공통수학 1

수학의 신

정답과 해설

빠른 정답

01 다항식의 연산

STEP 1 핵심 문제 | 20~21쪽

01 $11x^2-8x+5$ 02 ① 03 4 04 48 05 104
06 ③ 07 14π 08 ④ 09 ④ 10 -2 11 ④

STEP 2 고난도 문제 | 22~25쪽

01 $-x^2+xy+\frac{1}{3}y^2$ 02 ⑤ 03 4 04 $\frac{29}{20}$
05 $218\sqrt{2}$ 06 $5\sqrt{5}$ 07 $\frac{49}{4}$ 08 ② 09 6 10 ④
11 37, 52, 157 12 9 13 52π 14 ③ 15 148
16 ④ 17 2 18 20 19 ㄴ
20 몫: $8x^2+14x+8$, 나머지: 1

STEP 3 최고난도 문제 | 26~27쪽

01 ⑤ 02 183 03 $2\sqrt{2}+2\sqrt{6}$ 04 6 05 10
06 ④ 07 14 08 -2

02 나머지 정리와 인수분해

STEP 1 핵심 문제 | 28~29쪽

01 ③ 02 $\frac{19}{16}$ 03 -9 04 $-x^2+x+2$ 05 $\frac{5}{2}$
06 ⑤ 07 $4x$ 08 ① 09 2 10 ④ 11 ④
12 165

STEP 2 고난도 문제 | 30~34쪽

01 ② 02 $a=-2$, $b=-3$ 03 40 04 22 05 14
06 34 07 74 08 ㄱ, ㄴ 09 x^2+3x-2
10 -29 11 ③ 12 33 13 13 14 25
15 $11x+4$ 16 24 17 ⑤ 18 ④ 19 6 20 ③
21 -6 22 20 23 21 24 ⑤ 25 34 26 5
27 $ab+bc+ca$

STEP 3 최고난도 문제 | 35~37쪽

01 16 02 ④ 03 ③ 04 0 05 12 06 18
07 ④ 08 $8\sqrt{5}$ 09 6000 10 ㄹ, ㅂ 11 146 12 126

기출 변형 문제로 단원 마스터 | 38~39쪽

01 ② 02 82 03 -40 04 1056 05 27 06 -58
07 139 08 160

03 복소수

STEP 1 핵심 문제 | 42~43쪽

01 ② 02 ④ 03 ② 04 $7-2i$ 05 15 06 ①
07 ㄱ, ㄷ 08 ⑤ 09 100 10 ② 11 ③
12 8

STEP 2 고난도 문제 | 44~47쪽

01 ① 02 2 03 ④ 04 24 05 ⑤ 06 ③
07 ① 08 ④ 09 ⑤ 10 ④ 11 ㄴ
12 ㄴ, ㄷ 13 $\frac{1}{2}$ 14 ㄴ 15 ③ 16 85
17 최솟값: 11, 최댓값: 99 18 ④ 19 ③ 20 27
21 3 22 ⑤ 23 12 24 ③

STEP 3 최고난도 문제 | 48~49쪽

01 $-42+24i$ 02 ② 03 144 04 ④ 05 150
06 ㄱ, ㄷ 07 94 08 $-i$, i

04 이차방정식

STEP 1 핵심 문제 | 50~51쪽

01 ① 02 ① 03 ③ 04 15 05 6 06 ②
07 4 08 $\frac{28}{13}$ 09 ② 10 33 11 2 12 ②

STEP 2 고난도 문제 | 52~56쪽

01 -1 02 ③ 03 ④ 04 $\frac{5}{2}$ 05 ③
06 ㄱ, ㄷ 07 ⑤ 08 ⑤ 09 10 10 -6 11 ①
12 ① 13 ㄱ, ㄴ, ㄷ 14 11 15 83 16 ②
17 ④ 18 ④ 19 4 20 5 21 10 22 -1
23 ① 24 ② 25 ⑤ 26 $\frac{9}{2}$ 27 $8\sqrt{3}$

STEP 3 최고난도 문제 | 57~59쪽

01 $-\frac{5}{3}$ 02 ② 03 27 04 ③ 05 6 06 -9
07 ㄱ, ㄴ 08 ① 09 $-6\sqrt{3}$, $6\sqrt{3}$ 10 $\frac{5}{8}$
11 50

05 이차방정식과 이차함수

STEP 1 핵심 문제 | 60~61쪽

01 1, $\frac{7}{4}$ 02 ④ 03 ③ 04 ② 05 ②
06 $-2<k<2$ 07 -16 08 ① 09 ④ 10 ③
11 8 12 ②

STEP 2 고난도 문제 | 62~66쪽

01 $3\sqrt{2}$ 02 2 03 ④ 04 ④ 05 ③ 06 39
07 $\frac{7}{4}$ 08 ③ 09 45 10 9 11 ④ 12 $\frac{3}{2}$
13 $\frac{400}{9}$ m 14 28 15 ⑤ 16 ③ 17 0 18 67
19 121 20 ⑤ 21 98 22 $12\sqrt{3}-7$

빠른 정답

STEP 3 최고난도 문제 | 67~69쪽

01 ⑤ 02 2 03 ⑤ 04 ⑤ 05 $10-6\sqrt{2}$

06 ② 07 $\frac{17}{8}$ 08 13 09 ④

06 여러 가지 방정식

STEP 1 핵심 문제 | 70~71쪽

01 ① 02 84 03 ④ 04 -4 05 ② 06 ⑤

07 ㄱ, ㄷ 08 16 09 ② 10 4 11 6 12 ②

STEP 2 고난도 문제 | 72~76쪽

01 ③ 02 ① 03 ⑤ 04 4 05 38 06 ①

07 4 08 32 09 $-\frac{3}{2}$ 10 ④ 11 31 12 ③

13 ⑤ 14 16 15 $\frac{3}{4}$ cm 16 3 17 48

18 5 19 $\frac{31}{8}$ 20 6 21 ② 22 ② 23 39

24 3 25 12 26 ② 27 10 28 8

STEP 3 최고난도 문제 | 77~79쪽

01 4 02 64 03 46 04 20 05 4 06 ②

07 ⑤ 08 164 09 ③ 10 12 11 ③ 12 8

07 여러 가지 부등식

STEP 1 핵심 문제 | 80~81쪽

01 $x>-2$ 02 9 03 16 04 ⑤ 05 5

06 $0\le a\le 3$ 07 2 08 ③ 09 7 10 5

11 ③ 12 ④ 13 ① 14 ⑤

STEP 2 고난도 문제 | 82~85쪽

01 $-\frac{7}{3}<k\le -\frac{11}{5}$ 02 28 03 ② 04 -3

05 49 06 ⑤ 07 ④ 08 $\frac{7}{2}$ 09 ② 10 27

11 $a<-1$ 12 11 13 ③ 14 $1\le a\le 2$

15 ② 16 $a=1,\ 2\le a<3$ 17 -1 18 43 19 ②

20 ② 21 2 22 $0<a\le 4$

STEP 3 최고난도 문제 | 86~87쪽

01 ② 02 ④ 03 6 04 120 05 ① 06 -15

07 $a\ge 3+2\sqrt{2}$ 08 $\sqrt{5}-\sqrt{10}$

기출 변형 문제로 단원 마스터 | 88~91쪽

01 165 02 195 03 12 04 18 05 15 06 ③

07 7 08 ④ 09 6 10 42 11 328 12 24

13 40 14 ④

08 경우의 수

STEP 1 핵심 문제 | 94~95쪽

01 ③ 02 ④ 03 44 04 138 05 20 06 ③

07 288 08 ② 09 ⑤ 10 480 11 155 12 ④

STEP 2 고난도 문제 | 96~100쪽

01 11 02 ③ 03 24 04 ⑤ 05 6 06 ③

07 ④ 08 ① 09 ① 10 240 11 264 12 ④

13 336 14 200 15 450 16 9 17 16 18 246

19 210 20 ④ 21 2016 22 194 23 1080 24 312

25 762

STEP 3 최고난도 문제 | 101~103쪽

01 285 02 130 03 2016 04 729 05 ② 06 56

07 45 08 2760 09 960 10 528

기출 변형 문제로 단원 마스터 | 104~105쪽

01 ② 02 1080 03 13 04 30 05 280 06 36

07 2880 08 312

09 행렬

STEP 1 핵심 문제 | 108~109쪽

01 778 02 ③ 03 48 04 ① 05 1 06 ④

07 ② 08 4 09 −8 10 ④ 11 13

12 a, $\frac{d}{q}$

STEP 2 고난도 문제 | 110~115쪽

01 ① 02 13 03 $\frac{2}{3}$ 04 24 05 24 06 263

07 ⑤ 08 3 09 ① 10 2 11 8 12 ③

13 −1 14 ① 15 5 16 7 17 ㄴ, ㄷ

18 ㄴ, ㄷ 19 ③ 20 ⑤ 21 ① 22 6

23 −1, 2 24 ⑤ 25 6일 26 ③

STEP 3 최고난도 문제 | 116~117쪽

01 257 02 4, 4 03 2 04 ③ 05 897 06 127

07 26 08 ㄱ, ㄴ, ㄷ

기출 변형 문제로 단원 마스터 | 118~119쪽

01 4 02 ① 03 ③ 04 ④

01 다항식의 연산

STEP 1 핵심 문제 | 20~21쪽

01 $11x^2-8x+5$ **02** ① **03** 4 **04** 48 **05** 104
06 ③ **07** 14π **08** ④ **09** ④ **10** -2 **11** ④

