge 0$일 때 $f(x)+x\ge 0$이다.

$\therefore\ g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$

$\quad=\begin{cases} -7x & (x<0) \\ 2f(x)-5x & (x\ge 0)\end{cases}$

$\quad=\begin{cases} -7x & (x<0) \\ x^3-9x^2+15x & (x\ge 0)\end{cases}$

$h(x)=x^3-9x^2+15x\ (x\ge 0)$라 하면

$h'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=5$

$x\ge 0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

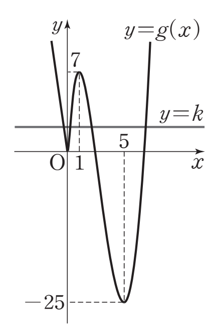
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	0	↗	7 극대	↘	-25 극소	↗

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 만나는 점이 4개가 되도록 직선 $y=k$를 그어 보면 k의 값의 범위는

$0<k<7$

따라서 정수 k의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 합은

$1+2+3+4+5+6=21$



13 답 ㄴ, ㄷ

$f(x)=ax^3+a^2x^2+b$에서

$f'(x)=3ax^2+2a^2x=ax(3x+2a)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

(i) $a>0$일 때,

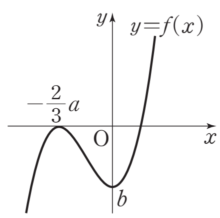
x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}a^4+b$ 극대	↘	b 극소	↗

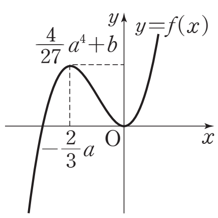
(ii) $a<0$일 때,

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	b 극소	↗	$\frac{4}{27}a^4+b$ 극대	↘

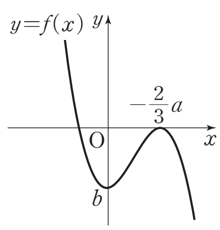
ㄱ. 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접한다.

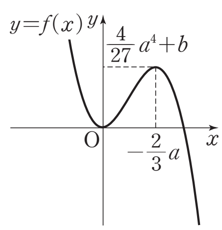
(i) $a>0$일 때,





(ii) $a<0$일 때,





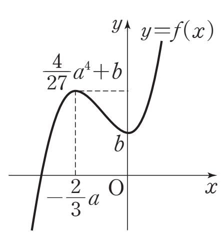
(i), (ii)에서 $f\left(-\frac{2}{3}a\right)=0$ 또는 $f(0)=0$이어야 하므로

$\frac{4}{27}a^4+b=0$ 또는 $b=0$ $\quad\therefore$ $b=-\frac{4}{27}a^4$ 또는 $b=0$

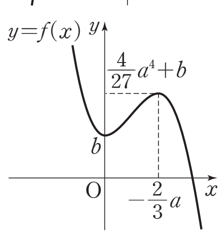
$a\neq0$이므로 $b\neq0$이다.

ㄴ. $b>0$일 때,

(i) $a>0$이면 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$은 오직 한 개의 실근을 갖는다.



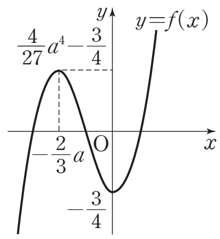
(ii) $a<0$이면 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$은 오직 한 개의 실근을 갖는다.



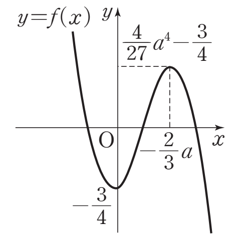
(i), (ii)에서 $b>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 오직 한 개의 실근을 갖는다.

ㄷ. $b=-\frac{3}{4}$일 때, 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점이 3개이어야 한다.

(i) $a>0$일 때,



(ii) $a<0$일 때,



(i), (ii)에서 $f\left(-\frac{2}{3}a\right)>0$이어야 하므로

$\frac{4}{27}a^4-\frac{3}{4}>0$, $a^4-\frac{81}{16}>0$

$\left(a^2+\frac{9}{4}\right)\left(a+\frac{3}{2}\right)\left(a-\frac{3}{2}\right)>0$

그런데 $a^2+\frac{9}{4}>0$이므로

$\left(a+\frac{3}{2}\right)\left(a-\frac{3}{2}\right)>0$

$\therefore$ $a<-\frac{3}{2}$ 또는 $a>\frac{3}{2}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

14 답 ②

ㄱ. $k=0$일 때, $f(x)+g(x)=0$에서 $x^3+2x^2+4=0$

이 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=x^3+2x^2+4$의 그래프와 x축이 한 점에서 만나야 한다.

$h_1(x)=x^3+2x^2+4$라 하면

$h_1'(x)=3x^2+4x=x(3x+4)$

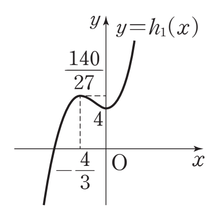
$h_1'(x)=0$인 x의 값은 $x=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=0$

함수 $h_1(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$h_1'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h_1(x)$	↗	$\frac{140}{27}$ 극대	↘	4 극소	↗

함수 $y=h_1(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 x축과 한 점에서 만난다.

즉, $k=0$일 때, 방정식 $f(x)+g(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.



ㄴ. $f(x)-g(x)=0$에서 $x^3-kx+6-(2x^2-2)=0$

$\therefore$ $x^3-2x^2+8=kx$

이 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 함수 $y=x^3-2x^2+8$의 그래프와 직선 $y=kx$가 만나는 점이 2개이어야 한다.

$h_2(x)=x^3-2x^2+8$이라 하면

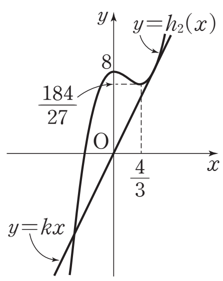
$h_2'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$

$h_2'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

함수 $h_2(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$h_2'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h_2(x)$	$\nearrow$	8 극대	$\searrow$	$\frac{184}{27}$ 극소	$\nearrow$

함수 $y=h_2(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 직선 $y=kx$와 만나는 점이 2개가 되려면 $x>0$인 점에서 함수 $y=h_2(x)$의 그래프와 직선 $y=kx$가 접해야 한다.



접점의 좌표를 $(a,\ a^3-2a^2+8)\ (a>0)$이라 하면 접선의 기울기는

$h_2'(a)=3a^2-4a$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3-2a^2+8)=(3a^2-4a)(x-a)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-a^3+2a^2-8=-3a^3+4a^2,\ a^3-a^2-4=0$

$(a-2)(a^2+a+2)=0 \qquad \therefore\ a=2\ (\because\ a$는 실수$)$

즉, 접점의 x좌표가 2이므로 $k=h_2'(2)=12-8=4$

ㄷ. $|f(x)|=g(x)$에서 $|x^3-kx+6|=2x^2-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x^3-kx+6=-(2x^2-2)$ 또는 $x^3-kx+6=2x^2-2$

$\therefore\ x^3+2x^2+4=kx$ 또는 $x^3-2x^2+8=kx$

이때 $h_1(x)=x^3+2x^2+4,\ h_2(x)=x^3-2x^2+8$이라 하면

$h_1(x)=kx$ 또는 $h_2(x)=kx$

두 함수 $y=h_1(x),\ y=h_2(x)$의 그래프의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3+2x^2+4=x^3-2x^2+8,\ 4x^2=4$

$x^2=1,\ (x+1)(x-1)=0 \qquad \therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$

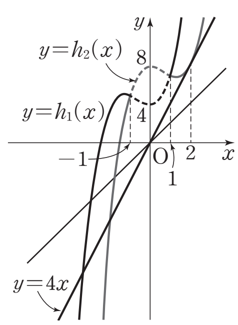
㉠에서 $2x^2-2\ge0$이어야 하므로 $2(x^2-1)\ge0$

$2(x+1)(x-1)\ge0 \qquad \therefore\ x\le-1$ 또는 $x\ge1$

ㄴ에서 $k=4$일 때 함수 $y=h_2(x)$의 그래프와 직선 $y=kx$가 접하므로 k의 값의 범위에 따라 두 함수 $y=h_1(x),\ y=h_2(x)$의 그래프와 직선 $y=kx$의 서로 다른 교점의 개수를 구해 보자.

(i) $k\le4$일 때,

$x\le-1$ 또는 $x\ge1$에서 두 함수 $y=h_1(x),\ y=h_2(x)$의 그래프와 직선 $y=kx$의 서로 다른 교점의 개수는 3 이하이다.

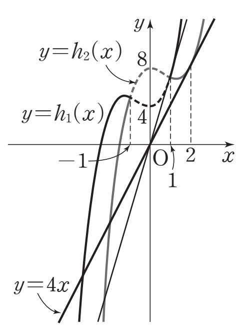


(ii) $k>4$일 때,

$x\le-1$에서 두 함수 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 그래프와 직선 $y=kx$의 서로 다른 교점의 개수는 2이다.

$x\ge1$에서 함수 $y=h_1(x)$의 그래프와 직선 $y=kx$가 접할 때의 접점의 좌표를 $(b,\ b^3+2b^2+4)$라 하면 접선의 기울기는 $h_1'(b)=3b^2+4b$이므로 접선의 방정식은

$y-(b^3+2b^2+4)=(3b^2+4b)(x-b)$



이 직선이 원점을 지나므로

$-b^3-2b^2-4=-3b^3-4b^2,\ b^3+b^2-2=0$

$(b-1)(b^2+2b+2)=0 \qquad \therefore\ b=1\ (\because\ b$는 실수$)$

즉, 접점의 x좌표가 1이므로

$k=h_1'(1)=3+4=7$

$x\ge1$에서 두 함수 $y=h_1(x),\ y=h_2(x)$의 그래프와 직선 $y=kx$의 서로 다른 교점의 개수는 2이다.

$x\le-1$ 또는 $x\ge1$에서 두 함수 $y=h_1(x),\ y=h_2(x)$의 그래프와 직선 $y=kx$의 서로 다른 교점의 개수는 4이다.

(i), (ii)에서 두 함수 $y=h_1(x),\ y=h_2(x)$의 그래프와 직선 $y=kx$의 서로 다른 교점의 개수는 4 이하이므로 방정식 $|f(x)|=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 4 이하이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

idea

15 답 **52**

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-9,\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=27$이므로

$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=27-18=9$

$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma=-3$ 또는 $\alpha+\beta+\gamma=3$

(i) $\alpha+\beta+\gamma=-3$일 때,

$\alpha\beta\gamma=a$라 하면 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$는 방정식 $x^3+3x^2-9x-a=0$의 서로 다른 세 실근이다.

방정식 $x^3+3x^2-9x-a=0$에서

$x^3+3x^2-9x=a$

즉, 함수 $y=x^3+3x^2-9x$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점이 3개이어야 한다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$

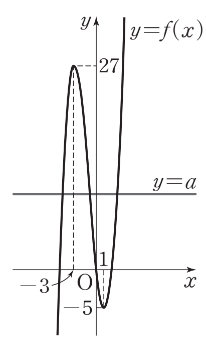
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	27 극대	$\searrow$	-5 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 만나는 점이 3개가 되도록 직선 $y=a$를 그어 보면 a의 값의 범위는

$-5<a<27$

$\therefore\ -5<\alpha\beta\gamma<27$



(ii) $\alpha+\beta+\gamma=3$일 때,

$\alpha\beta\gamma=b$라 하면 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$는 방정식 $x^3-3x^2-9x-b=0$의 서로 다른 세 실근이다.

방정식 $x^3-3x^2-9x-b=0$에서

$x^3-3x^2-9x=b$

즉, 함수 $y=x^3-3x^2-9x$의 그래프와 직선 $y=b$가 만나는 점이 3개이어야 한다.

$g(x)=x^3-3x^2-9x$라 하면

$g'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$g'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

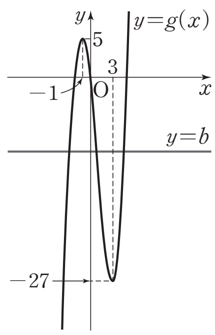
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	5 극대	↘	-27 극소	↗

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 만나는 점이 3개가 되도록 직선 $y=b$를 그어 보면 b의 값의 범위는

$-27<b<5$

$\therefore\ -27<\alpha\beta\gamma<5$



(i), (ii)에서 $-27<\alpha\beta\gamma<27$

따라서 정수 $\alpha\beta\gamma$의 최댓값은 26, 최솟값은 -26이므로

$M=26$, $m=-26$

$\therefore\ M-m=52$

개념 NOTE

세 수 α, β, γ를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$$

16 답 5

부등식 $f(x)>g(x)$에서

$2x^{n+2}-(n+5)(n-6)>(n+2)x^2$

$2x^{n+2}-(n+2)x^2-(n+5)(n-6)>0$

$h(x)=2x^{n+2}-(n+2)x^2-(n+5)(n-6)$이라 하면

$h'(x)=2(n+2)x^{n+1}-2(n+2)x$

$\qquad=2(n+2)x(x^n-1)$

$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ $(\because\ x>0)$

└→ n이 홀수, 짝수임에 관계없이 $x>0$에서 $x^n-1=0$을 만족시키는 x의 값은 1뿐이다.

$x>0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		↘	$-n^2+30$ 극소	↗

배점 50%

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-n^2+30$을 가지므로 $x>0$에서 부등식 $h(x)>0$이 성립하려면

$-n^2+30>0$

$\therefore\ n^2<30$ 배점 30%

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

배점 20%

17 답 130

$f(x)=x^3-mx^2+(m^2-2m)x+5$에서

$f'(x)=3x^2-2mx+m^2-2m$

이때 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 할 때,

└→ 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

$\frac{D}{4}=m^2-3(m^2-2m)>0$

$-2m^2+6m>0$, $m(m-3)<0$ $\qquad\therefore\ 0<m<3$

즉, 자연수 m의 값은 1, 2이다.

(i) $m=1$일 때,

$f(x)=x^3-x^2-x+5$

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ $(\because\ x\ge0)$

$x\ge0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	5	↘	4 극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 4를 가지므로 $x\ge0$에서 부등식 $f(x)\ge k$가 성립하려면

$k\le4$

(ii) $m=2$일 때,

$f(x)=x^3-2x^2+5$

$f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

$x\ge0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	5	↘	$\frac{103}{27}$ 극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=\frac{4}{3}$에서 최솟값 $\frac{103}{27}$을 가지므로 $x\ge0$에서 부등식 $f(x)\ge k$가 성립하려면

$k\le\frac{103}{27}$

(i), (ii)에서 $k\le\frac{103}{27}$

따라서 k의 최댓값이 $\frac{103}{27}$이므로 $p=27$, $q=103$

$\therefore\ p+q=130$

18 답 ②

$x>0$이므로 주어진 부등식의 양변에 x를 곱하면

$3x^4-kx^3\ge3-k$

$3x^4-kx^3-3+k\ge0$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=3x^4-kx^3-3+k$라 하면

$f'(x)=12x^3-3kx^2=3x^2(4x-k)$

(i) $k\le0$일 때,

$x>0$에서 $f'(x)>0$이므로 $x>0$에서 함수 $f(x)$는 증가하고,

$f(0)=k-3<0$이므로 $f(x)<0$인 x의 값이 존재한다.

즉, 부등식 ㉠은 성립하지 않는다.

(ii) $k>0$일 때,

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=\frac{k}{4}$ $(\because\ x>0)$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{k}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(\frac{k}{4}\right)$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{k}{4}$에서 최솟값 $f\left(\frac{k}{4}\right)$를 가지므로 $x>0$에서 부등식 ㉠이 성립하려면 $f\left(\frac{k}{4}\right)\geq 0$

즉, $3\left(\frac{k}{4}\right)^4-k\left(\frac{k}{4}\right)^3-3+k\geq 0$이므로

$-\left(\frac{k}{4}\right)^4-3+k\geq 0$

$g(k)=-\left(\frac{k}{4}\right)^4-3+k$라 하면

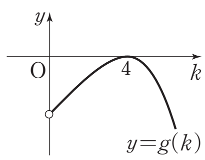
$g'(k)=-\frac{k^3}{64}+1=-\frac{1}{64}(k^3-64)=-\frac{1}{64}(k-4)(k^2+4k+16)$

$g'(k)=0$인 k의 값은 $k=4$ ($\because$ $k^2+4k+16>0$)

$k>0$에서 함수 $g(k)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(k)$		$+$	0	$-$
$g(k)$		$\nearrow$	0 극대	$\searrow$

$k>0$에서 함수 $y=g(k)$의 그래프는 그림과 같으므로 부등식 $g(k)\geq 0$을 만족시키는 k의 값은 4이다.



(i), (ii)에서 $x>0$일 때, 주어진 부등식을 만족시키는 k의 값은 4이다.

19 답 32

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$이므로 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$ $\qquad \therefore y=f'(t)x-tf'(t)+f(t)$

즉, y절편은 $-tf'(t)+f(t)$이므로

$g(t)=-tf'(t)+f(t)$

이 식에 $t=-2$를 대입하면

$g(-2)=2f'(-2)+f(-2)$

이때 $f(-2)=g(-2)$이므로

$2f'(-2)=0$ $\qquad \therefore f'(-2)=0$

모든 실수 t에 대하여

$f(t)-g(t)=f(t)-\{-tf'(t)+f(t)\}=tf'(t)\leq 0$이 성립하므로

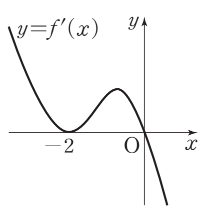
$t<0$이면 $f'(t)\geq 0$, $t>0$이면 $f'(t)\leq 0$이다.

한편 $f(x)=-x^4+ax^3+bx^2+cx$에서 $f'(x)=-4x^3+3ax^2+2bx+c$

삼차함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 연속이고, $x<0$이면 $f'(x)\geq 0$, $x>0$이면 $f'(x)\leq 0$이므로

$f'(0)=0$ $\qquad \therefore c=0$

따라서 $f'(0)=f'(-2)=0$이므로 곡선 $y=f'(x)$의 개형은 그림과 같다.



이때 삼차함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수가 -4이므로

$f'(x)=-4x(x+2)^2=-4x^3-16x^2-16x$

즉, $3a=-16$, $2b=-16$이므로

$a=-\frac{16}{3}$, $b=-8$

$\therefore$ $12(a-b+c)=12\left\{-\frac{16}{3}-(-8)+0\right\}=32$

20 답 ④

ㄱ. 함수 $y=f(t)$의 그래프에서 $t=10$, $t=20$인 점에서의 접선의 기울기는 0이고, 좌우에서 접선의 기울기의 부호가 바뀌므로 점 P는 출발 후 25초 동안 운동 방향을 두 번 바꾼다.
함수 $y=g(t)$의 그래프에서 $t=10$인 점에서의 접선의 기울기는 0이고, 좌우에서 접선의 기울기의 부호가 바뀌므로 점 Q는 출발 후 25초 동안 운동 방향을 한 번 바꾼다.
즉, 두 점 P, Q가 출발 후 25초 동안 운동 방향을 바꾸는 횟수의 합은 $2+1=3$

ㄴ. 점 P가 출발 후 10초 동안 움직인 거리는
$|15-(-5)|=20$
한편 두 점 $(15, 0)$, $(20, -10)$을 지나는 직선의 방정식은
$g(t)=\frac{-10-0}{20-15}(t-15)$
$\therefore$ $g(t)=-2t+30\ (15\leq t\leq 20)$
$\therefore$ $g(17.5)=-5$
이때 점 Q가 10초부터 17.5초까지 움직인 거리는
$|10-(-5)|=15$
즉, 점 P가 출발 후 10초 동안 움직인 거리와 점 Q가 10초부터 17.5초까지 움직인 거리는 서로 다르다.

ㄷ. $10\leq t\leq 20$에서의 함수 $f(t)$의 평균변화율은
$\frac{10-(-5)}{20-10}=\frac{3}{2}$
이때 평균값 정리에 의하여 $f'(t)=\frac{3}{2}$이 되는 시각 t가 $10<t<20$에 적어도 하나 존재한다.
또 $0\leq t\leq 10$에서의 함수 $g(t)$의 평균변화율은
$\frac{10-(-5)}{10-0}=\frac{3}{2}$
이때 평균값 정리에 의하여 $g'(t)=\frac{3}{2}$이 되는 시각 t가 $0<t<10$에 적어도 하나 존재한다.
즉, 두 점 P, Q의 속도가 $\frac{3}{2}$이 되는 시각이 각각 존재한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21 답 $\frac{5}{6}$

$f(x)=-x^3$이라 하면 $f'(x)=-3x^2$

접점의 좌표를 $(a, -a^3)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=-3a^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(-a^3)=-3a^2(x-a)$ $\qquad \therefore y=-3a^2x+2a^3$

이 직선이 점 $P(t^3-t^2, 0)$을 지나므로

$0=-3a^2(t^3-t^2)+2a^3$

$a^2\{2a-3(t^3-t^2)\}=0$

$\therefore$ $a=\frac{3}{2}(t^3-t^2)$ ($\because$ $a\neq 0$)

$f'(a)\neq 0$에서 $-3a^2\neq 0$이므로 $a\neq 0$

$\therefore$ $Q\left(\frac{3}{2}(t^3-t^2), 0\right)$

$g(t)=\frac{3}{2}(t^3-t^2)$이라 하면 점 Q의 속도는

$g'(t)=\frac{3}{2}(3t^2-2t)=\frac{9}{2}\left\{\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right\}$

즉, 함수 $g'(t)$는 $0<t<1$에서 $t=\frac{1}{3}$일 때 최소이므로 그때의 점 Q의 속도는

$g'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

따라서 $p=\frac{1}{3}$, $q=-\frac{1}{2}$이므로 $p-q=\frac{5}{6}$

22 답 11

시각 t에서의 점 P의 속도는

$f'(t)=3t^2+2at+b$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때, 즉 $t=3$에서의 속도는 0이므로

$f'(3)=0$에서 $27+6a+b=0$

$\therefore 6a+b=-27$ ⋯⋯ ㉠ ⋯⋯ 배점 20%

또 $t=3$에서의 점 Q의 위치는 6이므로 $g(3)=6$에서

$9(a+9)-30=6$, $a+9=4$ $\therefore a=-5$ ⋯⋯ 배점 20%

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=3$ ⋯⋯ 배점 10%

즉, $f(t)=t^3-5t^2+3t+4$, $g(t)=-t^3+4t^2+3t-12$이므로 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|f(t)-g(t)|=|t^3-5t^2+3t+4-(-t^3+4t^2+3t-12)|$
$=|2t^3-9t^2+16|$

$h(t)=2t^3-9t^2+16$이라 하면

$h'(t)=6t^2-18t=6t(t-3)$

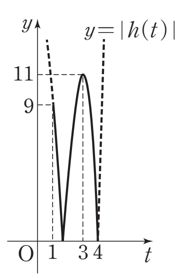
$h'(t)=0$인 t의 값은 $t=3$ ($\because 1\le t\le 4$)

$1\le t\le 4$에서 함수 $h(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$	9	↘	-11 극소	↗	0

⋯⋯ 배점 30%

$1\le t\le 4$에서 함수 $y=|h(t)|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $|h(t)|$는 $t=3$에서 최댓값 11을 가지므로 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 11이다. ⋯⋯ 배점 20%

23 답 3

두 점 A, B의 t초 후의 위치는 A$(3t, 0)$, B$(0, 9t)$

직선 AB의 방정식은 $y=-3(x-3t)$

선분 AB와 직선 $y=ax$가 만나는 점 P의 x좌표를 구하면

$-3(x-3t)=ax$, $(a+3)x=9t$ $\therefore x=\frac{9t}{a+3}$

$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{9t}{a+3}, \frac{9at}{a+3}\right)$

선분 OP의 길이를 l이라 하면

$l=\sqrt{\left(\frac{9t}{a+3}\right)^2+\left(\frac{9at}{a+3}\right)^2}=\frac{9\sqrt{1+a^2}}{a+3}t$

시각 t에 대한 길이 l의 변화율은

$\frac{dl}{dt}=\frac{9\sqrt{1+a^2}}{a+3}$

즉, $\frac{9\sqrt{1+a^2}}{a+3}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$이므로

$6\sqrt{1+a^2}=\sqrt{10}(a+3)$

양변을 제곱하면 $36(1+a^2)=10(a+3)^2$

$18(1+a^2)=5(a^2+6a+9)$

$13a^2-30a-27=0$, $(13a+9)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

24 답 $12\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$

정사각형의 한 변의 길이가 매초 4 cm씩 늘어나므로 t초 후의 정사각형의 한 변의 길이를 l cm라 하면

$l=4+4t$

즉, t초 후의 정사각형의 넓이를 $S\,\mathrm{cm}^2$라 하면

$S=l^2=(4+4t)^2=16t^2+32t+16$

시각 t에 대한 넓이 S의 변화율은

$\frac{dS}{dt}=32t+32(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$

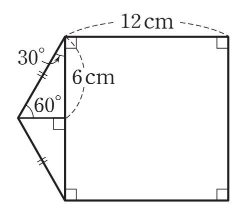
즉, $32t+32=96$이므로

$32t=64$ $\therefore t=2$

$t=2$일 때, 정사각형의 한 변의 길이는

$4+4\times 2=12$

한편 이등변삼각형도 그 모양을 유지하면서 같은 속도로 크기가 커지므로 빗변의 길이가 12 cm인 이등변삼각형의 높이는



$6\tan 30°=2\sqrt{3}$(cm)

따라서 이등변삼각형의 넓이는

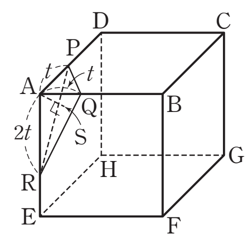
$\frac{1}{2}\times 12\times 2\sqrt{3}=12\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$

25 답 ④

세 점 P, Q, R가 동시에 출발한 지 t초 후의 세 선분 AP, AQ, AR의 길이는

$\overline{\mathrm{AP}}=t$, $\overline{\mathrm{AQ}}=t$, $\overline{\mathrm{AR}}=2t$ $(0<t\le 3)$

사면체 A−PQR의 부피를 V라 하자.



(i) 삼각형 APQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times t\times t=\frac{1}{2}t^2$

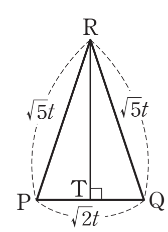
$\therefore V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}t^2\times 2t$
$=\frac{1}{3}t^3$ ⋯⋯ ㉠

(ii) 삼각형 PQR에서

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{t^2+t^2}=\sqrt{2}t$

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{t^2+(2t)^2}=\sqrt{5}t$

그림과 같이 점 R에서 변 PQ에 내린 수선의 발을 T라 하면



$\overline{\mathrm{RT}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PR}}^2-\overline{\mathrm{PT}}^2}$
$=\sqrt{(\sqrt{5}t)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2}$
$=\frac{3}{\sqrt{2}}t$

즉, 삼각형 PQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}t\times\frac{3}{\sqrt{2}}t=\frac{3}{2}t^2$

이때 $\overline{AS}=a$라 하면

$V=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}t^2\times a=\frac{1}{2}at^2$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{3}t^3=\frac{1}{2}at^2$　　$\therefore a=\frac{2}{3}t$

$\overline{AS}=\frac{4}{3}$가 될 때의 시각 t는

$\frac{2}{3}t=\frac{4}{3}$　　$\therefore t=2$

㉠에서 시각 t에 대한 부피 V의 변화율은

$\frac{dV}{dt}=t^2$

따라서 $t=2$일 때, 사면체 A$-$PQR의 부피의 변화율은

$2^2=4$

26 답 90

A$(t,\ 0)$, B$(t-3,\ 6)$이므로 직선 AB의 방정식은

$y=\frac{6}{t-3-t}(x-t)$　　$\therefore y=-2x+2t$

선분 AB와 직선 $y=x$가 만나는 점을 P라 하고, 점 P의 x좌표를 구하면

$-2x+2t=x$　　$\therefore x=\frac{2}{3}t$

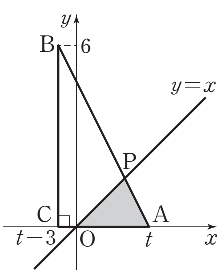
$\therefore$ P$\left(\frac{2}{3}t,\ \frac{2}{3}t\right)$

(i) $0<t\le3$일 때,

삼각형 OAP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times t\times\frac{2}{3}t=\frac{1}{3}t^2$

$\therefore V=\frac{1}{3}t^2\times t=\frac{1}{3}t^3$



시각 t에 대한 부피 V의 변화율은

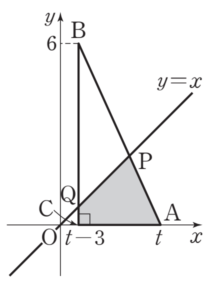
$\frac{dV}{dt}=t^2$

따라서 $t=2$일 때, 부피 V의 변화율 a는

$a=2^2=4$

(ii) $3<t<9$일 때,

선분 BC와 직선 $y=x$가 만나는 점을 Q라 하면 Q$(t-3,\ t-3)$이므로 사각형 APQC의 넓이는



$\triangle$OAP$-\triangle$OCQ

$=\frac{1}{3}t^2-\frac{1}{2}\times(t-3)^2$

$=\frac{1}{3}t^2-\frac{1}{2}(t^2-6t+9)$

$=-\frac{1}{6}t^2+3t-\frac{9}{2}$

$\therefore V=\left(-\frac{1}{6}t^2+3t-\frac{9}{2}\right)\times t=-\frac{1}{6}t^3+3t^2-\frac{9}{2}t$

시각 t에 대한 부피 V의 변화율은

$\frac{dV}{dt}=-\frac{1}{2}t^2+6t-\frac{9}{2}$

따라서 $t=4$일 때, 부피 V의 변화율 b는

$b=-8+24-\frac{9}{2}=\frac{23}{2}$

(i), (ii)에서 $12(b-a)=12\left(\frac{23}{2}-4\right)=90$

STEP 3 최고난도 문제

| 71~73쪽

01 ④	02 12	03 ③	04 61	05 38	06 296
07 16	08 7	09 216	10 ①		

01 답 ④

1단계 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내기

$f(x)=3x^4-4(a-1)x^3-6ax^2$에서

$f'(x)=12x^3-12(a-1)x^2-12ax$

$\quad=12x(x+1)(x-a)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=a$

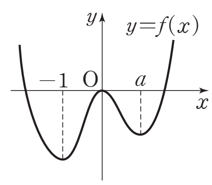
$a>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-2a-1$ 극소	↗	0 극대	↘	$-a^4-2a^3$ 극소	↗

2단계 $f(-1)\le f(a)$일 때, $g(t)$의 미분가능성 확인하기

(i) $f(-1)\le f(a)$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$t<-1$이면

$g(t)=f(t)=3t^4-4(a-1)t^3-6at^2$

$t\ge-1$이면

$g(t)=f(-1)=-2a-1$

이때 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $t=-1$에서 미분가능해야 하므로 미분계수 $g'(-1)$이 존재해야 한다.

$g'(t)=\begin{cases}12t(t+1)(t-a) & (t<-1)\\ 0 & (t>-1)\end{cases}$이므로

$\lim_{t\to-1+}g'(t)=\lim_{t\to-1+}0=0$

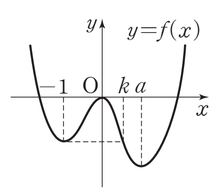
$\lim_{t\to-1-}g'(t)=\lim_{t\to-1-}12t(t+1)(t-a)=0$

즉, $\lim_{t\to-1+}g'(t)=\lim_{t\to-1-}g'(t)$이므로 함수 $g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하다.

3단계 $f(-1)>f(a)$일 때, $g(t)$의 미분가능성 확인하기

(ii) $f(-1)>f(a)$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 $f(-1)=f(k)$를 만족시키는 $0<k<a$인 실수 k에 대하여

$t<-1$이면

$g(t)=f(t)=3t^4-4(a-1)t^3-6at^2$

$-1\le t\le k$이면

$g(t)=f(-1)=-2a-1$

$k<t<a$이면

$g(t)=f(t)=3t^4-4(a-1)t^3-6at^2$

$t\ge a$이면

$g(t)=f(a)=-a^4-2a^3$

이때 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $t=-1$, $t=k$, $t=a$에서 미분가능해야 하므로 미분계수 $g'(-1)$, $g'(k)$, $g'(a)$가 존재해야 한다.

$$g'(t)=\begin{cases}12t(t+1)(t-a) & (t<-1)\\ 0 & (-1<t<k)\\ 12t(t+1)(t-a) & (k<t<a)\\ 0 & (t>a)\end{cases}$$ 이므로

ⅰ $t=-1$일 때,

$\lim_{t\to-1+} g'(t)=\lim_{t\to-1+} 0=0$

$\lim_{t\to-1-} g'(t)=\lim_{t\to-1-} 12t(t+1)(t-a)=0$

즉, $\lim_{t\to-1+} g'(t)=\lim_{t\to-1-} g'(t)$이므로 함수 $g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하다.

ⅱ $t=k$일 때,

$\lim_{t\to k+} g'(t)=\lim_{t\to k+} 12t(t+1)(t-a)\neq 0$ ($\because$ $0<k<a$)

$\lim_{t\to k-} g'(t)=\lim_{t\to k-} 0=0$

즉, $\lim_{t\to k+} g'(t)\neq\lim_{t\to k-} g'(t)$이므로 함수 $g(t)$는 $t=k$에서 미분가능하지 않다.

ⅲ $t=a$일 때,

$\lim_{t\to a+} g'(t)=\lim_{t\to a+} 0=0$

$\lim_{t\to a-} g'(t)=\lim_{t\to a-} 12t(t+1)(t-a)=0$

즉, $\lim_{t\to a+} g'(t)=\lim_{t\to a-} g'(t)$이므로 함수 $g(t)$는 $t=a$에서 미분가능하다.

ⅰ, ⅱ, ⅲ에서 함수 $g(t)$는 $t=k$에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

4단계 a의 최댓값 구하기

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(-1)\le f(a)$일 때, 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f(-1)-f(a)\le0$에서

$-2a-1-(-a^4-2a^3)\le0$

$a^4+2a^3-2a-1\le0$, $(a+1)^3(a-1)\le0$

그런데 $a>0$에서 $(a+1)^3>0$이므로 $a-1\le0$

$\therefore$ $0<a\le1$ ($\because$ $a>0$)

따라서 a의 최댓값은 1이다.

02 답 12

1단계 출발 후 10초 동안 A, B가 서로 만난 횟수의 의미 파악하기

A, B가 t초 동안 움직인 거리를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하면

$f(t)=\frac{1}{3}t^3$, $g(t)=\frac{5}{2}t^2+6t$

이때 트랙의 둘레의 길이가 10이고 처음 A, B 사이의 거리가 5이므로 A, B는 $f(t)-g(t)=10n+5$ (n은 정수)일 때 서로 만난다.

$\frac{1}{3}t^3-\left(\frac{5}{2}t^2+6t\right)=10n+5$에서

$\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2-6t-5=10n$ ⋯⋯ ㉠

A, B가 서로 만난 횟수는 t에 대한 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같으므로 출발 후 10초 동안 A, B가 서로 만난 횟수는

$0<t\le10$에서 함수 $y=\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2-6t-5$의 그래프와 직선 $y=10n$이 만나는 점의 개수와 같다.

2단계 출발 후 10초 동안 A, B가 서로 만난 횟수 구하기

$h(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2-6t-5$라 하면

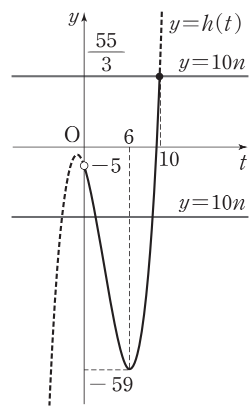
$h'(t)=t^2-5t-6=(t+1)(t-6)$

$h'(t)=0$인 t의 값은 $t=6$ ($\because$ $0<t\le10$)

$0<t\le10$에서 함수 $h(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	⋯	6	⋯	10
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		↘	-59 극소	↗	$\frac{55}{3}$

이때 $h(0)=-5$이므로 $0<t\le10$에서 함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같고, 만나는 점이 생기도록 직선 $y=10n$을 그어 보면



(ⅰ) $10n=-59$일 때,

이를 만족시키는 정수 n은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $-59<10n<-5$일 때,

$-\frac{59}{10}<n<-\frac{1}{2}$

즉, 정수 n은 -5, -4, -3, -2, -1의 5개이다.

이때 정수 n의 값에 따라 만나는 점이 2개씩 존재하므로 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=10n$이 만나는 점의 개수는

$2\times5=10$

(ⅲ) $-5\le10n\le\frac{55}{3}$일 때, $-\frac{1}{2}\le n\le\frac{11}{6}$

즉, 정수 n은 0, 1의 2개이다.

이때 정수 n의 값에 따라 만나는 점이 1개씩 존재하므로 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=10n$이 만나는 점의 개수는

$1\times2=2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=10n$이 만나는 점의 개수는 $10+2=12$

따라서 출발 후 10초 동안 A, B가 서로 만난 횟수는 12이다.

03 답 ③

1단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. $t=2$일 때, $f(x)=x^3-12x$이므로

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

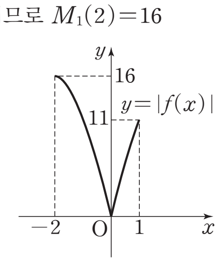
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ ($\because$ $-2\le x\le1$)

닫힌구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	⋯	1
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	16	↘	-11

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 16을 가지므로 $M_1(2)=16$

닫힌구간 $[-2, 1]$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $|f(x)|$는 $x=-2$에서 최댓값 16을 갖는다.



$\therefore$ $M_2(2)=16$

$\therefore$ $g(2)=M_1(2)+M_2(2)$

$=16+16=32$

2단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. $f(x)=x^3-3t^2x$에서

$f'(x)=3x^2-3t^2=3(x+t)(x-t)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-t$ 또는 $x=t$

$t>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-t$	$\cdots$	t	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2t^3$ 극대	$\searrow$	$-2t^3$ 극소	$\nearrow$

이때 극댓값 $2t^3$을 함숫값으로 갖는 x의 값을 구하면

$x^3-3t^2x=2t^3$, $x^3-3t^2x-2t^3=0$

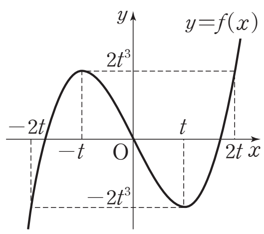
$(x+t)^2(x-2t)=0$ $\therefore x=-t$ 또는 $x=2t$

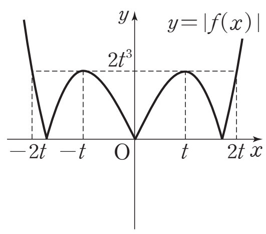
또 극솟값 $-2t^3$을 함숫값으로 갖는 x의 값을 구하면

$x^3-3t^2x=-2t^3$, $x^3-3t^2x+2t^3=0$

$(x+2t)(x-t)^2=0$ $\therefore x=-2t$ 또는 $x=t$

즉, 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.





x축 위에서 $x=1$의 위치에 따라 $x=-2$의 위치를 생각하여 $M_1(t)$, $M_2(t)$를 구하면

(i) $2t<1$, 즉 $0<t<\frac{1}{2}$일 때, $-2<-2t$이고,

$M_1(t)=f(1)$, $M_2(t)=-f(-2)$,

$f(1)>f(-t)$, $-f(-2)>f(-t)$이므로

$g(t)=f(1)-f(-2)\neq 2f(-t)$ …… ㉠

(ii) $t<1\leq 2t$, 즉 $\frac{1}{2}\leq t<1$일 때, $-2<-2t$이고,

$M_1(t)=f(-t)$, $M_2(t)=-f(-2)$,

$-f(-2)>f(-t)$이므로

$g(t)=f(-t)-f(-2)\neq 2f(-t)$ …… ㉡

(iii) $\frac{t}{2}\leq 1\leq t$, 즉 $1\leq t\leq 2$일 때, $-2t\leq -2\leq -t$이고,

$M_1(t)=M_2(t)=f(-t)$이므로

$g(t)=f(-t)+f(-t)=2f(-t)$

(iv) $\frac{t}{2}>1$, 즉 $t>2$일 때, $-t<-2$이고,

$M_1(t)=M_2(t)=f(-2)$, $f(-2)<f(-t)$이므로

$g(t)=f(-2)+f(-2)=2f(-2)\neq 2f(-t)$

(i)~(iv)에서 $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는 t의 값의 범위는 $1\leq t\leq 2$이므로 t의 최댓값과 최솟값의 합은

$2+1=3$

3단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. ㉠, ㉡에서

$$g(t)=\begin{cases} f(1)-f(-2) & \left(0<t<\frac{1}{2}\right) \\ f(-t)-f(-2) & \left(\frac{1}{2}\leq t<1\right)\end{cases}=\begin{cases} -9t^2+9 & \left(0<t<\frac{1}{2}\right) \\ 2t^3-6t^2+8 & \left(\frac{1}{2}\leq t<1\right)\end{cases}$$

$p_1(t)=-9t^2+9$, $p_2(t)=2t^3-6t^2+8$이라 하면

$p_1{}'(t)=-18t$, $p_2{}'(t)=6t^2-12t$

$$\therefore \lim_{h\to 0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}-\lim_{h\to 0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{t\to\frac{1}{2}+}p_2{}'(t)-\lim_{t\to\frac{1}{2}-}p_1{}'(t)=-\frac{9}{2}-(-9)=\frac{9}{2}$$

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

04 답 61

1단계 $f(x)$의 최고차항의 부호 구하기

(가)에서 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 한 근은 중근이다.

이때 중근을 α, 다른 한 근을 β라 하면

$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$ $(k\neq 0,\ \alpha\neq\beta)$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 (나)에서 방정식 $f(x-f(x))=0$의 근은

$x-f(x)=\alpha$ 또는 $x-f(x)=\beta$

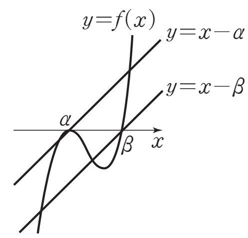
$\therefore f(x)=x-\alpha$ 또는 $f(x)=x-\beta$

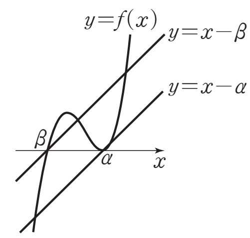
이를 만족시키는 서로 다른 실수 x의 개수가 3이어야 한다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$의 교점의 개수의 합이 3이어야 하므로 한 직선은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 다른 한 직선은 한 점에서 만나야 한다.

이때 두 직선 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$는 기울기가 1이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 두 교점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$을 각각 지나는 직선이다.

$k>0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



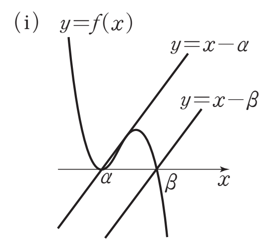


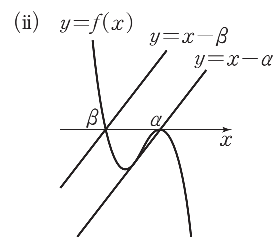
이때 점 $(\beta,\ 0)$을 지나는 직선 $y=x-\beta$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 4 이상이다.

이는 (나)를 만족시키지 않으므로 $k<0$

2단계 방정식 $f(x)=0$의 중근 구하기

$k<0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.





이때 점 $(\beta,\ 0)$을 지나는 직선 $y=x-\beta$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 한 점에서 만나므로 직선 $y=x-\alpha$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

즉, 직선 $y=x-\alpha$는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 접선이어야 한다.

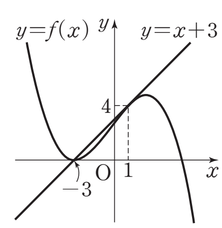
이때 접선 $y=x-\alpha$의 기울기는 1이고 주어진 조건에서 $f(1)=4>0$, $f'(1)=1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 (i)과 같다.

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$y-4=x-1$

$\therefore y=x+3$

$f'(0)>1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+3$은 그림과 같다.



$\therefore \alpha=-3$

3단계 $f(x)$ 구하기

$f(x)=k(x+3)^2(x-\beta)$이므로

$f(1)=4$에서 $16k(1-\beta)=4$ ...... ㉠

$f'(x)=2k(x+3)(x-\beta)+k(x+3)^2$이므로

$f'(1)=1$에서 $8k(1-\beta)+16k=1$ ...... ㉡

㉠에서 $8k(1-\beta)=2$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$2+16k=1,\ 16k=-1 \qquad \therefore\ k=-\frac{1}{16}$

이를 ㉠에 대입하면 $-(1-\beta)=4$

$-1+\beta=4 \qquad \therefore\ \beta=5$

$\therefore\ f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$

4단계 $p+q$의 값 구하기

따라서 $f(0)=\frac{45}{16}$이므로 $p=16,\ q=45$

$\therefore\ p+q=61$

05 답 38

1단계 $y=h(x)$의 그래프의 개형 그리기

이차함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고 $x=-1$에서 최대이므로

$f(x)=a(x+1)^2+b\,(a,\ b$는 상수, $a<0)$라 하자.

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

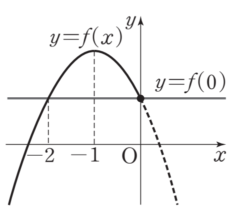
즉, $\lim_{x\to 0+} h(x)=\lim_{x\to 0-} h(x)=h(0)$에서

$g(0)=f(0)=h(0)$

또 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$에서도 미분가능하다.

즉, 미분계수 $h'(0)$이 존재하고, $h'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x<0) \\ g'(x) & (x>0) \end{cases}$이므로

$f'(0)=g'(0)$ ...... ㉠



㈎에서 방정식 $h(x)=h(0)$의 실근은 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=h(0)$, 즉 직선 $y=f(0)$이 만나는 점의 x좌표와 같다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이므로 $x\le 0$에서 방정식 $f(x)=f(0)$의 실근은

$x=-2$ 또는 $x=0$

즉, $x\le 0$에서 방정식 $f(x)=f(0)$의 실근의 합은 -2이므로 ㈎를 만족시키려면 $x>0$에서 방정식 $g(x)=f(0)$의 실근의 합이 3이어야 한다.

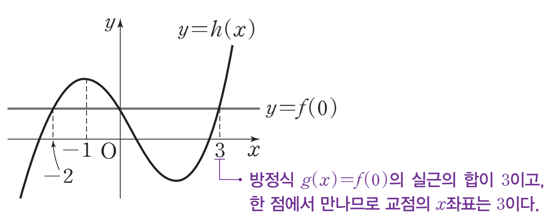
한편 $f'(x)=2a(x+1)$이므로

$f'(0)=2a<0$

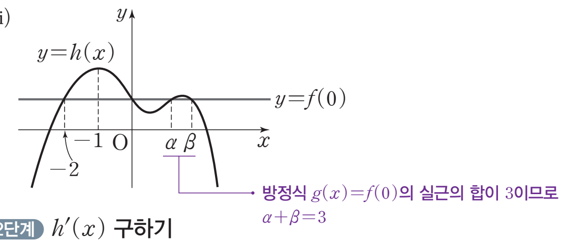
㉠에서 $g'(0)<0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 $x=0$인 점에서의 접선의 기울기는 음수이다.

따라서 삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수의 부호에 따라 경우를 나누어 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형을 그리면 그림과 같다.

(i)



(ii)



2단계 $h'(x)$ 구하기

(i) 함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우

$g(x)-f(0)=cx(x-3)(x+d)\,(c,\ d$는 상수, $c>0,\ d>0)$라 하면

$g(x)=cx^3+c(d-3)x^2-3cdx+f(0)$

이때 함수 $g(x)$의 이차항의 계수가 0이므로

$c(d-3)=0 \qquad \therefore\ d=3\ (\because\ c>0)$

즉, $g(x)=cx^3-9cx+f(0)$이므로

$g'(x)=3cx^2-9c=3c(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$g'(x)=0$인 x의 값은 $x=\sqrt{3}\ (\because\ x>0)$

$x>0$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=\sqrt{3}$에서 최소이므로 최솟값은

$g(\sqrt{3})=3\sqrt{3}c-9\sqrt{3}c+f(0)$

$\qquad =-6\sqrt{3}c+f(0)$

한편 $x\le 0$에서 함수 $f(x)=a(x+1)^2+b$의 최댓값은 b이고,

$f(0)=a+b$이므로

$b=f(0)-a$

㈏에서 최댓값과 최솟값의 차가 $3+4\sqrt{3}$이므로

$\{f(0)-a\}-\{-6\sqrt{3}c+f(0)\}=3+4\sqrt{3}$

$\therefore\ -a+6\sqrt{3}c=3+4\sqrt{3}$ ...... ㉡

㉠에서 $f'(0)=g'(0)$이므로

$2a=-9c \qquad \therefore\ a=-\frac{9}{2}c$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-3,\ c=\frac{2}{3}$

$\therefore\ f'(x)=-6(x+1),\ g'(x)=2x^2-6$

(ii) 함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우

$g(x)-f(0)=cx(x-\alpha)(x-\beta)\,(c,\ \alpha,\ \beta$는 상수, $c<0,\ \alpha+\beta=3)$라 하면

$g(x)=cx^3-c(\alpha+\beta)x^2+c\alpha\beta x+f(0)$

$\qquad =cx^3-3cx^2+c\alpha\beta x+f(0)$

이때 $c<0$에서 함수 $g(x)$의 이차항의 계수는 0이 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $h'(x)=\begin{cases} -6(x+1) & (x<0) \\ 2x^2-6 & (x>0) \end{cases}$

3단계 $h'(-3)+h'(4)$의 값 구하기

$\therefore\ h'(-3)+h'(4)=12+26=38$

06 답 296

1단계 주어진 부등식 정리하기

삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c\,(a,\ b,\ c$는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

0이 아닌 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{f(2x)-f(0)}{2x}=\frac{(8x^3+4ax^2+2bx+c)-c}{2x}$$
$$=4x^2+2ax+b$$

즉, 주어진 부등식은

$$\frac{3x^2+2ax+b}{2}+x^2-2\le 4x^2+2ax+b\le x^4$$

각 변에 2를 곱하면

$5x^2+2ax+b-4\le 8x^2+4ax+2b\le 2x^4$

$5x^2+2ax+b-4\le 8x^2+4ax+2b$에서

$-3x^2-4\le 2ax+b$

$8x^2+4ax+2b\le 2x^4$에서

$4ax+2b\le 2x^4-8x^2$ $\therefore$ $2ax+b\le x^4-4x^2$

$\therefore$ $-3x^2-4\le 2ax+b\le x^4-4x^2$ …… ㉠

2단계 $f'(x)$ **구하기**

이때 $g(x)=-3x^2-4$, $h(x)=x^4-4x^2$이라 하면 곡선 $y=g(x)$는 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ -4)$인 위로 볼록한 포물선이다.

또 $h(x)=x^4-4x^2$에서

$h'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	$-\sqrt{2}$	…	0	…	$\sqrt{2}$	…
$h'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$h(x)$	↘	-4 극소	↗	0 극대	↘	-4 극소	↗

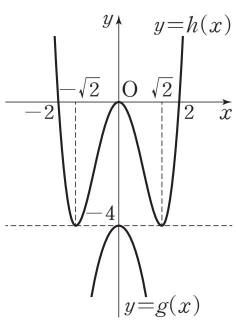
두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 부등식 ㉠에서

$g(x)\le 2ax+b\le h(x)$를 만족시키려면

직선 $y=2ax+b$가 $y=-4$이어야 한다.

따라서 $a=0$, $b=-4$이므로

$f'(x)=3x^2-4$



3단계 $f'(10)$**의 값 구하기**

$\therefore$ $f'(10)=300-4=296$

idea

07 답 16

1단계 $f(x)$ **구하기**

(나)에서 $x=0$을 대입하면 $f(2)\ne 0$이면 $\{f(2)\}^2<0$이다.

그런데 $f(2)$는 실수이므로 $\{f(2)\}^2\ge 0$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore$ $f(2)=0$

또 (나)에서 $x=-4$를 대입하면 $f(-2)\ne 0$이면 $f(-2)f(6)<0$이다.

그런데 (가)에서 $f(6)=0$이므로

$f(-2)f(6)=0$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore$ $f(-2)=0$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x+2)(x-2)(x-6)$

2단계 **주어진 부등식 정리하기**

부등식 $\{f(x)\}^2\le k(x+2)^2$에서

$(x+2)^2(x-2)^2(x-6)^2\le k(x+2)^2$ …… ㉠

이때 $2\le x\le 6$에서 $(x+2)^2>0$이므로 부등식 ㉠의 양변을 $(x+2)^2$으로 나누면

$(x-2)^2(x-6)^2\le k$ $\therefore$ $(x-2)^2(x-6)^2-k\le 0$

3단계 k**의 최솟값 구하기**

$g(x)=(x-2)^2(x-6)^2-k$라 하면

$g'(x)=2(x-2)(x-6)^2+(x-2)^2\times 2(x-6)$

$\quad=4(x-2)(x-4)(x-6)$

$g'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=6$

$2\le x\le 6$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	2	…	4	…	6
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	$-k$	↗	$16-k$ 극대	↘	$-k$

$2\le x\le 6$에서 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 최댓값 $16-k$를 가지므로 부등식 $g(x)\le 0$이 성립하려면

$16-k\le 0$ $\therefore$ $k\ge 16$

따라서 상수 k의 최솟값은 16이다.

08 답 7

1단계 $|f(x_1)|\le g(x_2)$**가 성립하는 의미 파악하기**

닫힌구간 $[-1,\ 1]$에 속하는 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $|f(x_1)|\le g(x_2)$이려면 $-1\le x\le 1$에서 (함수 $|f(x)|$의 최댓값)$\le$(함수 $g(x)$의 최솟값)이어야 한다.

2단계 $|f(x)|$**의 최댓값 구하기**

$f(x)=4x^3-3x^2-6x+t$에서

$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	…	$-\frac{1}{2}$	…	1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$t-1$	↗	$t+\frac{7}{4}$ 극대	↘	$t-5$

$-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 최댓값 $t+\frac{7}{4}$을 갖고,

$x=1$에서 최솟값 $t-5$를 갖는다.

따라서 t의 값에 관계없이 함수 $|f(x)|$의 최댓값은

$|f(1)|$ 또는 $\left|f\left(-\frac{1}{2}\right)\right|$이다.

이때 $t+\frac{7}{4}=-(t-5)$에서 $t=\frac{13}{8}$

즉, $t=\frac{13}{8}$일 때 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f(1)$이므로 $-1\le x\le 1$에서 함수

$|f(x)|$의 최댓값은 $t<\frac{13}{8}$일 때 $|f(1)|=|t-5|=5-t$이고,

$t\ge\frac{13}{8}$일 때 $\left|f\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\left|t+\frac{7}{4}\right|=t+\frac{7}{4}$이다.

3단계 $g(x)$**의 최솟값 구하기**

$g(x)=3x^4+2x^3-3x^2+s$에서

$g'(x)=12x^3+6x^2-6x=6x(x+1)(2x-1)$

$g'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

$-1\le x\le 1$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$s-2$	$\nearrow$	s 극대	$\searrow$	$s-\frac{5}{16}$ 극소	$\nearrow$	$s+2$

따라서 $-1\le x\le 1$에서 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $s-2$를 갖는다.

4단계 $\alpha+\beta$의 값 구하기

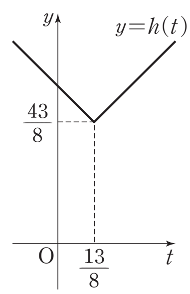
$-1\le x\le 1$에서 (함수 $|f(x)|$의 최댓값)$\le$(함수 $g(x)$의 최솟값)이 성립하는 s의 값의 범위는

$t<\frac{13}{8}$일 때, $5-t\le s-2$에서 $s\ge 7-t$

$t\ge\frac{13}{8}$일 때, $t+\frac{7}{4}\le s-2$에서 $s\ge t+\frac{15}{4}$

$$\therefore\ h(t)=\begin{cases}7-t & \left(t<\frac{13}{8}\right)\\ t+\frac{15}{4} & \left(t\ge\frac{13}{8}\right)\end{cases}$$

함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $h(t)$는 $t=\frac{13}{8}$에서 최솟값 $\frac{43}{8}$을 갖는다.



따라서 $\alpha=\frac{13}{8}$, $\beta=\frac{43}{8}$이므로

$\alpha+\beta=7$

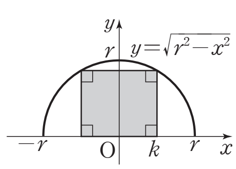
09 답 216

1단계 V 구하기

반구의 반지름의 길이가 매초 1씩 늘어나므로 t초 후의 반구의 반지름의 길이를 r라 하면

$r=1+t$ $\cdots\cdots$ ㉠

반구를 정면에서 봤을 때의 반원의 중심을 원점으로 하여 좌표평면 위에 나타내면 그림과 같으므로



$y=\sqrt{r^2-x^2}\ (y\ge 0)$

또 이 반원에 내접하는 직사각형을 그리고, x축 위에 있는 직사각형의 한 꼭짓점의 좌표를 $(k,\ 0)\ (0<k<r)$이라 하면 직사각형의 높이는 $\sqrt{r^2-k^2}$

즉, 원기둥의 부피 V는

$V=\pi k^2\sqrt{r^2-k^2}=\pi\sqrt{k^4(r^2-k^2)}\ (0<k<r)$

2단계 V가 최대가 되도록 하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이 구하기

$f(k)=k^4(r^2-k^2)$이라 하면

$f'(k)=4k^3(r^2-k^2)-2k^5=-2k^3(3k^2-2r^2)$

$f'(k)=0$인 k의 값은 $k=\sqrt{\frac{2}{3}}r\ (\because\ 0<k<r)$

$0<k<r$에서 함수 $f(k)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2}{3}}r$	$\cdots$	r
$f'(k)$		$+$	0	$-$	
$f(k)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

$0<k<r$에서 함수 $f(k)$는 $k=\sqrt{\frac{2}{3}}r$일 때 최댓값을 가지므로 V도 $k=\sqrt{\frac{2}{3}}r$일 때 최대가 된다.

3단계 시각에 대한 V^2의 변화율 구하기

이때 ㉠에서 $k=\sqrt{\frac{2}{3}}r=\sqrt{\frac{2}{3}}(1+t)$이므로

$$\begin{aligned}V^2&=\pi^2k^4(r^2-k^2)\\&=\pi^2\times\frac{4}{9}(1+t)^4\left\{(1+t)^2-\frac{2}{3}(1+t)^2\right\}\\&=\frac{4}{27}(1+t)^6\pi^2\end{aligned}$$

시각 t에 대한 V^2의 변화율은

$\frac{dV^2}{dt}=\frac{8}{9}(1+t)^5\pi^2$

4단계 a의 값 구하기

한편 ㉠에서 반구의 반지름의 길이가 3이 될 때의 시각 t는

$1+t=3$ $\quad\therefore\ t=2$

따라서 $t=2$일 때, V^2의 변화율은

$\frac{8}{9}\times 3^5\pi^2=216\pi^2$ $\quad\therefore\ a=216$

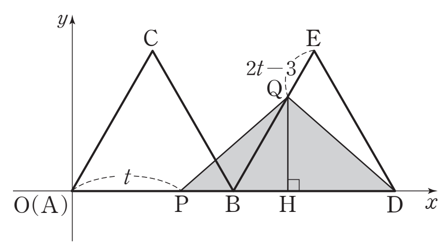
10 답 ①

1단계 a의 값 구하기

두 정삼각형 ABC, BDE를 점 A를 원점, 직선 AD를 x축, 점 A를 지나고 직선 AD에 수직인 직선을 y축으로 하여 좌표평면 위에 나타내자.

시각 t(초)에 대하여

(i) $\frac{3}{2}<t<3$일 때,



$\overline{AP}=t$이므로

$\overline{PD}=6-t$

또 $\overline{EQ}=2t-3$이므로

$\overline{BQ}=3-(2t-3)=6-2t$

이때 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned}\overline{QH}&=\overline{BQ}\sin 60^\circ\\&=(6-2t)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}(3-t)\end{aligned}$$

삼각형 PDQ의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\times\overline{PD}\times\overline{QH}\\&=\frac{1}{2}\times(6-t)\times\sqrt{3}(3-t)\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-9t+18)\end{aligned}$$

시각 t에 대한 넓이 S의 변화율은

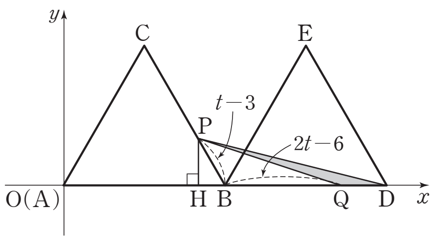
$\frac{dS}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{2}(2t-9)$

따라서 $t=2$일 때, 삼각형 PDQ의 넓이의 변화율 a는

$a=-\frac{5\sqrt{3}}{2}$

2단계 b의 값 구하기

(ii) $3<t<\frac{9}{2}$일 때,



$\overline{PB}=t-3$이므로 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PH}=\overline{PB}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)$

또 $\overline{BQ}=2t-6$이므로

$\overline{QD}=3-(2t-6)=9-2t$

삼각형 PDQ의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{QD}\times\overline{PH}$

$=\frac{1}{2}\times(9-2t)\times\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(-2t^2+15t-27)$

시각 t에 대한 넓이 S의 변화율은

$\frac{dS}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{4}(-4t+15)$

따라서 $t=4$일 때, 삼각형 PDQ의 넓이의 변화율 b는

$b=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

3단계 $(2b-a)^2$의 값 구하기

$\therefore (2b-a)^2=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2=12$

기출 변형 문제로 단원 마스터

| 74~77쪽

01 -3	02 ⑤	03 ③	04 ⑤	05 14	06 ②
07 3	08 ②	09 ④	10 ⑤	11 34	12 27

01 답 -3

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 a이고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=2$이므로

$f(x)=a(x-2)^2+b$ (b는 상수)라 하면

$f'(x)=2a(x-2)=2ax-4a$

$|f'(x)|\le x^2+21$에서 $|2ax-4a|\le x^2+21$

$-x^2-21\le 2ax-4a\le x^2+21$

(i) $-x^2-21\le 2ax-4a$에서 $x^2+2ax-4a+21\ge 0$

모든 실수 x에 대하여 이 부등식이 성립하려면 이차방정식 $x^2+2ax-4a+21=0$의 판별식을 D_1이라 할 때,

$\frac{D_1}{4}=a^2-(-4a+21)\le 0$

$a^2+4a-21\le 0$, $(a+7)(a-3)\le 0$

$\therefore -7\le a\le 3$

(ii) $2ax-4a\le x^2+21$에서 $x^2-2ax+4a+21\ge 0$

모든 실수 x에 대하여 이 부등식이 성립하려면 이차방정식 $x^2-2ax+4a+21=0$의 판별식을 D_2라 할 때,

$\frac{D_2}{4}=a^2-(4a+21)\le 0$

$a^2-4a-21\le 0$, $(a+3)(a-7)\le 0$

$\therefore -3\le a\le 7$

(i), (ii)에서 $-3\le a\le 3$

그런데 $a\ne 0$이므로

$-3\le a<0$ 또는 $0<a\le 3$

따라서 a의 최솟값은 -3이다.

02 답 ⑤

$f(1)<2$에서

$2-a+b<2 \quad \therefore a>b$ …… ㉠

$f(-1)-f(1)<-16$에서

$(-2-a-b)-(2-a+b)<-16$

$-4-2b<-16$, $2b>12$

$\therefore b>6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a>b>6$ …… ㉢

ㄱ. $f(x)=2x^3-ax^2+bx$에서

$f'(x)=6x^2-2ax+b$

방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-6b$

이때 ㉢에 의하여

$a^2-6b>b^2-6b=b(b-6)>0$

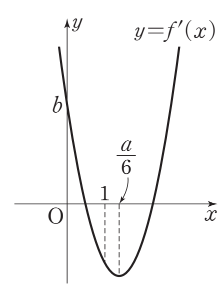
즉, $D_1>0$이므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $f'(x)=6x^2-2ax+b=6\left(x-\frac{a}{6}\right)^2-\frac{a^2}{6}+b$이므로 함수 $f'(x)$는

$x=\frac{a}{6}$에서 최소이고, ㉢에 의하여 $\frac{a}{6}>1$

$f'(0)=b>6$이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

따라서 $-1<x<0$에서 $f'(x)>0$이다.



ㄷ. 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$에서

$2x^3-ax^2+bx-(6k^2-2ak+b)x=0$

$x(2x^2-ax-6k^2+2ak)=0$ …… ㉣

따라서 삼차방정식 ㉣의 한 근이 0이므로 삼차방정식 ㉣의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 이차방정식 $2x^2-ax-6k^2+2ak=0$이 0이 아닌 중근을 갖거나 0과 0이 아닌 한 실근을 가져야 한다.

(i) 방정식 $2x^2-ax-6k^2+2ak=0$이 0이 아닌 중근을 갖는 경우

방정식 $2x^2-ax-6k^2+2ak=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=a^2-8(-6k^2+2ak)=0$

$48k^2-16ak+a^2=0$, $(12k-a)(4k-a)=0$

$\therefore k=\frac{a}{12}$ 또는 $k=\frac{a}{4}$

㉣에 k의 값을 대입하면 $2x\left(x-\frac{a}{4}\right)^2=0$이고, $a\ne 0$이므로 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

(ii) 방정식 $2x^2-ax-6k^2+2ak=0$이 0과 0이 아닌 한 실근을 갖는 경우

방정식 $2x^2-ax-6k^2+2ak=0$의 한 근이 0이므로

$-6k^2+2ak=0$, $2k(3k-a)=0$

$\therefore$ $k=0$ 또는 $k=\dfrac{a}{3}$

ⓡ에 k의 값을 대입하면 $x^2(2x-a)=0$이고, $a\neq0$이므로 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

(i), (ii)에서 양수 k의 개수는 3이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

03 답 ③

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to0+}g(x)=\lim\limits_{x\to0-}g(x)=g(0)$에서

$\lim\limits_{x\to0+}\{|f(x)|-|3x^2-3|\}=\lim\limits_{x\to0-}\{-f(x)\}=|f(0)|-3$

$|f(0)|-3=-f(0)$

이때 $f(0)$의 값이 음수이면 $-f(0)-3=-f(0)$, 즉 $0=3$이 되므로 $f(0)$의 값은 음수가 아니다.

즉, $f(0)-3=-f(0)$이므로

$2f(0)=3$ $\quad\therefore$ $f(0)=\dfrac{3}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\therefore$ $g(0)=|f(0)|-3=-\dfrac{3}{2}$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$에서도 미분가능하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|f(0+h)|-|3(0+h)^2-3|+\frac{3}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{|f(0+h)|+3h^2-3+\frac{3}{2}}{h}$$

$h\to0+$일 때, $3h^2-3<0$이므로 $|3h^2-3|=-3h^2+3$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{|f(0+h)|-\frac{3}{2}}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{3h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{|f(0+h)|-f(0)}{h}+0$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$f(0)>0$이므로 충분히 작은 양수 h에 대하여 $f(0+h)>0$이다.

$$=f'(0)$$

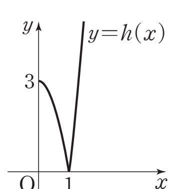
$$\lim_{h\to0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-f(0+h)+\frac{3}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{-f(0+h)+f(0)}{h}$$

$$=-f'(0)$$

즉, $f'(0)=-f'(0)$이므로 $f'(0)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$h(x)=|3x^2-3|$이라 하면 함수 $y=h(x)\,(x\geq0)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $h(1)=0$이고, 함수 $h(x)$의 $x=1$에서의 우미분계수는 6, 좌미분계수는 -6이므로

$\lim\limits_{h\to1+}(3x^2-3)'=\lim\limits_{h\to1+}6x=6$, $\lim\limits_{h\to1-}(-3x^2+3)'=\lim\limits_{h\to1-}(-6x)=-6$

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

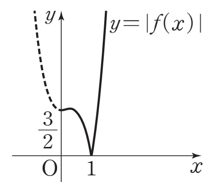
그런데 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$에서도 미분가능해야 한다.

$x\geq0$에서 $g(x)$는 두 함수 $|f(x)|$, $h(x)$의 차로 이루어진 함수이므로 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면

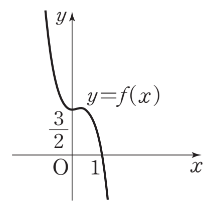
$f(1)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

이어야 하고, 함수 $|f(x)|$의 $x=1$에서의 우미분계수도 6, 좌미분계수도 -6이어야 한다.

또 $x\geq0$에서 함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서만 미분가능하지 않아야 하므로 $y=|f(x)|\,(x\geq0)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고,



$f'(1)=-6$이다. $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉠, ㉡에서

$f(0)=\dfrac{3}{2}$, $f'(0)=0$이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+\dfrac{3}{2}$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

㉢에서 $f(1)=0$이므로

$a+b+\dfrac{3}{2}=0$ $\quad\therefore$ $a+b=-\dfrac{3}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉤

$f(x)=ax^3+bx^2+\dfrac{3}{2}$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx$

㉣에서 $f'(1)=-6$이므로

$3a+2b=-6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=\dfrac{3}{2}$

따라서 $f(x)=-3x^3+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}$이므로

$4f(-2)=4\times\left(24+6+\dfrac{3}{2}\right)=126$

04 답 ⑤

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=2$에서도 연속이므로

$\lim\limits_{x\to2+}p(x)f(x)=\lim\limits_{x\to2-}p(x)f(x)=p(2)f(2)$에서

$\lim\limits_{x\to2+}p(x)f(x)=\lim\limits_{x\to2+}(2x-5)p(x)=-p(2)$

$\lim\limits_{x\to2-}p(x)f(x)=\lim\limits_{x\to2-}(-x+2)p(x)=0$

즉, $-p(2)=0$이므로

$p(2)=0$

ㄴ. 함수 $\{p(x)\}^2f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=3$에서도 미분가능하므로

$$\lim_{x\to3+}\frac{\{p(x)\}^2f(x)-\{p(3)\}^2f(3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3+}\frac{(-2x+7)\{p(x)\}^2-\{p(3)\}^2}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3+}\frac{(-2x+7)\{p(x)\}^2-\{p(x)\}^2+\{p(x)\}^2-\{p(3)\}^2}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3+}\left[\frac{-2(x-3)\{p(x)\}^2}{x-3}+\frac{\{p(x)-p(3)\}\{p(x)+p(3)\}}{x-3}\right]$$

$$=\lim_{x\to3+}\left[-2\{p(x)\}^2+\frac{p(x)-p(3)}{x-3}\times\{p(x)+p(3)\}\right]$$

$$=-2\{p(3)\}^2+2p'(3)p(3)$$

$$\lim_{x\to3-}\frac{\{p(x)\}^2f(x)-\{p(3)\}^2f(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}\frac{(2x-5)\{p(x)\}^2-\{p(3)\}^2}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}\frac{(2x-5)\{p(x)\}^2-\{p(x)\}^2+\{p(x)\}^2-\{p(3)\}^2}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}\left[\frac{2(x-3)\{p(x)\}^2}{x-3}+\frac{\{p(x)-p(3)\}\{p(x)+p(3)\}}{x-3}\right]$$
$$=\lim_{x\to3-}\left[2\{p(x)\}^2+\frac{p(x)-p(3)}{x-3}\times\{p(x)+p(3)\}\right]$$
$$=2\{p(3)\}^2+2p'(3)p(3)$$

즉, $-2\{p(3)\}^2+2p'(3)p(3)=2\{p(3)\}^2+2p'(3)p(3)$이므로

$4\{p(3)\}^2=0\quad\therefore p(3)=0$

ㄷ. $p(x)=(x-2)^2(x-3)g(x)$ ($g(x)$는 다항식)라 하고,

$h(x)=p(x)\{f(x)\}^2$이라 하면

$$h(x)=\begin{cases}(x-2)^4(x-3)g(x) & (x\le2)\\(x-2)^2(x-3)(2x-5)^2g(x) & (2<x\le3)\\(x-2)^2(x-3)(2x-7)^2g(x) & (x>3)\end{cases}$$

함수 $h(x)$는 $x\neq2$, $x\neq3$인 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=2$, $x=3$일 때의 미분가능성을 확인해 보자.

(i) $x=2$일 때,

$$\lim_{x\to2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)^2(x-3)(2x-5)^2g(x)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\{(x-2)(x-3)(2x-5)^2g(x)\}=0$$
$$\lim_{x\to2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{(x-2)^4(x-3)g(x)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\{(x-2)^3(x-3)g(x)\}=0$$

즉, $\lim_{x\to2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}$이므로 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

(ii) $x=3$일 때,

$$\lim_{x\to3+}\frac{h(x)-h(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{(x-2)^2(x-3)(2x-7)^2g(x)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}\{(x-2)^2(2x-7)^2g(x)\}=g(3)$$
$$\lim_{x\to3-}\frac{h(x)-h(3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}\frac{(x-2)^2(x-3)(2x-5)^2g(x)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}\{(x-2)^2(2x-5)^2g(x)\}=g(3)$$

즉, $\lim_{x\to3+}\frac{h(x)-h(3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}\frac{h(x)-h(3)}{x-3}$이므로 함수 $h(x)$는 $x=3$에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $h(x)=p(x)\{f(x)\}^2$은 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

05 답 14

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극솟값을 가지면 $g'(3)=0$이므로 $g(x)$는 $(x-3)^2$을 인수로 갖는다.

이때 삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 2이고,

$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-3)^2(x-5)^2$이므로

$g(x)=2(x-1)(x-3)^2$ 또는 $g(x)=2(x-3)^2(x-5)$

(i) $g(x)=2(x-1)(x-3)^2$일 때,

$g'(x)=2(x-3)^2+2(x-1)\times2(x-3)$

$\quad=2(3x-5)(x-3)$

$g'(x)=0$인 x의 값은 $x=\frac{5}{3}$ 또는 $x=3$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극솟값을 가지므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $g(x)=2(x-3)^2(x-5)$일 때,

$g'(x)=4(x-3)(x-5)+2(x-3)^2$

$\quad=2(x-3)(3x-13)$

$g'(x)=0$인 x의 값은 $x=3$ 또는 $x=\frac{13}{3}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	$\frac{13}{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 가지므로 $x=3$에서 극솟값을 갖는다는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $g(x)=2(x-1)(x-3)^2$

이때 $f(x)g(x)=(x-1)^2(x-3)^2(x-5)^2$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-5)^2$

따라서 $f'(x)=\frac{1}{2}(x-5)^2+(x-1)(x-5)$이므로

$f'(7)=\frac{1}{2}\times4+6\times2=14$

06 답 ②

함수 $g(x)=|(x-a)f(x)|$에 대하여 $g(a)=0$이고, 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로 $x=a$에서의 미분계수가 존재한다.

함수 $g(x)$는 $x=2$에서만 미분가능하지 않다.

즉, $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$이므로

$\lim_{x\to a+}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a}$에서

$\lim_{x\to a+}\frac{(x-a)|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{-(x-a)|f(x)|}{x-a}$

$\lim_{x\to a+}|f(x)|=-\lim_{x\to a-}|f(x)|$

$|f(a)|=-|f(a)|$, $2|f(a)|=0\qquad\therefore f(a)=0$

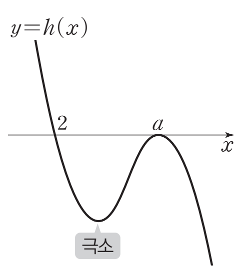
이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1이고, 함수 $g(x)$가 $x=2$에서만 미분가능하지 않으므로

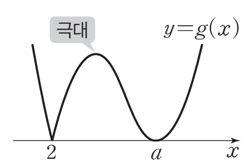
$f(x)=-(x-2)(x-a)$

한편 $h(x)=(x-a)f(x)$라 하면

$h(x)=-(x-2)(x-a)^2$, $g(x)=|-(x-2)(x-a)^2|$

따라서 두 함수 $y=h(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.





Ⅱ. 미분

이때 함수 $g(x)$의 극댓값이 108이므로 함수 $h(x)$의 극솟값은 -108이다.

$h(x)=-(x-2)(x-a)^2$에서

$$h'(x)=-(x-a)^2-(x-2)\times 2(x-a)$$
$$=-(x-a)(3x-a-4)$$

$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=a$ 또는 $x=\frac{a+4}{3}$

즉, 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극대이고, $x=\frac{a+4}{3}$에서 극소이다.

이때 함수 $h(x)$의 극솟값이 -108이므로

$h\left(\frac{a+4}{3}\right)=-108$에서

$$-\left(\frac{a+4}{3}-2\right)\left(\frac{a+4}{3}-a\right)^2=-108$$

$$\frac{1}{3}(a-2)\times\left\{-\frac{2}{3}(a-2)\right\}^2=108$$

$(a-2)^3=729$, $a-2=9$ ($\because$ a는 실수)　　$\therefore$ $a=11$

따라서 $f(x)=-(x-2)(x-11)$이므로

$f(4)=-2\times(-7)=14$

07 답 3

주어진 조건을 만족시키려면 두 점 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$를 지나는 직선과 두 점 $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$을 지나는 직선의 기울기의 부호가 다른 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $(k, k+3)$에 존재해야 한다.