01 답 $11x^2-8x+5$

$2A-B=2x^2-x$ …… ㉠
$A-2B=-5x^2+4x-3$ …… ㉡
㉠$-2\times$㉡을 하면 $3B=12x^2-9x+6$ $\therefore B=4x^2-3x+2$
㉡에서
$A=2B-5x^2+4x-3$
$=2(4x^2-3x+2)-5x^2+4x-3=3x^2-2x+1$
이때 $3(X-B)=X+2A+B$에서 $2X=2A+4B$
$\therefore X=A+2B$
$=(3x^2-2x+1)+2(4x^2-3x+2)=11x^2-8x+5$

다른 풀이

$3(X-B)=X+2A+B$에서 $X=A+2B$이므로
실수 m, n에 대하여 $m(2A-B)+n(A-2B)=A+2B$라 하면
$2m+n=1$, $-m-2n=2$
두 식을 연립하여 풀면 $m=\frac{4}{3}$, $n=-\frac{5}{3}$
$\therefore X=A+2B$
$=\frac{4}{3}(2x^2-x)-\frac{5}{3}(-5x^2+4x-3)=11x^2-8x+5$

02 답 ①

$(x^4-2x^3+ax^2+5)\{-2x^4+(2a-1)x^3+(2-a)x^2-3\}$의 전개식에서 x^6항은
$x^4\times(2-a)x^2+(-2x^3)\times(2a-1)x^3+ax^2\times(-2x^4)$
$=2x^6-ax^6-4ax^6+2x^6-2ax^6=(-7a+4)x^6$
이때 x^6의 계수가 -17이므로 $-7a+4=-17$ $\therefore a=3$
이를 주어진 다항식에 대입하면
$(x^4-2x^3+3x^2+5)(-2x^4+5x^3-x^2-3)$이므로 이 식의 전개식에서 x^4항은
$x^4\times(-3)+3x^2\times(-x^2)+5\times(-2x^4)=-16x^4$
따라서 x^4의 계수는 -16이다.

03 답 4

$(2x^3+ax+3)(2x^3+ax-1)+5$에서 $2x^3+ax=X$로 놓으면
$(2x^3+ax+3)(2x^3+ax-1)+5$
$=(X+3)(X-1)+5=X^2+2X+2$
$=(2x^3+ax)^2+2(2x^3+ax)+2$
$=(4x^6+4ax^4+a^2x^2)+(4x^3+2ax)+2$
$=4x^6+4ax^4+4x^3+a^2x^2+2ax+2$
이때 x^4의 계수가 -12이므로 $4a=-12$ $\therefore a=-3$
$\therefore (2x^3-3x+3)(2x^3-3x-1)+5$
$=4x^6-12x^4+4x^3+9x^2-6x+2$
따라서 $b=4$, $c=9$, $d=-6$이므로 $a+b+c+d=4$

다른 풀이

$(2x^3+ax+3)(2x^3+ax-1)+5$의 전개식에서 x^4항은
$2x^3\times ax+ax\times 2x^3=4ax^4$
이때 x^4의 계수가 -12이므로 $4a=-12$ $\therefore a=-3$
이를 주어진 다항식에 대입하면
$(2x^3-3x+3)(2x^3-3x-1)+5=4x^6-12x^4+bx^3+cx^2+dx+2$
양변에 $x=1$을 대입하면
$(2-3+3)(2-3-1)+5=4-12+b+c+d+2$
$b+c+d=7$
$\therefore a+b+c+d=4$

04 답 48

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로 $6=8-2xy$ $\therefore xy=1$
$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=8-4=4$에서 $x-y=\pm2$
그런데 $x>y$이므로 $x-y=2$
$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=8+6=14$
$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=36-2=34$
$\therefore x^3-y^3+x^4+y^4=48$

05 답 104

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=(-3)^2-2=7$
$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=(-3)^3-3\times(-3)=-18$
$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=7^2-2=47$
$\therefore x^4-2x^3+3x^2+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}$
$=x^4+\frac{1}{x^4}-2\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$
$=47-2\times(-18)+3\times7=104$

06 답 ③

$100=a$로 놓으면
$101^2-99^2=(a+1)^2-(a-1)^2$
$=(a^2+2a+1)-(a^2-2a+1)=4a$
$102^3-98^3=(a+2)^3-(a-2)^3$
$=(a^3+6a^2+12a+8)-(a^3-6a^2+12a-8)$
$=12a^2+16$
$(101^2-99^2)(102^3-98^3)=4a(12a^2+16)$
$=a(48a^2+64)$
$=100(480000+64)$
$=48006400$
따라서 각 자리 숫자의 합은 $4+8+6+4=22$

07 답 14π

두 구 S_1, S_2의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2 $(r_1>r_2)$라 하면
$r_1-r_2=\sqrt{3}$ …… 배점 20%
두 구의 부피의 차가 $5\sqrt{3}\pi$이므로
$\frac{4}{3}\pi r_1^3-\frac{4}{3}\pi r_2^3=5\sqrt{3}\pi$, 즉 $r_1^3-r_2^3=\frac{15\sqrt{3}}{4}$ …… 배점 20%

$r_1^3-r_2^3=(r_1-r_2)^3+3r_1r_2(r_1-r_2)=3\sqrt{3}+3\sqrt{3}r_1r_2=\frac{15\sqrt{3}}{4}$에서

$r_1r_2=\frac{1}{4}$ ····· 배점 20%

따라서 $r_1^2+r_2^2=(r_1-r_2)^2+2r_1r_2=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$이므로 ····· 배점 20%

두 구 S_1, S_2의 겉넓이의 합은

$4\pi r_1^2+4\pi r_2^2=4\pi(r_1^2+r_2^2)=4\pi\times\frac{7}{2}=14\pi$ ····· 배점 20%

개념 NOTE

반지름의 길이가 r인 구의 겉넓이는 $4\pi r^2$, 부피는 $\frac{4}{3}\pi r^3$이다.

08 답 ④

세 모서리 AB, BC, BF의 길이를 각각 a, b, c라 하면 직육면체의 겉넓이가 148이므로

$2(ab+bc+ca)=148$

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 60이므로

$4(a+b+c)=60$ $\therefore a+b+c=15$

$\therefore \overline{BG}^2+\overline{GD}^2+\overline{DB}^2=(b^2+c^2)+(a^2+c^2)+(a^2+b^2)$

$=2(a^2+b^2+c^2)$

$=2\{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\}$

$=2(15^2-148)=154$

09 답 ④

$$\begin{array}{r|l} & 4x+(a+4) \\ \hline x^2-x+1 & 4x^3+ax^2+bx+a \\ & 4x^3-4x^2+4x \\ \hline & (a+4)x^2+(b-4)x+a \\ & (a+4)x^2-(a+4)x+a+4 \\ \hline & (a+b)x-4 \end{array}$$

이때 나머지가 ab이므로 $a+b=0$, $ab=-4$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=0^2-2\times(-4)=8$

10 답 -2

$f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫이 $Q_1(x)$, 나머지가 $3x+2$이므로

$f(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+3x+2$ ····· ㉠

$Q_1(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫이 $(x-1)Q_2(x)$, 나머지가 $2x-3$이므로

$Q_1(x)=(x^2-x+1)(x-1)Q_2(x)+2x-3$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x^2+x+1)\{(x^2-x+1)(x-1)Q_2(x)+2x-3\}+3x+2$

$=(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)Q_2(x)$

$+(2x-3)(x^2+x+1)+3x+2$

$=(x^3-1)(x^2-x+1)Q_2(x)+(2x-2-1)(x^2+x+1)+3x+2$

$=(x^3-1)(x^2-x+1)Q_2(x)$

$+2(x-1)(x^2+x+1)-(x^2+x+1)+3x+2$

$=(x^3-1)\{(x^2-x+1)Q_2(x)+2\}-x^2+2x+1$

따라서 $R(x)=-x^2+2x+1$이므로

$R(-1)=-1-2+1=-2$

11 답 ④

조립제법을 이용하여 $3x^3-7x^2+5x+1$을 $x-\frac{1}{3}$로 나누면

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{3} & 3 & -7 & 5 & 1 \\ & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 3 & -6 & 3 & 2 \end{array}$$

$\therefore 3x^3-7x^2+5x+1=\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2-6x+3)+2$

$=(3x-1)(x^2-2x+1)+2$

따라서 $f(x)=3x^2-6x+3$, $g(x)=x^2-2x+1$이므로

$f(2)+g(2)=(12-12+3)+(4-4+1)=4$

STEP 2 고난도 문제 | 22~25쪽

01 $-x^2+xy+\frac{1}{3}y^2$ **02** ⑤ **03** 4 **04** $\frac{29}{20}$

05 $218\sqrt{2}$ **06** $5\sqrt{5}$ **07** $\frac{49}{4}$ **08** ② **09** 6

10 ④ **11** 37, 52, 157 **12** 9 **13** 52π **14** ③

15 148 **16** ④ **17** 2 **18** 20 **19** ㄴ

20 몫: $8x^2+14x+8$, 나머지: 1

01 답 $-x^2+xy+\frac{1}{3}y^2$

$(A+2B)+(2B+3C)+(3C+A)$

$=(3x^2-xy+y^2)+(-4x^2+2xy-y^2)+(x^2+3xy+4y^2)$

$=4xy+4y^2$

따라서 $A+2B+3C=2xy+2y^2$이므로

$3C=2xy+2y^2-(A+2B)$

$=2xy+2y^2-(3x^2-xy+y^2)$

$=-3x^2+3xy+y^2$

$\therefore C=-x^2+xy+\frac{1}{3}y^2$

다른 풀이

$A+2B=3x^2-xy+y^2$ ····· ㉠

$2B+3C=-4x^2+2xy-y^2$ ····· ㉡

$3C+A=x^2+3xy+4y^2$ ····· ㉢

㉠−㉡을 하면 $A-3C=7x^2-3xy+2y^2$ ····· ㉣

㉢−㉣을 하면 $6C=-6x^2+6xy+2y^2$

$\therefore C=-x^2+xy+\frac{1}{3}y^2$

02 답 ⑤

$\overline{OC}=a$, $\overline{CD}=b$라 하면

$\overline{DA}=2a$, $\overline{AB}=b$, $\overline{BO}=a$

㈎에서 $\overline{OC}+\overline{CD}=x+y+3$이므로

$a+b=x+y+3$ ····· ㉠

㈏에서 $\overline{DA}+\overline{AB}+\overline{BO}=3x+y+5$이므로

$2a+b+a=3x+y+5$ $\therefore 3a+b=3x+y+5$ ····· ㉡

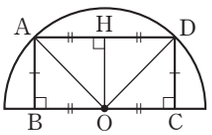
㉡−㉠을 하면 $2a=2x+2$ $\therefore a=x+1$

이를 ㉠에 대입하면 $x+1+b=x+y+3$ $\therefore b=y+2$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는 $\overline{AD}\times\overline{AB}=2ab=2(x+1)(y+2)$

배움 NOTE

반원의 중심 O에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{OA}$, $\overline{OD}$를 그으면



$\triangle OHA\equiv\triangle OHD$(RHS 합동)이므로 $\overline{AH}=\overline{DH}$

또 $\triangle ODH\equiv\triangle DOC$(RHS 합동),

$\triangle OAH\equiv\triangle AOB$(RHS 합동)이므로

$\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{AH}=\overline{DH}$

idea

03 답 4

㈎에서 $(x-4)(2y-4)(3z-4)=0$이므로

$(2xy-4x-8y+16)(3z-4)=0$

$6xyz-8xy-12xz+16x-24yz+32y+48z-64=0$

$\therefore 6xyz-4(2xy+6yz+3zx)+16(x+2y+3z)-64=0$ …… ㉠

㈏에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}=\frac{1}{4}$

양변에 $6xyz$를 곱하면 $2xy+6yz+3zx=\frac{3}{2}xyz$

이를 ㉠에 대입하면 $6xyz-4\times\frac{3}{2}xyz+16(x+2y+3z)-64=0$

$16(x+2y+3z)-64=0$, $16(x+2y+3z)=64$

$\therefore x+2y+3z=4$

배움 NOTE

x, y, z 중 적어도 하나가 a이다.

➡ $(x-a)(y-a)(z-a)=0$이 성립함을 이용하여 식을 세운다.

다른 풀이

㈎에서 x, $2y$, $3z$ 중에서 적어도 하나는 4이므로 $x=4$라 하면 ㈏에서

$\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}=0$, $\frac{2y+3z}{6yz}=0$, $2y+3z=0$

이므로 $x+2y+3z=4$

같은 방법으로 ㈎에서 $2y=4$ 또는 $3z=4$라 하면 $x+2y+3z=4$

$\therefore x+2y+3z=4$

04 답 $\frac{29}{20}$

$a^2b^2=\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{16}$에서 $ab=\pm\frac{1}{4}$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 $ab=\frac{1}{4}$

$a^2+b^2=\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{2}$에서

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$이므로 $a+b=\pm\sqrt{2}$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 $a+b=\sqrt{2}$

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$이므로

$2\sqrt{2}=a^3+b^3+\frac{3\sqrt{2}}{4}$ $\therefore a^3+b^3=\frac{5\sqrt{2}}{4}$

$(a^2+b^2)(a^3+b^3)=a^5+b^5+a^2b^2(a+b)$이므로

$\frac{3}{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{4}=a^5+b^5+\frac{\sqrt{2}}{16}$ $\therefore a^5+b^5=\frac{29\sqrt{2}}{16}$

$\therefore \frac{a^5+b^5}{a^3+b^3}=\frac{\frac{29\sqrt{2}}{16}}{\frac{5\sqrt{2}}{4}}=\frac{29}{20}$

05 답 $218\sqrt{2}$

$x^2+(\sqrt{2}y)^2=(x+\sqrt{2}y)^2-2\sqrt{2}xy$이므로

$10=(2\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}xy$ $\therefore xy=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore x^3+(\sqrt{2}y)^3=(x+\sqrt{2}y)^3-3\sqrt{2}xy(x+\sqrt{2}y)$

$=(2\sqrt{2})^3-3\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times2\sqrt{2}$

$=22\sqrt{2}$

$\therefore x^5+4\sqrt{2}y^5=x^5+(\sqrt{2}y)^5$

$=\{x^2+(\sqrt{2}y)^2\}\{x^3+(\sqrt{2}y)^3\}-x^2(\sqrt{2}y)^3-(\sqrt{2}y)^2x^3$

$=\{x^2+(\sqrt{2}y)^2\}\{x^3+(\sqrt{2}y)^3\}-(\sqrt{2}xy)^2(x+\sqrt{2}y)$

$=10\times22\sqrt{2}-\left\{\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}^2\times2\sqrt{2}$

$=218\sqrt{2}$

06 답 $5\sqrt{5}$

$x^4+\sqrt{5}x^2-1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+\sqrt{5}-\frac{1}{x^2}=0$, $x^2-\frac{1}{x^2}=-\sqrt{5}$

$\therefore \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+4=(-\sqrt{5})^2+4=9$

이때 $x^2>0$이므로 $x^2+\frac{1}{x^2}=3$ ····· 배점 40%

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$이므로 $3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=5$ $\therefore x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$ $(\because x>0)$ ····· 배점 40%

$\therefore \frac{2x^6+x^4+x^2+2}{x^3}=2x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}$

$=2\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}+\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=2\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-5\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=2(\sqrt{5})^3-5\times\sqrt{5}=5\sqrt{5}$ ····· 배점 20%

07 답 $\frac{49}{4}$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$에서 $\frac{ab+bc+ca}{abc}=2$ $\therefore ab+bc+ca=2abc$

이때 $abc=\frac{9}{2}$이므로 $ab+bc+ca=9$

$(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(a+b)(bc+ab+c^2+ac)$

$=(a+b)(ab+bc+ca)+c^2(a+b)$

$=(a+b)(ab+bc+ca)+c(ac+bc+ab)-abc$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

이므로 $45=(a+b+c)\times9-\frac{9}{2}$ $\therefore a+b+c=\frac{11}{2}$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=\left(\frac{11}{2}\right)^2-2\times9=\frac{49}{4}$