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값이 열린구간 $(k, k+3)$에 존재해야 한다.

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\alpha)$, $\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}=f'(\beta)$라 할 때, $f'(\alpha)\times f'(\beta)<0$이 성립하려면 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 x의 값이 열린구간 $(k, k+3)$에 존재해야 한다.

$f(x)=x^3-4ax^2+10$에서

$f'(x)=3x^2-8ax=x(3x-8a)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=\frac{8}{3}a$

함수 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=\frac{8}{3}a$에서 극값을 갖는다.

따라서 $x=0$ 또는 $x=\frac{8}{3}a$가 열린구간 $(k, k+3)$에 존재하도록 하는 정수 k의 값을 구하면 다음과 같다.

$x=0$이 열린구간 $(k, k+3)$에 존재하려면

$k<0<k+3$, 즉 $-3<k<0$이므로

$k=-2$, $k=-1$ ($\because$ k는 정수)

$x=\frac{8}{3}a$가 열린구간 $(k, k+3)$에 존재하려면

$k<\frac{8}{3}a<k+3$, 즉 $\frac{8}{3}a-3<k<\frac{8}{3}a$　　⋯⋯ ㉠

이때 부등식 ㉠을 만족시키는 정수 k의 개수는 2 또는 3이고, $k=-2$, $k=-1$을 포함하여 모든 정수 k의 값의 곱이 120이므로 부등식 ㉠을 만족시키는 정수 k의 값은 곱이 60이 되는 연속한 정수이어야 한다.

그런데 연속한 두 정수의 곱이 60이 되는 경우는 없으므로 연속한 세 정수의 곱이 60이어야 한다.

따라서 $k=3$, $k=4$, $k=5$이어야 하므로

㉠에서 $2\le\frac{8}{3}a-3<3$, $5<\frac{8}{3}a\le 6$　　$\therefore$ $\frac{15}{8}<a<\frac{9}{4}$

이때 a는 정수이므로 $a=2$

즉, $f(x)=x^3-8x^2+10$이므로

$f(1)=1-8+10=3$

08 답 ②

$h(1)=0$에서

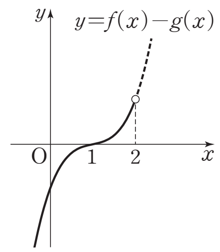
$|f(1)-g(1)|=0$

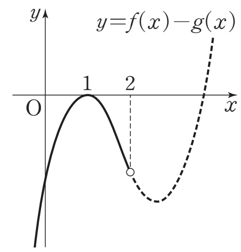
$\therefore$ $f(1)-g(1)=0$　　⋯⋯ ㉠

즉, 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프는 점 $(1, 0)$을 지난다.

이때 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x<2$에서 함수 $|f(x)-g(x)|$가 미분가능하다.

즉, $x<2$에서 함수 $y=|f(x)-g(x)|$의 그래프에 꺾인 점이 없어야 하므로 삼차함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.





$\therefore$ $f'(1)-g'(1)=0$　　⋯⋯ ㉡

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=2$에서도 미분가능하다.

즉, 미분계수 $h'(2)$가 존재하므로

$\lim_{x\to 2+}h'(x)=\lim_{x\to 2-}h'(x)$　　⋯⋯ ㉢

$x\to 2-$일 때, $f(x)\ge g(x)$라 가정하면

$|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$

㉢에서 $\lim_{x\to 2+}\{f'(x)+g'(x)\}=\lim_{x\to 2-}\{f'(x)-g'(x)\}$

$f'(2)+g'(2)=f'(2)-g'(2)$

$\therefore$ $g'(2)=0$

이는 $g(x)$가 일차함수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$g(x)=px+q$ (p, q는 상수)라 하면 $g'(x)=p$이므로 $g'(2)=p=0$에서 $g(x)$는 상수함수이다.

따라서 $x\to 2-$일 때, $f(x)<g(x)$이므로

$|f(x)-g(x)|=g(x)-f(x)$

㉢에서 $\lim_{x\to 2+}\{f'(x)+g'(x)\}=\lim_{x\to 2-}\{g'(x)-f'(x)\}$

$f'(2)+g'(2)=g'(2)-f'(2)$

$\therefore$ $f'(2)=0$

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2+}h(x)=\lim_{x\to 2-}h(x)=h(2)$에서

$\lim_{x\to 2+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 2-}\{g(x)-f(x)\}=f(2)+g(2)$

$f(2)+g(2)=g(2)-f(2)$

$\therefore$ $f(2)=0$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이고, $f(2)=0$, $f'(2)=0$이므로

$f(x)=2(x-2)^2(x+a)$ (a는 상수)라 하고, $g(x)$는 일차함수이므로

$g(x)=px+q$ (p, q는 상수, $p\ne 0$)라 하면

$f'(x)=4(x-2)(x+a)+2(x-2)^2$, $g'(x)=p$

㉠에서 $2(1+a)-(p+q)=0$

$\therefore$ $q=2+2a-p$　　⋯⋯ ㉣

㉡에서 $-4(1+a)+2-p=0$

$\therefore$ $p=-4a-2$　　⋯⋯ ㉤

㉤을 ㉣에 대입하면

$q=6a+4$　　⋯⋯ ㉥

$h(3)=10$에서 $f(3)+g(3)=10$

$2(3+a)+3p+q=10$

㉤, ㉥을 대입하면

$6+2a-12a-6+6a+4=10$

$-4a=6 \qquad \therefore\ a=-\dfrac{3}{2}$

이를 ㉤, ㉥에 각각 대입하면 $p=4$, $q=-5$

$\therefore\ f(x)=2(x-2)^2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$, $g(x)=4x-5$

$\therefore\ h(5)=f(5)+g(5)=63+15=78$

09 답 ④

$0<x\le5$에서 $g(x)=x(x-5)^2$이고, $5<x\le6$에서 $g(x)=52(x-5)^2$이므로 함수 $g(x)$는 $x=5$에서 연속이다.

또 함수 $g(x)$가 $x>0$에서 연속이면 $x=6$에서도 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to6+} g(x)=\lim\limits_{x\to6-} g(x)$이므로

$\lim\limits_{x\to6+} f(x)=\lim\limits_{x\to6-} 13(2x-10)^2=52$

$\therefore\ f(6)=52$

㈎에서 $f(x)=a(x-8)^2+b$ (a, b는 상수, $a\ne0$)라 하면

$f(6)=52$이므로 $4a+b=52$

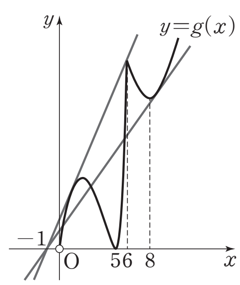
$\therefore\ b=52-4a$

$\therefore\ f(x)=a(x-8)^2+52-4a$

(i) $a>0$일 때,

함수 $f(x)$가 $x=8$에서 극솟값을 가지므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

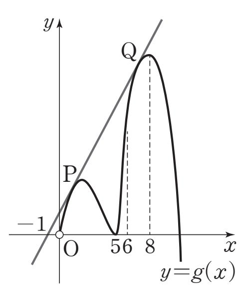
이때 점 $(-1,\ 0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 기울기가 0이 아닌 접선의 개수가 2이므로 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $a<0$일 때,

함수 $f(x)$는 $x=8$에서 극댓값을 가지므로 그림과 같이 조건을 만족시키는 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형이 존재한다.

즉, 점 $(-1,\ 0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 기울기가 0이 아닌 접선은 곡선 $y=g(x)$ 위의 두 점 P, Q에서 각각 접한다.



두 점 P, Q의 x좌표를 각각 t, s($0<t<5$, $s>6$)라 하면

점 $\mathrm{P}(t,\ t^3-10t^2+25t)$에서의 접선의 기울기는

$g'(t)=3t^2-20t+25$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-10t^2+25t)=(3t^2-20t+25)(x-t)$

이 직선이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$-(t^3-10t^2+25t)=(3t^2-20t+25)(-1-t)$

$2t^3-7t^2-20t+25=0$, $(2t+5)(t-1)(t-5)=0$

$\therefore\ t=1\ (\because\ 0<t<5)$

즉, $t=1$일 때, 접선의 방정식은

$y-16=8(x-1) \qquad \therefore\ y=8x+8$

이 접선이 점 Q에서 곡선 $y=f(x)$ $(x>6)$에 접하므로

$a(x-8)^2+52-4a=8x+8$

$ax^2-16ax+60a+52=8x+8$

$ax^2-8(2a+1)x+60a+44=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=16(2a+1)^2-a(60a+44)=0$

$a^2+5a+4=0$, $(a+1)(a+4)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=-4$

ⓘ $a=-1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2-8x+16=0$, $(x-4)^2=0$

$\therefore\ x=4$, 즉 $s=4$

그런데 $s>6$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

ⓘⓘ $a=-4$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2-14x+49=0$, $(x-7)^2=0$

$\therefore\ x=7$, 즉 $s=7$

이때 $s>6$이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $f(x)=-4(x-8)^2+68$

$\therefore\ g(10)=f(10)=52$

10 답 ⑤

ㄱ. $t=1$일 때, $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-3x$

$f'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-3=\dfrac{3}{4}(x+2)(x-2)$

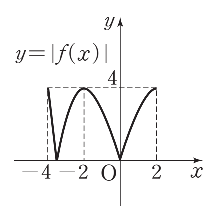
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-4,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-4	↗	4 극대	↘	-4

닫힌구간 $[-4,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 4를 가지므로 $M_1(1)=4$

닫힌구간 $[-4,\ 2]$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $|f(x)|$는 $x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2$에서 최댓값 4를 갖는다.



$\therefore\ M_2(1)=4$

$\therefore\ g(1)=M_1(1)+M_2(1)$

$=4+4=8$

ㄴ. $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-3t^2x$에서

$f'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-3t^2=\dfrac{3}{4}(x+2t)(x-2t)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2t$ 또는 $x=2t$

$t>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-2t$	$\cdots$	$2t$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$4t^3$ 극대	↘	$-4t^3$ 극소	↗

이때 극댓값 $4t^3$을 함숫값으로 갖는 x의 값을 구하면

$\dfrac{1}{4}x^3-3t^2x=4t^3$, $x^3-12t^2x=16t^3$

$x^3-12t^2x-16t^3=0$, $(x+2t)^2(x-4t)=0$

$\therefore\ x=-2t$ 또는 $x=4t$

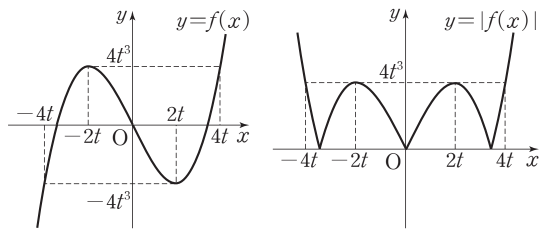
또 극솟값 $-4t^3$을 함숫값으로 갖는 x의 값을 구하면

$\frac{1}{4}x^3-3t^2x=-4t^3$, $x^3-12t^2x=-16t^3$

$x^3-12t^2x+16t^3=0$, $(x-2t)^2(x+4t)=0$

$\therefore x=2t$ 또는 $x=-4t$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



x축 위에서 $x=2$의 위치에 따라 $x=-4$의 위치를 생각하여 $M_1(t)$, $M_2(t)$를 각각 구하면

(i) $4t<2$, 즉 $0<t<\frac{1}{2}$일 때, $-4t>-4$이고,

$M_1(t)=f(2)$, $M_2(t)=-f(-4)$,

$f(2)>f(-2t)$, $-f(-4)>f(-2t)$이므로

$g(t)=f(2)-f(-4)\neq 2f(-2t)$ …… ㉠

(ii) $2t<2\le 4t$, 즉 $\frac{1}{2}\le t<1$일 때, $-4t>-4$이고,

$M_1(t)=f(-2t)$, $M_2(t)=-f(-4)$,

$-f(-4)>f(-2t)$이므로

$g(t)=f(-2t)-f(-4)\neq 2f(-2t)$ …… ㉡

(iii) $t\le 2\le 2t$, 즉 $1\le t\le 2$일 때, $-4t\le -4\le -2t$이고,

$M_1(t)=M_2(t)=f(-2t)$이므로

$g(t)=f(-2t)+f(-2t)=2f(-2t)$

(iv) $t>2$일 때, $-2t<-4$이고,

$M_1(t)=M_2(t)=f(-4)$, $f(-4)<f(-2t)$이므로

$g(t)=f(-4)+f(-4)=2f(-4)\neq 2f(-2t)$

(i)~(iv)에서 $g(t)=2f(-2t)$를 만족시키는 t의 값의 범위는 $1\le t\le 2$이므로 t의 최댓값과 최솟값의 차는 1이다.

ㄷ. ㉠, ㉡에서

$$g(t)=\begin{cases} f(2)-f(-4) & \left(0<t<\frac{1}{2}\right) \\ f(-2t)-f(-4) & \left(\frac{1}{2}\le t<1\right)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} -18t^2+18 & \left(0<t<\frac{1}{2}\right) \\ 4t^3-12t^2+16 & \left(\frac{1}{2}\le t<1\right)\end{cases}$$

$p_1(t)=-18t^2+18$, $p_2(t)=4t^3-12t^2+16$이라 하면

$p_1'(t)=-36t$, $p_2'(t)=12t^2-24t$

$$\therefore \lim_{h\to 0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}-\lim_{h\to 0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{t\to\frac{1}{2}+}p_2'(t)-\lim_{t\to\frac{1}{2}-}p_1'(t)=-9-(-18)=9$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 답 34

(가)에서 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 한 근은 중근이다. 이때 중근을 α, 다른 한 근을 β라 하면

$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$ $(k\neq 0,\ \alpha\neq\beta)$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 (나)에서 방정식 $f\left(x+\frac{1}{2}f(x)\right)=0$의 근은

$x+\frac{1}{2}f(x)=\alpha$ 또는 $x+\frac{1}{2}f(x)=\beta$

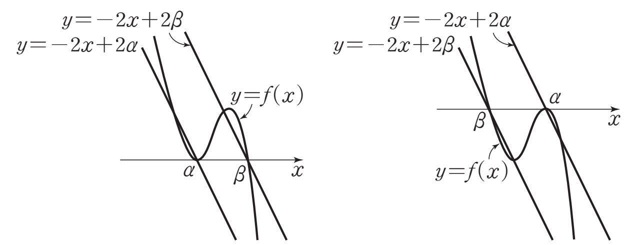
$\therefore f(x)=-2x+2\alpha$ 또는 $f(x)=-2x+2\beta$

이를 만족시키는 서로 다른 실수 x의 개수가 3이어야 한다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=-2x+2\alpha$, $y=-2x+2\beta$의 교점의 개수의 합이 3이어야 하므로 한 직선은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 다른 한 직선은 한 점에서 만나야 한다.

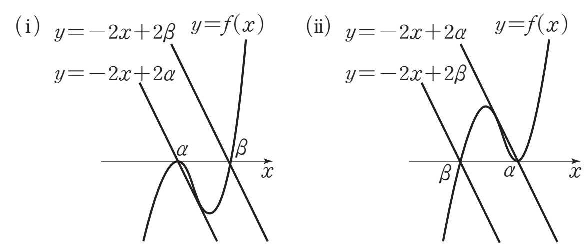
이때 두 직선 $y=-2x+2\alpha$, $y=-2x+2\beta$는 기울기가 -2이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 두 교점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$을 각각 지나는 직선이다.

$k<0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 점 $(\beta,\ 0)$을 지나는 직선 $y=-2x+2\beta$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=-2x+2\alpha$, $y=-2x+2\beta$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 4 이상이다. 이는 (나)를 만족시키지 않으므로 $k>0$

$k>0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 점 $(\beta,\ 0)$을 지나는 직선 $y=-2x+2\beta$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 한 점에서 만나므로 직선 $y=-2x+2\alpha$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

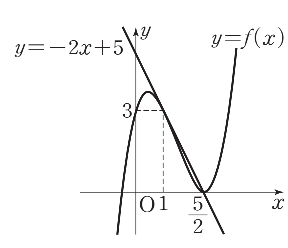
즉, 직선 $y=-2x+2\alpha$는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 접선이어야 한다.

이때 접선 $y=-2x+2\alpha$의 기울기는 -2이고 주어진 조건에서 $f(1)=3>0$, $f'(1)=-2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 (ii)와 같다.

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3=-2(x-1)$ $\quad\therefore y=-2x+5$

$f'(2)<-2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-2x+5$는 그림과 같다.



$\therefore \alpha=\frac{5}{2}$

$f(x)=k\left(x-\frac{5}{2}\right)^2(x-\beta)$이므로

$f(1)=3$에서 $\frac{9}{4}k(1-\beta)=3$ …… ㉠

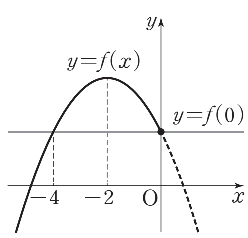
$f'(x)=2k\left(x-\frac{5}{2}\right)(x-\beta)+k\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$이므로

$f'(1)=-2$에서 $-3k(1-\beta)+\frac{9}{4}k=-2$ …… ㉡

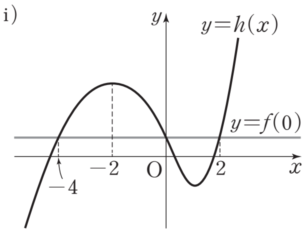
㉠에서 $3k(1-\beta)=4$이므로
이를 ㉡에 대입하면
$-4+\frac{9}{4}k=-2$, $\frac{9}{4}k=2$ $\therefore k=\frac{8}{9}$
이를 ㉠에 대입하면
$2(1-\beta)=3$, $2-2\beta=3$
$-2\beta=1$ $\therefore \beta=-\frac{1}{2}$
$\therefore f(x)=\frac{8}{9}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)$
따라서 $f(0)=\frac{8}{9}\times\frac{25}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{25}{9}$이므로 $p=9$, $q=25$
$\therefore p+q=34$

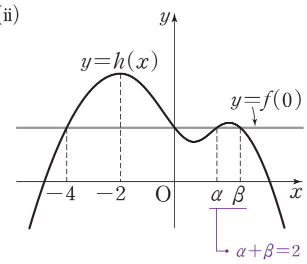
12 답 27

이차함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극대이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고 $x=-2$에서 최대이므로
$f(x)=a(x+2)^2+b$ (a, b는 상수, $a<0$)라 하자.
함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.
즉, $\lim_{x\to0+}h(x)=\lim_{x\to0-}h(x)=h(0)$에서
$g(0)=f(0)=h(0)$
또 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$에서도 미분가능하다.
즉, 미분계수 $h'(0)$이 존재하고, $h'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x<0) \\ g'(x) & (x>0)\end{cases}$이므로
$f'(0)=g'(0)$ …… ㉠
㈎에서 방정식 $h(x)=h(0)$의 실근은 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=h(0)$, 즉 직선 $y=f(0)$이 만나는 점의 x좌표와 같다.



이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-2$에 대하여 대칭이므로 $x\le0$에서 방정식 $f(x)=f(0)$의 실근은
$x=-4$ 또는 $x=0$
즉, $x\le0$에서 방정식 $f(x)=f(0)$의 실근의 합은 -4이므로 ㈎를 만족시키려면 $x>0$에서 방정식 $g(x)=f(0)$의 실근의 합이 2이어야 한다.
한편 $f'(x)=2a(x+2)$이므로
$f'(0)=4a<0$
㉠에서 $g'(0)<0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 $x=0$인 점에서의 접선의 기울기는 음수이다.
따라서 삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수의 부호에 따라 경우를 나누어 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형을 그리면 그림과 같다.

(i)


(ii)


(i) 함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우
$g(x)-f(0)=cx(x-2)(x+d)$ (c, d는 상수, $c>0$, $d>0$)라 하면
$g(x)=cx^3+c(d-2)x^2-2cdx+f(0)$
이때 함수 $g(x)$의 이차항의 계수가 0이므로
$c(d-2)=0$ $\therefore d=2$ ($\because c>0$)
즉, $g(x)=cx^3-4cx+f(0)$이므로
$g'(x)=3cx^2-4c=3c\left(x+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$
$g'(x)=0$인 x의 값은 $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ ($\because x>0$)
$x>0$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	…
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$에서 최소이므로 최솟값은
$g\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{8\sqrt{3}}{9}c-\frac{8\sqrt{3}}{3}c+f(0)$
$=-\frac{16\sqrt{3}}{9}c+f(0)$
한편 $x\le0$에서 함수 $f(x)=a(x+2)^2+b$의 최댓값은 b이고,
$f(0)=4a+b$이므로
$b=f(0)-4a$
㈏에서 최댓값과 최솟값의 차가 $9+4\sqrt{3}$이므로
$\{f(0)-4a\}-\left\{-\frac{16\sqrt{3}}{9}c+f(0)\right\}=9+4\sqrt{3}$
$\therefore -4a+\frac{16\sqrt{3}}{9}c=9+4\sqrt{3}$ …… ㉡
㉠에서 $f'(0)=g'(0)$이므로
$4a=-4c$ $\therefore a=-c$ …… ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a=-\frac{9}{4}$, $c=\frac{9}{4}$
$\therefore f'(x)=-\frac{9}{2}(x+2)$, $g'(x)=\frac{27}{4}x^2-9$

(ii) 함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우
$g(x)-f(0)=cx(x-\alpha)(x-\beta)$ (c, α, β는 상수, $c<0$, $\alpha+\beta=2$)라 하면
$g(x)=cx^3-c(\alpha+\beta)x^2+c\alpha\beta x+f(0)$
$=cx^3-2cx^2+c\alpha\beta x+f(0)$
이때 $c<0$에서 함수 $g(x)$의 이차항의 계수는 0이 아니므로 조건을 만족시키지 않는다. ⟶ $\alpha=\beta=2$인 경우에도 이차항의 계수는 0이 아니다.

(i), (ii)에서 $h'(x)=\begin{cases} -\frac{9}{2}(x+2) & (x<0) \\ \frac{27}{4}x^2-9 & (x>0)\end{cases}$
$\therefore h'(-4)+h'(2)=9+18=27$

06 부정적분과 정적분

STEP 1 핵심 문제 | 80~81쪽

01 ②	02 9	03 12	04 -21	05 15	06 ⑤
07 16	08 ①	09 $\frac{1}{6}$	10 ①	11 36	12 ⑤

01 답 ②

$f(x)=\int dx+16\int x\,dx+81\int x^2\,dx+\cdots+n^4\int x^{n-1}\,dx$

$\quad=\int(1+16x+81x^2+\cdots+n^4x^{n-1})\,dx$

$\quad=x+8x^2+27x^3+\cdots+n^3x^n+C$

$f(0)=-3$에서 $C=-3$

$f(1)=97$에서

$1+8+27+\cdots+n^3-3=97$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=100$

이때 $1^3+2^3+3^3+4^3=100$이므로

$n=4$

02 답 9

(ⅰ) $x<0$일 때,

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int(-2x)\,dx$

$\quad=-x^2+C_1$

(ⅱ) $x\ge0$일 때,

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int k(2x-x^2)\,dx$

$\quad=k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_2$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$F(x)=\begin{cases}-x^2+C_1 & (x<0)\\ k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_2 & (x\ge0)\end{cases}$$

함수 $F(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to0+}F(x)=\lim_{x\to0-}F(x)=F(0)$에서

$\lim_{x\to0+}\left\{k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_2\right\}=\lim_{x\to0-}(-x^2+C_1)=C_2$

$\therefore C_2=C_1$

따라서 $F(2)-F(-3)=21$에서

$k\left(4-\frac{8}{3}\right)+C_1-(-9+C_1)=21$ ($\because C_2=C_1$)

$\frac{4}{3}k=12 \qquad \therefore k=9$

03 답 12

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=4x+1$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int(4x+1)\,dx$

$f(x)+g(x)=2x^2+x+C_1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=4x^3+3x^2-6x-5$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(4x^3+3x^2-6x-5)\,dx$

$f(x)g(x)=x^4+x^3-3x^2-5x+C_2$

이때 $g(2)=0$에서 $f(2)g(2)=0$이므로

$16+8-12-10+C_2=0$

$\therefore C_2=-2$

$\therefore f(x)g(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-2$

$\qquad=(x+1)^3(x-2) \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)$, $g(x)$는 모두 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고 $g(2)=0$이므로

$g(x)=(x+1)(x-2)$, $f(x)=(x+1)^2$

$\therefore f(3)-g(3)=16-4\times1=12$

04 답 -21

(가)의 $\frac{d}{dx}\int f'(x)\,dx=3x^2+4x+a$에서

$f'(x)=3x^2+4x+a$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2+4x+a)\,dx$

$\quad=x^3+2x^2+ax+C$

(나)의 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2a+1$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$에서 $f(1)=0$

따라서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=2a+1$

$3+4+a=2a+1 \qquad \therefore a=6$

$\therefore f(x)=x^3+2x^2+6x+C$

$f(1)=0$에서

$1+2+6+C=0 \qquad \therefore C=-9$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+6x-9$이므로

$f(-2)=-8+8-12-9=-21$

05 답 15

$F(x)=xf(x)-2x^3+x^2+3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+2x$

$xf'(x)=6x^2-2x$

$\therefore f'(x)=6x-2$ ······ 배점 30%

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x-2)\,dx$

$\quad=3x^2-2x+C$ ······ 배점 20%

$F(x)=xf(x)-2x^3+x^2+3$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$F(1)=f(1)-2+1+3$

$10=f(1)+2$ ($\because F(1)=10$)

$\therefore f(1)=8$ ······ 배점 20%

$f(x)=3x^2-2x+C$에서

$3-2+C=8 \qquad \therefore C=7$

따라서 $f(x)=3x^2-2x+7$이므로

$f(2)=12-4+7=15$ ······ 배점 30%

06 답 ⑤

$f(x+y)=f(x)+f(y)+6xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+6xh-f(x)}{h} \\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+6xh}{h} \\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+6x \\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+6x \ (\because f(0)=0) \\ &=f'(0)+6x \end{aligned}$$

$f'(0)=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f'(x)=6x+k$

$$\begin{aligned} \therefore f(x)&=\int f'(x)\,dx=\int(6x+k)\,dx \\ &=3x^2+kx+C \end{aligned}$$

$f(0)=0$에서 $C=0$

$f(-1)=9$에서 $3-k=9$

$\therefore k=-6$

따라서 $f(x)=3x^2-6x$이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)\,dx&=\int_0^2(3x^2-6x)\,dx \\ &=\Big[x^3-3x^2\Big]_0^2 \\ &=-4 \end{aligned}$$

07 답 16

$h(x)=\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$라 하자.

(i) $f(x)\ge g(x)$일 때,

$x^2+1\ge -x^2+4x+1$에서

$2x^2-4x\ge0$

$2x(x-2)\ge0$

$\therefore x\le0$ 또는 $x\ge2$

이때 $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$이므로

$h(x)=\dfrac{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)}{2}=f(x)$

(ii) $f(x)\le g(x)$일 때,

$x^2+1\le -x^2+4x+1$에서

$2x^2-4x\le0$

$2x(x-2)\le0$

$\therefore 0\le x\le2$

이때 $|f(x)-g(x)|=-f(x)+g(x)$이므로

$h(x)=\dfrac{f(x)+g(x)-f(x)+g(x)}{2}=g(x)$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} h(x)&=\begin{cases} f(x) & (x\le0 \text{ 또는 } x\ge2) \\ g(x) & (0\le x\le2) \end{cases} \\ &=\begin{cases} x^2+1 & (x\le0 \text{ 또는 } x\ge2) \\ -x^2+4x+1 & (0\le x\le2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore &\int_{-1}^3\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}\,dx \\ &=\int_{-1}^0(x^2+1)\,dx+\int_0^2(-x^2+4x+1)\,dx+\int_2^3(x^2+1)\,dx \\ &=\Big[\frac{1}{3}x^3+x\Big]_{-1}^0+\Big[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+x\Big]_0^2+\Big[\frac{1}{3}x^3+x\Big]_2^3 \\ &=-\Big(-\frac{4}{3}\Big)+\frac{22}{3}+\Big(12-\frac{14}{3}\Big)=16 \end{aligned}$$

08 답 ①

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

└→ 그래프가 원점에 대하여 대칭

$g(x)=xf(x)$라 하면

$g(-x)=-xf(-x)=xf(x)=g(x)$ → 그래프가 y축에 대하여 대칭

$h(x)=x^2f(x)$라 하면

$h(-x)=(-x)^2f(-x)=-x^2f(x)=-h(x)$ → 그래프가 원점에 대하여 대칭

$$\begin{aligned} \therefore &\int_{-3}^3(3x^2-x+4)f(x)\,dx \\ &=3\int_{-3}^3x^2f(x)\,dx-\int_{-3}^3xf(x)\,dx+4\int_{-3}^3f(x)\,dx \\ &=0-2\int_0^3xf(x)\,dx+0 \\ &=-2\times6 \\ &=-12 \end{aligned}$$

09 답 $\frac{1}{6}$

모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$$\begin{aligned} \int_9^{11}f(x)\,dx&=\int_6^8f(x)\,dx=\int_3^5f(x)\,dx \\ &=\int_0^2f(x)\,dx=\int_0^1f(x)\,dx+\int_1^2f(x)\,dx \\ &=\int_0^1(6x-4)\,dx+\int_1^2(-x^2+x+2)\,dx \\ &=\Big[3x^2-4x\Big]_0^1+\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_1^2 \\ &=-1+\Big(\frac{10}{3}-\frac{13}{6}\Big) \\ &=\frac{1}{6} \end{aligned}$$

10 답 ①

(가)의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)+xg(x)=12x^3+24x^2-6x$

$f(x)+g(x)=12x^2+24x-6 \qquad \cdots\cdots ㉠$

(나)의 $f(x)=xg'(x)$를 ㉠에 대입하면

$xg'(x)+g(x)=12x^2+24x-6$

이때 $xg'(x)+g(x)=\{xg(x)\}'$이므로

$xg(x)=\int(12x^2+24x-6)\,dx=4x^3+12x^2-6x+C$

이 식에 $x=0$을 대입하면 $C=0$

따라서 $xg(x)=4x^3+12x^2-6x$이므로

$g(x)=4x^2+12x-6$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^3g(x)\,dx&=\int_0^3(4x^2+12x-6)dx \\ &=\Big[\frac{4}{3}x^3+6x^2-6x\Big]_0^3 \\ &=36+54-18=72 \end{aligned}$$

11 답 36

$\int_0^1 f'(t)dt=a$ (a는 상수)로 놓으면 주어진 등식에서

$xf(x)+x^3=\int_0^x f(t)dt-ax^3+3x^4$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)+3x^2=f(x)-3ax^2+12x^3$

$xf'(x)=-3x^2-3ax^2+12x^3$

즉, $f'(x)=-3(1+a)x+12x^2$이므로

$a=\int_0^1 f'(t)dt=\int_0^1 \{-3(1+a)t+12t^2\}dt$

$=\left[-\frac{3}{2}(1+a)t^2+4t^3\right]_0^1=-\frac{3}{2}(1+a)+4$

즉, $a=-\frac{3}{2}(1+a)+4$에서 $a=1$

따라서 $f'(x)=12x^2-6x$이므로 $f'(2)=48-12=36$

12 답 ⑤

$g(x)=\int_{-4}^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$이므로

$g'(x)=\begin{cases} 3x^2+3x+a & (x<0) \\ 3x+a & (x\geq 0) \end{cases}$

함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$g'(2)=6+a=0$에서 $a=-6$

$\therefore g'(x)=\begin{cases} 3(x+2)(x-1) & (x<0) \\ 3(x-2) & (x\geq 0) \end{cases}$

$g'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 극대이고 극댓값은

$g(-2)=\int_{-4}^{-2}(3t^2+3t-6)dt=\left[t^3+\frac{3}{2}t^2-6t\right]_{-4}^{-2}$

$=10-(-16)=26$

STEP 2 고난도 문제 | 82~86쪽

01 2	02 ③	03 ⑤	04 -2	05 ③	06 17
07 9	08 $\frac{2}{5}$	09 ⑤	10 ③	11 18	12 -57
13 110	14 28	15 ①	16 43	17 ⑤	18 65
19 0	20 $\frac{27}{4}$	21 ②	22 8	23 ①	24 10
25 38	26 ⑤				

01 답 2

(가)의 $g(x)=\int\{2x^2+f(x)\}dx$에서

$g'(x)=2x^2+f(x)$ …… ㉠

(i) $n=1$일 때,

$g'(x)$는 상수함수이고 $2x^2+f(x)$는 이차함수이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=2$일 때,

$g'(x)$는 일차함수이므로 ㉠을 만족시키려면 $2x^2+f(x)$가 일차함수이어야 한다.

따라서 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -2일 때, ㉠을 만족시킨다.

(iii) $n\geq 3$일 때,

$g'(x)$는 $(n-1)$차 함수이고, $2x^2+f(x)$는 n차 함수이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $n=2$

이때 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -2이므로

$f(x)=-2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

㉠에서 $g'(x)=ax+b$

$\therefore g(x)=\int g'(x)dx=\int(ax+b)dx=\frac{a}{2}x^2+bx+C_1$

(나)의 $xg(x)=\int f(x)dx$에서

$x\left(\frac{a}{2}x^2+bx+C_1\right)=\int(-2x^2+ax+b)dx$

$\frac{a}{2}x^3+bx^2+C_1x=-\frac{2}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx+C_2$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$\frac{a}{2}=-\frac{2}{3}$, $b=\frac{a}{2}$, $C_1=b$, $C_2=0$

$\therefore a=-\frac{4}{3}$, $b=C_1=-\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=-2x^2-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$, $g(x)=-\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$이므로

$g(1)-f(1)=\left(-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)-\left(-2-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)=2$

02 답 ③

$f'(x)=2ax-4a^2$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2ax-4a^2)dx$

$=ax^2-4a^2x+C=a(x-2a)^2+C-4a^3$

이때 $a>0$이면 함수 $f(x)$는 최댓값을 갖지 않으므로 $a<0$

함수 $f(x)$는 $x=2a$일 때 최댓값 $C-4a^3$을 가지므로

$C-4a^3=2$

$\therefore f(x)=a(x-2a)^2+2$

$a<0$에서 $2a<a$이므로 닫힌구간 $[a, a+2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=a+2$일 때 최솟값 $7a$를 갖는다.

즉, $f(a+2)=7a$이므로 $a(-a+2)^2+2=7a$

$a^3-4a^2+4a+2=7a$

$a^3-4a^2-3a+2=0$

$(a+1)(a^2-5a+2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

그런데 $a<0$이므로 $a=-1$

03 답 ⑤

$f(x)$가 삼차함수이므로 $f'(x)$는 이차함수이다.

도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 위로 볼록한 포물선이고, x축과 만나는 점의 x좌표가 -3, 2이므로 $f'(x)=a(x+3)(x-2)\ (a<0)$라 하자.

이때 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 12)$를 지나므로

$f'(0)=12$에서 $-6a=12\qquad \therefore\ a=-2$

즉, $f'(x)=-2(x+3)(x-2)=-2x^2-2x+12$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-2x^2-2x+12)\,dx$$

$$=-\frac{2}{3}x^3-x^2+12x+C$$

이때 $f(0)=1$에서 $C=1$

$\therefore\ f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3-x^2+12x+1$

방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f'(x)=-2(x+3)(x-2)$에서

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=2$

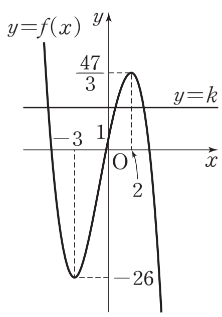
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-26 극소	$\nearrow$	$\frac{47}{3}$ 극대	$\searrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 직선 $y=k$를 그어 보면 k의 값의 범위는

$-26<k<\dfrac{47}{3}$

따라서 정수 k는 $-25,\ -24,\ -23,\ \dots,\ 15$의 41개이다.



04 답 −2

$f'(x)=x^2-4x+n$에서

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$

$$=\int(x^2-4x+n)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-2x^2+nx+C$$

이때 $f(0)=0$에서 $C=0$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+nx$

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지므로 이차방정식 $f'(x)=0$, 즉 $x^2-4x+n=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 $x^2-4x+n=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4-n>0\qquad \therefore\ n<4$

즉, n은 자연수이므로 $n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$

이차방정식 $x^2-4x+n=0$의 서로 다른 두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=n$

함수 $f(x)$의 극댓값이 $f(\alpha)$, 극솟값이 $f(\beta)$이므로

$M+m=f(\alpha)+f(\beta)$

$$=\frac{1}{3}\alpha^3-2\alpha^2+n\alpha+\frac{1}{3}\beta^3-2\beta^2+n\beta$$

$$=\frac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3)-2(\alpha^2+\beta^2)+n(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{1}{3}\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}-2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+n(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{1}{3}(4^3-3n\times4)-2(4^2-2n)+4n$$

$$=4n-\frac{32}{3}$$

(i) $n=1$일 때,

$n+M+m=1+4-\dfrac{32}{3}=-\dfrac{17}{3}$

(ii) $n=2$일 때,

$n+M+m=2+8-\dfrac{32}{3}=-\dfrac{2}{3}$

(iii) $n=3$일 때,

$n+M+m=3+12-\dfrac{32}{3}=\dfrac{13}{3}$

(i), (ii), (iii)에서 모든 $n+M+m$의 값의 합은

$-\dfrac{17}{3}+\left(-\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{13}{3}=-2$

05 답 ③

사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f'(x)$의 삼차항의 계수는 4이다. 함수 $f(x)$는 $x=-1,\ x=0,\ x=4$에서 극값을 가지므로

$f'(x)=4x(x+1)(x-4)$

$=4x^3-12x^2-16x$

$$\therefore\ f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(4x^3-12x^2-16x)\,dx$$

$$=x^4-4x^3-8x^2+C$$

$f(-1)=-3+C,\ f(0)=C,\ f(4)=-128+C$이므로

$g(-1)=|f(-1)-1|=|C-4|$

$g(0)=|f(0)-1|=|C-1|$

$g(4)=|f(4)-1|=|C-129|$

세 점 $\mathrm{A}(-1,\ g(-1))$, $\mathrm{B}(0,\ g(0))$, $\mathrm{C}(4,\ g(4))$가 한 직선 위에 있으므로

$$\frac{g(0)-g(-1)}{0-(-1)}=\frac{g(4)-g(0)}{4-0}$$

$$|C-1|-|C-4|=\frac{|C-129|-|C-1|}{4}\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

(i) $C<1$일 때,

㉠에서 $-(C-1)+(C-4)=\dfrac{-(C-129)+(C-1)}{4}$

$-3\neq32$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $1\le C<4$일 때,

㉠에서 $C-1+(C-4)=\dfrac{-(C-129)-(C-1)}{4}$

$2C-5=\dfrac{-2C+130}{4}$

$8C-20=-2C+130$

$10C=150\qquad \therefore\ C=15$

그런데 $1\le C<4$이므로 조건을 만족시키는 C의 값이 존재하지 않는다.

(iii) $4 \le C < 129$일 때,

㉠에서 $C-1-(C-4)=\dfrac{-(C-129)-(C-1)}{4}$

$3=\dfrac{-2C+130}{4}$

$12=-2C+130$

$2C=118 \qquad \therefore C=59$

(iv) $C \ge 129$일 때,

㉠에서 $C-1-(C-4)=\dfrac{C-129-(C-1)}{4}$

$3 \ne -32$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 $C=59$

따라서 함수 $f(x)$의 모든 극값의 합은

$f(-1)+f(0)+f(4)=(-3+C)+C+(-128+C)$

$=3C-131=3\times59-131=46$

개념 NOTE

좌표평면 위의 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이 한 직선 위에 있을 때, 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같으므로

$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$ (단, $x_1 \ne x_2 \ne x_3$)

06 답 17

$f'(x)=m\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+\dfrac{x^n}{n}\right)$에서

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int m\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+\dfrac{x^n}{n}\right)dx$

$=m\left\{x+\dfrac{x^2}{1\times2}+\dfrac{x^3}{2\times3}+\dfrac{x^4}{3\times4}+\cdots+\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right\}+C$

이때 $f(0)=\dfrac{1}{8}$에서 $C=\dfrac{1}{8}$

$f(1)=4$에서

$f(1)=m\left\{1+\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}+\dfrac{1}{8}$

$=m\left\{1+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right\}+\dfrac{1}{8}$

$=m\left(1+1-\dfrac{1}{n+1}\right)+\dfrac{1}{8}$

$=\dfrac{m(2n+1)}{n+1}+\dfrac{1}{8}$

즉, $\dfrac{m(2n+1)}{n+1}+\dfrac{1}{8}=4$이므로 $\dfrac{m(2n+1)}{n+1}=\dfrac{31}{8}$

$8m(2n+1)=31(n+1)$ …… ㉠

$16mn+8m-31n=31$

$n(16m-31)+\dfrac{1}{2}(16m-31)=\dfrac{31}{2}$

$(16m-31)\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{31}{2}$

$(16m-31)(2n+1)=31$

이때 m, n이 자연수이므로 $16m-31$은 -15 이상의 정수, $2n+1$은 3 이상의 자연수이다.

따라서 $16m-31=1$, $2n+1=31$이므로 $m=2$, $n=15$

$\therefore m+n=17$

다른 풀이

㉠에서 $m=31k$ 또는 $2n+1=31k$ (k는 자연수)

(i) $m=31k$일 때,

$8k(2n+1)=n+1$

이때 $2n+1>n+1$, $8k>1$이므로

$8k(2n+1)>n+1$

즉, 조건을 만족시키는 k의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $2n+1=31k$일 때,

$8mk=n+1$이므로 $16mk=2n+2$

이때 $2n+1=31k$에서 $16mk=31k+1$

$\therefore k(16m-31)=1$

k는 자연수, $16m-31$은 정수이므로

$k=1$, $16m-31=1 \qquad \therefore m=2$

$k=1$을 $2n+1=31k$에 대입하여 풀면 $n=15$

(i), (ii)에서 $m=2$, $n=15$

$\therefore m+n=17$

07 답 9

$|x-a|=\begin{cases}-x+a & (x\le a)\\ x-a & (x\ge a)\end{cases}$이고 $0<a<b$이므로

$\int_0^b |x-a|\,dx=\int_0^a(-x+a)\,dx+\int_a^b(x-a)\,dx$

$=\left[-\dfrac{1}{2}x^2+ax\right]_0^a+\left[\dfrac{1}{2}x^2-ax\right]_a^b$

$=\dfrac{a^2}{2}+\left\{\dfrac{b^2}{2}-ab-\left(-\dfrac{a^2}{2}\right)\right\}$

$=a^2+\dfrac{b^2}{2}-ab$ ······ 배점 30%

$|x-b|=\begin{cases}-x+b & (x\le b)\\ x-b & (x\ge b)\end{cases}$이고 $0<a<b$이므로

$\int_0^a |x-b|\,dx=\int_0^a(-x+b)\,dx$

$=\left[-\dfrac{1}{2}x^2+bx\right]_0^a$

$=-\dfrac{a^2}{2}+ab$ ······ 배점 30%

즉, $a^2+\dfrac{b^2}{2}-ab=-\dfrac{a^2}{2}+ab$이므로

$\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{b^2}{2}-2ab=0$, $3a^2-4ab+b^2=0$

$(3a-b)(a-b)=0 \qquad \therefore 3a=b\ (\because a\ne b)$ ······ 배점 20%

$\therefore 2b-a^2=6a-a^2=-(a-3)^2+9$

따라서 $2b-a^2$은 $a=3$에서 최댓값 9를 갖는다. ······ 배점 20%

08 답 $\dfrac{2}{5}$

(가)의 $ax+a^2\le x^2-a^2$에서

$x^2-ax-2a^2\ge0$, $(x+a)(x-2a)\ge0$

$\therefore x\le -a$ 또는 $x\ge 2a\ (\because a>0)$

(나)의 $ax+a^2\ge x^2-a^2$에서

$x^2-ax-2a^2\le0$, $(x+a)(x-2a)\le0$

$\therefore -a\le x\le 2a\ (\because a>0)$

$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2-a^2 & (x\le -a \text{ 또는 } x\ge 2a)\\ ax+a^2 & (-a\le x\le 2a)\end{cases}$

(i) $0<2a<2$, 즉 $0<a<1$일 때,

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^{2a}(ax+a^2)\,dx+\int_{2a}^2(x^2-a^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{a}{2}x^2+a^2x\right]_0^{2a}+\left[\frac{1}{3}x^3-a^2x\right]_{2a}^2$$
$$=4a^3+\left(\frac{8}{3}-2a^2-\frac{2}{3}a^3\right)=\frac{10}{3}a^3-2a^2+\frac{8}{3}$$

$g(a)=\frac{10}{3}a^3-2a^2+\frac{8}{3}$이라 하면

$g'(a)=10a^2-4a=2a(5a-2)$

$g'(a)=0$인 a의 값은 $a=\frac{2}{5}$ $(\because 0<a<1)$

$0<a<1$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	$\frac{2}{5}$	$\cdots$	1
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		↘	$\frac{64}{25}$ 극소	↗	

따라서 $0<a<1$일 때 $g(a)$, 즉 $\int_0^2 f(x)\,dx$는 $a=\frac{2}{5}$에서 최솟값 $\frac{64}{25}$를 갖는다.

(ii) $2a\geq 2$, 즉 $a\geq 1$일 때,

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2(ax+a^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{a}{2}x^2+a^2x\right]_0^2$$
$$=2a+2a^2$$
$$=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

따라서 $a\geq 1$일 때 $g(a)$, 즉 $\int_0^2 f(x)\,dx$는 $a=1$에서 최솟값 4를 갖는다.

(i), (ii)에서 $\int_0^2 f(x)\,dx$의 최솟값은 $\frac{64}{25}$이고 이때 a의 값은 $\frac{2}{5}$이다.

09 답 ⑤

$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx$이고, $\int_0^3 f(x)\,dx$의 값이 최대가 되려면 $\int_0^1 f(x)\,dx$, $\int_1^3 f(x)\,dx$의 값이 최대가 되어야 한다.

(i) $0\leq x\leq 1$일 때,

$\int_0^x f'(t)\,dt=f(x)-f(0)$

$f(0)=0$이므로 $f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt\leq\int_0^x 1\,dt=x$

$\int_0^1 f(x)\,dx\leq\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$

$\int_0^3 f(x)\,dx$의 값이 최대가 되는 경우는 $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}$일 때이다.

즉, $f(x)=x$

(ii) $1\leq x\leq 3$일 때,

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, $f(1)=1$, $f'(1)=1$ → $0\leq x\leq 1$일 때, $f(x)=x$

또 $f'(x)\leq 3$이므로 $\int_1^3 f(x)\,dx$의 값이 최대가 되려면 $1\leq x\leq 3$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록해야 하고 $f'(3)=3$이어야 한다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a>0$)라 하면 $f'(x)=2ax+b$이므로

$f(1)=1$에서 $a+b+c=1$ …… ㉠

$f'(1)=1$에서 $2a+b=1$ …… ㉡

$f'(3)=3$에서 $6a+b=3$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=\frac{1}{2}$, $b=0$, $c=\frac{1}{2}$이므로 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases} x & (0\leq x\leq 1) \\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2} & (1\leq x\leq 3)\end{cases}$일 때, $\int_0^3 f(x)\,dx$의 값이 최대가 된다.

따라서 $\int_0^3 f(x)\,dx$의 최댓값은

$$\int_0^1 x\,dx+\int_1^3\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x\right]_1^3$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{16}{3}=\frac{35}{6}$$

10 답 ③

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f'(x)$의 일차항의 계수는 2이다. 이때 $f'(2)=0$이므로

$f'(x)=2(x-2)=2x-4$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2x-4)\,dx=x^2-4x+C$

ㄱ. $n=2$일 때,

$\int_4^2 f(x)\,dx\geq 0$에서

$$\int_4^2 f(x)\,dx=\int_4^2(x^2-4x+C)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+Cx\right]_4^2$$
$$=-2C+\frac{16}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

즉, $-2C+\frac{16}{3}\geq 0$이므로 $C\leq\frac{8}{3}$

$f(2)=C-4\leq-\frac{4}{3}$이므로

$f(2)<0$

ㄴ. $n=3$일 때,

$\int_4^3 f(x)\,dx\geq 0$에서

$$\int_4^3 f(x)\,dx=\int_4^3(x^2-4x+C)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+Cx\right]_4^3=-C+\frac{5}{3}$$

즉, $-C+\frac{5}{3}\geq 0$이므로 $C\leq\frac{5}{3}$ …… ㉡

이때

$$\int_4^3 f(x)\,dx-\int_4^2 f(x)\,dx=-C+\frac{5}{3}-\left(-2C+\frac{16}{3}\right)\ (\because ㉠)$$
$$=C-\frac{11}{3}$$

㉡에서 $C-\frac{11}{3}\leq-2<0$이므로

$\int_4^3 f(x)\,dx-\int_4^2 f(x)\,dx<0$

$\therefore \int_4^3 f(x)\,dx<\int_4^2 f(x)\,dx$

ㄷ. $n=5$일 때,

$\int_{4}^{5} f(x)\,dx \geq 0$에서

$\int_{4}^{5} f(x)\,dx=\int_{4}^{5}(x^2-4x+C)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+Cx\right]_{4}^{5}=C+\frac{7}{3}$

즉, $C+\frac{7}{3}\geq 0$이므로 $C\geq -\frac{7}{3}$ …… ㉢

$n=6$일 때,

$\int_{4}^{6} f(x)\,dx=\int_{4}^{6}(x^2-4x+C)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+Cx\right]_{4}^{6}=2C+\frac{32}{3}$

㉡, ㉢에서 $-\frac{7}{3}\leq C\leq \frac{5}{3}$이므로

$-\frac{14}{3}\leq 2C\leq \frac{10}{3}$

$6\leq 2C+\frac{32}{3}\leq 14$

$\therefore 6\leq \int_{4}^{6} f(x)\,dx\leq 14$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11 답 18

$g(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f(x)=\begin{cases} -x^2 & (x\leq 0) \\ ax^2+bx+c & (x>0) \end{cases}$

$\therefore f'(x)=\begin{cases} -2x & (x<0) \\ 2ax+b & (x>0) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$에서

$\lim_{x\to 0+}(ax^2+bx+c)=\lim_{x\to 0-}(-x^2)=0 \qquad \therefore c=0$

또 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$에서도 미분가능하다.

즉, 미분계수 $f'(0)$이 존재하므로 $\lim_{x\to 0+} f'(x)=\lim_{x\to 0-} f'(x)$에서

$\lim_{x\to 0+}(2ax+b)=\lim_{x\to 0-}(-2x) \qquad \therefore b=0$

따라서 $f'(x)=\begin{cases} -2x & (x<0) \\ 2ax & (x>0) \end{cases}$이고, 닫힌구간 $[-5, 5]$에서

$|f'(x)|\leq 10$이므로

$|10a|\leq 10$, $|a|\leq 1$

$\therefore 0<|a|\leq 1$ ($\because a\neq 0$)

$f(x)=\begin{cases} -x^2 & (x\leq 0) \\ ax^2 & (x>0) \end{cases}$이므로

$\int_{-3}^{3}|f(x)|\,dx=\int_{-3}^{0}|-x^2|\,dx+\int_{0}^{3}|ax^2|\,dx$

$=\int_{-3}^{0}x^2\,dx+|a|\int_{0}^{3}x^2\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{0}+|a|\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{3}$

$=9+9|a|$

따라서 $0<|a|\leq 1$일 때, $\int_{-3}^{3}|f(x)|\,dx$는 $|a|=1$에서 최댓값 18을 갖는다.

12 답 −57

$f(x)=\begin{cases} t(x-t) & (x\leq 0) \\ 2x^3-3tx^2-12t^2x-t^2 & (x>0) \end{cases}$에서

$f'(x)=\begin{cases} t & (x<0) \\ 6x^2-6tx-12t^2 & (x>0) \end{cases}$

$=\begin{cases} t & (x<0) \\ 6(x+t)(x-2t) & (x>0) \end{cases}$

(i) $t<0$일 때,

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-t$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-t$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-t^2$	↘	$7t^3-t^2$ 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-t$에서 극솟값 $7t^3-t^2$을 가지므로

$g(t)=7t^3-t^2$

(ii) $t>0$일 때,

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=2t$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2t$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$-t^2$ 극대	↘	$-20t^3-t^2$ 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $-t^2$, $x=2t$에서 극솟값 $-20t^3-t^2$을 가지므로

$g(t)=-t^2+(-20t^3-t^2)=-20t^3-2t^2$

(i), (ii)에서 $g(t)=\begin{cases} 7t^3-t^2 & (t<0) \\ -20t^3-2t^2 & (t>0) \end{cases}$이고 $g(0)=0$이므로

$\int_{-1}^{1}20t\,g(t)\,dt=\int_{-1}^{0}(140t^4-20t^3)\,dt+\int_{0}^{1}(-400t^4-40t^3)\,dt$

$=\left[28t^5-5t^4\right]_{-1}^{0}+\left[-80t^5-10t^4\right]_{0}^{1}$

$=-(-33)+(-90)$

$=-57$

13 답 110

(나)의 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(1)=b$

닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)=x$이므로 $b=1$

즉, $f(x+1)-xf(x)=ax+1$이므로 $0\leq x\leq 1$에서

$f(x+1)-x^2=ax+1$

$\therefore f(x+1)=x^2+ax+1$

이때 $x+1=t$로 놓으면 $0\leq x\leq 1$에서 $1\leq t\leq 2$이고

$f(t)=(t-1)^2+a(t-1)+1$

$=t^2+(a-2)t+2-a$ …… ㉠

$\therefore f'(t)=2t+a-2$

닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)=x$이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f'(x)=1$에서

$f'(1)=1 \qquad \therefore a=1$

이를 ㉠에 대입하면 $1\leq t\leq 2$에서 $f(t)=t^2-t+1$이므로

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 (x^2-x+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$$
$$\therefore\ 60\times\int_1^2 f(x)\,dx=60\times\frac{11}{6}=110$$

14 답 28

$f(x)=-x^2+kx$에서 $f'(x)=-2x+k$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

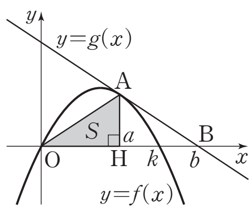
$y=(-2a+k)(x-a)-a^2+ka=(-2a+k)x+a^2$

$\therefore\ g(x)=(-2a+k)x+a^2$

직선 $y=(-2a+k)x+a^2$의 x절편이 b이므로

$0=(-2a+k)b+a^2 \qquad \therefore\ b=\dfrac{a^2}{2a-k}$ …… ㉠

직선 $y=g(x)$가 x축과 만나는 점을 B라 하자.



(가)에서 $\int_a^b g(x)\,dx=S$이므로 삼각형 BAH의 넓이와 삼각형 AOH의 넓이는 서로 같다.

즉, $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{BH}}$이므로 $b=2a$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $2a=\dfrac{a^2}{2a-k}$

$2(2a-k)=a \qquad \therefore\ k=\dfrac{3}{2}a$ …… ㉢

즉, $f(x)=-x^2+\dfrac{3}{2}ax$이고 (나)에서

$$\int_0^a \left\{f(x)-\frac{1}{2}ax\right\}dx=\int_0^a \left(-x^2+\frac{3}{2}ax-\frac{1}{2}ax\right)dx$$
$$=\int_0^a (-x^2+ax)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^a=\frac{a^3}{6}$$

즉, $\dfrac{a^3}{6}=\dfrac{32}{3}$이므로 $a^3=64 \qquad \therefore\ a=4\,(\because\ a$는 실수)

$a=4$를 ㉢에 대입하면 $k=6$

따라서 $g(x)=-2x+16$이므로

$g(-k)=g(-6)=12+16=28$

idea

15 답 ①

$f(x)=f(-x)$, $g(x)=-g(-x)$에서

$h(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)\times\{-g(x)\}$

$\quad=-f(x)g(x)=-h(x)$ …… ㉠

따라서 다항함수 $h(x)$는 홀수 차수의 항만 있으므로 $h'(x)$는 짝수 차수의 항 또는 상수항만 있고, $x^3h'(x)$, $xh'(x)$는 홀수 차수의 항만 있다.

$$\therefore\ \int_{-5}^5 (x^3+2x+3)h'(x)\,dx$$
$$=\int_{-5}^5 x^3h'(x)\,dx+2\int_{-5}^5 xh'(x)\,dx+3\int_{-5}^5 h'(x)\,dx$$
$$=0+0+3\times2\int_0^5 h'(x)\,dx$$
$$=6\Big[h(x)\Big]_0^5=6\{h(5)-h(0)\}$$

즉, $6\{h(5)-h(0)\}=30$이므로

$h(5)-h(0)=5$ …… ㉡

한편 ㉠에서 $h(-x)=-h(x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$h(0)=-h(0) \qquad \therefore\ h(0)=0$

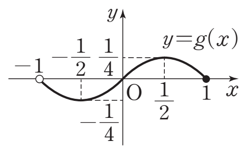
이를 ㉡에 대입하면 $h(5)=5$

$\therefore\ h(-5)=-h(5)=-5$

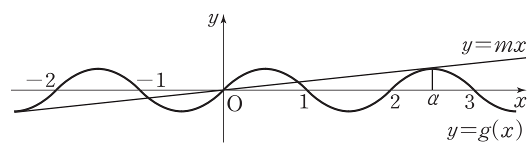
16 답 43

(가), (나)에서 $g(x)=\begin{cases} x^2+x & (-1<x<0) \\ -x^2+x & (0\le x\le1) \end{cases}$이므로

$-1<x\le1$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 (다)에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같고, 원점을 지나고 곡선 $y=g(x)$와 열린구간 $(2,\ 3)$에서 접하는 직선을 $y=mx$(m은 상수)라 하자.



이때 직선 $y=mx$의 기울기는 원점과 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$을 지나는 직선의 기울기보다 작으므로 $m<\dfrac{1}{2}$

열린구간 $(2,\ 3)$에서 $g(x)=-(x-2)^2+(x-2)=-x^2+5x-6$이므로 이차방정식 $-x^2+5x-6=mx$, 즉 $x^2+(m-5)x+6=0$이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+(m-5)x+6=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(m-5)^2-24=0$

$m^2-10m+1=0 \qquad \therefore\ m=5-2\sqrt{6}\ \left(\because\ m<\dfrac{1}{2}\right)$

이를 $x^2+(m-5)x+6=0$에 대입하면

$x^2-2\sqrt{6}x+6=0$, $(x-\sqrt{6})^2=0 \qquad \therefore\ x=\sqrt{6}$

즉, $\alpha=\sqrt{6}$이므로

$$\int_0^\alpha g(x)\,dx=\int_0^{\sqrt{6}} g(x)\,dx=\int_0^2 g(x)\,dx+\int_2^{\sqrt{6}} g(x)\,dx$$

이때 $\int_0^2 g(x)dx=0$이므로

$$\int_0^\alpha g(x)\,dx=\int_2^{\sqrt{6}} g(x)dx=\int_2^{\sqrt{6}} (-x^2+5x-6)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-6x\right]_2^{\sqrt{6}}=\frac{59}{3}-8\sqrt{6}$$

따라서 $p=\dfrac{59}{3}$, $q=-8$이므로

$3p+2q=3\times\dfrac{59}{3}+2\times(-8)=43$

17 답 ⑤

$g(x)=f(x)+f(-x)$라 하면 $g(-x)=f(-x)+f(x)=g(x)$

즉, 함수 $g(x)$는 짝수 차수의 항 또는 상수항만 있다.

(가)의 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x^2}=3$에서 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x^2}=3$이므로 $g(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

(나)에서 $g(0)=f(0)+f(0)=-1+(-1)=-2$

따라서 $g(x)=3x^2-2$이므로

$f(x)+f(-x)=3x^2-2$

한편 다항함수 $f(x)$의 짝수 차수의 항과 상수항으로 이루어진 함수를 $h_1(x)$, 홀수 차수의 항으로 이루어진 함수를 $h_2(x)$라 하면

$f(x)=h_1(x)+h_2(x)$이고 $h_1(-x)=h_1(x)$, $h_2(-x)=-h_2(x)$이므로

$f(-x)=h_1(-x)+h_2(-x)=h_1(x)-h_2(x)$

$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx=\int_{-3}^{3}\{h_1(x)+h_2(x)\}\,dx=2\int_{0}^{3}h_1(x)\,dx$이고,

$\int_{-3}^{3} f(-x)\,dx=\int_{-3}^{3}\{h_1(x)-h_2(x)\}\,dx=2\int_{0}^{3}h_1(x)\,dx$이므로

$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx=\int_{-3}^{3} f(-x)\,dx$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-3}^{3}\{f(x)+f(-x)\}\,dx&=\int_{-3}^{3} f(x)\,dx+\int_{-3}^{3} f(-x)\,dx\\&=2\int_{-3}^{3} f(x)\,dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-3}^{3} f(x)\,dx&=\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}\{f(x)+f(-x)\}\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}(3x^2-2)\,dx\\&=\frac{1}{2}\times 2\int_{0}^{3}(3x^2-2)\,dx\\&=\Big[x^3-2x\Big]_0^3=21\end{aligned}$$

18 답 65

(가)에서 $x^3-2x+x\int_a^x f(t)\,dt=0$, 즉 $x\int_a^x f(t)\,dt=-x^3+2x$이므로

$\int_a^x f(t)\,dt=-x^2+2$

양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=-2x$

이때 $x^3-2x+x\int_a^x f(t)\,dt=0$에 $x=a$를 대입하면

$a^3-2a=0$, $a(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})=0$ $\quad\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

따라서 $\int_a^2 f(x)\,dx=\int_{\sqrt{2}}^{2}(-2x)\,dx=\Big[-x^2\Big]_{\sqrt{2}}^{2}=-2$이므로

(나)에서 $g(x)=3x^2-2x\int_0^2 g(x)\,dx-2$

$\int_0^2 g(x)\,dx=p$ (p는 상수)라 하면 $g(x)=3x^2-2px-2$이므로

$\int_0^2 g(x)\,dx=\int_0^2(3x^2-2px-2)\,dx=\Big[x^3-px^2-2x\Big]_0^2=4-4p$

즉, $4-4p=p$에서 $p=\frac{4}{5}$

따라서 $g(x)=3x^2-\frac{8}{5}x-2$이므로

$g(a^2+3)=g(5)=75-8-2=65$

19 답 0

$f(x)=3x^2+ax+\int_1^x g(t)\,dt$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=3+a$ ⋯⋯ ㉠

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+3x-3$ ⋯⋯ ㉡

양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=0$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉢에서 $3+a=0$ $\quad\therefore a=-3$ ······ 배점 **40%**

따라서 $f(x)=3x^2-3x+\int_1^x g(t)\,dt$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=6x-3+g(x)$

$\therefore g(x)=f'(x)-6x+3$ ⋯⋯ ㉣ ······ 배점 **20%**

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+3$

양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=3$ ······ 배점 **20%**

따라서 ㉣에서

$g(1)=f'(1)-6+3=3-3=0$ ······ 배점 **20%**

20 답 $\frac{27}{4}$

$3f(x)=\int_1^x \frac{\{f'(t)\}^2}{t(t+2)}\,dt+6$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$3f(1)=6$ $\quad\therefore f(1)=2$

$3f(x)=\int_1^x \frac{\{f'(t)\}^2}{t(t+2)}\,dt+6$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3f'(x)=\frac{\{f'(x)\}^2}{x(x+2)}$, $\{f'(x)\}^2=3x(x+2)f'(x)$

$f'(x)\{f'(x)-(3x^2+6x)\}=0$

$\therefore f'(x)=0$ 또는 $f'(x)=3x^2+6x$

(i) $f'(x)=0$일 때,

$f(x)=\int f'(x)\,dx=C_1$

이때 $f(1)=2$에서 $C_1=2$

$\therefore f(x)=2$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^{2} f(x)\,dx&=\int_{-1}^{2}2\,dx\\&=\Big[2x\Big]_{-1}^{2}=4-(-2)=6\end{aligned}$$

(ii) $f'(x)=3x^2+6x$일 때,

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2+6x)\,dx\\&=x^3+3x^2+C_2\end{aligned}$$

이때 $f(1)=2$에서

$1+3+C_2=2$ $\quad\therefore C_2=-2$

$\therefore f(x)=x^3+3x^2-2$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^{2} f(x)\,dx&=\int_{-1}^{2}(x^3+3x^2-2)\,dx\\&=\Big[\frac{1}{4}x^4+x^3-2x\Big]_{-1}^{2}\\&=8-\frac{5}{4}=\frac{27}{4}\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$의 최댓값은 $\frac{27}{4}$이다.

21 답 ②

$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt+f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)+f'(x)$ ⋯⋯ ㉠

$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt+f(x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g(0)=f(0)$ ⋯⋯ ㉡

(가)에서 $g'(0)=0$, $g(0)=0$이므로 ㉠, ㉡에서

$f(0)+f'(0)=0$, $f(0)=0$

$\therefore f'(0)=0$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=0$, $f(0)=0$이므로

$f(x)=x^2(x+a)=x^3+ax^2$ (a는 상수)이라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax$

㉠에서

$g'(x)=(x^3+ax^2)+(3x^2+2ax)$

$\quad\quad=x^3+(a+3)x^2+2ax$

㈏에서 $g'(-x)=-g'(x)$이므로 $g'(x)$는 홀수 차수의 항만 있다.

즉, $a+3=0$이므로 $a=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2$이므로

$f(2)=8-12=-4$

22 답 8

$g(x)=x^2\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x t^2 f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=2x\int_0^x f(t)\,dt+x^2f(x)-x^2f(x)$

$\therefore g'(x)=2x\int_0^x f(t)\,dt$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $\int_0^x f(t)\,dt=0$

이때 $h(x)=\int_0^x f(t)\,dt$라 하면 $h(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$이고, ㈏에서 방정식 $g'(x)=0$의 모든 실근이 0, 3이므로 방정식 $h(x)=0$의 모든 실근도 0, 3이어야 한다.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

따라서 $h(x)$는 다음과 같은 경우로 나눌 수 있다.

(i) $h(x)=x^2(x-3)$인 경우

$g'(x)=2xh(x)=2x^3(x-3)$

이때 $g'(0)=0$, $g'(3)=0$이고, $x=0$과 $x=3$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=3$에서 극값을 갖게 되어 ㈎를 만족시키지 않는다.

(ii) $h(x)=x(x-3)^2$인 경우

$g'(x)=2xh(x)=2x^2(x-3)^2$

이때 $g'(0)=0$, $g'(3)=0$이지만 $x=0$과 $x=3$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않게 되어 ㈎를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $h(x)=x(x-3)^2=x^3-6x^2+9x$이므로

$\int_0^x f(t)\,dt=x^3-6x^2+9x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-12x+9$

$f(x)=0$에서 $3x^2-12x+9=0$

$3(x-1)(x-3)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

이때 $|f(x)|=\begin{cases} 3x^2-12x+9 & (x\le 1 \text{ 또는 } x\ge 3) \\ -3x^2+12x-9 & (1\le x\le 3)\end{cases}$이므로

$$\int_0^3 |f(x)|\,dx=\int_0^1 (3x^2-12x+9)\,dx+\int_1^3 (-3x^2+12x-9)\,dx$$
$$=\Big[x^3-6x^2+9x\Big]_0^1+\Big[-x^3+6x^2-9x\Big]_1^3$$
$$=4+4=8$$

23 답 ①

$F'(x)=f(x)$라 하면 ㈎에서

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)=f(1)$$

$\therefore f(1)=-108$

㈏에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}$의 값이 모두 존재한다.

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=0$에서 $f(0)=0$

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}$에서 $x\to -1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to -1}f(x)=0$에서 $f(-1)=0$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}+\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=f'(0)+f'(-1)$$

$\therefore f'(0)+f'(-1)=-27$

삼차함수 $f(x)$에서 $f(0)=0$, $f(-1)=0$이므로

$f(x)=x(x+1)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f'(x)=(x+1)(ax+b)+x(ax+b)+ax(x+1)$

$f(1)=-108$이므로 $2(a+b)=-108$

$\therefore a+b=-54 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(0)+f'(-1)=-27$이므로

$b+(a-b)=-27 \quad \therefore a=-27$

이를 ㉠에 대입하면

$-27+b=-54 \quad \therefore b=-27$

즉, $f(x)=x(x+1)(-27x-27)=-27x(x+1)^2$이므로

$f'(x)=-27(x+1)^2-54x(x+1)$

$\quad\quad=-27(x+1)(3x+1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0 극소	↗	4 극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{3}$에서 극댓값 4, $x=-1$에서 극솟값 0을 가지므로 극댓값과 극솟값의 합은

$4+0=4$

24 답 10

㈎의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x$

$xf'(x)=4x \quad \therefore f'(x)=4$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 4\,dx=4x+C_1$

(가)의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)\,dt=f(1)-2-1$

$0=f(1)-3 \qquad \therefore f(1)=3$

즉, $4+C_1=3$에서 $C_1=-1$

$\therefore f(x)=4x-1$

$\therefore F(x)=\int f(x)\,dx=\int (4x-1)\,dx=2x^2-x+C_2$

(나)의 좌변에서 $f(x)G(x)+F(x)g(x)=\{F(x)G(x)\}'$이므로

$\{F(x)G(x)\}'=8x^3+3x^2+1$

$\therefore F(x)G(x)=\int (8x^3+3x^2+1)\,dx$

$\qquad\qquad =2x^4+x^3+x+C_3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $F(x)=2x^2-x+C_2$이고 $G(x)$는 다항함수이므로 $G(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$G(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

㉠에서 $(2x^2-x+C_2)(x^2+ax+b)=2x^4+x^3+x+C_3$

이 식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 x^3의 계수를 비교하면

$2a-1=1$에서 $a=1$

$\therefore G(x)=x^2+x+b$

$\therefore \int_1^3 g(x)\,dx=\Big[G(x)\Big]_1^3=G(3)-G(1)$

$\qquad =(9+3+b)-(1+1+b)$ ⟶ b의 값을 구하지 않아도 정적분의 값을 구할 수 있다.

$\qquad =10$

idea

25 답 38

$g(x)=\int_0^x (t^2+t-6)f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=(x^2+x-6)f(x)$

$h(x)=|g'(x)|=|(x+3)(x-2)(x^2+ax+b)|$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표를 구하면

$x=-3$ 또는 $x=2$ 또는 $x^2+ax+b=0$

함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 -3을 중근으로 갖거나 2를 중근으로 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 -3을 중근으로 가질 때,

-3을 중근으로 갖고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$(x+3)^2=0 \qquad \therefore x^2+6x+9=0$

따라서 $a=6$, $b=9$이므로 $ab=54$

(ii) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 2를 중근으로 가질 때,

2를 중근으로 갖고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-2)^2=0 \qquad \therefore x^2-4x+4=0$

따라서 $a=-4$, $b=4$이므로 $ab=-16$

(i), (ii)에서 모든 ab의 값의 합은

$54+(-16)=38$

26 답 ⑤

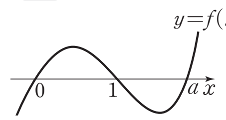
최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$를 $f(x)=x(x-1)(x-a)$ (a는 상수)라 하자.

ㄱ. $g(0)=0$이면 $\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 |f(x)|\,dx=0$이므로

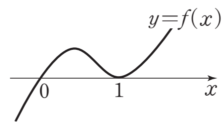
$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 |f(x)|\,dx$

$0\le x\le 1$일 때 $f(x)\ge 0$이어야 하므로 이를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a>1$



$a=1$



$x\le 0$일 때 $f(x)\le 0$이므로 $\int_{-1}^0 f(x)\,dx<0$

$\therefore g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)\,dx-\int_0^1 |f(x)|\,dx<0$

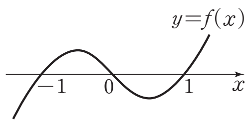
ㄴ. $g(-1)>0$이면

$\int_{-1}^0 f(x)\,dx-\int_0^1 |f(x)|\,dx>0$

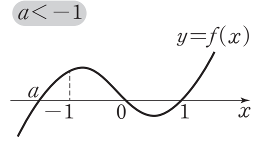
$\therefore \int_{-1}^0 f(x)\,dx>\int_0^1 |f(x)|\,dx>0$ ($\because |f(x)|\ge 0$)

$-1\le x\le 0$일 때 $f(x)\ge 0$이어야 하므로 이를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a=-1$



$a<-1$



이때 $a=-1$이면 $\int_{-1}^0 f(x)\,dx=\int_0^1 |f(x)|\,dx$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a<-1$이므로 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.

ㄷ. ㄴ에서 $g(-1)>0$이면 $0\le x\le 1$일 때 $f(x)\le 0$이므로

$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)\,dx-\int_0^1 |f(x)|\,dx$

$\qquad =\int_{-1}^0 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx$

$\qquad =\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 x(x-1)(x-a)\,dx$

$\qquad =\int_{-1}^1 \{x^3-(a+1)x^2+ax\}\,dx$

$\qquad =2\int_0^1 \{-(a+1)x^2\}\,dx$

$\qquad =2\Big[-\dfrac{a+1}{3}x^3\Big]_0^1=-\dfrac{2(a+1)}{3}$

$g(-1)>1$이면 $-\dfrac{2(a+1)}{3}>1$

$a+1<-\dfrac{3}{2} \qquad \therefore a<-\dfrac{5}{2}$

$\therefore g(0)=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 |f(x)|\,dx$

$\qquad =\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx$

$\qquad =2\int_0^1 f(x)\,dx=2\int_0^1 x(x-1)(x-a)\,dx$

$\qquad =2\int_0^1 \{x^3-(a+1)x^2+ax\}\,dx$

$\qquad =2\Big[\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{a+1}{3}x^3+\dfrac{a}{2}x^2\Big]_0^1$

$\qquad =2\Big(\dfrac{1}{4}-\dfrac{a+1}{3}+\dfrac{a}{2}\Big)$

$\qquad =\dfrac{2a-1}{6}<-1 \; \Big(\because a<-\dfrac{5}{2}\Big)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

01 4	02 4	03 ⑤	04 ⑤	05 ②	06 1
07 2	08 ⑤	09 32	10 30		

01 답 4

1단계 n의 값 구하기

$f(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 $F(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이다.

이때 사차함수 $F(x)$가 극댓값을 가지므로 방정식 $F'(x)=0$, 즉 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$에서 $4x^3-8x-4n=0$

$\therefore\ 4x^3-8x=4n$

이 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지므로 함수 $y=4x^3-8x$의 그래프와 직선 $y=4n$이 서로 다른 세 점에서 만난다.

$h(x)=4x^3-8x$라 하면

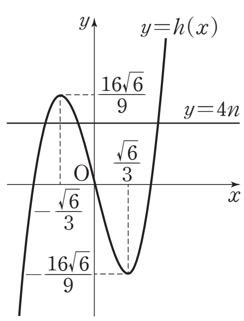
$h'(x)=12x^2-8$

$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	$\frac{16\sqrt{6}}{9}$ 극대	↘	$-\frac{16\sqrt{6}}{9}$ 극소	↗

함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 직선 $y=4n$과 서로 다른 세 점에서 만나려면



$-\frac{16\sqrt{6}}{9}<4n<\frac{16\sqrt{6}}{9}$

$\therefore\ -\frac{4\sqrt{6}}{9}<n<\frac{4\sqrt{6}}{9}$

이때 $1<\frac{4\sqrt{6}}{9}=\sqrt{\frac{96}{81}}<2$이고 n은 자연수이므로

$n=1$

2단계 k의 값 구하기

$f(x)=4x^3-8x-4$이므로

$F(x)=\int f(x)\,dx$

$=\int (4x^3-8x-4)\,dx$

$=x^4-4x^2-4x+C$

$f(x)=4x^3-8x-4=4(x+1)(x^2-x-1)$에서

$f(x)=0$인 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘	$1+C$ 극소	↗	극대	↘	극소	↗

$F(x)=x^4-4x^2-4x+C$

$=\underline{(x^2-x-1)(x^2+x-2)-5x-2+C}$

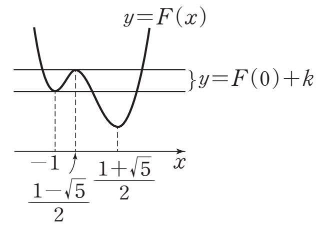
└→ $F(x)$를 x^2-x-1로 나눈 몫과 나머지로 나타낸다.