다른 풀이

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$에서 $\frac{ab+bc+ca}{abc}=2$ $\therefore ab+bc+ca=2abc$

이때 $abc=\frac{9}{2}$이므로 $ab+bc+ca=9$

$a+b+c=X$로 놓으면 $(a+b)(b+c)(c+a)=45$에서

$(X-a)(X-b)(X-c)=45$이므로

$X^3-(a+b+c)X^2+(ab+bc+ca)X-abc=45$

$9(a+b+c)-\frac{9}{2}=45$ $\therefore a+b+c=\frac{11}{2}$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=\left(\frac{11}{2}\right)^2-2\times9=\frac{49}{4}$

08 답 ②

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$(a+b+c)^2=10+2\times(-5)=0$

$\therefore a+b+c=0$ …… ㉠

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$이므로

$6=3abc$ $\therefore abc=2$

㉠에서 $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$이므로

$\frac{a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{a^2b^2c^2}{(-c)\times(-a)\times(-b)}$

$=\frac{a^2b^2c^2}{-abc}=-abc=-2$

09 답 6

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$이고

㈎에서 $x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+zx)$이므로

$(x+y+z)^2=0$ $\therefore x+y+z=0$ …… ㉠

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$이고

㈏에서 $x^3+y^3+z^3=-18$이므로

$-18=3xyz$ $\therefore xyz=-6$ …… ㉡

따라서 세 정수 x, y, z는 ㉠, ㉡을 만족시킨다.

이때 $|x|$, $|y|$, $|z|$는 모두 6의 양의 약수이고, $x+y+z=0$, $xyz<0$이므로 세 정수 x, y, z 중 두 개는 양수이고 한 개는 음수이다.

따라서 $(-3)\times1\times2=-6$, $(-3)+1+2=0$이므로 세 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)는 $(-3, 1, 2)$, $(-3, 2, 1)$, $(1, -3, 2)$, $(1, 2, -3)$, $(2, -3, 1)$, $(2, 1, -3)$의 6개이다.

idea

10 답 ④

$a-b=x$, $b-c=y$, $c-a=z$로 놓으면

$(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$이므로 $x+y+z=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=12$에서 $x^2+y^2+z^2=12$

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$이므로

$12=-2(xy+yz+zx)$ $\therefore xy+yz+zx=-6$

$\therefore (a-b)^2(b-c)^2+(b-c)^2(c-a)^2+(c-a)^2(a-b)^2$

$=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$

$=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$

$=(-6)^2=36$

11 답 37, 52, 157

$a-b<b-c$이고 $(a-b)(b-c)=12$를 만족시키는 자연수 $a-b$, $b-c$의 순서쌍 $(a-b, b-c)$는 $(1, 12)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$이다.

(i) $a-b=1$, $b-c=12$일 때, $a-c=13$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{1^2+12^2+(-13)^2\}=157$

(ii) $a-b=2$, $b-c=6$일 때, $a-c=8$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{2^2+6^2+(-8)^2\}=52$

(iii) $a-b=3$, $b-c=4$일 때, $a-c=7$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{3^2+4^2+(-7)^2\}=37$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 식의 값은 37, 52, 157

idea

12 답 9

$100=x$로 놓으면

$100.03=100+0.03=100+\frac{3}{100}=x+\frac{3}{x}$,

$99.97=100-0.03=100-\frac{3}{100}=x-\frac{3}{x}$

$\therefore (100.03)^3-(99.97)^3$

$=\left(x+\frac{3}{x}\right)^3-\left(x-\frac{3}{x}\right)^3$

$=\left(x^3+9x+\frac{27}{x}+\frac{27}{x^3}\right)-\left(x^3-9x+\frac{27}{x}-\frac{27}{x^3}\right)$

$=2\left(9x+\frac{27}{x^3}\right)$

$=18x+\frac{54}{x^3}$

$=18\times10^2+\frac{54}{10^6}$

$=1800.000054$

따라서 $a=5$, $b=4$이므로 $a+b=9$

다른 풀이

$100.03=x$, $99.97=y$로 놓으면

$x=100+\frac{3}{100}=10^2+\frac{3}{10^2}$

$y=100-\frac{3}{100}=10^2-\frac{3}{10^2}$

$\therefore (100.03)^3-(99.97)^3=x^3-y^3$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=(x-y)\{(x+y)^2-xy\}$

$=\frac{6}{10^2}\left\{4\times10^4-\left(10^4-\frac{9}{10^4}\right)\right\}$

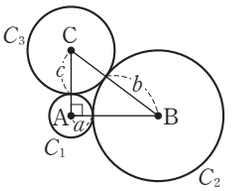
$=\frac{6}{10^2}\left(3\times10^4+\frac{9}{10^4}\right)$

$=18\times10^2+\frac{54}{10^6}$

$=1800.000054$

따라서 $a=5$, $b=4$이므로 $a+b=9$

13 답 52π



세 원 C_1, C_2, C_3의 반지름의 길이를 각각 a, b, c라 하자.

삼각형 ABC는 $\angle A=90°$인 직각삼각형이므로 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

$(a+b)^2+(a+c)^2=(b+c)^2$

$a^2+2ab+b^2+a^2+2ac+c^2=b^2+2bc+c^2$

$2a^2+2ab+2ac=2bc$

$\therefore a^2+ab+ac=bc$ …… ㉠ …… 배점 20%

삼각형 ABC의 넓이가 24이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=24$

$\frac{1}{2}(a+b)(a+c)=24$, $(a+b)(a+c)=48$

$\therefore a^2+ac+ba+bc=48$ …… ㉡ …… 배점 20%

㉠을 ㉡에 대입하면 $2bc=48$ $\therefore bc=24$ …… 배점 20%

두 원 C_2, C_3의 둘레의 길이의 합이 20π이므로

$2\pi b+2\pi c=20\pi$ $\therefore b+c=10$ …… 배점 20%

따라서 두 원 C_2, C_3의 넓이의 합은

$\pi b^2+\pi c^2=(b^2+c^2)\pi=\{(b+c)^2-2bc\}\pi$

$=(10^2-2\times24)\pi=52\pi$ …… 배점 20%

14 답 ③

삼각형 ABC가 $\angle A=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$에서 $x^2+y^2=10$ …… ㉠

△ABC∽△APS (AA 닮음)이고 닮음비가

$\overline{BC}:\overline{PS}=\sqrt{10}:\frac{2\sqrt{10}}{7}=7:2$이므로

$\overline{AP}=\frac{2}{7}x$, $\overline{AS}=\frac{2}{7}y$이고 $\overline{SC}=\frac{5}{7}y$

△APS∽△RSC (AA 닮음)이므로 $\overline{PS}:\overline{SC}=\overline{AP}:\overline{RS}$에서

$\frac{2\sqrt{10}}{7}:\frac{5}{7}y=\frac{2}{7}x:\frac{2\sqrt{10}}{7}$, 즉 $10xy=40$, $xy=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=10-2\times4=2$

이때 $x>y$이므로 $x-y=\sqrt{2}$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

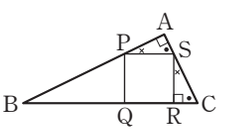
$=(\sqrt{2})^3+3\times4\times\sqrt{2}=14\sqrt{2}$

배움 NOTE

그림과 같이 $\angle A=90°$인 삼각형 ABC에 대하여 사각형 PQRS가 정사각형이 되도록 잡으면

$\angle\bullet+\angle\times=90°$이므로

△APS∽△RSC (AA 닮음)



15 답 148

$\overline{AB}=x$, $\overline{AD}=y$, $\overline{AE}=z$라 하면

$l_1=3x+3y+3z+\overline{AC}+\overline{CF}+\overline{FA}$,

$l_2=x+y+z+\overline{AC}+\overline{CF}+\overline{FA}$

이므로 $l_1-l_2=2x+2y+2z=28$

$\therefore x+y+z=14$

$S_1=xy+yz+zx+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}zx+$(삼각형 AFC의 넓이),

$S_2=\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}zx+$(삼각형 AFC의 넓이)

이므로 $S_1-S_2=xy+yz+zx=61$

$\therefore \overline{AC}^2+\overline{CF}^2+\overline{FA}^2=(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(z^2+x^2)$

$=2(x^2+y^2+z^2)$

$=2\{(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\}$

$=2\times(14^2-2\times61)$

$=148$

16 답 ④

$\overline{CH}=1$, $\overline{BH}=x$이고 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{4}{3}$이므로 $\overline{AB}=\frac{8}{3}$