이고 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$일 때, $x^2-x-1=0$이므로

$F\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{5\sqrt{5}-9}{2}+C$, $F\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{-5\sqrt{5}-9}{2}+C$

$\therefore\ F\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)<F(-1)<F\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

따라서 함수 $y=F(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)=\begin{cases} F(x) & (x\le a \text{ 또는 } x\ge b) \\ F(0)+k & (a<x<b) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하지 않은 x의 개수가 1이려면

$F(0)+k=F(-1)$ 또는 $F(0)+k=F\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

이때 $F(0)=C$, $F(-1)=1+C$, $F\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{5\sqrt{5}-9}{2}+C$에서

$k=1$ 또는 $k=\frac{5\sqrt{5}-9}{2}$

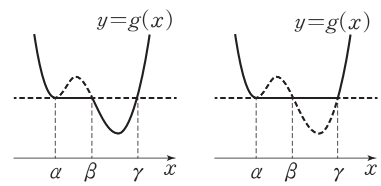
3단계 순서쌍 $(n,\ a,\ b,\ k)$의 개수 구하기

(i) $k=1$일 때,

함수 $y=F(x)$의 그래프와 직선 $y=F(0)+k$가 만나는 세 점의 x좌표를 α, β, $\gamma\ (\alpha<\beta<\gamma)$라 할 때, 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1이려면

$a=\alpha$, $b=\beta$ 또는 $a=\alpha$, $b=\gamma$

└→ $x=\beta$에서만 미분가능하지 않다. └→ $x=\gamma$에서만 미분가능하지 않다.



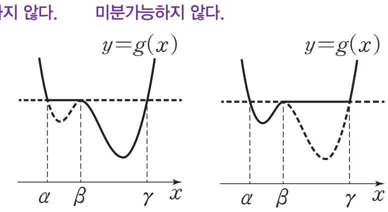
따라서 순서쌍 $(n,\ a,\ b,\ k)$의 개수는 2이다.

(ii) $k=\frac{5\sqrt{5}-9}{2}$일 때,

함수 $y=F(x)$의 그래프와 직선 $y=F(0)+k$가 만나는 세 점의 x좌표를 α, β, $\gamma\ (\alpha<\beta<\gamma)$라 할 때, 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1이려면

$a=\alpha$, $b=\beta$ 또는 $a=\beta$, $b=\gamma$

└→ $x=\alpha$에서만 미분가능하지 않다. └→ $x=\gamma$에서만 미분가능하지 않다.



따라서 순서쌍 $(n,\ a,\ b,\ k)$의 개수는 2이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 $(n,\ a,\ b,\ k)$의 개수는

$2+2=4$

02 답 4

1단계 $g(x)$의 식 세우기

(가)에서 주어진 등식의 양변에 $x=2a$를 대입하면

$2a|g(2a)|=0 \qquad \therefore\ g(2a)=0\ (\because\ a>0)$

이때 삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0이므로

$g(x)=x(x-2a)(x+b)$ (b는 상수)라 하자.

함수 $(a-x)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$$\frac{d}{dx}\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt=(a-x)f(x)$$

함수 $\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $x|g(x)|$는 $x=2a$에서도 미분가능하다.

$a>0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2a+}\frac{x|g(x)|-2a|g(2a)|}{x-2a}&=\lim_{x\to 2a+}\frac{x|x(x-2a)(x+b)|}{x-2a}\\&=\lim_{x\to 2a+}x^2|x+b|\\&=4a^2|2a+b|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2a-}\frac{x|g(x)|-2a|g(2a)|}{x-2a}&=\lim_{x\to 2a-}\frac{x|x(x-2a)(x+b)|}{x-2a}\\&=\lim_{x\to 2a-}(-x^2|x+b|)\\&=-4a^2|2a+b|\end{aligned}$$

즉, $4a^2|2a+b|=-4a^2|2a+b|$이므로

$8a^2|2a+b|=0 \qquad \therefore\ b=-2a\ (\because\ a>0)$

$\therefore\ g(x)=x(x-2a)^2$

2단계 a의 값 구하기

$x<0$일 때 $g(x)<0$, $x\ge0$일 때 $g(x)\ge0$이므로

$$\begin{aligned}\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt&=x|g(x)|\\&=\begin{cases}-x^2(x-2a)^2 & (x<0)\\ x^2(x-2a)^2 & (x\ge0)\end{cases}\\&=\begin{cases}-x^4+4ax^3-4a^2x^2 & (x<0)\\ x^4-4ax^3+4a^2x^2 & (x\ge0)\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ (a-x)f(x)&=\begin{cases}-4x^3+12ax^2-8a^2x & (x<0)\\ 4x^3-12ax^2+8a^2x & (x>0)\end{cases}\\&=\begin{cases}-4x(x-a)(x-2a) & (x<0)\\ 4x(x-a)(x-2a) & (x>0)\end{cases}\end{aligned}$$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$f(x)=\begin{cases}4x(x-2a) & (x<0)\\ -4x(x-2a) & (x\ge0)\end{cases}$$

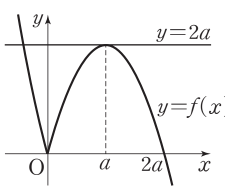
방정식 $g(f(x))=0$에서 $f(x)\{f(x)-2a\}^2=0$

$\therefore\ f(x)=0$ 또는 $f(x)=2a$

$f(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2a$

이때 (나)에서 방정식 $g(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로 방정식 $f(x)=2a$는 0, $2a$가 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2a$가 $x=0$, $x=2a$인 점이 아닌 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 그림과 같이 직선 $y=2a$는 점 $(a, f(a))$를 지나야 한다.



$f(a)=2a$에서

$-4a(a-2a)=2a$

$4a^2-2a=0$, $2a(2a-1)=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}\ (\because\ a>0)$

3단계 $\int_{-2a}^{2a}f(x)\,dx$의 값 구하기

따라서 $f(x)=\begin{cases}4x(x-1) & (x<0)\\ -4x(x-1) & (x\ge0)\end{cases}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-2a}^{2a}f(x)\,dx&=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\\&=\int_{-1}^{0}4x(x-1)\,dx+\int_{0}^{1}\{-4x(x-1)\}\,dx\\&=\int_{-1}^{0}(4x^2-4x)\,dx+\int_{0}^{1}(-4x^2+4x)\,dx\\&=\left[\frac{4}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{1}\\&=\frac{10}{3}+\frac{2}{3}=4\end{aligned}$$

idea

03 답 ⑤

1단계 $f(x)$의 식 세우기

$$\begin{aligned}g(x)&=\frac{f(x)+|f(x)-t|}{2}\\&=\begin{cases}\dfrac{f(x)+\{f(x)-t\}}{2} & (f(x)\ge t)\\[2mm] \dfrac{f(x)-\{f(x)-t\}}{2} & (f(x)\le t)\end{cases}\\&=\begin{cases}f(x)-\dfrac{t}{2} & (f(x)\ge t)\\[2mm] \dfrac{t}{2} & (f(x)\le t)\end{cases}\end{aligned}$$

함수 $f(x)$가 삼차함수이므로 함수 $g(x)$는 $f(x)\ne t$인 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(가)에서 함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=n$, $x=2n$에서 미분가능하지 않으므로 $f(x)=t$인 x의 값이 0, n, $2n$이다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1이므로

$f(x)-t=-x(x-n)(x-2n)$

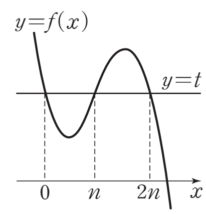
$\therefore\ f(x)=-x(x-n)(x-2n)+t$

2단계 $\int_0^2 g(x)\,dx$의 값의 합 구하기

$x\le0$ 또는 $n\le x\le 2n$에서 $f(x)\ge t$이고,

$0\le x\le n$ 또는 $x\ge 2n$에서 $f(x)\le t$이므로

$$g(x)=\begin{cases}f(x)-\dfrac{t}{2} & (x\le0\ \text{또는}\ n\le x\le 2n)\\[2mm] \dfrac{t}{2} & (0\le x\le n\ \text{또는}\ x\ge 2n)\end{cases}$$



(나)에서

$$\begin{aligned}\int_{n}^{2n}|f(x)-g(x)|\,dx&=\int_{n}^{2n}\left|f(x)-\left\{f(x)-\frac{t}{2}\right\}\right|dx\\&=\int_{n}^{2n}\frac{t}{2}\,dx\ (\because\ t\text{는 자연수})\\&=\left[\frac{t}{2}x\right]_{n}^{2n}\\&=tn-\frac{tn}{2}=\frac{tn}{2}\end{aligned}$$

즉, $\frac{tn}{2}=2$이므로 $tn=4$

이때 t, n은 자연수이므로

$t=1$, $n=4$ 또는 $t=2$, $n=2$ 또는 $t=4$, $n=1$

(ⅰ) $t=1$, $n=4$일 때,

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-\dfrac{1}{2} & (x\le 0 \text{ 또는 } 4\le x\le 8) \\ \dfrac{1}{2} & (0\le x\le 4 \text{ 또는 } x\ge 8)\end{cases}$$ 이므로

$$\int_0^2 g(x)\,dx=\int_0^2 \frac{1}{2}\,dx=\left[\frac{1}{2}x\right]_0^2=1$$

(ⅱ) $t=2$, $n=2$일 때,

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-1 & (x\le 0 \text{ 또는 } 2\le x\le 4) \\ 1 & (0\le x\le 2 \text{ 또는 } x\ge 4)\end{cases}$$ 이므로

$$\int_0^2 g(x)\,dx=\int_0^2 1\,dx=\Big[x\Big]_0^2=2$$

(ⅲ) $t=4$, $n=1$일 때,

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-2 & (x\le 0 \text{ 또는 } 1\le x\le 2) \\ 2 & (0\le x\le 1 \text{ 또는 } x\ge 2)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} -x(x-1)(x-2)+4-2 & (x\le 0 \text{ 또는 } 1\le x\le 2) \\ 2 & (0\le x\le 1 \text{ 또는 } x\ge 2)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} -x^3+3x^2-2x+2 & (x\le 0 \text{ 또는 } 1\le x\le 2) \\ 2 & (0\le x\le 1 \text{ 또는 } x\ge 2)\end{cases}$$

$$\therefore \int_0^2 g(x)\,dx=\int_0^1 2\,dx+\int_1^2(-x^3+3x^2-2x+2)\,dx$$

$$=\Big[2x\Big]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2+2x\right]_1^2$$

$$=2+\left(4-\frac{7}{4}\right)$$

$$=\frac{17}{4}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 모든 $\int_0^2 g(x)\,dx$의 값의 합은

$$1+2+\frac{17}{4}=\frac{29}{4}$$

04 답 ⑤

1단계 $g(t)$의 식 세우기

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\ne 0$)라 하면

$$g(t)=\int_{-t}^{t} f(x)\,dx=\int_{-t}^{t}(ax^3+bx^2+cx+d)\,dx$$

$$=2\int_0^t (bx^2+d)\,dx=2\left[\frac{b}{3}x^3+dx\right]_0^t$$

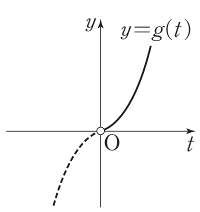
$$=2\left(\frac{b}{3}t^3+dt\right)=\frac{2}{3}bt^3+2dt$$

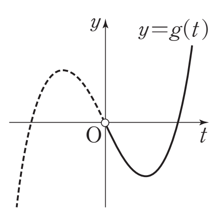
2단계 $g(t)$의 삼차항과 일차항의 계수의 부호 알기

(ⅰ) $b>0$일 때,

$g(t)=\frac{2}{3}bt^3+2dt=\frac{2}{3}bt\left(t^2+\frac{3d}{b}\right)$에서 함수 $y=g(t)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

ⓘ $d\ge 0$일 때, ⓘⓘ $d<0$일 때,





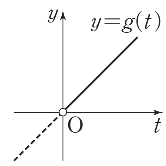
$d\ge 0$일 때 $t>0$에서 함수 $g(t)$는 최솟값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

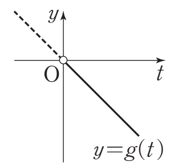
즉, $b>0$, $d<0$

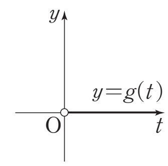
(ⅱ) $b=0$일 때,

$g(t)=2dt$이므로 함수 $y=g(t)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

ⓘ $d>0$일 때, ⓘⓘ $d<0$일 때, ⓘⓘⓘ $d=0$일 때,





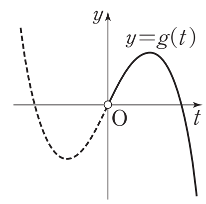


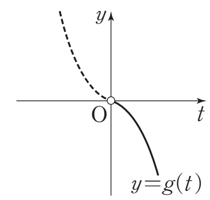
$d\ne 0$일 때 $t>0$에서 함수 $g(t)$는 최솟값을 갖지 않고, $d=0$일 때 최솟값이 0이므로 모든 상수 d에 대하여 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $b<0$일 때,

$g(t)=\frac{2}{3}bt^3+2dt=\frac{2}{3}bt\left(t^2+\frac{3d}{b}\right)$에서 함수 $y=g(t)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

ⓘ $d>0$일 때, ⓘⓘ $d\le 0$일 때,





모든 상수 d에 대하여 $t>0$에서 함수 $g(t)$는 최솟값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$b>0$, $d<0$

3단계 $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$의 값 구하기

$g(t)=\frac{2}{3}bt^3+2dt$에서

$g'(t)=2bt^2+2d$

$g'(t)=0$인 t의 값은

$t=\sqrt{-\frac{d}{b}}$ ($\because$ $t>0$, $b>0$, $d<0$)

$t>0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\sqrt{-\frac{d}{b}}$	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$	$\frac{4d}{3}\sqrt{-\frac{d}{b}}$ 극소	$\nearrow$

함수 $g(t)$는 $t=\sqrt{-\frac{d}{b}}$에서 최솟값 $\frac{4d}{3}\sqrt{-\frac{d}{b}}$를 가지므로

$\sqrt{-\frac{d}{b}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{4d}{3}\sqrt{-\frac{d}{b}}=-4\sqrt{3}$

따라서 $\frac{4d}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-4\sqrt{3}$이므로

$d=-6$

이를 $\sqrt{-\frac{d}{b}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$에 대입하면

$\sqrt{\frac{6}{b}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{6}{b}=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore$ $b=8$

따라서 $g(t)=\frac{16}{3}t^3-12t$이므로

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx=g(3)=144-36=108$$

05 답 ②

1단계 a**의 값 구하기**

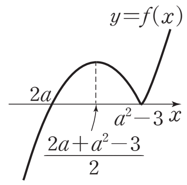
$f(x)=(x-2a)|x-a^2+3|$

$=\begin{cases} -(x-2a)(x-a^2+3) & (x\le a^2-3) \\ (x-2a)(x-a^2+3) & (x\ge a^2-3) \end{cases}$

(i) $2a<a^2-3$일 때,

$a^2-2a-3>0$, $(a+1)(a-3)>0$ $\quad\therefore\ a<-1$ 또는 $a>3$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2a+a^2-3}{2}$, $x=a^2-3$에서 극값을 가지므로 그 합은

$f\left(\frac{2a+a^2-3}{2}\right)+f(a^2-3)$

$=-\left(\frac{2a+a^2-3}{2}-2a\right)\left(\frac{2a+a^2-3}{2}-a^2+3\right)+0$

$=\frac{1}{4}(a^2-2a-3)^2$

즉, $\frac{1}{4}(a^2-2a-3)^2=36$에서 $(a^2-2a-3)^2=144$

이때 $a^2-2a-3>0$이므로

$a^2-2a-3=12$, $a^2-2a-15=0$

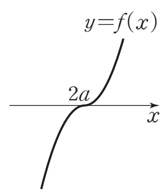
$(a+3)(a-5)=0$ $\quad\therefore\ a=-3$ 또는 $a=5$

(ii) $2a=a^2-3$일 때,

$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$ $\quad\therefore\ a=-1$ 또는 $a=3$

$f(x)=\begin{cases} -(x-2a)^2 & (x\le 2a) \\ (x-2a)^2 & (x\ge 2a) \end{cases}$이므로 함수

$y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

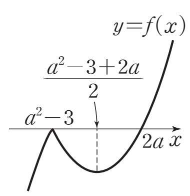


따라서 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

(iii) $2a>a^2-3$일 때,

$a^2-2a-3<0$, $(a+1)(a-3)<0$ $\quad\therefore\ -1<a<3$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=a^2-3$, $x=\frac{a^2-3+2a}{2}$에서 극값을 가지므로 그 합은

$f(a^2-3)+f\left(\frac{a^2-3+2a}{2}\right)$

이때 $f(a^2-3)=0$, $f\left(\frac{a^2-3+2a}{2}\right)<0$이므로

$f(a^2-3)+f\left(\frac{a^2-3+2a}{2}\right)<0$

즉, 함수 $f(x)$는 극값을 갖지만 그 합이 36일 수는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=-3$ 또는 $a=5$

2단계 $\int_{2a}^{a^2-3|a|} xf(x)\,dx$**의 값의 합 구하기**

$a=-3$일 때, $f(x)=\begin{cases} -(x+6)(x-6) & (x\le 6) \\ (x+6)(x-6) & (x\ge 6) \end{cases}$이므로

$\int_{2a}^{a^2-3|a|} xf(x)\,dx=\int_{-6}^{0} xf(x)\,dx$

$=\int_{-6}^{0}\{-x(x+6)(x-6)\}\,dx$

$=\int_{-6}^{0}(-x^3+36x)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+18x^2\right]_{-6}^{0}=-324$

$a=5$일 때, $\int_{2a}^{a^2-3|a|} xf(x)\,dx=\int_{10}^{10} xf(x)\,dx=0$

따라서 모든 $\int_{2a}^{a^2-3|a|} xf(x)\,dx$의 값의 합은

$-324+0=-324$

06 답 1

1단계 $f(x)$**의 극댓값과 극솟값 구하기**

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

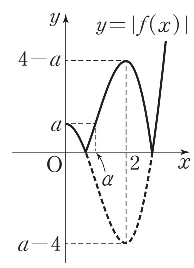
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	a 극대	↘	$a-4$ 극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 a, $x=2$에서 극솟값 $a-4$를 갖는다.

2단계 a**의 값의 범위에 따라** $\int_0^2 g(t)\,dt$**의 최솟값 구하기**

(i) $0<a<2$일 때,

$-4<a-4<-2$이므로 $x\ge 0$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $a<4-a$이므로 방정식 $-f(x)=a$의 해를 $x=\alpha\,(0<\alpha<2)$라 하면

$-\alpha^3+3\alpha^2-a=a$

$\therefore\ 2a=-\alpha^3+3\alpha^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$g(t)=\begin{cases} f(0) & (0\le t\le \alpha) \\ -f(t) & (\alpha\le t\le 2) \end{cases}$

$=\begin{cases} a & (0\le t\le \alpha) \\ -t^3+3t^2-a & (\alpha\le t\le 2) \end{cases}$

이므로

$\int_0^2 g(t)\,dt=\int_0^{\alpha} a\,dt+\int_{\alpha}^{2}(-t^3+3t^2-a)\,dt$

$=\Big[at\Big]_0^{\alpha}+\left[-\frac{1}{4}t^4+t^3-at\right]_{\alpha}^{2}$

$=a\alpha+\left\{4-2a-\left(-\frac{\alpha^4}{4}+\alpha^3-a\alpha\right)\right\}$

$=2a\alpha+4-2a+\frac{\alpha^4}{4}-\alpha^3$

$=(-\alpha^3+3\alpha^2)\alpha+4-(-\alpha^3+3\alpha^2)+\frac{\alpha^4}{4}-\alpha^3$ ($\because$ ㉠)

$=-\frac{3}{4}\alpha^4+3\alpha^3-3\alpha^2+4$

$h(\alpha)=-\frac{3}{4}\alpha^4+3\alpha^3-3\alpha^2+4$라 하면

$h'(\alpha)=-3\alpha^3+9\alpha^2-6\alpha=-3\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$

$h'(\alpha)=0$인 α의 값은 $\alpha=1$ ($\because\ 0<\alpha<2$)

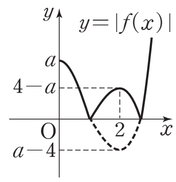
$0<\alpha<2$에서 함수 $h(\alpha)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

α	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$h'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$h(\alpha)$		↘	$\frac{13}{4}$ 극소	↗	

함수 $h(\alpha)=\int_0^2 g(t)\,dt$는 $\alpha=1$에서 최솟값 $\frac{13}{4}$을 갖는다.

(ii) $2\le a<4$일 때,

$-2\le a-4<0$이므로 $x\ge0$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $4-a\le a$이므로 $0\le t\le2$에서

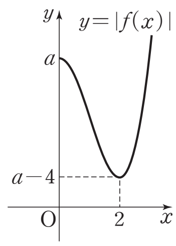
$g(t)=f(0)=a$

$\therefore \displaystyle\int_0^2 g(t)\,dt=\int_0^2 a\,dt=\Big[at\Big]_0^2=2a$

이때 $4\le 2a<8$이므로 $\displaystyle\int_0^2 g(t)\,dt$는 $a=2$에서 최솟값 4를 갖는다.

(iii) $a\ge4$일 때,

$a-4\ge0$이므로 $x\ge0$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



$0\le x\le2$에서 $|f(x)|$가 감소하므로 $0\le t\le2$에서

$g(t)=f(0)=a$

$\therefore \displaystyle\int_0^2 g(t)\,dt=\int_0^2 a\,dt=\Big[at\Big]_0^2=2a$

이때 $2a\ge8$이므로 $\displaystyle\int_0^2 g(t)\,dt$는 $a=4$에서 최솟값 8을 갖는다.

(i), (ii), (iii)에서 $\displaystyle\int_0^2 g(t)\,dt$의 최솟값은 $\dfrac{13}{4}$이다.

3단계 양수 a의 값 구하기

따라서 $a=1$일 때 $\displaystyle\int_0^2 g(t)\,dt$의 값이 최소이므로 이때 a의 값은

㉠에서 $2a=-1+3$ $\quad\therefore a=1$

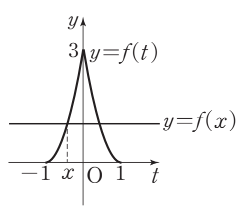
07 답 2

1단계 $-1\le x\le0$일 때, $g(x)$ 구하기

(i) $-1\le x\le0$일 때,

$f(x)=3(x+1)^2$

닫힌구간 $[-1,\ x]$에 속하는 모든 t에 대하여



$f(t)\le f(x)$

$\therefore f(x)-f(t)\ge0$

$$\begin{aligned}\therefore g(x)&=\int_{-1}^{x}|f(x)-f(t)|\,dt\\&=\int_{-1}^{x}\{f(x)-f(t)\}\,dt\\&=f(x)\int_{-1}^{x}dt-\int_{-1}^{x}f(t)\,dt\\&=f(x)\Big[t\Big]_{-1}^{x}-\int_{-1}^{x}3(t+1)^2\,dt\\&=(x+1)f(x)-\int_{-1}^{x}(3t^2+6t+3)\,dt\\&=3(x+1)^3-\Big[t^3+3t^2+3t\Big]_{-1}^{x}\\&=3x^3+9x^2+9x+3-(x^3+3x^2+3x+1)\\&=2x^3+6x^2+6x+2\end{aligned}$$

2단계 $0\le x\le1$일 때, $g(x)$ 구하기

(ii) $0\le x\le1$일 때,

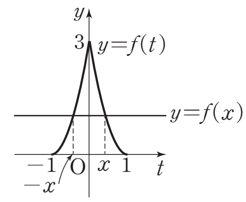
$f(x)=3(x-1)^2$

$$\begin{aligned}g(x)&=\int_{-1}^{x}|f(x)-f(t)|\,dt\\&=\int_{-1}^{-x}|f(x)-f(t)|\,dt+\int_{-x}^{x}|f(x)-f(t)|\,dt\qquad\cdots\cdots㉠\end{aligned}$$

$-1\le -x\le0$이므로 (i)에서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{-x}|f(x)-f(t)|\,dt&=2\times(-x)^3+6\times(-x)^2+6\times(-x)+2\\&=-2x^3+6x^2-6x+2\end{aligned}$$

닫힌구간 $[-x,\ x]$에 속하는 모든 t에 대하여



$f(t)\ge f(x)$ $\qquad\therefore f(x)-f(t)\le0$

$$\begin{aligned}\therefore &\int_{-x}^{x}|f(x)-f(t)|\,dt\\&=\int_{-x}^{x}\{f(t)-f(x)\}\,dt\\&=\int_{-x}^{x}f(t)\,dt-f(x)\int_{-x}^{x}dt\qquad\cdots\cdots㉡\end{aligned}$$

이때 함수 $y=f(t)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $f(-t)=f(t)$

$\displaystyle\int_{-x}^{x}f(t)\,dt=2\int_0^x f(t)\,dt$

㉡에서

$$\begin{aligned}\int_{-x}^{x}|f(x)-f(t)|\,dt&=2\int_0^x f(t)\,dt-f(x)\int_{-x}^{x}dt\\&=2\int_0^x 3(t-1)^2\,dt-f(x)\Big[t\Big]_{-x}^{x}\\&=2\int_0^x(3t^2-6t+3)\,dt-2xf(x)\\&=2\Big[t^3-3t^2+3t\Big]_0^x-2x\times3(x-1)^2\\&=2(x^3-3x^2+3x)-(6x^3-12x^2+6x)\\&=-4x^3+6x^2\end{aligned}$$

따라서 ㉠에서

$$\begin{aligned}g(x)&=-2x^3+6x^2-6x+2+(-4x^3+6x^2)\\&=-6x^3+12x^2-6x+2\end{aligned}$$

3단계 $\displaystyle\int_{-1}^{1}g(x)\,dx$의 값 구하기

(i), (ii)에서 $g(x)=\begin{cases}2x^3+6x^2+6x+2 & (-1\le x\le0)\\-6x^3+12x^2-6x+2 & (0\le x\le1)\end{cases}$

$$\begin{aligned}\therefore &\int_{-1}^{1}g(x)\,dx\\&=\int_{-1}^{0}(2x^3+6x^2+6x+2)\,dx+\int_0^1(-6x^3+12x^2-6x+2)\,dx\\&=\Big[\frac12x^4+2x^3+3x^2+2x\Big]_{-1}^{0}+\Big[-\frac32x^4+4x^3-3x^2+2x\Big]_0^1\\&=-\Big(-\frac12\Big)+\frac32=2\end{aligned}$$

08 답 ⑤

1단계 $f'(x)$의 최고차항의 계수의 범위 구하기

(나)에서

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x\{2-|f'(t)-2|\}\,dt\\&=\int_0^x 2\,dt-\int_0^x|f'(t)-2|\,dt\\&=\Big[2t\Big]_0^x-\int_0^x|f'(t)-2|\,dt\\&=2x-\int_0^x|f'(t)-2|\,dt\end{aligned}$$

$\therefore f(x)-2x=-\displaystyle\int_0^x|f'(t)-2|\,dt\qquad\cdots\cdots㉠$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-2=-|f'(x)-2|$

$f'(x)-2\le 0$이므로 $f'(x)\le 2$ …… ㉡

한편 ㈎에서 삼차함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(x)=ax(x-2)=ax^2-2ax=a(x-1)^2-a\ (a\ne 0)$라 하자.

㉡에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 2$이므로 이차함수 $f'(x)$의 최댓값이 2보다 작거나 같다.

따라서 $a<0$이고, $-a\le 2$이므로

$-2\le a<0$

2단계 $3M$**의 최댓값 구하기**

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (ax^2-2ax)\,dx$$
$$=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C$$

이때 $f(0)=0$에서 $C=0$

$\therefore\ f(x)=\frac{a}{3}x^3-ax^2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0 극소	↗	$-\frac{4}{3}a$ 극대	↘

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $-\frac{4}{3}a$를 가지므로

$M=-\frac{4}{3}a$

$\therefore\ 3M=-4a$

이때 $-2\le a<0$이므로

$0<-4a\le 8$

따라서 $3M$의 최댓값은 8이다.

09 답 32

1단계 $g'(x)$**의 식 세우기**

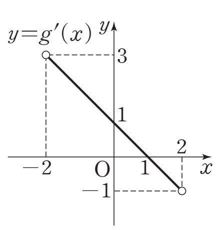
㈏에서 $|x|<2$일 때, $g(x)=\int_0^x(-t+a)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=-x+a$

㈐에서 $g'(1)=0$, $g'(b)=0$

$g'(1)=0$에서 $-1+a=0$ $\quad\therefore\ a=1$

따라서 $|x|<2$일 때, $g'(x)=-x+1$이므로 함수 $y=g'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $|x|<2$에서 $g'(x)=0$인 x의 값은 1뿐이므로 $x=1$에서만 극값을 갖는다.

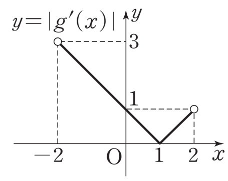
$\therefore\ |b|\ge 2$ $x=b$에서 극값을 가지므로 $x=b$는 $|x|\ge 2$인 범위에 있다.

㈏에서 $|x|\ge 2$일 때, $|g'(x)|=f(x)$이므로

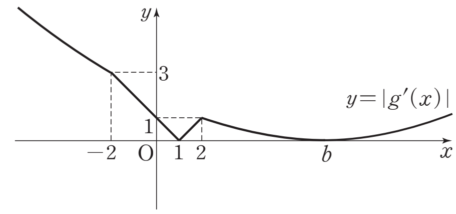
$f(x)\ge 0$

이때 $f(b)=|g'(b)|=0$이므로 $|x|\ge 2$에서 이차함수 $\underbrace{y=|g'(x)|}_{y=f(x)}$의 그래프는 $x=b$인 점에서 x축과 만나고, $x\ne b$에서는 x축보다 위쪽에 있다. …… ㉠

$|x|<2$에서 함수 $y=|g'(x)|=|-x+1|$의 그래프는 그림과 같고, ㈎에서 함수 $g'(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $|g'(x)|$도 실수 전체의 집합에서 연속이다.



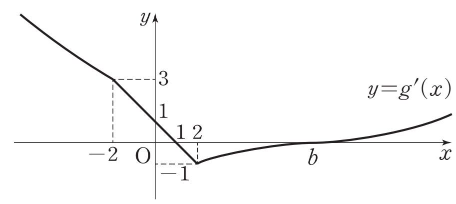
따라서 함수 $|g'(x)|$는 $x=-2$, $x=2$에서도 연속이고 $|x|\ge 2$에서 이차함수 $y=|g'(x)|$의 그래프가 ㉠을 만족시키려면 그림과 같이 $x=b\ (b>2)$인 점에서 x축에 접해야 한다.



$|x|\ge 2$에서 함수 $|g'(x)|$의 최고차항의 계수를 $m\ (m>0)$이라 하면

$|g'(x)|=m(x-b)^2$

실수 전체의 집합에서 함수 $g'(x)$가 연속이려면 $|x|<2$일 때, 함수 $y=g'(x)$, 즉 $y=-x+1$의 그래프에 대하여 그림과 같이 $2\le x<b$에서 $g'(x)=-f(x)$이어야 한다.



$$\therefore\ g'(x)=\begin{cases} m(x-b)^2 & (x\le -2 \text{ 또는 } x\ge b) \\ -x+1 & (-2<x<2) \\ -m(x-b)^2 & (2\le x<b)\end{cases}$$

2단계 k**의 값 구하기**

함수 $g'(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -2+}g'(x)=\lim_{x\to -2-}g'(x)=g'(-2)$에서

$\lim_{x\to -2+}(-x+1)=\lim_{x\to -2-}m(x-b)^2=m(-2-b)^2$

$2+1=m(-2-b)^2$ $\quad\therefore\ m(b+2)^2=3$ …… ㉡

함수 $g'(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2+}g'(x)=\lim_{x\to 2-}g'(x)=g'(2)$에서

$\lim_{x\to 2+}\{-m(x-b)^2\}=\lim_{x\to 2-}(-x+1)=-m(2-b)^2$

$-m(2-b)^2=-2+1$ $\quad\therefore\ m(b-2)^2=1$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $m(b+2)^2=3m(b-2)^2$

$b^2+4b+4=3b^2-12b+12\ (\because\ m>0)$

$b^2-8b+4=0$ $\quad\therefore\ b=4+2\sqrt{3}\ (\because\ b>2)$ …… ㉣

㈏에서 $g(0)=\int_0^0(-t+1)\,dt=0$

k의 값의 범위를 나누어 $g(k)=0$을 만족시키는 실수 k의 값을 구해 보자.

(i) $k<0$일 때,

$x\le 0$에서 $g'(x)>0$이므로 함수 $g(x)$는 증가한다.

이때 $g(0)=0$이므로 $x<0$에서 $g(x)<0$

따라서 $g(k)=0$을 만족시키는 k의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $0\le k\le 2$일 때,

$g(0)=0$이므로

$g(k)=\int_0^k g'(t)\,dt=\int_0^k(-t+1)\,dt=\left[-\frac{t^2}{2}+t\right]_0^k=-\frac{k^2}{2}+k$

$-\dfrac{k^2}{2}+k=0$에서 $-\dfrac{1}{2}k(k-2)=0$

$\therefore$ $k=0$ 또는 $k=2$

(iii) $k>2$일 때,

$2<x<b$에서 $g'(x)<0$이므로 $g(k)=\int_0^k g'(t)\,dt=0$이려면 $k>b$ 이어야 한다.