△AHC∽△CHB (AA 닮음)이므로

$\overline{AH}:\overline{CH}=\overline{CH}:\overline{BH}$

$\left(\frac{8}{3}-x\right):1=1:x$이므로 $3x^2-8x+3=0$

이때 $0<x<1$이므로 $x=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$

한편 $3x^3-5x^2+4x+7$을 $3x^2-8x+3$으로 나누었을 때의 몫은 $x+1$, 나머지는 $9x+4$이므로

$3x^3-5x^2+4x+7=(3x^2-8x+3)(x+1)+9x+4$

$=9x+4$

$=9\times\frac{4-\sqrt{7}}{3}+4$

$=16-3\sqrt{7}$

17 답 2

$f(x)-x^3$을 x^3-4x^2+2로 나누었을 때의 몫이 x^2+2이고, 나머지가 $3x^2+5x$이므로

$f(x)-x^3=(x^3-4x^2+2)(x^2+2)+3x^2+5x$

$\therefore f(x)=(x^3-4x^2+2)(x^2+2)+x^3+3x^2+5x$

이때 $x^3+3x^2+5x=\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)(2x+6)+3x-6$이므로

$f(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)(2x^3-8x^2+4)+\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)(2x+6)+3x-6$

$=\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)(2x^3-8x^2+2x+10)+3x-6$

$Q(x)=2x^3-8x^2+2x+10$, $R(x)=3x-6$이므로

$Q(1)=2-8+2+10=6$, $R(3)=3$

$\therefore \frac{Q(1)}{R(3)}=2$

18 답 20

$f(x)g(x)$를 $f(x)-2x^2$으로 나누었을 때의 몫은 x^2-3x+3이고 나머지는 $f(x)+xg(x)$이므로

$f(x)g(x)=\{f(x)-2x^2\}(x^2-3x+3)+f(x)+xg(x)$ …… ㉠

㉠의 좌변이 삼차식이므로 우변도 삼차식이다.

즉, $\{f(x)-2x^2\}(x^2-3x+3)$이 삼차식이므로

$f(x)-2x^2$은 일차식이고 나머지 $f(x)+xg(x)$는 상수이다.

$f(x)-2x^2=ax+b$ (단, a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

나머지 $f(x)+xg(x)=(2x^2+ax+b)+xg(x)$는 상수이므로

$g(x)=-2x-a$이고 $f(x)+xg(x)=b$

㉠에 $f(x)=2x^2+ax+b$, $g(x)=-2x-a$를 대입하면

$(2x^2+ax+b)(-2x-a)=(ax+b)(x^2-3x+3)+b$ …… ㉡

㉡의 좌변은 최고차항의 계수가 -4이므로 $a=-4$

㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=(-8+b)\times1+b$에서 $b=4$

따라서 $f(x)=2x^2-4x+4$이므로 $f(-2)=20$

19 답 ㄴ

다항식 $P(x)$를 $3x+2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$P(x)=(3x+2)Q(x)+R$

ㄱ. $P(x+1)=(3x+5)\times Q(x+1)+R$

$=\left(x+\frac{5}{3}\right)\times3Q(x+1)+R$

따라서 $P(x+1)$을 $x+\frac{5}{3}$로 나누었을 때의 몫은 $3Q(x+1)$이다.

ㄴ. $xP(x)=x(3x+2)Q(x)+Rx$

$=\left(x+\frac{2}{3}\right)\times3xQ(x)+R\left(x+\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}R$

$=\left(x+\frac{2}{3}\right)\{3xQ(x)+R\}-\frac{2}{3}R$

따라서 $xP(x)$를 $x+\frac{2}{3}$로 나누었을 때의 몫은 $3xQ(x)+R$이다.

ㄷ. $x^2P(x)=x^2(3x+2)Q(x)+Rx^2$

$=\left(x+\frac{2}{3}\right)\times3x^2Q(x)+Rx\left(x+\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}R\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{9}R$

$=\left(x+\frac{2}{3}\right)\left\{3x^2Q(x)+Rx-\frac{2}{3}R\right\}+\frac{4}{9}R$

따라서 $x^2P(x)$를 $x+\frac{2}{3}$로 나누었을 때의 나머지는 $\frac{4}{9}R$이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

idea

20 답 몫: $8x^2+14x+8$, 나머지: 1

$f(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 나머지가 $g(x)-2x$이므로 $g(x)-2x$의 차수는 $g(x)$의 차수보다 작아야 한다. 따라서 $g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 일차식이다.

$g(x)=2x+a$(단, a는 상수)라 하면

$f(x)=g(x)\{g(x)-2x\}+g(x)-2x$

$=(2x+a)\{(2x+a)-2x\}+(2x+a)-2x$

$=2ax+a^2+a$

이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로

$2a=2 \quad \therefore a=1$

이를 $f(x)$, $g(x)$에 대입하면

$f(x)=2x+2$, $g(x)=2x+1$이므로

$\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3=(2x+2)^3+(2x+1)^3$

$=(8x^3+24x^2+24x+8)+(8x^3+12x^2+6x+1)$

$=16x^3+36x^2+30x+9$

조립제법을 이용하여 $16x^3+36x^2+30x+9$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누면

$-\frac{1}{2}$	16	36	30	9
		-8	-14	-8
	16	28	16	1

$\therefore 16x^3+36x^2+30x+9=\left(x+\frac{1}{2}\right)(16x^2+28x+16)+1$

$=(2x+1)(8x^2+14x+8)+1$

따라서 $16x^3+36x^2+30x+9$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫은 $8x^2+14x+8$이고, 나머지는 1이다.

STEP 3 최고난도 문제 | 26~27쪽

01 ⑤	02 183	03 $2\sqrt{2}+2\sqrt{6}$	04 6	05 10
06 ④	07 14	08 -2		

01 답 ⑤

1단계 $f(n)$ 구하기

$(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})^2$

$=(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})$

이므로 x^n항은

$2x\times nx^{n-1}+3x^2\times(n-1)x^{n-2}+4x^3\times(n-2)x^{n-3}$

$+\cdots+(n-1)x^{n-2}\times3x^2+nx^{n-1}\times2x$

$=\{2n+3(n-1)+4(n-2)+\cdots+(n-1)\times3+n\times2\}x^n$

$\therefore f(n)=2n+3(n-1)+4(n-2)+\cdots+(n-1)\times3+n\times2$

2단계 $f(10)-f(9)$의 값 구하기

$f(10)=2\times10+3\times9+4\times8+\cdots+9\times3+10\times2$,

$f(9)=2\times9+3\times8+4\times7+\cdots+9\times2$

이므로

$$\begin{array}{r} f(10)=2\times10+3\times9+4\times8+\cdots+9\times3+10\times2 \\ -)\quad f(9)=2\times\ 9+3\times8+4\times7+\cdots+9\times2 \\ \hline f(10)-f(9)=2\times\ 1+3\times1+4\times1+\cdots+9\times1+20 \end{array}$$

$\therefore f(10)-f(9)=2+3+4+\cdots+9+20$

$=64$

idea

02 답 183

1단계 $B\left(x+\frac{1}{3}\right)=A(x)$임을 알기

$B(x)=9x^2-3x+1=(3x)^2-3x+1$이므로

$B\left(x+\frac{1}{3}\right)=\left\{3\left(x+\frac{1}{3}\right)\right\}^2-3\left(x+\frac{1}{3}\right)+1$

$=(3x+1)^2-(3x+1)+1$

$=(9x^2+6x+1)-3x-1+1$

$=9x^2+3x+1$

$=A(x)$

2단계 식의 값 구하기

따라서 $B\left(\frac{1}{3}\right)=A(0)$, $B\left(\frac{2}{3}\right)=A\left(\frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{3}{3}\right)=A\left(\frac{2}{3}\right)$, ...,

$B\left(\frac{13}{3}\right)=A\left(\frac{12}{3}\right)$이므로

$$\frac{A\left(\frac{1}{3}\right)\times A\left(\frac{2}{3}\right)\times A\left(\frac{3}{3}\right)\times\cdots\times A\left(\frac{13}{3}\right)}{B\left(\frac{1}{3}\right)\times B\left(\frac{2}{3}\right)\times B\left(\frac{3}{3}\right)\times\cdots\times B\left(\frac{13}{3}\right)}$$

$$=\frac{A\left(\frac{1}{3}\right)\times A\left(\frac{2}{3}\right)\times A\left(\frac{3}{3}\right)\times\cdots\times A\left(\frac{13}{3}\right)}{A(0)\times A\left(\frac{1}{3}\right)\times A\left(\frac{2}{3}\right)\times\cdots\times A\left(\frac{12}{3}\right)}$$

$$=\frac{A\left(\frac{13}{3}\right)}{A(0)}$$

$$=\frac{9\times\left(\frac{13}{3}\right)^2+3\times\frac{13}{3}+1}{1}$$

$=183$

03 답 $2\sqrt{2}+2\sqrt{6}$

1단계 $x+\frac{1}{x}$, $x-\frac{1}{x}$**의 값 구하기**

$x>1$이므로

$x+\frac{1}{x}>0$, $x-\frac{1}{x}>0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=6+2=8$