$g(0)=0$이므로

$$g(k)=\int_0^k g'(t)\,dt=\int_0^2 g'(t)\,dt+\int_2^b g'(t)\,dt+\int_b^k g'(t)\,dt$$
$$=0+\int_2^b \{-m(t-b)^2\}\,dt+\int_b^k m(t-b)^2\,dt$$
$$=-m\int_2^b (t^2-2bt+b^2)\,dt+m\int_b^k (t^2-2bt+b^2)\,dt$$
$$=-m\Big[\frac{t^3}{3}-bt^2+b^2t\Big]_2^b+m\Big[\frac{t^3}{3}-bt^2+b^2t\Big]_b^k$$
$$=-\frac{m}{3}(b^3-6b^2+12b-8)+\frac{m}{3}(k^3-3k^2b+3kb^2-b^3)$$
$$=-\frac{m}{3}(b-2)^3+\frac{m}{3}(k-b)^3$$

$-\dfrac{m}{3}(b-2)^3+\dfrac{m}{3}(k-b)^3=0$에서 $(k-b)^3=(b-2)^3$ ($\because$ $m>0$)

$k-b$, $b-2$는 모두 실수이므로 $k-b=b-2$

$\therefore$ $k=2b-2=6+4\sqrt{3}$ ($\because$ ㉣)

(i), (ii), (iii)에서 $k=0$ 또는 $k=2$ 또는 $k=6+4\sqrt{3}$

3단계 **$p\times q$의 값 구하기**

모든 실수 k의 값의 합은 $0+2+(6+4\sqrt{3})=8+4\sqrt{3}$

따라서 $p=8$, $q=4$이므로

$p\times q=32$

10 답 30

1단계 **함수 $y=f(x)$의 그래프 그리기**

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$라 하면 $F(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이다.

$$g(x)=\begin{cases} F(x)-4 & (x<2) \\ -F(x)+4 & (x\ge 2)\end{cases}$$

(가)의 $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{g(x)-4}{x-2}=g'(0)$에서 $x\to 2-$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 2-}\{g(x)-4\}=0$에서 $\lim\limits_{x\to 2-}\{F(x)-8\}=0$

$F(2)-8=0$ $\quad\therefore$ $F(2)=8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{g(x)-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{F(x)-8}{x-2}=F'(2)=f(2)$,

$\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{g(x)+4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{-\{F(x)-8\}}{x-2}=-F'(2)=-f(2)$,

$g'(0)=F'(0)=f(0)$

(가)에서 $f(2)=-f(2)=f(0)$이므로 $f(2)=f(0)=0$

$f(x)=ax(x-2)(x-b)$ (a, b는 상수, $a>0$)라 하면

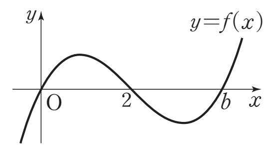
$f(x)=a\{x^3-(b+2)x^2+2bx\}$에서

$f'(x)=a\{3x^2-2(b+2)x+2b\}$

$f'(2)=a(-2b+4)<0$이고 $a>0$이므로

$-2b+4<0$ $\quad\therefore$ $b>2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



2단계 **함수 $y=g(x)$의 그래프 그리기**

$$g'(x)=\begin{cases} f(x) & (x<2) \\ -f(x) & (x>2)\end{cases}$$

$f(x)=ax(x-2)(x-b)$ $(a>0,\ b>2)$에 대하여 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

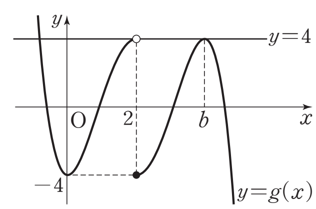
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	b	$\cdots$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	-4 극소	↗		↗	$g(b)$ 극대	↘

$g(0)=\int_0^0 f(t)\,dt-4=-4$

(가)에서 $\lim\limits_{x\to 2-}g(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 2+}g(x)=g(2)=-4$

(나)에서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=4$가 두 점에서 만나야 하므로 $g(b)=4$이어야 한다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



3단계 **$f(5)$의 값 구하기**

$g(b)=-\int_0^b f(t)\,dt+4=4$에서 $\int_0^b f(t)\,dt=0$

$$\int_0^b at(t-2)(t-b)\,dt=\int_0^b a\{t^3-(b+2)t^2+2bt\}\,dt$$
$$=a\Big[\frac{1}{4}t^4-\frac{b+2}{3}t^3+bt^2\Big]_0^b$$
$$=a\Big\{\frac{b^4}{4}-\frac{b^3(b+2)}{3}+b^3\Big\}$$
$$=ab^3\Big(\frac{b}{4}-\frac{b+2}{3}+1\Big)$$
$$=\frac{ab^3(4-b)}{12}=0$$

즉, $ab^3(4-b)=0$에서 $b=4$ ($\because$ $a>0$, $b>2$)

㉠에서 $\int_0^2 f(t)\,dt=8$이므로

$$\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2 at(t-2)(t-4)\,dt=\int_0^2 a(t^3-6t^2+8t)\,dt$$
$$=a\Big[\frac{1}{4}t^4-2t^3+4t^2\Big]_0^2=4a$$

즉, $4a=8$에서 $a=2$이므로 $f(x)=2x(x-2)(x-4)$

$\therefore$ $f(5)=10\times 3\times 1=30$

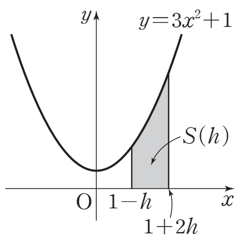
07 정적분의 활용

STEP 1 핵심 문제 | 90~91쪽

01 12	02 ③	03 ③	04 ⑤	05 ④	06 $\frac{16}{3}$
07 64	08 38	09 ②	10 ⑤	11 ②	

01 답 12

$1-h\le x\le 1+2h$에서 $y>0$이므로



$$S(h)=\int_{1-h}^{1+2h}(3x^2+1)\,dx$$
$$=\Big[x^3+x\Big]_{1-h}^{1+2h}$$
$$=9h^3+9h^2+12h$$
$$\therefore \lim_{h\to0+}\frac{S(h)}{h}=\lim_{h\to0+}(9h^2+9h+12)$$
$$=12$$

다른 풀이

$f(x)=3x^2+1$, $F'(x)=f(x)$라 하면

$$\lim_{h\to0+}\frac{S(h)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{\int_{1-h}^{1+2h}f(x)\,dx}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{\Big[F(x)\Big]_{1-h}^{1+2h}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{F(1+2h)-F(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{F(1+2h)-F(1)+F(1)-F(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{F(1+2h)-F(1)}{2h}\times2+\lim_{h\to0+}\frac{F(1-h)-F(1)}{-h}$$
$$=2F'(1)+F'(1)$$
$$=3F'(1)$$
$$=3f(1)$$
$$=3\times4$$
$$=12$$

02 답 ③

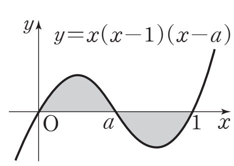
곡선 $y=x(x-1)(x-a)$와 x축이 만나는 점의 x좌표를 구하면

$x(x-1)(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=a$

(i) $0<a<1$일 때,

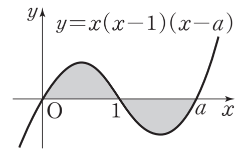
곡선 $y=x(x-1)(x-a)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_0^1 x(x-1)(x-a)\,dx=0$$
$$\int_0^1\{x^3-(a+1)x^2+ax\}\,dx=0$$
$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^1=0$$
$$\frac{a}{6}-\frac{1}{12}=0\qquad\therefore a=\frac{1}{2}$$

(ii) $a>1$일 때,

곡선 $y=x(x-1)(x-a)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_0^a x(x-1)(x-a)\,dx=0$$
$$\int_0^a\{x^3-(a+1)x^2+ax\}\,dx=0$$
$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^a=0$$
$$-\frac{a^4}{12}+\frac{a^3}{6}=0$$
$$a^3(a-2)=0\qquad\therefore a=2\ (\because a>1)$$

(i), (ii)에서 모든 양수 a의 값의 곱은

$$\frac{1}{2}\times2=1$$

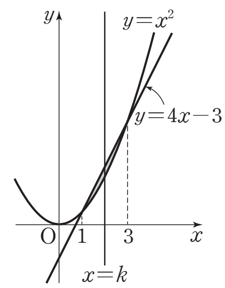
03 답 ③

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=4x-3$이 만나는 점의 x좌표를 구하면

$x^2=4x-3$, $x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0\qquad\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$1\le x\le 3$에서 $4x-3\ge x^2$이므로 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=4x-3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\underbrace{\int_1^3(4x-3-x^2)\,dx}_{=\frac{|-1|\times(3-1)^3}{6}=\frac{4}{3}}$$
$$=\left[2x^2-3x-\frac{1}{3}x^3\right]_1^3=\frac{4}{3}$$

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=4x-3$ 및 두 직선 $x=1$, $x=k\,(1<k<3)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_1^k(4x-3-x^2)\,dx$$
$$=\left[2x^2-3x-\frac{1}{3}x^3\right]_1^k=-\frac{k^3}{3}+2k^2-3k+\frac{4}{3}$$

이때 $S_1=2S_2$이므로

$$\frac{4}{3}=2\left(-\frac{k^3}{3}+2k^2-3k+\frac{4}{3}\right)$$

$k^3-6k^2+9k-2=0$, $(k-2)(k^2-4k+1)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=2\pm\sqrt{3}$

그런데 $1<k<3$이므로 $k=2$

04 답 ⑤

두 점 A, B의 좌표를 각각 $\left(a,\ \frac{a}{2}\right)$, $\left(b,\ \frac{b}{2}\right)$ $(0<a<b)$라 하자.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 원점 O에서 접하고 두 점 A, B에서 만나므로

$$f(x)-\frac{1}{2}x=x^2(x-a)(x-b)=x^4-(a+b)x^3+abx^2$$
$$\therefore S_1-S_2=\int_0^a\left|f(x)-\frac{1}{2}x\right|dx-\int_a^b\left|f(x)-\frac{1}{2}x\right|dx$$
$$=\int_0^a\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx+\int_a^b\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx$$
$$=\int_0^b\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx=\int_0^b\{x^4-(a+b)x^3+abx^2\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{a+b}{4}x^4+\frac{ab}{3}x^3\right]_0^b=-\frac{b^5}{20}+\frac{ab^4}{12}$$

$S_1=S_2$에서 $S_1-S_2=0$이므로

$-\dfrac{b^5}{20}+\dfrac{ab^4}{12}=0$

$\therefore 5a-3b=0$ ($\because b\neq0$) ...... ㉠

또 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(b-a)^2+\left(\dfrac{b}{2}-\dfrac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{5}$, $\dfrac{\sqrt{5}}{2}(b-a)=\sqrt{5}$ ($\because a<b$)

$\therefore b-a=2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=5$

따라서 $f(x)=x^4-8x^3+15x^2+\dfrac{1}{2}x$이므로

$f(1)=1-8+15+\dfrac{1}{2}=\dfrac{17}{2}$

05 답 ④

$f(x)=x^3+2x^2-x+4$에서 $f'(x)=3x^2+4x-1$

점 A의 좌표를 $(t, f(t))$라 하면 접선의 방정식은

$y=(3t^2+4t-1)(x-t)+(t^3+2t^2-t+4)$

$\quad=(3t^2+4t-1)x-2t^3-2t^2+4$

이 접선이 원점을 지나므로

$-2t^3-2t^2+4=0$

$t^3+t^2-2=0$, $(t-1)(t^2+2t+2)=0$

$\therefore t=1$ ($\because t$는 실수)

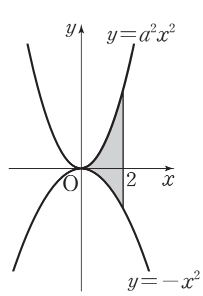
즉, 점 A의 좌표는 $(1, 6)$이고 점 A에서의 접선의 방정식은 $y=6x$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\displaystyle\int_{-2}^{0}(x^3+2x^2-x+4)dx+\int_{0}^{1}\{(x^3+2x^2-x+4)-6x\}dx$

$\quad=\left[\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+4x\right]_{-2}^{0}+\left[\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{7}{2}x^2+4x\right]_{0}^{1}$

$\quad=\dfrac{34}{3}+\dfrac{17}{12}=\dfrac{51}{4}$

06 답 $\dfrac{16}{3}$



$0\le x\le2$에서 $a^2x^2\ge-x^2$이므로

$S(a)=\displaystyle\int_{0}^{2}\{a^2x^2-(-x^2)\}\,dx$

$\quad=\displaystyle\int_{0}^{2}(a^2+1)x^2\,dx$

$\quad=\left[\dfrac{a^2+1}{3}x^3\right]_{0}^{2}$

$\quad=\dfrac{8}{3}(a^2+1)$ .... **배점 40%**

$\therefore \dfrac{S(a)}{a}=\dfrac{8}{3}a+\dfrac{8}{3a}$ .... **배점 10%**

이때 $a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{8}{3}a+\dfrac{8}{3a}\ge2\sqrt{\dfrac{8}{3}a\times\dfrac{8}{3a}}$

$\quad=2\times\dfrac{8}{3}=\dfrac{16}{3}$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{8}{3}a=\dfrac{8}{3a}\text{일 때 성립}\right)$ ..... **배점 30%**

따라서 $\dfrac{S(a)}{a}$의 최솟값은 $\dfrac{16}{3}$이다. .... **배점 20%**

개념 NOTE

$a>0$, $b>0$일 때, 산술평균과 기하평균의 관계는 다음과 같다.

$\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

07 답 64

$g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$a^3+a-1=1$, $a^3+a-2=0$

$(a-1)(a^2+a+2)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a$는 실수)

또 $g(29)=b$라 하면 $f(b)=29$이므로

$b^3+b-1=29$, $b^3+b-30=0$

$(b-3)(b^2+3b+10)=0$

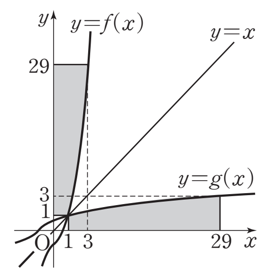
$\therefore b=3$ ($\because b$는 실수)

한편 $f(x)=x^3+x-1$에서

$f'(x)=3x^2+1$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

이때 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같고 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이는 서로 같다.



$\therefore \displaystyle\int_{1}^{29}g(x)\,dx$

$\quad=3\times29-1\times1-\displaystyle\int_{1}^{3}f(x)\,dx$

$\quad=87-1-\displaystyle\int_{1}^{3}(x^3+x-1)\,dx$

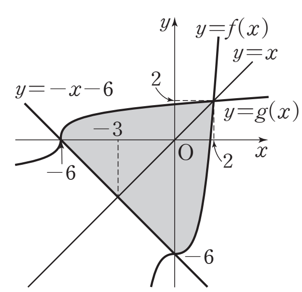
$\quad=86-\left[\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{2}x^2-x\right]_{1}^{3}$

$\quad=86-22$

$\quad=64$

08 답 38

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 구하는 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=-x-6$, $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$x^3-6=x$

$x^3-x-6=0$

$(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x$는 실수)

두 직선 $y=x$, $y=-x-6$이 만나는 점의 x좌표를 구하면

$x=-x-6$, $2x=-6$

$\therefore x=-3$

$0\le x\le2$에서 $x\ge x^3-6$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=2\left[\displaystyle\int_{0}^{2}\{x-(x^3-6)\}\,dx+\dfrac{1}{2}\times6\times3\right]$

$\quad=2\left\{\displaystyle\int_{0}^{2}(-x^3+x+6)\,dx+9\right\}$

$\quad=2\left[-\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{2}x^2+6x\right]_{0}^{2}+18$

$\quad=2\times10+18$

$\quad=38$

09 답 ②

시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 16이고, 시각 $t=2a$에서 점 P의 위치는 0이므로

$16+\int_0^{2a} 3t(a-t)\,dt=0$

$\int_0^{2a}(-3t^2+3at)\,dt=-16$

$\left[-t^3+\frac{3}{2}at^2\right]_0^{2a}=-16$

$-8a^3+6a^3=-16$

$-2a^3=-16,\ a^3=8$

$\therefore a=2$ ($\because$ a는 양수)

$\therefore v(t)=3t(2-t)=-3t^2+6t$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^5|v(t)|\,dt&=\int_0^5|-3t^2+6t|\,dt\\&=\int_0^2(-3t^2+6t)\,dt+\int_2^5(3t^2-6t)\,dt\\&=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2+\left[t^3-3t^2\right]_2^5\\&=4+54\\&=58\end{aligned}$$

10 답 ⑤

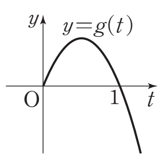
ㄱ. 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $f(t)=0$에서

$t^3-3t^2+2t=0,\ t(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$ ($\because t>0$)

따라서 점 P는 시각 $t=1$, $t=2$에서 운동 방향을 바꾸므로 출발한 후 운동 방향을 2번 바꾼다.

ㄴ. $g(t)=0$에서 $-3t^2+3t=0$



$t(t-1)=0$ $\quad\therefore t=0$ 또는 $t=1$

$0\le t\le 1$에서 $g(t)\ge 0$, $t\ge 1$에서 $g(t)\le 0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^3|g(t)|\,dt&=\int_0^1(-3t^2+3t)\,dt+\int_1^3(3t^2-3t)\,dt\\&=\left[-t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^1+\left[t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_1^3\\&=\frac{1}{2}+14\\&=\frac{29}{2}\end{aligned}$$

ㄷ. 시각 $t=x\,(x>0)$에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned}0+\int_0^x f(t)\,dt&=\int_0^x(t^3-3t^2+2t)\,dt\\&=\left[\frac{1}{4}t^4-t^3+t^2\right]_0^x\\&=\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\end{aligned}$$

시각 $t=x\,(x>0)$에서의 점 Q의 위치는

$$\begin{aligned}0+\int_0^x g(t)\,dt&=\int_0^x(-3t^2+3t)\,dt\\&=\left[-t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^x\\&=-x^3+\frac{3}{2}x^2\end{aligned}$$

두 점 P, Q가 만나면 위치가 같으므로

$\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2=-x^3+\frac{3}{2}x^2,\ \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2=0$

$x^2(x^2-2)=0 \qquad \therefore x=\sqrt{2}$ ($\because x>0$)

따라서 두 점 P, Q는 출발한 후 시각 $t=\sqrt{2}$에서 한 번 만난다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 답 ②

$v(t)=0$인 t의 값의 좌우에서 $v(t)$의 값의 부호가 바뀌면 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

따라서 시각 $t=1$에서 처음으로 운동 방향이 바뀌고 시각 $t=7$에서 두 번째로 운동 방향이 바뀌므로 구하는 거리는

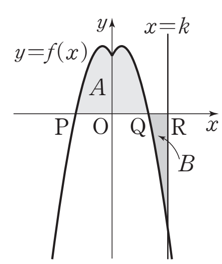
$\int_1^7|v(t)|\,dt=\frac{1}{2}\times(4+2)\times 2+\frac{1}{2}\times 2\times 1=7$

STEP 2 고난도 문제 | 92~96쪽

01 ④	02 2	03 16	04 ④	05 ④	06 25
07 16	08 8	09 ②	10 2	11 8	12 80
13 ③	14 6	15 ②	16 $\frac{9}{4}$	17 ②	18 21
19 $\frac{38}{3}$	20 ③	21 ③	22 ④		

01 답 ④

$f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고 그래프는 그림과 같다.



이때 $A=2B$에서 $\frac{A}{2}=B$이므로 함수 $f(x)$는 $\int_0^k f(x)\,dx=0$을 만족시킨다.

즉, $\int_0^k(-x^2+2x+6)\,dx=0$이므로

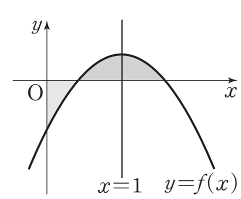
$\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+6x\right]_0^k=0,\ -\frac{1}{3}k^3+k^2+6k=0$

$-\frac{k}{3}(k+3)(k-6)=0$

$\therefore k=6$ ($\because k>4$)

02 답 2

$f(x)=ax^2-2ax+b=a(x-1)^2-a+b$이므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.



이때 $S_1:S_2=1:2$에서 $S_1=\frac{1}{2}S_2$이므로

$\int_0^1 f(x)\,dx=0$

$\int_0^1(ax^2-2ax+b)\,dx=0$

$\left[\frac{a}{3}x^3-ax^2+bx\right]_0^1=0$

$-\frac{2}{3}a+b=0 \qquad \therefore 2a=3b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 $\int_1^3 f(x)\,dx=-4$에서

$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx=0+(-4)=-4$이고

$\int_0^3 (ax^2-2ax+b)\,dx=\left[\frac{a}{3}x^3-ax^2+bx\right]_0^3=3b$이므로

$3b=-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=-\frac{4}{3}$

$\therefore a-3b=-2-3\times\left(-\frac{4}{3}\right)=2$

03 답 16

$\int_0^{3000} f(x)\,dx=\int_3^{3000} f(x)\,dx$에서

$\int_0^{3000} f(x)\,dx-\int_3^{3000} f(x)\,dx=0$

$\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^{3000} f(x)\,dx-\int_3^{3000} f(x)\,dx=0$

$\therefore \int_0^3 f(x)\,dx=0$ ········ 배점 30%

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(3)=0$이므로

$f(x)=(x-3)(x+a)=x^2+(a-3)x-3a$ (a는 상수)라 하면

$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3 \{x^2+(a-3)x-3a\}\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a-3}{2}x^2-3ax\right]_0^3$

$=-\frac{9}{2}a-\frac{9}{2}$

즉, $-\frac{9}{2}a-\frac{9}{2}=0$이므로 $a=-1$

$\therefore f(x)=x^2-4x+3$ ········ 배점 30%

곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 x좌표를 구하면

$(x-1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

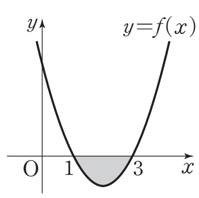
$1\le x\le 3$에서 $f(x)\le 0$이므로

$=\frac{|-1|}{6}\times(3-1)^3=\frac{4}{3}$

$S=\underline{\int_1^3(-x^2+4x-3)\,dx}$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3=\frac{4}{3}$ ········ 배점 30%

$\therefore 12S=12\times\frac{4}{3}=16$ ········ 배점 10%



04 답 ④

㈏에서 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 $x=\alpha,\ x=\beta$에서 극솟값 0을 가지므로 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

㈎에서 $f(x)=f(-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

이때 $\beta<0<\alpha$라 하면 $\beta=-\alpha$이므로

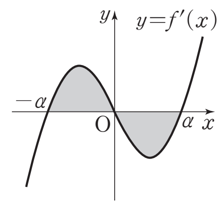
$f(x)=(x-\alpha)^2(x+\alpha)^2=(x^2-\alpha^2)^2=x^4-2\alpha^2x^2+\alpha^4$

$\therefore f'(x)=4x^3-4\alpha^2x=4x(x+\alpha)(x-\alpha)$

곡선 $y=f'(x)$와 x축이 만나는 점의 x좌표를 구하면

$4x(x+\alpha)(x-\alpha)=0 \qquad \therefore x=-\alpha$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\alpha$

곡선 $y=f'(x)$는 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f'(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면



$S=2\int_{-\alpha}^0 f'(x)\,dx$

$=2\int_{-\alpha}^0 (4x^3-4\alpha^2x)\,dx$

$=2\left[x^4-2\alpha^2x^2\right]_{-\alpha}^0=2\alpha^4$

즉, $2\alpha^4=162$이므로 $\alpha^4=81$

$(\alpha^2+9)(\alpha+3)(\alpha-3)=0 \qquad \therefore \alpha=3\ (\because \alpha>0)$

따라서 $f(x)=x^4-18x^2+81$이므로

$f(1)=1-18+81=64$

05 답 ④

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 4+} f(x)=\lim_{x\to 4-} f(x)=f(4)$

$4\le x<8$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $0\le x<4$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 16만큼 평행이동한 그래프와 일치한다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)+16$이므로

$\lim_{x\to 4+} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(x+4)$

$=\lim_{x\to 0+}\{f(x)+16\}$

$=0+16=16$

$\lim_{x\to 4-} f(x)=\lim_{x\to 4-}(x^3+ax^2+bx)$

$=64+16a+4b$

$f(4)=f(0)+16=16$

즉, $16=64+16a+4b$이므로

$b=-4a-12 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 4+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$

이때

$\lim_{x\to 4+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x+4)-f(4)}{x}$

$=\lim_{x\to 0+}\frac{\{f(x)+16\}-16}{x}$

$=\lim_{x\to 0+}\frac{x^3+ax^2+bx}{x}$

$=\lim_{x\to 0+}(x^2+ax+b)$

$=b=-4a-12$

$\lim_{x\to 4-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4-}\frac{(x^3+ax^2+bx)-16}{x-4}$

$=\lim_{x\to 4-}\frac{x^3+ax^2+(-4a-12)x-16}{x-4}$

$=\lim_{x\to 4-}\frac{(x-4)\{x^2+(a+4)x+4\}}{x-4}$

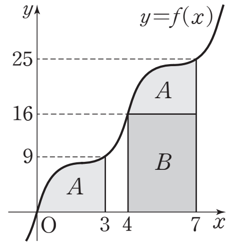
$=\lim_{x\to 4-}\{x^2+(a+4)x+4\}=4a+36$

즉, $-4a-12=4a+36$이므로 $a=-6$

이를 ㉠에 대입하면 $b=12$

$\therefore\ f(x)=x^3-6x^2+12x\ (0\le x<4)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 직선 $y=16$과 x축 및 두 직선 $x=4$, $x=7$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하면

$A=\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 (x^3-6x^2+12x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+6x^2\right]_0^3=\frac{81}{4}$

$B=3\times16=48$

$\therefore\ \int_4^7 f(x)dx=A+B=\frac{81}{4}+48=\frac{273}{4}$

06 답 25

(가)의 $\int_0^t f(x)dx=\int_{2a-t}^{2a} f(x)dx$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=\frac{0+2a}{2}\qquad\therefore\ x=a$

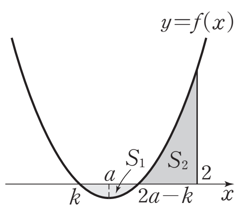
(나)에서 $\int_a^2 |f(x)|dx>0$이므로 $a<2$이고,

$0<\int_a^2 f(x)dx<\int_a^2 |f(x)|dx$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $a<x<2$에서 x축과 만난다.

$\therefore\ f(a)<0,\ f(2)>0$

$f(k)=0$, $k<a$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이므로 x축과 두 점 $(k,\ 0)$, $(2a-k,\ 0)$에서 만난다.

따라서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$\int_k^a f(x)dx=\int_a^{2a-k} f(x)dx=-\frac{S_1}{2}$,

$\int_{2a-k}^2 f(x)dx=S_2$

(나)의 $\int_a^2 f(x)dx=2$에서

$\int_a^{2a-k} f(x)dx+\int_{2a-k}^2 f(x)dx=2$

$\therefore\ -\frac{S_1}{2}+S_2=2\qquad\cdots\cdots$ ㉠

(나)의 $\int_a^2 |f(x)|dx=\frac{22}{9}$에서

$\int_a^{2a-k}\{-f(x)\}dx+\int_{2a-k}^2 f(x)dx=\frac{22}{9}$

$\therefore\ \frac{S_1}{2}+S_2=\frac{22}{9}\qquad\cdots\cdots$ ㉡

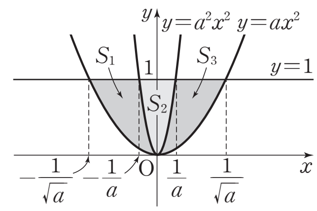
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $S_1=\frac{4}{9}$, $S_2=\frac{20}{9}$

$\therefore\ \int_k^2 f(x)dx=-S_1+S_2=-\frac{4}{9}+\frac{20}{9}=\frac{16}{9}$

따라서 $p=9$, $q=16$이므로 $p+q=25$

07 답 16

곡선 $y=a^2x^2$과 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표를 구하면



$a^2x^2=1$, $x^2=\frac{1}{a^2}$

$\therefore\ x=-\frac{1}{a}$ 또는 $x=\frac{1}{a}$

곡선 $y=a^2x^2$은 y축에 대하여 대칭이므로

$S_2=2\int_0^{\frac{1}{a}}(1-a^2x^2)dx$

$=2\left[x-\frac{a^2}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{a}}=2\times\frac{2}{3a}=\frac{4}{3a}$

곡선 $y=ax^2$과 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표를 구하면

$ax^2=1$, $x^2=\frac{1}{a}\qquad\therefore\ x=-\frac{1}{\sqrt{a}}$ 또는 $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$

$\therefore\ S_3=\frac{1}{\sqrt{a}}\times1-\frac{1}{2}S_2-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} ax^2dx$

$=\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{2}\times\frac{4}{3a}-\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}$

$=\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{2}{3a}-\frac{1}{3\sqrt{a}}$

$=\frac{2}{3\sqrt{a}}-\frac{2}{3a}$

$S_2:S_3=2:3$에서 $3S_2=2S_3$이므로

$3\times\frac{4}{3a}=2\times\left(\frac{2}{3\sqrt{a}}-\frac{2}{3a}\right)$

$\frac{1}{a}=\frac{1}{3\sqrt{a}}-\frac{1}{3a}$, $\frac{4}{a}=\frac{1}{\sqrt{a}}$

$4=\sqrt{a}\qquad\therefore\ a=16$

다른 풀이

곡선 $y=a^2x^2$과 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표를 구하면

$a^2x^2=1$, $x^2=\frac{1}{a^2}$

$\therefore\ x=-\frac{1}{a}$ 또는 $x=\frac{1}{a}$

$\therefore\ S_2=\int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}}|1-a^2x^2|dx$

$=\frac{|-a^2|\left\{\frac{1}{a}-\left(-\frac{1}{a}\right)\right\}^3}{6}=\frac{4}{3a}$

곡선 $y=ax^2$과 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표를 구하면

$ax^2=1$, $x^2=\frac{1}{a}\qquad\therefore\ x=-\frac{1}{\sqrt{a}}$ 또는 $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$

$\therefore\ S_3=\frac{1}{2}\times\left(\int_{-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}|1-ax^2|dx-S_2\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left[\frac{|-a|\left\{\frac{1}{\sqrt{a}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right\}^3}{6}-\frac{4}{3a}\right]$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{3\sqrt{a}}-\frac{4}{3a}\right)=\frac{2}{3\sqrt{a}}-\frac{2}{3a}$

$S_2 : S_3 = 2 : 3$에서 $3S_2 = 2S_3$이므로

$3\times\frac{4}{3a} = 2\times\left(\frac{2}{3\sqrt{a}} - \frac{2}{3a}\right)$

$\frac{1}{a} = \frac{1}{3\sqrt{a}} - \frac{1}{3a}$, $\frac{4}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

$4 = \sqrt{a}$ $\quad\therefore a = 16$

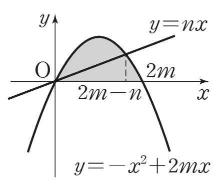
08 답 8

곡선 $y=-x^2+2mx$와 x축이 만나는 점의 x좌표를 구하면

$-x^2+2mx=0$, $x(x-2m)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2m$

$0\le x\le 2m$에서 $-x^2+2mx\ge 0$이므로 곡선 $y=-x^2+2mx$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면



$S_1 = \int_0^{2m}(-x^2+2mx)\,dx$ $\quad = \frac{|-1|}{6}\times(2m-0)^3 = \frac{4}{3}m^3$

$\quad = \left[-\frac{1}{3}x^3+mx^2\right]_0^{2m} = \frac{4}{3}m^3$

곡선 $y=-x^2+2mx$와 직선 $y=nx$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$-x^2+2mx=nx$, $x^2+(-2m+n)x=0$

$x(x-2m+n)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=2m-n$

$0\le x\le 2m-n$에서 $-x^2+2mx\ge nx$이므로 곡선 $y=-x^2+2mx$와 직선 $y=nx$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$S_2 = \int_0^{2m-n}(-x^2+2mx-nx)\,dx$ $\longrightarrow = \frac{|-1|}{6}\times(2m-n-0)^3 = \frac{(2m-n)^3}{6}$

$\quad = \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{2m-n}{2}x^2\right]_0^{2m-n} = \frac{(2m-n)^3}{6}$

이때 $S_1=2S_2$이므로 $\frac{4}{3}m^3 = 2\times\frac{(2m-n)^3}{6}$

$(2m-n)^3=4m^3$, $\left(\frac{2m-n}{m}\right)^3=4$

$\left(2-\frac{n}{m}\right)^3=4$, $2-\frac{n}{m}=\sqrt[3]{4}$ $\longrightarrow$ $2m-n>0$, $m>0$에서 $2-\frac{n}{m}>0$

$\therefore \frac{n}{m}=2-\sqrt[3]{4}$

따라서 $a=2$, $b=4$이므로 $ab=8$

개념 NOTE

실수 a와 2 이상인 자연수 n에 대하여

a의 n제곱근 $\Longleftrightarrow$ n제곱하여 a가 되는 수 $\Longleftrightarrow$ 방정식 $x^n=a$의 근 x

09 답 ②

$f(x)=x^3-6x^2+8x+1$에서 $f'(x)=3x^2-12x+8$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}(k, f(k))$에서의 접선의 방정식은

$y-(k^3-6k^2+8k+1)=(3k^2-12k+8)(x-k)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $\mathrm{A}(0, 1)$을 지나므로

$1-(k^3-6k^2+8k+1)=(3k^2-12k+8)\times(-k)$

$-k^3+6k^2-8k=-3k^3+12k^2-8k$

$2k^3-6k^2=0$, $2k^2(k-3)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k>0$)

㉠에 $k=3$을 대입하면 직선 AB의 방정식은

$y-(27-54+24+1)=(27-36+8)\times(x-3)$

$\therefore y=-x+1$

$S_1=\int_0^3\{f(x)-(-x+1)\}\,dx=\int_0^3\{f(x)+x-1\}\,dx$

$S_2=\int_0^3\{(-x+1)-g(x)\}\,dx=\int_0^3\{-g(x)-x+1\}\,dx$

$S_1=S_2$이므로 $\int_0^3\{f(x)+x-1\}\,dx=\int_0^3\{-g(x)-x+1\}\,dx$

$\therefore \int_0^3 g(x)\,dx=\int_0^3\{-f(x)-2x+2\}dx$

$\quad=\int_0^3(-x^3+6x^2-10x+1)dx$

$\quad=\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-5x^2+x\right]_0^3$

$\quad=-\frac{81}{4}+54-45+3$

$\quad=-\frac{33}{4}$

10 답 2

두 점 $\mathrm{A}(a, a^2)$, $\mathrm{B}(1, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{a^2}{a-1}(x-1)$

직선 AB와 곡선 $y=x^2$이 만나는 점의 x좌표를 구하면

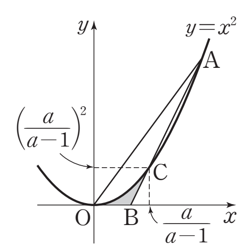
$\frac{a^2}{a-1}(x-1)=x^2$, $(a-1)x^2-a^2x+a^2=0$

$(x-a)\{(a-1)x-a\}=0$

$\therefore x=a$ 또는 $x=\frac{a}{a-1}$ $\longrightarrow$ $x=a$인 점은 A이다.

$\therefore \mathrm{C}\left(\frac{a}{a-1}, \left(\frac{a}{a-1}\right)^2\right)$

곡선 $y=x^2$과 선분 BC 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_3(a)$라 하면



$S_3(a)=\int_0^{\frac{a}{a-1}}x^2\,dx$

$\quad-\frac{1}{2}\times\left(\frac{a}{a-1}-1\right)\times\left(\frac{a}{a-1}\right)^2$

$\quad=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{a}{a-1}}-\frac{a^2}{2(a-1)^3}$

$\quad=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a-1}\right)^3-\frac{a^2}{2(a-1)^3}$

$\quad=\frac{2a^3-3a^2}{6(a-1)^3}$

이때 $S_2(a)=\frac{1}{2}\times1\times a^2=\frac{1}{2}a^2$이므로

$S_1(a)=S_2(a)-S_3(a)=\frac{1}{2}a^2-\frac{2a^3-3a^2}{6(a-1)^3}$

$\therefore \lim_{a\to2+}\frac{3S_1(a)}{S_2(a)}=\lim_{a\to2+}\frac{\frac{3}{2}a^2-\frac{2a^3-3a^2}{2(a-1)^3}}{\frac{1}{2}a^2}$

$\quad=\lim_{a\to2+}\left\{3-\frac{2a-3}{(a-1)^3}\right\}$

$\quad=3-1=2$

11 답 8

$f(x)=x^3-3x+2$에서 $f'(x)=3x^2-3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-(a^3-3a+2)=(3a^2-3)(x-a)$

$\therefore y=(3a^2-3)x-2a^3+2$

곡선 $y=f(x)$와 접선이 만나는 점의 x좌표를 구하면

$x^3-3x+2=(3a^2-3)x-2a^3+2$

$x^3-3a^2x+2a^3=0$

$(x+2a)(x-a)^2=0$

$\therefore\ x=-2a$ 또는 $x=a$

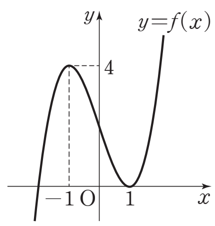
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$에서

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4 극대	↘	0 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(i) $a<0$일 때,

$a\le x\le -2a$에서

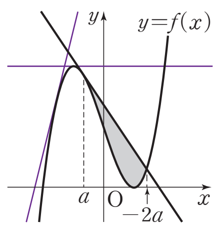
$(3a^2-3)x-2a^3+2\ge x^3-3x+2$이므로

$$S=\int_{a}^{-2a}\{(3a^2-3)x-2a^3+2-(x^3-3x+2)\}\,dx$$

$$=\int_{a}^{-2a}(-x^3+3a^2x-2a^3)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}a^2x^2-2a^3x\right]_{a}^{-2a}$$

$$=\frac{27}{4}a^4 \quad \cdots\cdots \ ㉠$$



$a<0$일 때, $a<x<-2a$에서 곡선 $y=f(x)$는 $x=a$인 점에서의 접선보다 아래쪽에 있다.

(ii) $a>0$일 때,

$-2a\le x\le a$에서

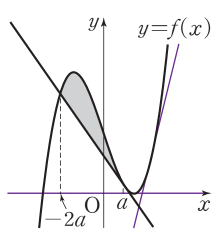
$x^3-3x+2\ge(3a^2-3)x-2a^3+2$이므로

$$S=\int_{-2a}^{a}[x^3-3x+2-\{(3a^2-3)x-2a^3+2\}]\,dx$$

$$=\int_{-2a}^{a}(x^3-3a^2x+2a^3)\,dx$$

$$=\int_{a}^{-2a}(-x^3+3a^2x-2a^3)\,dx$$

$$=\frac{27}{4}a^4\ (\because\ ㉠)$$



$a>0$일 때, $-2a<x<a$에서 곡선 $y=f(x)$는 $x=a$인 점에서의 접선보다 위쪽에 있다.

(i), (ii)에서 $S=\frac{27}{4}a^4$

$S\le 2700$에서 $\frac{27}{4}a^4\le 2700$

$a^4\le 400,\ a^2\le 20$

$\therefore\ -2\sqrt{5}\le a\le 2\sqrt{5}$

이때 $a\ne 0$이므로 정수 a는 $-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 8개이다.

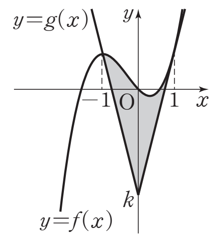
12 답 80

$f(x)=0$에서 $x^3+x^2-x=0,\ x(x^2+x-1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$g(x)=\begin{cases}4x+k & (x\ge 0)\\ -4x+k & (x<0)\end{cases}$이므로 두 함수

$y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수가 2개 되려면 그림과 같이 $x>0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4x+k$가 접해야 한다.



$f(x)=x^3+x^2-x$에서 $f'(x)=3x^2+2x-1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+t^2-t)\ (t>0)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2+2t-1$이므로 $f'(t)=4$에서

$3t^2+2t-1=4,\ 3t^2+2t-5=0$

$(3t+5)(t-1)=0 \qquad \therefore\ t=1\ (\because\ t>0)$

즉, 접점의 좌표는 $(1,\ 1)$이고 이 점이 직선 $y=4x+k$ 위의 점이므로

$1=4+k \qquad \therefore\ k=-3$

$x<0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-4x-3$이 만나는 점의 x좌표를 구하면

$x^3+x^2-x=-4x-3$

$x^3+x^2+3x+3=0,\ (x+1)(x^2+3)=0 \qquad \therefore\ x=-1\ (\because\ x$는 실수$)$

$-1\le x\le 1$에서 $f(x)\ge g(x)$이므로

$$S=\int_{-1}^{0}\{x^3+x^2-x-(-4x-3)\}\,dx+\int_{0}^{1}\{x^3+x^2-x-(4x-3)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2+3x+3)\,dx+\int_{0}^{1}(x^3+x^2-5x+3)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{19}{12}+\frac{13}{12}=\frac{8}{3}$$

$\therefore\ 30\times S=30\times\frac{8}{3}=80$

다른 풀이

$x^3+x^2-x=4|x|+k$에서 $x^3+x^2-x-4|x|=k \quad \cdots\cdots\ ㉠$

$h(x)=x^3+x^2-x-4|x|$라 하면

$h(x)=\begin{cases}x^3+x^2-5x & (x\ge 0)\\ x^3+x^2+3x & (x<0)\end{cases}$에서

$h'(x)=\begin{cases}3x^2+2x-5 & (x>0)\\ 3x^2+2x+3 & (x<0)\end{cases}$

$x<0$일 때, $h'(x)=3x^2+2x+3=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{3}>0$

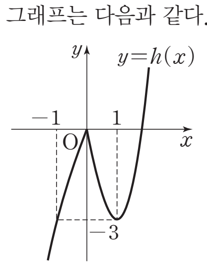
$x>0$일 때, $3x^2+2x-5=(3x+5)(x-1)$이므로

$h'(x)=0$에서 $x=1\ (\because\ x>0)$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	0 극대	↘	-3 극소	↗

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



㉠이 서로 다른 두 실근을 가지고 $k<0$이므로 $k=-3$

$\therefore S=\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|\,dx$

$=\int_{-1}^{1}|h(x)-k|\,dx=\int_{-1}^{1}\{h(x)+3\}\,dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2+3x+3)\,dx+\int_{0}^{1}(x^3+x^2-5x+3)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{0}^{1}$

$=\frac{19}{12}+\frac{13}{12}=\frac{8}{3}$

$\therefore 30\times S=30\times\frac{8}{3}=80$

idea

13 답 ③

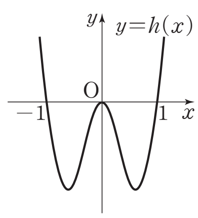
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 2이므로

$\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|\,dx=2$

$\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx=-2$이므로 $-1\le x\le 1$에서

$f(x)-g(x)\le 0$

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $-1\le x\le 1$에서 $h(x)\le 0$이고, $h(-1)=h(0)=h(1)=0$이므로 사차함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같이 $x=-1$, $x=1$에서 x축과 만나고 $x=0$에서 x축에 접한다.



$h(x)=ax^2(x+1)(x-1)=ax^4-ax^2\,(a\ne 0)$

이라 하면 $\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx=-2$에서

$\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_{-1}^{1}(ax^4-ax^2)\,dx=2\int_{0}^{1}(ax^4-ax^2)\,dx$

$=2\left[\frac{a}{5}x^5-\frac{a}{3}x^3\right]_{0}^{1}$

$=2\times\left(-\frac{2}{15}a\right)=-\frac{4}{15}a$

즉, $-\frac{4}{15}a=-2$이므로 $a=\frac{15}{2}$

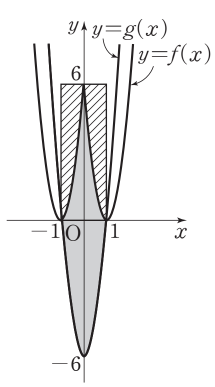
따라서 $h(x)=f(x)-g(x)=\frac{15}{2}x^4-\frac{15}{2}x^2$이므로

$f(2)-g(2)=120-30=90$

14 답 6

$f(x)=6(|x|-1)^2=\begin{cases}6(x+1)^2 & (x\le 0)\\ 6(x-1)^2 & (x\ge 0)\end{cases}$,

$g(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 그림과 같다.



곡선 $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 빗금 친 부분의 넓이가 같으므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=2\times 6=12$ ······························· 배점 30%

곡선 $y=g(x)$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 곡선을 $y=h(x)$라 하면

$h(x)=6x^2-6+k$

이때 $k\le 0$ 또는 $k\ge 6$이면 곡선 $y=h(x)$가 S를 이등분할 수 없으므로

$0<k<6$

$x\ge 0$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=h(x)$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$6(x-1)^2=6x^2-6+k$

$6x^2-12x+6=6x^2-6+k$

$-12x=-12+k$

$\therefore x=1-\frac{k}{12}$ ······························· 배점 30%

이때 $1-\frac{k}{12}=\alpha$라 하면 $k=12-12\alpha$이므로

$h(x)=6x^2+6-12\alpha$

또 $0<k<6$에서 $0<12-12\alpha<6$이므로

$\frac{1}{2}<\alpha<1$

세 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$가 모두 y축에 대하여 대칭이고 곡선 $y=h(x)$가 S를 이등분하므로

$2\int_{0}^{\alpha}\{f(x)-h(x)\}dx=12\times\frac{1}{2}$

$\int_{0}^{\alpha}\{f(x)-h(x)\}\,dx=3$

$\int_{0}^{\alpha}\{6(x-1)^2-(6x^2+6-12\alpha)\}\,dx=\int_{0}^{\alpha}(-12x+12\alpha)\,dx$

$=\left[-6x^2+12\alpha x\right]_{0}^{\alpha}=6\alpha^2$

즉, $6\alpha^2=3$, $\alpha^2=\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \left(\because \frac{1}{2}<\alpha<1\right)$

따라서 $k=12-12\alpha=12-6\sqrt{2}$이므로 $p=12$, $q=-6$

$\therefore p+q=6$ ······························· 배점 40%

15 답 ②

$f_n(x)=x^3-nx^2+4x-1$에서

$f_n'(x)=3x^2-2nx+4$

함수 $f_n(x)$가 역함수를 가지려면 모든 실수 x에 대하여 $f_n'(x)\ge 0$이어야 하므로

$3x^2-2nx+4\ge 0$

이차방정식 $3x^2-2nx+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=n^2-12\le 0$

$n^2\le 12$ $\quad\therefore -2\sqrt{3}\le n\le 2\sqrt{3}$

이때 정수 n의 최댓값은 3이므로 $k=3$

$\therefore f_k(x)=f_3(x)=x^3-3x^2+4x-1$

$f_3(x)=x^3-3x^2+4x-1$에서 $f_3(0)=-1$이고, 함수 $f_3(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

함수 $y=f_3(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$x^3-3x^2+4x-1=x$

$x^3-3x^2+3x-1=0$

$(x-1)^3=0$

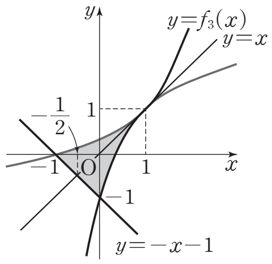
$\therefore x=1$

두 직선 $y=-x-1$, $y=x$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$-x-1=x$, $2x=-1$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$

함수 $y=f_3(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이고 직선 $y=-x-1$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 넓이 S는 곡선 $y=f_3(x)$와 두 직선 $y=-x-1$, $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다.



$$\therefore S=2\left[\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}+\int_0^1\{x-(x^3-3x^2+4x-1)\}\,dx\right]$$
$$=\frac{1}{2}+2\int_0^1(-x^3+3x^2-3x+1)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}+2\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-\frac{3}{2}x^2+x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}$$
$$=1$$

$\therefore k+S=3+1=4$

16 답 $\frac{9}{4}$

$f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2$에서

$f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+3x=-\frac{3}{2}x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

$0\le x\le2$에서 $f'(x)\ge0$이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 증가한다.

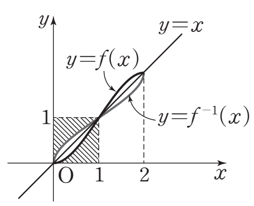
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2=x$, $x^3-3x^2+2x=0$

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 그림과 같으므로



$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x=0) \\ f^{-1}(x) & (0<x<1) \\ f(x) & (1\le x\le2) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} f^{-1}(x) & (0\le x\le1) \\ f(x) & (1\le x\le2) \end{cases}$$

→ $x=0$, $x=1$, $x=2$에서 $f(x)=f^{-1}(x)$

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 같다.

$$\therefore \int_0^2 g(x)\,dx$$
$$=\underline{\int_0^1 f^{-1}(x)\,dx}+\int_1^2 f(x)\,dx$$

빗금 친 부분의 넓이가 같으므로

$$=\underline{1-\int_0^1 f(x)\,dx}+\int_1^2 f(x)\,dx$$

$\int_0^1 f^{-1}(x)dx$의 값은 한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이에서 $\int_0^1 f(x)dx$의 값을 뺀 것이다.

$$=1-\int_0^1\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2\right)dx+\int_1^2\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2\right)dx$$
$$=1-\left[-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}x^3\right]_0^1+\left[-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}x^3\right]_1^2$$
$$=1-\frac{3}{8}+\frac{13}{8}=\frac{9}{4}$$

17 답 ②

시각 $t=k\,(k\ge0)$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^k v_1(t)\,dt=\int_0^k(t^2-6t+5)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t\right]_0^k$$
$$=\frac{1}{3}k^3-3k^2+5k$$

시각 $t=k\,(k\ge0)$에서의 점 Q의 위치는

$$0+\int_0^k v_2(t)\,dt=\int_0^k(2t-7)\,dt$$
$$=\left[t^2-7t\right]_0^k=k^2-7k$$

시각 $t=k$에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$f(k)=\left|\frac{1}{3}k^3-3k^2+5k-(k^2-7k)\right|$$
$$=\left|\frac{1}{3}k^3-4k^2+12k\right|$$

$g(k)=\frac{1}{3}k^3-4k^2+12k$라 하면

$g'(k)=k^2-8k+12=(k-2)(k-6)$

$g'(k)=0$인 k의 값은 $k=2$ 또는 $k=6$

$k\ge0$에서 함수 $g(k)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$g'(k)$		+	0	−	0	+
$g(k)$	0	↗	$\frac{32}{3}$ 극대	↘	0 극소	↗

이때 $k\ge0$에서 $g(k)\ge0$이므로

$g(k)=f(k)$

따라서 함수 $f(k)$는 구간 $[0,\ 2]$에서 증가하고, 구간 $[2,\ 6]$에서 감소하고, 구간 $[6,\ \infty)$에서 증가하므로

$a=2$, $b=6$

$v_2(t)=0$에서 $2t-7=0$ $\qquad\therefore t=\frac{7}{2}$

$2\le t\le\frac{7}{2}$에서 $2t-7\le0$이고, $\frac{7}{2}\le t\le6$에서 $2t-7\ge0$이므로 시각 $t=2$에서 $t=6$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_2^6|v_2(t)|\,dt=\int_2^{\frac{7}{2}}(-2t+7)\,dt+\int_{\frac{7}{2}}^6(2t-7)\,dt$$
$$=\left[-t^2+7t\right]_2^{\frac{7}{2}}+\left[t^2-7t\right]_{\frac{7}{2}}^6$$
$$=\frac{9}{4}+\frac{25}{4}=\frac{17}{2}$$

18 답 21

시각 $t=x\,(x>0)$에서의 점 P의 위치는

$$10+\int_0^x(-3t^2+4nt)\,dt=10+\left[-t^3+2nt^2\right]_0^x=-x^3+2nx^2+10$$

시각 $t=x\,(x>0)$에서의 점 Q의 위치는

$$k+\int_0^x(-2nt)\,dt=k+\left[-nt^2\right]_0^x=-nx^2+k$$

두 점 P, Q가 출발한 후 2번 만나려면 방정식 $-x^3+2nx^2+10=-nx^2+k$, 즉 $-x^3+3nx^2+10=k$가 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가져야 하므로 함수 $y=-x^3+3nx^2+10$의 그래프와 직선 $y=k$가 $x>0$에서 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=-x^3+3nx^2+10$이라 하면

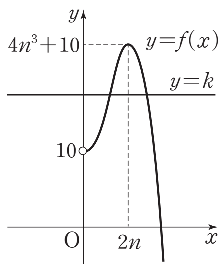
$f'(x)=-3x^2+6nx=-3x(x-2n)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=2n$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$2n$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	$4n^3+10$ 극대	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 $x>0$에서 직선 $y=k$와 서로 다른 두 점에서 만나려면



$10<k<4n^3+10$

이를 만족시키는 자연수 k의 개수는 $4n^3-1$이므로 $4n^3-1\le 1000$에서

$4n^3\le 1001 \quad \therefore n^3\le \dfrac{1001}{4}=250.25$

이때 $6^3=216$, $7^3=343$이므로 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이다.

따라서 모든 n의 값의 합은

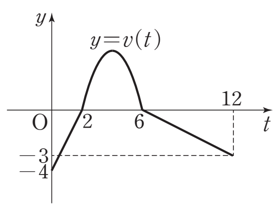
$1+2+3+4+5+6=21$

19 답 $\dfrac{38}{3}$

$$v(t)=\begin{cases} 2t-4 & (0\le t<2) \\ -t^2+8t-12 & (2\le t<6) \\ -\dfrac{1}{2}t+3 & (6\le t\le 12)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2(t-2) & (0\le t\le 2) \\ -(t-2)(t-6) & (2\le t\le 6) \\ -\dfrac{1}{2}(t-6) & (6\le t\le 12)\end{cases}$$

에서 함수 $y=v(t)$의 그래프는 그림과 같으므로 점 P는 원점을 출발한 후 시각 $t=2$까지는 음의 방향으로 움직이고 시각 $t=2$에서 $t=6$까지는 양의 방향으로 움직이며 시각 $t=6$ 이후에 다시 음의 방향으로 움직인다.



시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량을 S_1이라 하면

$$S_1=\int_0^2 v(t)\,dt=\int_0^2 (2t-4)\,dt$$
$$=\Big[t^2-4t\Big]_0^2=-4$$

시각 $t=2$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량을 S_2라 하면

$$S_2=\int_2^6 v(t)\,dt$$
$$=\underline{\int_2^6 (-t^2+8t-12)\,dt} \longrightarrow =\frac{(-1)}{6}\times(6-2)^3=\frac{32}{3}$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3+4t^2-12t\Big]_2^6=\frac{32}{3}$$

시각 $t=6$에서 $t=12$까지 점 P의 위치의 변화량을 S_3이라 하면

$$S_3=\int_6^{12} v(t)\,dt=\int_6^{12}\left(-\frac{1}{2}t+3\right)dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{4}t^2+3t\Big]_6^{12}=-9$$

따라서 시각 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$S_1=-4$

시각 $t=6$에서의 점 P의 위치는

$S_1+S_2=-4+\dfrac{32}{3}=\dfrac{20}{3}$

시각 $t=12$에서의 점 P의 위치는

$S_1+S_2+S_3=-4+\dfrac{32}{3}-9=-\dfrac{7}{3}$

따라서 시각 $t=6$일 때 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있고, 이때 원점과 점 P 사이의 거리는 $\dfrac{20}{3}$이므로

$a=6,\ l=\dfrac{20}{3} \qquad \therefore a+l=\dfrac{38}{3}$

20 답 ③

$v(t)=-t(t-1)(t-a)(t-2a)$에 대하여 운동 방향이 한 번만 바뀌려면 $t>0$에서 <u>$v(t)$의 부호가 한 번만 바뀌어야</u> 하므로

→ $y=v(t)$의 그래프가 $t=0$ 또는 $t=1$에서 t축과 접해야 한다.

$a=0$ 또는 $a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=1$

(i) $a=0$일 때,

$v(t)=-t^3(t-1)$이므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 v(t)\,dt=\int_0^2\{-t^3(t-1)\}\,dt$$
$$=\int_0^2(-t^4+t^3)\,dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{4}t^4\Big]_0^2=-\frac{12}{5}$$

(ii) $a=\dfrac{1}{2}$일 때,

$v(t)=-t\left(t-\dfrac{1}{2}\right)(t-1)^2$이므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 v(t)\,dt=\int_0^2\left\{-t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2\right\}dt$$
$$=\int_0^2\left(-t^4+\frac{5}{2}t^3-2t^2+\frac{1}{2}t\right)dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{5}t^5+\frac{5}{8}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t^2\Big]_0^2=-\frac{11}{15}$$

(iii) $a=1$일 때,

$v(t)=-t(t-1)^2(t-2)$이므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 v(t)\,dt=\int_0^2\{-t(t-1)^2(t-2)\}\,dt$$
$$=\int_0^2(-t^4+4t^3-5t^2+2t)\,dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{5}t^5+t^4-\frac{5}{3}t^3+t^2\Big]_0^2=\frac{4}{15}$$

(i), (ii), (iii)에서 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은 $\dfrac{4}{15}$이다.

21 답 ③

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 출발한 후 시각 $t=a$에서 처음으로 운동 방향을 바꾼다.

즉, 시각 $t=a$에서의 점 P의 위치는 -8이므로

$0+\displaystyle\int_0^a v(t)\,dt=-8 \qquad \therefore \int_0^a v(t)\,dt=-8$

시각 $t=c$에서의 점 P의 위치는 -6이므로

$0+\displaystyle\int_0^c v(t)\,dt=-6 \qquad \therefore \int_0^c v(t)\,dt=-6$

$\int_0^b v(t)\,dt=\int_b^c v(t)\,dt$에서

$\int_0^b v(t)\,dt=\int_b^0 v(t)\,dt+\int_0^c v(t)\,dt$

$\int_0^b v(t)\,dt=-\int_0^b v(t)\,dt+\int_0^c v(t)\,dt$

$2\int_0^b v(t)\,dt=\int_0^c v(t)\,dt$

$\therefore \int_0^b v(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^c v(t)\,dt=\frac{1}{2}\times(-6)=-3$

$a\le t\le b$에서 $v(t)\ge 0$이므로 시각 $t=a$부터 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_a^b |v(t)|\,dt=\int_a^b v(t)\,dt=\int_a^0 v(t)\,dt+\int_0^b v(t)\,dt$

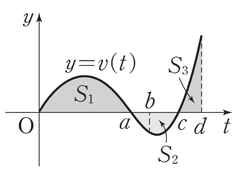
$=-\int_0^a v(t)\,dt+\int_0^b v(t)\,dt$

$=-(-8)+(-3)=5$

22 답 ④

ㄱ. $S_1=\int_0^a |v(t)|\,dt$, $S_2=\int_a^c |v(t)|\,dt$,

$S_3=\int_c^d |v(t)|\,dt$라 하자.



$\int_0^a |v(t)|\,dt=\int_a^d |v(t)|\,dt$에서

$S_1=S_2+S_3$

점 P가 출발한 후 다시 원점을 지나려면 $\int_0^x v(t)\,dt=0$인 $x\,(0<x\le d)$의 값이 존재해야 한다.

$\int_0^a v(t)\,dt=S_1$, $\int_a^c v(t)\,dt=-S_2$, $\int_c^d v(t)\,dt=S_3$이고 $S_1>S_2$이므로

$\int_0^a v(t)\,dt=S_1>0$

$\int_0^c v(t)\,dt=S_1-S_2>0$

$\int_0^d v(t)\,dt=S_1-S_2+S_3>0$

따라서 조건을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 점 P는 출발한 후 다시 원점을 지나지 않는다.

ㄴ. $\int_0^a |v(t)|\,dt=\int_a^d |v(t)|\,dt$에서

$\int_0^a v(t)\,dt=\int_a^c \{-v(t)\}\,dt+\int_c^d v(t)\,dt$

$\int_0^a v(t)\,dt+\int_a^c v(t)\,dt=\int_c^d v(t)\,dt$

$\therefore \int_0^c v(t)\,dt=\int_c^d v(t)\,dt$ ...... ㉠

ㄷ. $\int_b^d |v(t)|\,dt=\int_b^c \{-v(t)\}\,dt+\int_c^d v(t)\,dt$

$=-\int_b^c v(t)\,dt+\int_0^c v(t)\,dt$ ($\because$ ㉠)

$=\int_c^b v(t)\,dt+\int_0^c v(t)\,dt$

$=\int_0^b v(t)\,dt$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

STEP 3 최고난도 문제 | 97~98쪽

01 ③	02 ⑤	03 ③	04 17	05 ②	06 $\frac{16}{7}$
07 10	08 ③				

01 답 ③

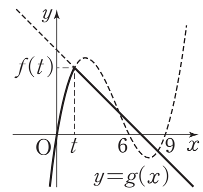
1단계 넓이가 최대가 되는 조건 알기

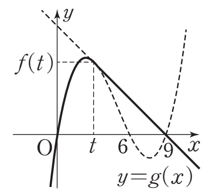
함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))\ (0<t<6)$에 대하여

$x<t$이면 $g(x)=f(x)$

$x\ge t$이면 $y=g(x)$는 점 $(t,\ f(t))$를 지나면서 기울기가 -1인 직선의 방정식이다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.





이때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 최대가 되려면 점 $(t,\ f(t))\ (0<t<6)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-(x-t)+f(t)$가 접해야 한다.

2단계 접선의 방정식 구하기

$f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)=\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+6x$에서

$f'(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{10}{3}x+6$

점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가 -1이어야 하므로

$f'(t)=-1$

$\frac{1}{3}t^2-\frac{10}{3}t+6=-1$

$t^2-10t+21=0$, $(t-3)(t-7)=0$

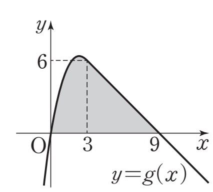
$\therefore t=3$ ($\because 0<t<6$)

따라서 접점의 좌표는 $(3,\ 6)$이고 접선의 방정식은

$y=-(x-3)+6$ $\quad\therefore y=-x+9$ $f(3)=\frac{1}{9}\times3\times(-3)\times(-6)=6$

3단계 넓이의 최댓값 구하기

$0\le x\le 3$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이의 최댓값을 S라 하면



$S=\int_0^3\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+6x\right)dx+\frac{1}{2}\times(9-3)\times 6$

$=\left[\frac{1}{36}x^4-\frac{5}{9}x^3+3x^2\right]_0^3+18$

$=\frac{57}{4}+18=\frac{129}{4}$

02 답 ⑤

1단계 미분가능할 조건을 이용하여 식 세우기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=k$에서도 연속이다.

$\lim_{x\to k+} f(x)=\lim_{x\to k-} f(x)=f(k)$에서

$\lim_{x\to k+}(-x^2+4bx-3b^2)=\lim_{x\to k-} ax=-k^2+4bk-3b^2$

$\therefore\ -k^2+4bk-3b^2=ak$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=k$에서도 미분가능하다.

즉, 미분계수 $f'(k)$가 존재하고 $f'(x)=\begin{cases} a & (x<k) \\ -2x+4b & (x>k) \end{cases}$이므로

$f'(k)=a=-2k+4b$ …… ㉡

2단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. $a=1$이면 ㉡에서 $f'(k)=1$

3단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. $k=3$이면 ㉠에서

$-9+12b-3b^2=3a$

$\therefore\ a=-b^2+4b-3$ …… ㉢

㉡에서 $a=-6+4b$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $-b^2+4b-3=-6+4b$

$b^2=3$ $\quad\therefore\ b=\sqrt{3}\ (\because\ b>0)$

이를 ㉣에 대입하면 $a=-6+4\sqrt{3}$

4단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. ㉠에서 $f(k)=ak$

㉡에서 $f'(k)=a$

$f(k)=f'(k)$이면

$ak=a,\ a(k-1)=0$

$\therefore\ k=1\ (\because\ a>0)$

$k=1$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$a=-1+4b-3b^2,\ a=-2+4b$

즉, $-1+4b-3b^2=-2+4b$이므로

$3b^2=1,\ b^2=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ (\because\ b>0)$

이를 $a=-2+4b$에 대입하면

$a=-2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}$

$\therefore\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}x & (x<1) \\ -x^2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}x-1 & (x\ge 1) \end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표를 구하면

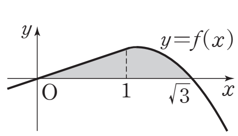
$x<1$일 때, $\dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}x=0$에서 $x=0$

$x\ge 1$일 때, $-x^2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}x-1=0$에서 $x^2-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}x+1=0$

$\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)(x-\sqrt{3})=0$

$\therefore\ x=\sqrt{3}\ (\because\ x\ge 1)$

$0\le x\le\sqrt{3}$에서 $f(x)\ge 0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면



$S=\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}+\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\left(-x^2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}x-1\right)dx$

$=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}+\left[-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x^2-x\right]_1^{\sqrt{3}}$

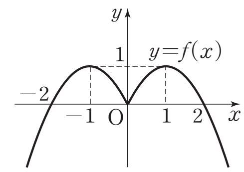
$=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}+\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{3}$

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

03 답 ③

1단계 $g(t)$ 구하기



$f(x)=2|x|-|x|^2$

$=\begin{cases} -x^2-2x & (x\le 0) \\ -x^2+2x & (x\ge 0) \end{cases}$

$=\begin{cases} -(x+1)^2+1 & (x\le 0) \\ -(x-1)^2+1 & (x\ge 0) \end{cases}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

함수 $f(x)$는 $x\le -1,\ 0\le x\le 1$에서 증가하고 $-1\le x\le 0,\ x\ge 1$에서 감소하므로 닫힌구간 $[t,\ t+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 다음과 같다.

(i) $t<-2$일 때,

닫힌구간 $[t,\ t+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(t+1)$이므로

$g(t)=f(t+1)=-(t+2)^2+1=-t^2-4t-3$

(ii) $-2\le t\le -1$일 때,

닫힌구간 $[t,\ t+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이므로

$g(t)=1$

(iii) $-1<t\le -\dfrac{1}{2}$일 때, → $t=-\dfrac{1}{2}$일 때, $f(t)=f(t+1)$

닫힌구간 $[t,\ t+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(t)$이므로

$g(t)=f(t)=-t^2-2t$

(iv) $-\dfrac{1}{2}<t<0$일 때,

닫힌구간 $[t,\ t+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(t+1)$이므로

$g(t)=f(t+1)=-t^2+1$

(v) $0\le t\le 1$일 때,

닫힌구간 $[t,\ t+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이므로

$g(t)=1$

(vi) $t>1$일 때,

닫힌구간 $[t,\ t+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(t)$이므로

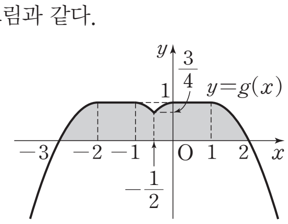
$g(t)=f(t)=-t^2+2t$

(i)~(vi)에서

$g(t)=\begin{cases} -t^2-4t-3 & (t<-2) \\ 1 & (-2\le t\le -1 \text{ 또는 } 0\le t\le 1) \\ -t^2-2t & \left(-1<t\le -\dfrac{1}{2}\right) \\ -t^2+1 & \left(-\dfrac{1}{2}<t<0\right) \\ -t^2+2t & (t>1) \end{cases}$

2단계 곡선 $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기

곡선 $y=g(x)$는 그림과 같다.



$-3\le x\le 2$에서 $g(x)\ge 0$이므로 곡선 $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$S=\displaystyle\int_{-3}^{-2}(-x^2-4x-3)\,dx+1\times 1+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(-x^2-2x)\,dx$

$\qquad+\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(-x^2+1)\,dx+1\times 1+\int_{1}^{2}(-x^2+2x)\,dx$

$=\left[-\dfrac{1}{3}x^3-2x^2-3x\right]_{-3}^{-2}+1+\left[-\dfrac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}$

$$+\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+1+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{1}^{2}$$

$$=\frac{2}{3}+1+\frac{11}{24}+\frac{11}{24}+1+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{17}{4}$$

04 답 17

1단계 A, B, C **구하기**

(가)의 $\int_a^b f'(x)\,dx=5$에서

$f(b)-f(a)=5 \qquad \therefore f(b)=5+f(a) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=0$인 x의 값을 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하면 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이고 $x=\beta$에서 극대이므로 (나)에서

$f(\alpha)=-3$, $f(\beta)=7$

$a\le x\le \alpha$에서 $f'(x)\le 0$이므로

$$A=-\int_a^{\alpha} f'(x)\,dx=\int_{\alpha}^{a} f'(x)\,dx$$

$$=f(a)-f(\alpha)=f(a)+3$$

$\alpha\le x\le \beta$에서 $f'(x)\ge 0$이므로

$$B=\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,dx=f(\beta)-f(\alpha)=7+3=10$$

$\beta\le x\le b$에서 $f'(x)\le 0$이므로

$$C=-\int_{\beta}^{b} f'(x)\,dx=\int_{b}^{\beta} f'(x)\,dx$$

$$=f(\beta)-f(b)=7-f(b)$$

$$=7-\{5+f(a)\}\ (\because ㉠)$$

$$=2-f(a)$$

2단계 $g(20)+g(30)+g(40)+g(50)$**의 값 구하기**

(다)의 $A:C=B:t$에서

$\{f(a)+3\}:\{2-f(a)\}=10:t$

$20-10f(a)=tf(a)+3t$, $(t+10)f(a)=20-3t$

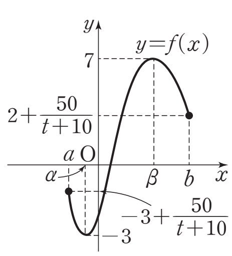
$$\therefore f(a)=\frac{20-3t}{t+10}=\frac{-3(t+10)+50}{t+10}=-3+\frac{50}{t+10}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$f(b)=5+\left(-3+\frac{50}{t+10}\right)=2+\frac{50}{t+10}$$

$a\le x\le b$에서 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 $a\le x\le b$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로



$$-3<k\le -3+\frac{50}{t+10}$$

또는 $2+\dfrac{50}{t+10}\le k<7$

(i) $t=20$일 때,

$-3<k\le -\dfrac{4}{3}$ 또는 $\dfrac{11}{3}\le k<7$

따라서 정수 k는 -2, 4, 5, 6의 4개이다.

$\therefore g(20)=4$

(ii) $t=30$일 때,

$-3<k\le -\dfrac{7}{4}$ 또는 $\dfrac{13}{4}\le k<7$

따라서 정수 k는 -2, 4, 5, 6의 4개이다.

$\therefore g(30)=4$

(iii) $t=40$일 때,

$-3<k\le -2$ 또는 $3\le k<7$

따라서 정수 k는 -2, 3, 4, 5, 6의 5개이다.

$\therefore g(40)=5$

(iv) $t=50$일 때,

$-3<k\le -\dfrac{13}{6}$ 또는 $\dfrac{17}{6}\le k<7$

따라서 정수 k는 3, 4, 5, 6의 4개이다.

$\therefore g(50)=4$

(i)~(iv)에서

$g(20)+g(30)+g(40)+g(50)=4+4+5+4=17$

05 답 ②

1단계 $g(x)$**를** a**를 이용하여 나타내기**

$g(x)=px^2+qx+r\,(p,\ q,\ r$는 상수, $p\ne 0)$라 하고

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^4-4x^3+ax^2+(8-2a)x-(px^2+qx+r)$

$\quad =x^4-4x^3+(a-p)x^2+(8-2a-q)x-r \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(가)의 $f(b)=g(b)$, $f(b+2)=g(b+2)$에서

$f(b)-g(b)=0$, $f(b+2)-g(b+2)=0$

$\therefore h(b)=0,\ h(b+2)=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

(나)의 $f'(b)=g'(b)$, $f'(b+2)=g'(b+2)$에서

$f'(b)-g'(b)=0$, $f'(b+2)-g'(b+2)=0$

$\therefore h'(b)=0,\ h'(b+2)=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $h(x)$는 $(x-b)^2$, $(x-b-2)^2$을 인수로 갖고 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$h(x)=(x-b)^2(x-b-2)^2$

$\quad =\{x^2-2(b+1)x+b(b+2)\}^2$

㉠에서 $h(x)$의 삼차항의 계수는 -4이고, 위의 식을 전개하면 삼차항은 $2\times x^2\times\{-2(b+1)x\}=-4(b+1)x^3$이므로

$-4=-4b-4 \qquad \therefore b=0$

$\therefore h(x)=x^2(x-2)^2=x^4-4x^3+4x^2$

㉠에서 $a-p=4$, $8-2a-q=0$, $r=0$

$\therefore p=a-4$, $q=8-2a$, $r=0$

$\therefore g(x)=(a-4)x^2+(8-2a)x=(a-4)x(x-2) \qquad \cdots\cdots$ ㉣

2단계 곡선 $y=f(x)$**와** x**축으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기**

곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 x좌표를 구하면

$x^4-4x^3+ax^2+(8-2a)x=0$

$x(x-2)(x^2-2x-4+a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x^2-2x-4+a=0$

이차방정식 $x^2-2x-4+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1-(-4+a)=5-a<0\ (\because a>5)$$

따라서 $0\le x\le 2$에서 $f(x)\le 0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\int_0^2\{-f(x)\}\,dx$$

$$=\int_0^2\{-x^4+4x^3-ax^2-(8-2a)x\}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{5}x^5+x^4-\frac{a}{3}x^3-(4-a)x^2\right]_0^2$$

$$=\frac{4}{3}a-\frac{32}{5}$$

3단계 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기

$h(x)=f(x)-g(x)=x^2(x-2)^2$이므로

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표는 $x=0$ 또는 $x=2$

$0\le x\le 2$에서 $h(x)\ge 0$, 즉 $f(x)\ge g(x)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_0^2\{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_0^2 h(x)\,dx$$

$$=\int_0^2(x^4-4x^3+4x^2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2=\frac{16}{15}$$

4단계 a의 값 구하기

(다)에서 $S_1=4S_2$이므로

$$\frac{4}{3}a-\frac{32}{5}=4\times\frac{16}{15}$$

$$\frac{4}{3}a=\frac{32}{3}\qquad\therefore a=8$$

5단계 $a+g(b+1)$의 값 구하기

(라)에서 $g(x)=4x(x-2)$이므로

$a+g(b+1)=8+g(1)=8+4\times(-1)=4$

06 답 $\frac{16}{7}$

1단계 직선 l의 방정식 구하기

두 점 $\mathrm{A}(-1,\ f(-1))$, $\mathrm{B}(2,\ f(2))$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{8n+10-(-n-5)}{3}=3n+5$$

직선 l의 기울기는 $3n+5$이고 $f(x)=nx^3+5x$에서 $f'(x)=3nx^2+5$이므로

$3nx^2+5=3n+5$, $3nx^2=3n$, $x^2=1$ ($\because n\ne 0$)

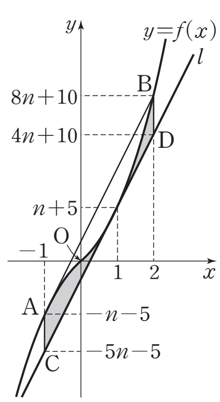
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ ⟶ $x=-1$인 점은 A이다.

즉, 직선 l과 곡선 $y=f(x)$는 점 $(1,\ n+5)$에서 접하므로 직선 l의 방정식은

$y-(n+5)=(3n+5)(x-1)$

$\therefore y=(3n+5)x-2n$

2단계 $\dfrac{S_1(n)}{S_2(n)}$의 값 구하기



$\mathrm{A}(-1,\ -n-5)$, $\mathrm{B}(2,\ 8n+10)$, $\mathrm{C}(-1,\ -5n-5)$, $\mathrm{D}(2,\ 4n+10)$이고 사각형 ACDB는 평행사변형이므로

$S_1(n)=3\times 4n=12n$

$-1\le x\le 2$에서 $nx^3+5x\ge(3n+5)x-2n$이므로

$S_2(n)$

$$=\int_{-1}^2[nx^3+5x-\{(3n+5)x-2n\}]\,dx$$

$$=\int_{-1}^2(nx^3-3nx+2n)\,dx$$

$$=\left[\frac{n}{4}x^4-\frac{3}{2}nx^2+2nx\right]_{-1}^2$$

$$=\frac{21}{4}n$$

$$\therefore \frac{S_1(n)}{S_2(n)}=\frac{12n}{\frac{21}{4}n}=\frac{16}{7}$$

07 답 10

1단계 $f(x)$의 최고차항의 계수의 범위 구하기

(가)의 $f(-x)=-f(x)$에서 삼차함수 $f(x)$가 홀수 차수의 항만 있으므로 $f(x)=ax^3+bx$ (a, b는 상수, $a\ne 0$)라 하자.

$f'(x)=3ax^2+b$이므로 (가)의 $f'(x)\ge 0$에서

$3ax^2+b\ge 0\qquad\therefore a>0,\ b\ge 0$

(나)의 $f(3)=g(3)$에서 $f(3)=3$

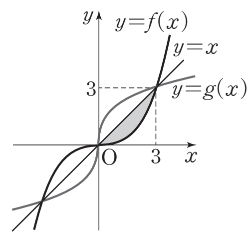
$27a+3b=3\qquad\therefore b=-9a+1$

$\therefore f(x)=ax^3+(-9a+1)x$

이때 $b\ge 0$에서 $-9a+1\ge 0$이므로 $a\le\frac{1}{9}$

$\therefore 0<a\le\frac{1}{9}$

2단계 S 구하기



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 4배이다.

$0\le x\le 3$에서 $x\ge f(x)$이므로

$$S=4\int_0^3\{x-f(x)\}\,dx$$

$$=4\int_0^3[x-\{ax^3+(-9a+1)x\}]\,dx$$

$$=4\int_0^3(-ax^3+9ax)\,dx=4\left[-\frac{a}{4}x^4+\frac{9}{2}ax^2\right]_0^3$$

$$=4\times\frac{81}{4}a=81a$$

3단계 $S+9f\left(\dfrac{g(3)}{3}\right)$의 값 구하기

따라서 $0<a\le\frac{1}{9}$일 때, S는 $a=\frac{1}{9}$에서 최댓값 9를 갖는다.

이때 $f(x)=\frac{1}{9}x^3$이고 $g(3)=f(3)=3$이므로

$$S+9f\left(\frac{g(3)}{3}\right)=9+9f(1)$$

$$=9+9\times\frac{1}{9}=10$$

08 답 ③

1단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. $x(t)=t(t-1)(at+b)$에서

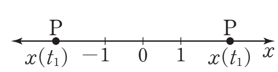
$x(0)=0$, $x(1)=0$

즉, 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치가 0이고, 시각 $t=1$에서의 점 P의 위치도 0이므로 점 P의 시각 $t=0$에서 $t=1$까지의 위치의 변화량이 0이다.

$$\therefore \int_0^1 v(t)\,dt=0$$

2단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재하면 시각 $t=t_1$에서 점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 크다.



즉, 시각 $t=0$에서 $t=t_1$까지 점 P가 움직인 거리가 1보다 크므로

$$\int_0^{t_1}|v(t)|\,dt>1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 시각 $t=1$에서의 점 P의 위치가 원점이므로

$$\int_{t_1}^{1}|v(t)|\,dt>1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\int_0^{t_1}|v(t)|\,dt+\int_{t_1}^{1}|v(t)|\,dt>2$$

$$\therefore \int_0^{1}|v(t)|\,dt>2$$

이는 $\int_0^1|v(t)|\,dt=2$라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재하지 않는다.

3단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 점 P와 원점 사이의 거리가 모두 1보다 작다.

$x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재하지 않는다고 가정하면 $0<t<1$에서 점 P는 원점을 지나지 않는다.

점 P가 시각 $t=0$에서 원점을 출발하여 시각 $t=1$일 때 원점으로 돌아오므로 $0<t<1$에서 운동 방향이 한 번 바뀐다.

점 P가 $0<t<1$에서 운동 방향을 바꾸는 시각을 $t=k$라 하면

$$\int_0^{k}|v(t)|\,dt<1,\ \int_k^{1}|v(t)|\,dt<1\text{이므로}$$

$$\int_0^{k}|v(t)|\,dt+\int_k^{1}|v(t)|\,dt<2$$

$$\therefore \int_0^{1}|v(t)|\,dt<2$$

이는 $\int_0^1|v(t)|dt=2$라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

기출 변형 문제로 단원 마스터 | 99~102쪽

01 13	02 ⑤	03 145	04 25	05 ②	06 41
07 13	08 48	09 216	10 16	11 ①	12 ②
13 $\frac{59}{3}$	14 10	15 16			

01 답 13

$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+kx$에서 $f'(x)=-x+k$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

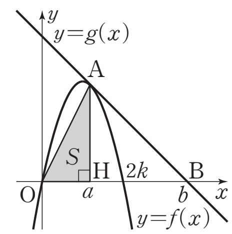
$$y=(-a+k)(x-a)-\frac{1}{2}a^2+ka=(-a+k)x+\frac{1}{2}a^2$$

$$\therefore g(x)=(-a+k)x+\frac{1}{2}a^2$$

직선 $y=(-a+k)x+\frac{1}{2}a^2$의 x절편이 b이므로

$$0=(-a+k)b+\frac{1}{2}a^2 \qquad \therefore b=\frac{a^2}{2(a-k)} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 $y=g(x)$가 x축과 만나는 점을 B라 하자.



㈎에서 $\int_a^b g(x)dx=2S$이므로 삼각형 BAH의 넓이는 삼각형 AOH의 넓이의 2배이다.

즉, $\overline{BH}=2\overline{OH}$이므로 $b=3a \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면 $3a=\frac{a^2}{2(a-k)}$

$$6(a-k)=a \qquad \therefore k=\frac{5}{6}a \qquad \cdots\cdots ㉢$$

즉, $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}ax$이고 ㈏에서

$$\int_0^a\left\{f(x)-\frac{1}{3}ax\right\}dx=\int_0^a\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}ax-\frac{1}{3}ax\right)dx$$

$$=\int_0^a\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}ax\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}ax^2\right]_0^a=\frac{a^3}{12}$$

즉, $\frac{a^3}{12}=18$이므로 $a^3=216 \qquad \therefore a=6$ ($\because$ a는 실수)

$a=6$을 ㉢에 대입하면 $k=5$

따라서 $g(x)=-x+18$이므로

$g(k)=g(5)=-5+18=13$

02 답 ⑤

$g(x)=f(x)+f(-x)$라 하면

$g(-x)=f(-x)+f(x)=g(x)$

즉, 함수 $g(x)$는 짝수 차수의 항 또는 상수항만 있다.