$\therefore\ x+\frac{1}{x}=2\sqrt{2}$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=6-2=4$

$\therefore\ x-\frac{1}{x}=2$

2단계 $y+\frac{1}{y}$, $y-\frac{1}{y}$**의 값 구하기**

$y>1$이므로

$y+\frac{1}{y}>0$, $y-\frac{1}{y}>0$

$\left(y+\frac{1}{y}\right)^2=y^2+\frac{1}{y^2}+2=10+2=12$

$\therefore\ y+\frac{1}{y}=2\sqrt{3}$

$\left(y-\frac{1}{y}\right)^2=y^2+\frac{1}{y^2}-2=10-2=8$

$\therefore\ y-\frac{1}{y}=2\sqrt{2}$

3단계 $xy+\frac{1}{xy}$**의 값 구하기**

이때 $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}$에서

$xy+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}=4\sqrt{6}$ …… ㉠

또 $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(y-\frac{1}{y}\right)=2\times2\sqrt{2}$에서

$xy-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}=4\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\left(xy+\frac{1}{xy}\right)=4\sqrt{6}+4\sqrt{2}$

$\therefore\ xy+\frac{1}{xy}=2\sqrt{2}+2\sqrt{6}$

04 답 6

1단계 $x+y+z$, xyz**의 값 구하기**

$x+y+z-(xy+yz+zx)=3$ …… ㉠

$xy+yz+zx+xyz=-2$ …… ㉡

$x+y+z-xyz=1$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(x+y+z)=2$

$\therefore\ x+y+z=1$

이를 ㉢에 대입하면

$1-xyz=1$

$\therefore\ xyz=0$

2단계 $xyz=0$**이 되는 경우를 나누어 구하기**

(i) $x=y=z=0$일 때,

㉠에서 좌변은 0이므로 성립하지 않는다.

(ii) x, y, z의 값 중 2개가 0일 때,

$x=y=0$이라 하면 ㉡에서 좌변은 0이므로 성립하지 않는다.

같은 방법으로 $y=z=0$ 또는 $x=z=0$이라 하여도 ㉡이 성립하지 않는다.

(iii) x, y, z의 값 중 1개가 0일 때,

$z=0$이라 하면 ㉢에서 $x+y=1$, ㉡에서 $xy=-2$이므로

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

$=1^2-4\times(-2)=9$

$\therefore\ x-y=-3$ 또는 $x-y=3$

$\therefore\ |(x-y)(y-z)(z-x)|=|(x-y)\times y\times(-x)|$

$=|xy||x-y|$

$=2\times3$

$=6$

같은 방법으로 $x=0$ 또는 $y=0$이라 하여도

$|(x-y)(y-z)(z-x)|=6$

3단계 $|(x-y)(y-z)(z-x)|$**의 값 구하기**

(i), (ii), (iii)에서 $|(x-y)(y-z)(z-x)|=6$

05 답 10

1단계 $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{BF}=c$**로 놓고,** $a+b+c$, $a^4+b^4+c^4$**의 값 구하기**

$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{BF}=c$라 하자.

직육면체의 부피가 2이므로

$abc=2$

모든 모서리의 길이의 합이 16이므로

$4(a+b+c)=16$

$\therefore\ a+b+c=4$

$\overline{AB}^4+\overline{BC}^4+\overline{BF}^4=18$에서

$a^4+b^4+c^4=18$ …… ㉠

2단계 $a^4+b^4+c^4$**을** $ab+bc+ca$**를 이용하여 나타내기**

$ab+bc+ca=x$로 놓으면

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$이므로

$a^2+b^2+c^2=16-2x$ …… ㉡

또 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$이므로

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=x^2-16$ …… ㉢

한편 $a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$이므로

$a^4+b^4+c^4=(16-2x)^2-2(x^2-16)$

$=2x^2-64x+288$

㉠에서 $a^4+b^4+c^4=18$이므로

$2x^2-64x+288=18$

3단계 **직육면체의 겉넓이 구하기**

$x^2-32x+135=0$, $(x-5)(x-27)=0$

$\therefore\ x=5$ 또는 $x=27$

(i) $x=5$일 때,

㉡, ㉢에서 $a^2+b^2+c^2>0$, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>0$이므로 세 실수 a, b, c가 존재한다.

(ii) $x=27$일 때,

㉡에서 $a^2+b^2+c^2<0$이 되어 세 실수 a, b, c가 존재하지 않는다.

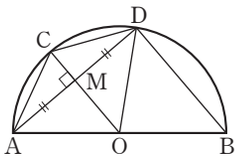
따라서 $x=5$이고, 직육면체의 겉넓이는

$2(ab+bc+ca)=2x=2\times5=10$

06 답 ④

1단계 $\overline{OM}$**의 값 구하기**

선분 AB의 중점을 O, 선분 AD와 선분 OC가 만나는 점을 M이라 하자.



$\triangle AOC \equiv \triangle DOC$ (SSS 합동)이므로

$\angle ACO = \angle DCO$

$\overline{CM}$이 $\angle ACD$의 이등분선이고 $\triangle ACD$가 $\overline{AC}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{AM}=\overline{DM}$, $\angle AMC = 90^\circ$

이때 $\angle ADB = 90^\circ$이므로 $\triangle AMO \backsim \triangle ADB$ (AA 닮음)

$\overline{BD}=8$이므로 $\overline{OM}=4$

2단계 a**의 값 구하기**

직각삼각형 AMC에서

$\overline{AM}^2=\overline{AC}^2-\overline{CM}^2$

직각삼각형 AMO에서

$\overline{AM}^2=\overline{AO}^2-\overline{OM}^2$

이므로 $\overline{AC}^2-\overline{CM}^2=\overline{AO}^2-\overline{OM}^2$

$(a-1)^2-(a-4)^2=a^2-4^2$

$a^2-6a-1=0$이므로

$a=3+\sqrt{10}$ ($\because a>4$)

3단계 $a^3-\frac{1}{a^3}$**의 값 구하기**

$a-\frac{1}{a}=(3+\sqrt{10})-\frac{1}{3+\sqrt{10}}$ → $a>4$이므로 $a^2-6a-1=0$에서 양변을 a로 나누어도 $a-\frac{1}{a}=6$을 구할 수 있다.

$=(3+\sqrt{10})-(-3+\sqrt{10})$

$=6$

$\therefore a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\frac{1}{a}\right)$

$=6^3+3\times 6$

$=234$

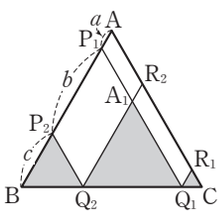
07 답 14

1단계 **선분** P_1P_2**의 길이에 대한 식 세우기**

$\overline{AP_1}=a$, $\overline{P_1P_2}=b$, $\overline{P_2B}=c$라 하면

$a+b+c=12$

$\therefore b=12-(a+c)$ …… ㉠



2단계 **삼각형 ABC와 색칠한 세 삼각형이 닮음임을 이용하여 색칠한 부분의 넓이에 대한 식 세우기**

두 선분 P_1Q_1, Q_2R_2의 교점을 A_1이라 하면

$\triangle ABC \backsim \triangle P_2BQ_2 \backsim \triangle A_1Q_2Q_1 \backsim \triangle R_1Q_1C$ (AA 닮음)이므로 닮음비는

$12 : c : b : a$

따라서 넓이의 비는 $12^2 : c^2 : b^2 : a^2$

네 삼각형 ABC, P_2BQ_2, $A_1Q_2Q_1$, R_1Q_1C의 넓이를 각각 12^2k, c^2k, b^2k, a^2k (단, $k>0$)라 하면 색칠한 부분의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times 12^2k=c^2k+b^2k+a^2k$

$\therefore a^2+b^2+c^2=72$

3단계 $2\overline{P_1P_2}$**의 값 구하기**

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$12^2=72+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=36$

$\overline{AP_1}\times\overline{P_2B}=1$에서 $ac=1$이므로

$ab+bc=35$

$\therefore b(a+c)=35$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\{12-(a+c)\}(a+c)=35$

$a+c=t$로 놓으면 $(12-t)t=35$

$t^2-12t+35=0$, $(t-5)(t-7)=0$

$\therefore t=5$ ($\because a+c\le 6$)

즉, $a+c=5$이므로

$b=12-(a+c)=12-5=7$

$\therefore 2\overline{P_1P_2}=2b=2\times 7=14$

08 답 −2

1단계 $g(x)$**의 차수 알기**

㈎에서 $4x^3+2x^2+2x-1$을 $f(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 $g(x)$이므로

$4x^3+2x^2+2x-1=f(x)Q_1(x)+g(x)$ …… ㉠

이때 $f(x)$가 이차식이므로

나머지 $g(x)$는 1차 이하의 다항식이다.