㈎의 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+f(-x)}{2x^2-3}=3$에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{2x^2-3}=3$이므로 $g(x)$는 최고차항의 계수가 6인 이차함수이다.

㈏의 $\lim_{x\to 0}f(x)=2$에서 $f(0)=2$

$\therefore g(0)=f(0)+f(0)=2+2=4$

따라서 $g(x)=6x^2+4$이므로 $f(x)+f(-x)=6x^2+4$

한편 다항함수 $f(x)$의 짝수 차수의 항과 상수항으로 이루어진 함수를 $h_1(x)$, 홀수 차수의 항으로 이루어진 함수를 $h_2(x)$라 하면

$f(x)=h_1(x)+h_2(x)$이고 $h_1(-x)=h_1(x)$, $h_2(-x)=-h_2(x)$이므로

$f(-x)=h_1(-x)+h_2(-x)=h_1(x)-h_2(x)$

$$\int_{-4}^{4}f(x)\,dx=\int_{-4}^{4}\{h_1(x)+h_2(x)\}\,dx=2\int_0^4 h_1(x)\,dx\text{이고,}$$

$$\int_{-4}^{4}f(-x)\,dx=\int_{-4}^{4}\{h_1(x)-h_2(x)\}\,dx=2\int_0^4 h_1(x)\,dx\text{이므로}$$

$$\int_{-4}^{4}f(x)\,dx=\int_{-4}^{4}f(-x)\,dx$$

$$\therefore \int_{-4}^{4}\{f(x)+f(-x)\}\,dx=\int_{-4}^{4}f(x)\,dx+\int_{-4}^{4}f(-x)\,dx$$

$$=2\int_{-4}^{4}f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_{-4}^{4}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-4}^{4}\{f(x)+f(-x)\}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-4}^{4}(6x^2+4)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\int_0^4(6x^2+4)\,dx=\Big[2x^3+4x\Big]_0^4=144$$

03 답 145

$g(x)=x^3\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x t^3f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=3x^2\int_0^x f(t)\,dt+x^3f(x)-x^3f(x)$

$\therefore\ g'(x)=3x^2\int_0^x f(t)\,dt$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $\int_0^x f(t)\,dt=0$

이때 $h(x)=\int_0^x f(t)\,dt$라 하면 $h(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$이고, ㈏에서 방정식 $g'(x)=0$의 모든 실근이 0, 2이므로 방정식 $h(x)=0$의 모든 실근도 0, 2이어야 한다.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로 $h(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이다.

따라서 $h(x)$는 다음과 같은 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $h(x)=\frac{1}{3}x^2(x-2)$인 경우

$g'(x)=3x^2h(x)=x^4(x-2)$

이때 $g'(2)=0$이고, $x=2$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x>0$에서 극값을 갖게 되어 ㈎를 만족시킨다.

(ⅱ) $h(x)=\frac{1}{3}x(x-2)^2$인 경우

$g'(x)=3x^2h(x)=x^3(x-2)^2$

이때 $g'(2)=0$이지만 $x=2$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x>0$에서 극값을 갖지 않게 되어 ㈎를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

$h(x)=\frac{1}{3}x^2(x-2)=\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2$이므로

$\int_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=x^2-\frac{4}{3}x$

$f(x)=0$에서 $x^2-\frac{4}{3}x=0$

$x\left(x-\frac{4}{3}\right)=0\qquad\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

이때 $|f(x)|=\begin{cases}-x^2+\frac{4}{3}x & \left(0\le x\le\frac{4}{3}\right)\\ x^2-\frac{4}{3}x & \left(x\le 0 \text{ 또는 } x\ge\frac{4}{3}\right)\end{cases}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 |f(x)|\,dx&=\int_0^2\left|x^2-\frac{4}{3}x\right|dx\\&=\int_0^{\frac{4}{3}}\left(-x^2+\frac{4}{3}x\right)dx+\int_{\frac{4}{3}}^2\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)dx\\&=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2\right]_0^{\frac{4}{3}}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2\right]_{\frac{4}{3}}^2\\&=\frac{32}{81}+\frac{32}{81}=\frac{64}{81}\end{aligned}$$

따라서 $p=81$, $q=64$이므로 $p+q=145$

04 답 25

㈎의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)=xf(x)+\frac{1}{2}x^2f'(x)-3x^2$

$\frac{1}{2}x^2f'(x)=3x^2\qquad\therefore\ f'(x)=6$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)\,dx=6x+C_1$

㈎의 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$\int_2^2 tf(t)\,dt=2f(2)-8+2$

$0=2f(2)-6\qquad\therefore\ f(2)=3$

즉, $12+C_1=3$에서 $C_1=-9$

$\therefore\ f(x)=6x-9$

$\therefore\ F(x)=\int f(x)\,dx=\int(6x-9)\,dx=3x^2-9x+C_2$

㈏의 좌변에서 $f(x)G(x)+F(x)g(x)=\{F(x)G(x)\}'$이므로

$\{F(x)G(x)\}'=12x^3-9x^2+6$

$$\begin{aligned}\therefore\ F(x)G(x)&=\int(12x^3-9x^2+6)\,dx\\&=3x^4-3x^3+6x+C_3\qquad\cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

이때 $F(x)=3x^2-9x+C_2$이고 $G(x)$는 다항함수이므로 $G(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$G(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

㉠에서 $(3x^2-9x+C_2)(x^2+ax+b)=3x^4-3x^3+6x+C_3$

이 식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 x^3의 계수를 비교하면

$3a-9=-3$에서 $a=2$

$\therefore\ G(x)=x^2+2x+b$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_{-1}^4 g(x)dx&=\Big[G(x)\Big]_{-1}^4=G(4)-G(-1)\\&=(16+8+b)-(1-2+b)\\&=25\end{aligned}$$

⟶ b의 값을 구하지 않아도 정적분의 값을 구할 수 있다.

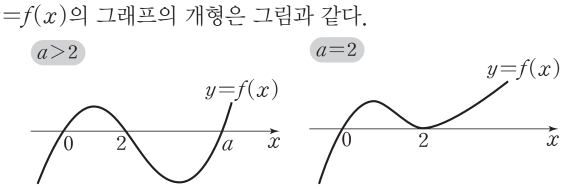
05 답 ②

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$를 $f(x)=x(x-2)(x-a)$ (a는 상수)라 하자.

ㄱ. $g(0)=0$이면 $\int_0^2 f(x)\,dx-\int_0^2|f(x)|\,dx=0$이므로

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2|f(x)|dx$

$0\le x\le 2$일 때 $f(x)\ge 0$이어야 하므로 이를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$x\le 0$일 때 $f(x)\le 0$이므로

$\int_{-2}^0 f(x)\,dx<0$

$\therefore\ g(-2)=\int_{-2}^0 f(x)\,dx-\int_0^2|f(x)|\,dx<0$

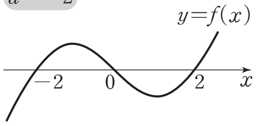
ㄴ. $g(-2)>4$이면

$\int_{-2}^0 f(x)\,dx-\int_0^2|f(x)|\,dx>4$

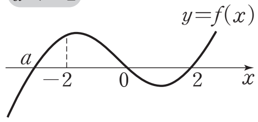
$\therefore\ \int_{-2}^0 f(x)\,dx>\int_0^2|f(x)|\,dx+4>0\ (\because |f(x)|\ge 0)$

$-2\le x\le 0$일 때 $f(x)\ge 0$이어야 하므로 이를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a=-2$



$a<-2$



이때 $a=-2$이면 $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx=\int_{0}^{2}|f(x)|\,dx$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a<-2$이므로 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-2$인 실수 k가 존재한다.

ㄷ. ㄴ에서 $g(-2)>4$이면 $0\le x\le 2$일 때 $f(x)\le 0$이므로

$$\begin{aligned} g(-2)&=\int_{-2}^{0} f(x)\,dx-\int_{0}^{2}|f(x)|\,dx \\ &=\int_{-2}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \\ &=\int_{-2}^{2} x(x-2)(x-a)\,dx \\ &=\int_{-2}^{2}\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}\,dx \\ &=2\int_{0}^{2}\{-(a+2)x^2\}\,dx \\ &=2\left[-\frac{a+2}{3}x^3\right]_0^2=-\frac{16(a+2)}{3} \end{aligned}$$

$g(-2)>8$이면 $-\dfrac{16(a+2)}{3}>8$

$a+2<-\dfrac{3}{2}\qquad\therefore a<-\dfrac{7}{2}$

$$\begin{aligned} g(0)&=\int_{0}^{2} f(x)\,dx-\int_{0}^{2}|f(x)|\,dx \\ &=\int_{0}^{2} f(x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx=2\int_{0}^{2} f(x)\,dx \\ &=2\int_{0}^{2} x(x-2)(x-a)\,dx \\ &=2\int_{0}^{2}\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}\,dx \\ &=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_0^2 \\ &=2\left\{4-\frac{8(a+2)}{3}+4a\right\}=\frac{8(a-1)}{3} \end{aligned}$$

이때 $a<-\dfrac{7}{2}$이면 $g(0)=\dfrac{8(a-1)}{3}<-12$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

06 답 41

㈎에서 주어진 등식의 양변에 $x=3a$를 대입하면

$9a^2|g(3a)|=0$

$\therefore g(3a)=0\ (\because a>0)$

이때 삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0이므로

$g(x)=x(x-3a)(x-b)$ (b는 상수)라 하자.

함수 $(9a-5x)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{3a}^{x}(9a-5t)f(t)\,dt=(9a-5x)f(x)$

함수 $\displaystyle\int_{3a}^{x}(9a-5t)f(t)\,dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $x^2|g(x)|$는 $x=3a$에서 미분가능하다.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3a+}\frac{x^2|g(x)|-9a^2|g(3a)|}{x-3a}&=\lim_{x\to 3a+}\frac{x^2|x(x-3a)(x-b)|}{x-3a} \\ &=\lim_{x\to 3a+} x^3|x-b|=27a^3|3a-b| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3a-}\frac{x^2|g(x)|-9a^2|g(3a)|}{x-3a}&=\lim_{x\to 3a-}\frac{x^2|x(x-3a)(x-b)|}{x-3a} \\ &=\lim_{x\to 3a-}(-x^3|x-b|) \\ &=-27a^3|3a-b| \end{aligned}$$

즉, $27a^3|3a-b|=-27a^3|3a-b|$이므로

$54a^3|3a-b|=0\qquad\therefore b=3a\ (\because a>0)$

$\therefore g(x)=x(x-3a)^2$

$x<0$일 때 $g(x)<0$, $x\ge 0$일 때 $g(x)\ge 0$이므로

$$\begin{aligned} \int_{3a}^{x}(9a-5t)f(t)\,dt=x^2|g(x)| &=\begin{cases} -x^3(x-3a)^2 & (x<0) \\ x^3(x-3a)^2 & (x\ge 0) \end{cases} \\ &=\begin{cases} -x^5+6ax^4-9a^2x^3 & (x<0) \\ x^5-6ax^4+9a^2x^3 & (x\ge 0) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (9a-5x)f(x)&=\begin{cases} -5x^4+24ax^3-27a^2x^2 & (x<0) \\ 5x^4-24ax^3+27a^2x^2 & (x>0) \end{cases} \\ &=\begin{cases} -x^2(5x-9a)(x-3a) & (x<0) \\ x^2(5x-9a)(x-3a) & (x>0) \end{cases} \end{aligned}$$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$f(x)=\begin{cases} x^2(x-3a) & (x<0) \\ -x^2(x-3a) & (x\ge 0) \end{cases}$$

방정식 $g(f(x))=0$에서 $f(x)\{f(x)-3a\}^2=0$

$\therefore f(x)=0$ 또는 $f(x)=3a$

$f(x)=0$에서

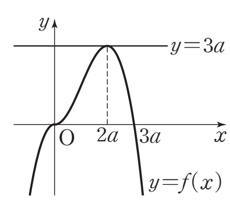
$x=0$ 또는 $x=3a$

이때 ㈏에서 방정식 $g(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 방정식 $f(x)=3a$는 0, $3a$가 아닌 하나의 실근을 가져야 한다.

$x\ge 0$에서 $f(x)=-x^3+3ax^2$이므로

$f'(x)=-3x^2+6ax=-3x(x-2a)$이고,

함수 $f(x)$는 $x=2a$에서 극댓값을 갖는다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3a$가 $x=0$, $x=3a$인 점이 아닌 한 점에서 만나야 하므로 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3a$는 점 $(2a,\ f(2a))$에서 접해야 한다.

$f(2a)=3a$에서 $4a^3=3a\qquad\therefore a^2=\dfrac{3}{4}$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx&=\int_{-a}^{0} x^2(x-3a)\,dx+\int_{0}^{a}\{-x^2(x-3a)\}\,dx \\ &=\int_{-a}^{0}(x^3-3ax^2)\,dx+\int_{0}^{a}(-x^3+3ax^2)\,dx \\ &=\left[\frac{1}{4}x^4-ax^3\right]_{-a}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+ax^3\right]_0^a \\ &=-\frac{5}{4}a^4+\frac{3}{4}a^4=-\frac{1}{2}a^4 \\ &=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{9}{32} \end{aligned}$$

따라서 $p=32$, $q=9$이므로

$p+q=41$

참고 $a>0$이므로 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

이때 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$을 대입하여 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f(x)\,dx$를 구할 수 있지만 계산 과정이 복잡해지므로 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$를 계산한 후 마지막에 $a^2=\dfrac{3}{4}$을 대입하여 값을 구하도록 한다.

07 답 13

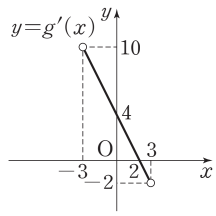
(나)에서 $|x|<3$일 때, $g(x)=\int_1^x (-2t+a)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=-2x+a$

(다)에서 $g'(2)=0$, $g'(b)=0$

$g'(2)=0$에서 $-4+a=0$ $\quad\therefore a=4$

따라서 $|x|<3$일 때, $g'(x)=-2x+4$이므로 함수 $y=g'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $|x|<3$에서 $g'(x)=0$인 x의 값은 2뿐이므로 $x=2$에서만 극값을 갖는다.

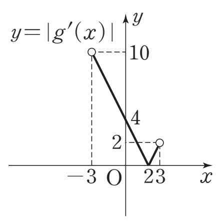
$\therefore |b|\ge 3$ — $x=b$에서 극값을 가지므로 $x=b$는 $|x|\ge 3$인 범위에 있다.

(나)에서 $|x|\ge 3$일 때, $|g'(x)|=f(x)$이므로

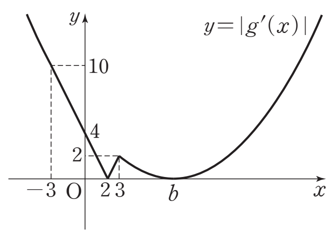
$f(x)\ge 0$

이때 $f(b)=|g'(b)|=0$이므로 $|x|\ge 3$에서 이차함수 $\underbrace{y=|g'(x)|}_{y=f(x)}$의 그래프는 $x=b$인 점에서 x축과 만나고, $x\ne b$에서는 x축보다 위쪽에 있다. …… ㉠

$|x|<3$에서 함수 $y=|g'(x)|=|-2x+4|$의 그래프는 그림과 같고, (가)에서 함수 $g'(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $|g'(x)|$도 실수 전체의 집합에서 연속이다.



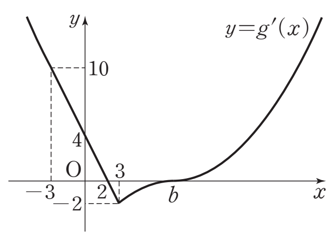
따라서 함수 $|g'(x)|$는 $x=-3$, $x=3$에서도 연속이고 $|x|\ge 3$에서 이차함수 $y=|g'(x)|$의 그래프가 ㉠을 만족시키려면 그림과 같이 $x=b\,(b>3)$인 점에서 x축에 접해야 한다.



$|x|\ge 3$에서 함수 $|g'(x)|$의 최고차항의 계수를 $m\,(m>0)$이라 하면

$|g'(x)|=m(x-b)^2$

실수 전체의 집합에서 함수 $g'(x)$가 연속이려면 $|x|<3$일 때, 함수 $y=g'(x)$, 즉 $y=-2x+4$의 그래프에 대하여 그림과 같이 $3\le x<b$에서 $g'(x)=-f(x)$이어야 한다.



$$\therefore g'(x)=\begin{cases} m(x-b)^2 & (x\le -3 \text{ 또는 } x\ge b) \\ -2x+4 & (-3<x<3) \\ -m(x-b)^2 & (3\le x<b)\end{cases}$$

함수 $g'(x)$가 $x=-3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -3+} g'(x)=\lim_{x\to -3-} g'(x)=g'(-3)$에서

$\lim_{x\to -3+} (-2x+4)=\lim_{x\to -3-} m(x-b)^2=m(-3-b)^2$

$6+4=m(-3-b)^2$

$\therefore m(b+3)^2=10$ …… ㉡

함수 $g'(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 3+} g'(x)=\lim_{x\to 3-} g'(x)=g'(3)$에서

$\lim_{x\to 3+} \{-m(x-b)^2\}=\lim_{x\to 3-} (-2x+4)=-m(3-b)^2$

$-m(3-b)^2=-6+4$ $\quad\therefore m(b-3)^2=2$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $m(b+3)^2=5m(b-3)^2$

$b^2+6b+9=5b^2-30b+45$ ($\because m>0$)

$b^2-9b+9=0$ $\quad\therefore b=\frac{9+3\sqrt{5}}{2}$ ($\because b>3$) …… ㉣

(나)에서 $g(1)=\int_1^1 (-2t+4)\,dt=0$

k의 값의 범위를 나누어 $g(k)=0$을 만족시키는 실수 k의 값을 구해 보자.

(i) $k<1$일 때,

$x\le 1$에서 $g'(x)>0$이므로 함수 $g(x)$는 증가한다.

이때 $g(1)=0$이므로 $x<1$에서 $g(x)<0$

따라서 $g(k)=0$을 만족시키는 k의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $1\le k\le 3$일 때,

$g(1)=0$이므로

$g(k)=\int_1^k g'(t)dt=\int_1^k (-2t+4)dt=\Big[-t^2+4t\Big]_1^k$

$=-k^2+4k-3$

$-k^2+4k-3=0$에서 $(k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=3$

(iii) $k>3$일 때,

$3<x<b$에서 $g'(x)<0$이므로 $g(k)=\int_1^k g'(t)\,dt=0$이려면

$k>b$이어야 한다.

$g(1)=0$이므로

$g(k)=\int_1^k g'(t)\,dt$

$=\int_1^3 g'(t)\,dt+\int_3^b g'(t)\,dt+\int_b^k g'(t)\,dt$

$=0+\int_3^b \{-m(t-b)^2\}\,dt+\int_b^k m(t-b)^2\,dt$

$=-m\int_3^b (t^2-2bt+b^2)\,dt+m\int_b^k (t^2-2bt+b^2)\,dt$

$=-m\Big[\frac{t^3}{3}-bt^2+b^2t\Big]_3^b+m\Big[\frac{t^3}{3}-bt^2+b^2t\Big]_b^k$

$=-\frac{m}{3}(b^3-9b^2+27b-27)+\frac{m}{3}(k^3-3bk^2+3b^2k-b^3)$

$=-\frac{m}{3}(b-3)^3+\frac{m}{3}(k-b)^3$

$-\frac{m}{3}(b-3)^3+\frac{m}{3}(k-b)^3=0$에서 $(k-b)^3=(b-3)^3$ ($\because m>0$)

$k-b$, $b-3$은 모두 실수이므로 $k-b=b-3$

$\therefore k=2b-3=6+3\sqrt{5}$ ($\because$ ㉣)

(i), (ii), (iii)에서 $k=1$ 또는 $k=3$ 또는 $k=6+3\sqrt{5}$

모든 실수 k의 값의 합은 $1+3+(6+3\sqrt{5})=10+3\sqrt{5}$

따라서 $p=10$, $q=3$이므로 $p+q=13$

08 답 48

$F(x)=\int_0^x 2f(t)dt$라 하면 $F(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이다.

$$g(x)=\begin{cases} F(x)-6 & (x<3) \\ -F(x)+6 & (x\ge 3)\end{cases}$$

(가)의 $\lim_{x\to3-}\frac{g(x)-6}{x-3}=g'(0)$에서 $x\to3-$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to3-}\{g(x)-6\}=0$에서

$\lim_{x\to3-}\{F(x)-12\}=0$, $F(3)-12=0$

$\therefore F(3)=12$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 $\lim_{x\to3-}\frac{g(x)-6}{x-3}=\lim_{x\to3-}\frac{F(x)-12}{x-3}=F'(3)=2f(3)$,

$\lim_{x\to3+}\frac{g(x)+6}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{-\{F(x)-12\}}{x-3}=-F'(3)=-2f(3)$,

$g'(0)=F'(0)=2f(0)$

(가)에서 $2f(3)=-2f(3)=2f(0)$이므로 $f(3)=f(0)=0$

$f(x)=ax(x-3)(x-b)$ (a, b는 상수, $a>0$)라 하면

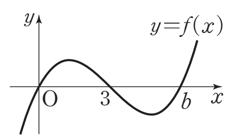
$f(x)=a\{x^3-(b+3)x^2+3bx\}$에서

$f'(x)=a\{3x^2-2(b+3)x+3b\}$

$f'(3)=a(-3b+9)<0$이고 $a>0$이므로

$-3b+9<0$ $\quad\therefore b>3$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$$g'(x)=\begin{cases}2f(x) & (x<3)\\ -2f(x) & (x>3)\end{cases}$$

$f(x)=ax(x-3)(x-b)$ ($a>0$, $b>3$)에 대하여 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

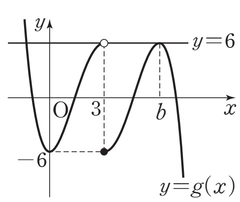
x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	b	$\cdots$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	-6 극소	↗		↗	$g(b)$ 극대	↘

$g(0)=\int_0^0 2f(t)\,dt-6=-6$

(가)에서 $\lim_{x\to3-}g(x)=6$, $\lim_{x\to3+}g(x)=g(3)=-6$

(나)에서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=6$이 두 점에서 만나야 하므로 $g(b)=6$이어야 한다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$g(b)=-\int_0^b 2f(t)\,dt+6=6$에서 $\int_0^b f(t)\,dt=0$

$$\int_0^b at(t-3)(t-b)\,dt=\int_0^b a\{t^3-(b+3)t^2+3bt\}\,dt$$
$$=a\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{b+3}{3}t^3+\frac{3}{2}bt^2\right]_0^b$$
$$=a\left\{\frac{b^4}{4}-\frac{b^3(b+3)}{3}+\frac{3}{2}b^3\right\}$$
$$=ab^3\left(\frac{b}{4}-\frac{b+3}{3}+\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{ab^3(6-b)}{12}=0$$

즉, $ab^3(6-b)=0$에서 $b=6$ ($\because a>0$, $b>3$)

㉠에서 $\int_0^3 2f(t)\,dt=12$, 즉 $\int_0^3 f(t)\,dt=6$이므로

$$\int_0^3 f(t)\,dt=\int_0^3 at(t-3)(t-6)\,dt$$
$$=\int_0^3 a(t^3-9t^2+18t)\,dt$$
$$=a\left[\frac{1}{4}t^4-3t^3+9t^2\right]_0^3=\frac{81}{4}a$$

즉, $\frac{81}{4}a=6$에서 $a=\frac{8}{27}$이므로 $f(x)=\frac{8}{27}x(x-3)(x-6)$

$\therefore f(9)=\frac{8}{27}\times9\times6\times3=48$

09 답 216

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=f(3)$

$3\le x<6$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $0\le x<3$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 9만큼 평행이동한 그래프와 일치한다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)+9$이므로

$$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x+3)$$
$$=\lim_{x\to0+}\{f(x)+9\}$$
$$=0+9=9$$

$$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}(2x^3+ax^2+bx)$$
$$=54+9a+3b$$

$f(3)=f(0)+9=9$

즉, $9=54+9a+3b$이므로

$b=-3a-15$ $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

이때

$$\lim_{x\to3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x+3)-f(3)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{\{f(x)+9\}-9}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{2x^3+ax^2+bx}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}(2x^2+ax+b)$$
$$=b=-3a-15\ (\because ㉠)$$

$$\lim_{x\to3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}\frac{(2x^3+ax^2+bx)-9}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}\frac{2x^3+ax^2+(-3a-15)x-9}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}\frac{(x-3)\{2x^2+(a+6)x+3\}}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}\{2x^2+(a+6)x+3\}=3a+39$$

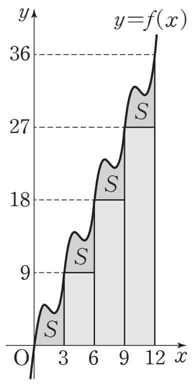
즉, $-3a-15=3a+39$이므로

$a=-9$

이를 ㉠에 대입하면 $b=12$

$\therefore f(x)=2x^3-9x^2+12x$ ($0\le x<3$)

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^3 (2x^3-9x^2+12x)dx=\left[\frac{1}{2}x^4-3x^3+6x^2\right]_0^3=\frac{27}{2}$

$\therefore \int_0^{12} f(x)dx=S+(S+27)+(S+54)+(S+81)$

$=4S+162=4\times\frac{27}{2}+162$

$=216$

10 답 16

(가)의 $\int_0^t f(x)\,dx=\int_{4a-t}^{4a} f(x)\,dx$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은

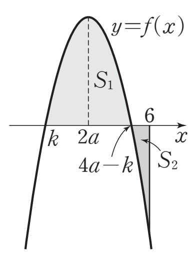
$x=\frac{0+4a}{2}$ $\qquad \therefore x=2a$

(나)에서 $\int_{2a}^6 |f(x)|\,dx>0$이므로 $2a<6$, 즉 $a<3$이고

$0<\int_{2a}^6 f(x)dx<\int_{2a}^6 |f(x)|dx$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $2a<x<6$에서 x축과 만난다.

$f(k)=0$, $k<2a$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2a$에 대하여 대칭이므로 x축과 두 점 $(k,\ 0)$, $(4a-k,\ 0)$에서 만난다.

따라서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$\int_k^{2a} f(x)\,dx=\int_{2a}^{4a-k} f(x)\,dx=\frac{S_1}{2}$,

$\int_{4a-k}^6 f(x)\,dx=-S_2$

(나)의 $\int_{2a}^6 f(x)\,dx=1$에서

$\int_{2a}^{4a-k} f(x)\,dx+\int_{4a-k}^6 f(x)\,dx=1$

$\therefore \frac{S_1}{2}-S_2=1$ $\qquad$ …… ㉠

(나)의 $\int_{2a}^6 |f(x)|\,dx=\frac{7}{5}$에서

$\int_{2a}^{4a-k} f(x)\,dx+\int_{4a-k}^6 \{-f(x)\}\,dx=\frac{7}{5}$

$\therefore \frac{S_1}{2}+S_2=\frac{7}{5}$ $\qquad$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $S_1=\frac{12}{5}$, $S_2=\frac{1}{5}$

$\therefore \int_k^6 f(x)\,dx=S_1-S_2=\frac{12}{5}-\frac{1}{5}=\frac{11}{5}$

따라서 $p=5$, $q=11$이므로 $p+q=16$

11 답 ①

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+6x+2$에서 $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+6$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}(k,\ f(k))$에서의 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{2}k^3-4k^2+6k+2\right)=\left(\frac{3}{2}k^2-8k+6\right)(x-k)$ $\qquad$ …… ㉠

이 직선이 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$를 지나므로

$2-\left(\frac{1}{2}k^3-4k^2+6k+2\right)=\left(\frac{3}{2}k^2-8k+6\right)\times(-k)$

$-\frac{1}{2}k^3+4k^2-6k=-\frac{3}{2}k^3+8k^2-6k$

$k^3-4k^2=0$, $k^2(k-4)=0$ $\qquad \therefore k=4$ $(\because k>0)$

㉠에 $k=4$를 대입하면 직선 AB의 방정식은

$y-(32-64+24+2)=(24-32+6)\times(x-4)$

$\therefore y=-2x+2$

$S_1=\int_0^4 \{f(x)-(-2x+2)\}\,dx$

$=\int_0^4 \{f(x)+2x-2\}\,dx,$

$S_2=\int_0^4 \{(-2x+2)-g(x)\}\,dx$

$=\int_0^4 \{-g(x)-2x+2\}\,dx$

$S_1-S_2=\frac{5}{3}$이므로

$\int_0^4 \{f(x)+2x-2\}dx-\int_0^4 \{-g(x)-2x+2\}\,dx=\frac{5}{3}$

$\int_0^4 \{f(x)+4x-4\}\,dx+\int_0^4 g(x)dx=\frac{5}{3}$

$\therefore \int_0^4 g(x)dx=\frac{5}{3}-\int_0^4 \{f(x)+4x-4\}dx$

$=\frac{5}{3}-\int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^3-4x^2+10x-2\right)dx$

$=\frac{5}{3}-\left[\frac{1}{8}x^4-\frac{4}{3}x^3+5x^2-2x\right]_0^4$

$=\frac{5}{3}-\frac{56}{3}=-17$

12 답 ②

시각 $t=k\,(k\ge 0)$에서의 점 P의 위치는

$1+\int_0^k v_1(t)\,dt=1+\int_0^k \left(-\frac{1}{2}t^2+4t-6\right)dt$

$=1+\left[-\frac{1}{6}t^3+2t^2-6t\right]_0^k$

$=-\frac{1}{6}k^3+2k^2-6k+1$

시각 $t=k\,(k\ge 0)$에서의 점 Q의 위치는

$1+\int_0^k v_2(t)\,dt=1+\int_0^k \left(-t+\frac{9}{2}\right)dt$

$=1+\left[-\frac{1}{2}t^2+\frac{9}{2}t\right]_0^k$

$=-\frac{1}{2}k^2+\frac{9}{2}k+1$

시각 $t=k$에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$f(k)=\left|-\frac{1}{6}k^3+2k^2-6k+1-\left(-\frac{1}{2}k^2+\frac{9}{2}k+1\right)\right|$$

$$=\left|-\frac{1}{6}k^3+\frac{5}{2}k^2-\frac{21}{2}k\right|=\left|\frac{1}{6}k^3-\frac{5}{2}k^2+\frac{21}{2}k\right|$$

$g(k)=\frac{1}{6}k^3-\frac{5}{2}k^2+\frac{21}{2}k$라 하면

$g'(k)=\frac{1}{2}k^2-5k+\frac{21}{2}=\frac{1}{2}(k-3)(k-7)$

$g'(k)=0$인 k의 값은 $k=3$ 또는 $k=7$

$k\ge0$에서 함수 $g(k)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	0	$\cdots$	3	$\cdots$	7	$\cdots$
$g'(k)$		+	0	−	0	+
$g(k)$	0	↗	$\frac{27}{2}$ 극대	↘	$\frac{49}{6}$ 극소	↗

이때 $k\ge0$에서 $g(k)\ge0$이므로

$g(k)=f(k)$

따라서 함수 $f(k)$는 구간 $[0, 3]$에서 증가하고, 구간 $[3, 7]$에서 감소하고, 구간 $[7, \infty)$에서 증가하므로

$a=3$, $b=7$

$v_1(t)=0$에서 $-\frac{1}{2}t^2+4t-6=0$

$-\frac{1}{2}(t-2)(t-6)=0\qquad\therefore t=2$ 또는 $t=6$

$3\le t\le6$에서 $-\frac{1}{2}t^2+4t-6\ge0$이고, $6\le t\le7$에서 $-\frac{1}{2}t^2+4t-6\le0$이므로 시각 $t=3$에서 $t=7$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_3^7|v_1(t)|\,dt=\int_3^6\left(-\frac{1}{2}t^2+4t-6\right)dt+\int_6^7\left(\frac{1}{2}t^2-4t+6\right)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{6}t^3+2t^2-6t\right]_3^6+\left[\frac{1}{6}t^3-2t^2+6t\right]_6^7$$

$$=\frac{9}{2}+\frac{7}{6}=\frac{17}{3}$$

13 답 $\frac{59}{3}$

$v(t)=4t(t+a-2)(t-a^2)$에 대하여 운동 방향이 한 번만 바뀌려면 $t>0$에서 $v(t)$의 부호가 한 번만 바뀌어야 하므로

$a=0$ 또는 $a=2$ 또는 $\underline{a>2}$ ⟶ $a>2$이면 $t+a-2>0$이므로 $v(t)=0$을 만족시키는 양수 t의 값이 1개이다.

(i) $a=0$일 때,

$v(t)=4t^2(t-2)$이므로 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|4t^2(t-2)|\,dt=\int_0^2\{-4t^2(t-2)\}\,dt+\int_2^3 4t^2(t-2)\,dt$$

$$=\int_0^2(-4t^3+8t^2)\,dt+\int_2^3(4t^3-8t^2)\,dt$$

$$=\left[-t^4+\frac{8}{3}t^3\right]_0^2+\left[t^4-\frac{8}{3}t^3\right]_2^3$$

$$=\frac{16}{3}+\frac{43}{3}$$

$$=\frac{59}{3}$$

(ii) $a=2$일 때,

$v(t)=4t^2(t-4)$이므로 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|4t^2(t-4)|\,dt=\int_0^3\{-4t^2(t-4)\}\,dt$$

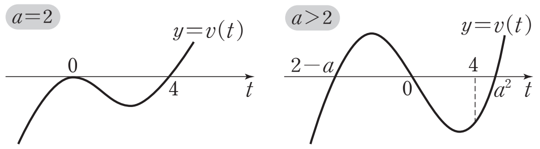
$$=\int_0^3(-4t^3+16t^2)\,dt$$

$$=\left[-t^4+\frac{16}{3}t^3\right]_0^3$$

$$=63$$

(iii) $a>2$일 때,

함수 $y=v(t)$의 그래프가 그림과 같으므로 $\int_0^3|v(t)|\,dt$의 값이 $a=2$일 때보다 커진다.



(i), (ii), (iii)에서 점 P가 움직인 거리의 최솟값은 $\frac{59}{3}$이다.

참고 $t>0$일 때, 방정식 $v(t)=4t(t+a-2)(t-a^2)=0$에서 $a-2=-a^2$, 즉 $a=1$인 경우에는 $v(t)=4t(t-1)^2$이 되어 $t>0$에서 중근을 갖지만 $v(t)\ge0$이므로 운동 방향은 바뀌지 않는다.

14 답 10

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 출발 후 시각 $t=b$에서 처음으로 운동 방향을 바꾼다.

즉, 시각 $t=b$에서의 점 P의 위치는 22이므로

$0+\int_0^b v(t)\,dt=22\qquad\therefore \int_0^b v(t)\,dt=22$

시각 $t=e$에서의 점 P의 위치는 0이므로

$0+\int_0^e v(t)\,dt=0\qquad\therefore \int_0^e v(t)\,dt=0$

$\int_b^c|v(t)|\,dt=S_1$, $\int_c^e|v(t)|\,dt=S_2$라 하자.

$b\le t\le e$에서 $v(t)\le0$이므로

$$\int_0^e v(t)\,dt=\int_0^b v(t)\,dt-\int_b^c|v(t)|\,dt-\int_c^e|v(t)|\,dt$$

$0=22-S_1-S_2\qquad\therefore S_2=22-S_1\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$3\int_0^c|v(t)|\,dt=8\int_c^e|v(t)|\,dt$에서

$3\int_0^b|v(t)|\,dt+3\int_b^c|v(t)|\,dt=8\int_c^e|v(t)|\,dt$

$3\times22+3S_1=8S_2$, $66+3S_1=8(22-S_1)$ ($\because$ ㉠)

$11S_1=110\qquad\therefore S_1=10$

$\therefore \int_b^c|v(t)|\,dt=10$

15 답 16

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=k$에서도 연속이다.

$\lim_{x\to k+}f(x)=\lim_{x\to k-}f(x)=f(k)$에서

$\lim_{x\to k+}(-x^2+5bx-6b^2)=\lim_{x\to k-}ax=-k^2+5bk-6b^2$

$\therefore -k^2+5bk-6b^2=ak\qquad\cdots\cdots$ ㉡

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=k$에서도 미분가능하다.

즉, 미분계수 $f'(k)$가 존재하고 $f'(x)=\begin{cases} a & (x<k) \\ -2x+5b & (x>k) \end{cases}$이므로

$f'(k)=a=-2k+5b$ …… ㉡

㉠에서 $f(k)=ak$

㉡에서 $f'(k)=a$

$f(k)=2f'(k)$이면

$ak=2a$, $a(k-2)=0$

$\therefore k=2$ ($\because a>0$)

$k=2$를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$2a=-4+10b-6b^2$, $a=-4+5b$

즉, $-2+5b-3b^2=-4+5b$이므로

$3b^2=2$, $b^2=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore b=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ($\because b>0$)

이를 $a=-4+5b$에 대입하면

$a=-4+\frac{5\sqrt{6}}{3}=\frac{5\sqrt{6}-12}{3}$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} \frac{5\sqrt{6}-12}{3}x & (x<2) \\ -x^2+\frac{5\sqrt{6}}{3}x-4 & (x\geq 2) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표를 구하면

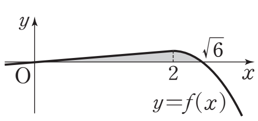
$x<2$일 때, $\frac{5\sqrt{6}-12}{3}x=0$에서 $x=0$

$x\geq 2$일 때, $-x^2+\frac{5\sqrt{6}}{3}x-4=0$에서 $x^2-\frac{5\sqrt{6}}{3}x+4=0$

$(x-\sqrt{6})\left(x-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)=0$

$\therefore x=\sqrt{6}$ ($\because x\geq 2$)

$0\leq x\leq \sqrt{6}$에서 $f(x)\geq 0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면



$S=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{10\sqrt{6}-24}{3}+\int_2^{\sqrt{6}}\left(-x^2+\frac{5\sqrt{6}}{3}x-4\right)dx$

$=\frac{10\sqrt{6}-24}{3}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5\sqrt{6}}{6}x^2-4x\right]_2^{\sqrt{6}}$

$=\frac{10\sqrt{6}-24}{3}+\frac{32-13\sqrt{6}}{3}=\frac{8}{3}-\sqrt{6}$

따라서 $p=\frac{8}{3}$, $q=6$이므로

$pq=16$

MEMO