2단계 $-2x^2+x+1+f(x)$**가 상수임을 알기**

㈏에서 $4x^3+2x^2+2x-1$을 $g(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지가 $-2x^2+x+1+f(x)$이므로

$4x^3+2x^2+2x-1=g(x)Q_2(x)-2x^2+x+1+f(x)$

이때 $g(x)$가 1차 이하의 다항식이므로

나머지 $-2x^2+x+1+f(x)$는 상수이다.

3단계 $f(x)$, $g(x)$ **구하기**

따라서 $-2x^2+x+1+f(x)=a$ (단, a는 상수)라 하고, $a-1=k$로 놓으면

$f(x)=2x^2-x+k$

$4x^3+2x^2+2x-1$을 $f(x)=2x^2-x+k$로 나누면

$$\begin{array}{r} 2x+2 \\ 2x^2-x+k \overline{)\,4x^3+2x^2+2x-1} \\ \underline{4x^3-2x^2+2kx} \\ 4x^2+(2-2k)x-1 \\ \underline{4x^2-2x+2k} \\ (4-2k)x-1-2k \end{array}$$

이때 나머지가 $(4-2k)x-1-2k$이므로 ㉠에서

$g(x)=(4-2k)x-1-2k$

4단계 $f(x)+g(x)$**를** $x+\frac{1}{2}$**로 나누었을 때의 나머지 구하기**

$\therefore f(x)+g(x)=2x^2-x+k+(4-2k)x-1-2k$

$=2x^2+(3-2k)x-1-k$

조립제법을 이용하여 $2x^2+(3-2k)x-1-k$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrr} -\frac{1}{2} & 2 & 3-2k & -1-k \\ & & -1 & -1+k \\ \hline & 2 & 2-2k & -2 \end{array}$$

따라서 구하는 나머지는 -2이다.

02 나머지 정리와 인수분해

STEP 1 핵심 문제 | 28~29쪽

01 ③ **02** $\frac{19}{16}$ **03** -9 **04** $-x^2+x+2$ **05** $\frac{5}{2}$

06 ⑤ **07** $4x$ **08** ① **09** 2 **10** ④ **11** ④

12 165

01 답 ③

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$4^{50}=a_0+2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^{99}a_{99}+2^{100}a_{100}$ …… ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$0=a_0-2a_1+2^2a_2-2^3a_3+\cdots-2^{99}a_{99}+2^{100}a_{100}$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$4^{50}=2(2a_1+2^3a_3+2^5a_5+\cdots+2^{99}a_{99})$

$=4(a_1+4a_3+4^2a_5+\cdots+4^{49}a_{99})$

$\therefore a_1+4a_3+4^2a_5+\cdots+4^{49}a_{99}=4^{49}=2^{98}$

02 답 $\frac{19}{16}$

$f(x)=ax+b$(단, a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f(4x^2+x)=a(4x^2+x)+b=4ax^2+ax+b$,

$\{f(2x-1)\}^2+k=\{a(2x-1)+b\}^2+k$

$=\{2ax+(b-a)\}^2+k$

$=4a^2x^2+4a(b-a)x+(b-a)^2+k$

$f(4x^2+x)=\{f(2x-1)\}^2+k$에서

$4ax^2+ax+b=4a^2x^2+4a(b-a)x+(b-a)^2+k$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$4a=4a^2$ …… ㉠

$a=4a(b-a)$ …… ㉡

$b=(b-a)^2+k$ …… ㉢

㉠에서 $a\neq0$이므로 $a=1$

이를 ㉡에 대입하면

$1=4(b-1)$, $4b=5$ $\therefore b=\frac{5}{4}$

$a=1$, $b=\frac{5}{4}$를 ㉢에 대입하면

$k=b-(b-a)^2=\frac{5}{4}-\left(\frac{5}{4}-1\right)^2=\frac{19}{16}$

03 답 -9

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=-1$을 대입하면 $a=3$

양변에 $x=2$를 대입하면 $a+3b=-21$

$3+3b=-21$ ($\because a=3$) $\therefore b=-8$

양변에 $x=0$을 대입하면 $a+b-2c-2d=3$

$3-8-2c-2d=3$ ($\because a=3$, $b=-8$) $\therefore c+d=-4$ …… ㉠

한편 최고차항의 계수를 비교하면 $d=2$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $c=-6$

$\therefore a+b+c+d=-9$

04 답 $-x^2+x+2$

$f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$(단, a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠ …… 배점 30%

$f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지 $x+3$은 ax^2+bx+c를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지와 같으므로

$ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+x+3$ …… 배점 30%

한편 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로 $f(1)=2$에서

$2a+4=2$ $\therefore a=-1$ …… 배점 30%

따라서 구하는 나머지는

$-(x^2+1)+x+3=-x^2+x+2$ …… 배점 10%

05 답 $\frac{5}{2}$

$f(x)$를 x^2-3x로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 $(a-2)x+a$이므로

$f(x)=(x^2-3x)Q_1(x)+(a-2)x+a$

양변에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=3(a-2)+a=4a-6$ …… ㉠

$f(x+4)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지가 $2a-1$이므로

$f(x+4)=(x+1)Q_2(x)+2a-1$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(3)=2a-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $4a-6=2a-1$

$\therefore a=\frac{5}{2}$

다른 풀이

$f(x)$를 x^2-3x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $(a-2)x+a$이므로

$f(x)=(x^2-3x)Q(x)+(a-2)x+a$

$=x(x-3)Q(x)+(a-2)x+a$

$\therefore f(x+4)$

$=(x+4)(x+1)Q(x+4)+(a-2)(x+4)+a$

$=(x+4)(x+1)Q(x+4)+(a-2)(x+1)+3(a-2)+a$

$=(x+1)\{(x+4)Q(x+4)+a-2\}+4a-6$

이때 $f(x+4)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 $2a-1$이므로

$4a-6=2a-1$

$\therefore a=\frac{5}{2}$

06 답 ⑤

최고차항의 계수가 1이므로 (나)에서

$f(x)=(x-2)^2(x+a)+2(x-2)$ (단, a는 상수)

(가)에서 $f(0)=4a-4=0$이므로 $a=1$

$f(x)=(x-2)^2(x+1)+2(x-2)=(x-2)\{(x-2)(x+1)+2\}$

$=(x-2)(x^2-x)=(x-1)\{x(x-2)\}$

이므로 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫은

$Q(x)=x(x-2)$

$\therefore Q(5)=5\times3=15$

다른 풀이

$f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 (가)에서
$f(x)=x^3+ax^2+bx$(단, a, b는 상수)로 놓을 수 있다.
(나)에서 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $P(x)$라 하면 나머지가 $2(x-2)$이므로 $f(x)=(x-2)^2P(x)+2(x-2)$
$f(x)=x^3+ax^2+bx$이므로
$x(x^2+ax+b)=(x-2)^2P(x)+2(x-2)$ …… ㉠
$x=2$를 ㉠에 대입하면 $2(4+2a+b)=0$에서 $b=-2a-4$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $x(x^2+ax-2a-4)=(x-2)^2P(x)+2(x-2)$
$x(x-2)(x+a+2)=(x-2)\{(x-2)P(x)+2\}$
$x(x+a+2)=(x-2)P(x)+2$ …… ㉢
$x=2$를 ㉢에 대입하면 $2(2+a+2)=2$에서 $a=-3$
$a=-3$을 ㉡에 대입하면 $b=2$
$f(x)=x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$이므로 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫은 $Q(x)=x(x-2)$
$\therefore Q(5)=5\times3=15$

07 답 $4x$

$f(x)$가 x^2+x, 즉 $x(x+1)$로 나누어떨어지므로
$f(-1)=0$, $f(0)=0$
$f(-1)=0$에서 $-1+b=0$ $\therefore b=1$
$f(0)=0$에서 $2+a+b=0$
$a+b=-2$ $\therefore a=-3$ ($\because b=1$)
$\therefore f(x)=x^3+2(x+1)^2-3(x+1)+1$ …… ㉠
$f(x)$를 x^2+2x-3, 즉 $(x+3)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $cx+d$(단, c, d는 상수)라 하면
$f(x)=(x+3)(x-1)Q(x)+cx+d$
양변에 $x=-3$, $x=1$을 각각 대입하면
$f(-3)=-3c+d$, $f(1)=c+d$
이때 ㉠에서 $f(-3)=-27+8+6+1=-12$, $f(1)=1+8-6+1=4$
이므로 $-3c+d=-12$, $c+d=4$
두 식을 연립하여 풀면 $c=4$, $d=0$
따라서 구하는 나머지는 $4x$이다.

08 답 ①

$a^2(b-c)+b^2(a-c)+c^2(a+b)-2abc$
$=(b-c)a^2+(b^2-2bc+c^2)a-bc(b-c)$
$=(b-c)a^2+(b-c)^2a-bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$
$=(b-c)(a+b)(a-c)$
따라서 $a^2(b-c)+b^2(a-c)+c^2(a+b)-2abc$의 인수인 것은 ①이다.

09 답 2

주어진 이차식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$x^2+(ky+1)x-3y^2+11y-6=x^2+(ky+1)x-(3y-2)(y-3)$
(i) $-(3y-2)(y-3)=\{-(3y-2)\}\times(y-3)$일 때,
$-(3y-2)+(y-3)=ky+1$, 즉 $-2y-1=ky+1$을 만족시키는 자연수 k는 없다.
(ii) $-(3y-2)(y-3)=(3y-2)\times\{-(y-3)\}$일 때,
$(3y-2)+\{-(y-3)\}=ky+1$, 즉 $2y+1=ky+1$에서 $k=2$
(i), (ii)에서 자연수 k의 값은 2이다.

다른 풀이

주어진 이차식을 x에 대한 내림차순으로 정리한 이차방정식은
$x^2+(ky+1)x-3y^2+11y-6=0$
이때 $(ky+1)^2-4(-3y^2+11y-6)=A$라 하면
$x=\dfrac{-(ky+1)\pm\sqrt{A}}{2}$
즉, 다음과 같이 인수분해된다.
$x^2+(ky+1)x-3y^2+11y-6$
$=\left\{x-\dfrac{-(ky+1)+\sqrt{A}}{2}\right\}\left\{x-\dfrac{-(ky+1)-\sqrt{A}}{2}\right\}$
이때 x, y에 대한 일차식이 되려면 A가 완전제곱식이어야 하므로 이차방정식 $A=0$은 중근을 가져야 한다.
즉, y에 대한 이차방정식 $(k^2+12)y^2+2(k-22)y+25=0$이 중근을 가지려면
$4(k-22)^2-4\times(k^2+12)\times25=0$
$(k-22)^2-25(k^2+12)=0$
이 식을 전개하여 인수분해하면
$6k^2+11k-46=0$
$(k-2)(6k+23)=0$
따라서 자연수 k의 값은 2이다.

빼쌥 NOTE

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$가 중근이 되려면 $b^2-4ac=0$이어야 한다.

10 답 ④

(나)에서 $\{f(x+1)\}^2=(x-1)(x+1)(x^2+5)+9$이므로 이 식에 x 대신 $x-1$을 대입하면
$\{f(x)\}^2=x(x-2)(x^2-2x+6)+9$
$=(x^2-2x)(x^2-2x+6)+9$
$x^2-2x=X$로 놓으면
$(x^2-2x)(x^2-2x+6)+9=X(X+6)+9$
$=X^2+6X+9$
$=(X+3)^2$
$=(x^2-2x+3)^2$
(가)에서 $f(x)<0$이므로
$f(x)=-x^2+2x-3$
$\therefore f(x+a)=-(x+a)^2+2(x+a)-3$ …… ㉠
한편 $f(x+a)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 -6이므로
$f(x+a)=(x-2)Q(x)-6$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$-(x+a)^2+2(x+a)-3=(x-2)Q(x)-6$
양변에 $x=2$를 대입하면
$-(2+a)^2+2(2+a)-3=-6$
$a^2+2a-3=0$
$(a+3)(a-1)=0$
$\therefore a=-3$ 또는 $a=1$
따라서 모든 상수 a의 값의 곱은
$-3\times1=-3$

11 답 ④

$n^4-35n^2+25=(n^4-10n^2+25)-25n^2$

$=(n^2-5)^2-(5n)^2$

$=(n^2-5n-5)(n^2+5n-5)$

이때 n이 자연수이고 $n^2-5n-5<n^2+5n-5$이므로 n^4-35n^2+25의 값이 소수가 되려면 $n^2-5n-5=1$, n^2+5n-5는 소수이어야 한다.

즉, $n^2-5n-6=0$이므로

$(n+1)(n-6)=0$ $\therefore n=6$ ($\because n$은 자연수)

$n=6$일 때,

$n^4-35n^2+25=(n^2-5n-5)(n^2+5n-5)$

$=1\times(6^2+5\times6-5)=61$

따라서 $a=6$, $p=61$이므로

$a+p=67$

12 답 165

$55=a$, $12=b$, $14=c$로 놓으면

$55(55^2-12\times14)+12(14^2-55\times12)+14(12^2-55\times14)$

$=a(a^2-bc)+b(c^2-ab)+c(b^2-ac)$

$=a^3-abc+bc^2-ab^2+b^2c-ac^2$

$=(b-a)c^2+b(b-a)c-a(b^2-a^2)$

$=(b-a)\{c^2+bc-a(b+a)\}$

$=(b-a)(c-a)(c+b+a)$

$=(a-b)(a-c)(a+b+c)$

$=43\times41\times81$

따라서 $k+m+n=165$

STEP 2 고난도 문제 | 30~34쪽

01 ②	02 $a=-2$, $b=-3$		03 40	04 22
05 14	06 34	07 74	08 ㄱ, ㄴ	09 x^2+3x-2
10 -29	11 ③	12 33	13 13	14 25
15 $11x+4$		16 24	17 ⑤	18 ④ 19 6
20 ③	21 -6	22 20	23 21	24 ⑤ 25 34
26 5	27 $ab+bc+ca$			

01 답 ②

$(x^2-x)(x^2-x+3)+k(x^2-x)+8=(x^2-x+a)(x^2-x+b)$에서

$x^2-x=X$로 놓으면

$X(X+3)+kX+8=(X+a)(X+b)$

$X^2+(k+3)X+8=X^2+(a+b)X+ab$

$\therefore k+3=a+b$ ····· ㉠

$ab=8$ ····· ㉡

이때 a, b ($a<b$)가 자연수이므로 ㉡에서

$a=1$, $b=8$ 또는 $a=2$, $b=4$

㉠에서 $k=a+b-3$이므로 $k=6$ 또는 $k=3$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 $6+3=9$

02 답 $a=-2$, $b=-3$

$2x^2+y=1$에서 $y=1-2x^2$ ····· ㉠

$\frac{ax+by+1}{2x+3y-1}=k$ (단, $k\neq0$)로 놓으면

$ax+by+1=k(2x+3y-1)$

㉠을 대입하면

$ax+b(1-2x^2)+1=k\{2x+3(1-2x^2)-1\}$

$-2bx^2+ax+b+1=-6kx^2+2kx+2k$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$-2b=-6k$, $a=2k$, $b+1=2k$

$\therefore a=2k$, $b=3k$, $b=2k-1$

이때 $3k=2k-1$에서 $k=-1$

$\therefore a=-2$, $b=-3$

다른 풀이

$2x^2+y=1$에서 $y=1-2x^2$이므로

$\frac{ax+by+1}{2x+3y-1}=\frac{ax+b(1-2x^2)+1}{2x+3(1-2x^2)-1}$

$=\frac{-2bx^2+ax+b+1}{-6x^2+2x+2}$

실수 x의 값에 관계없이 $\frac{ax+by+1}{2x+3y-1}$의 값이 항상 일정하므로

$\frac{-2b}{-6}=\frac{a}{2}=\frac{b+1}{2}$

$\frac{b}{3}=\frac{a}{2}=\frac{b+1}{2}$

따라서 $\frac{b}{3}=\frac{b+1}{2}$에서

$2b=3b+3$

$\therefore b=-3$

$\frac{b}{3}=\frac{a}{2}$에서 $a=-2$

03 답 40

다항식 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$의 모든 계수와 상수항의 합은

$f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_n$

$f\left(x-2+\frac{1}{x}\right)=x^4+\frac{1}{x^4}-7$

$=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-9$

$=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}^2-9$

이때 $x-2+\frac{1}{x}=1$에서 $x+\frac{1}{x}=3$이므로

$f(1)=(3^2-2)^2-9$

$=40$

따라서 다항식 $f(x)$의 모든 계수와 상수항의 합은 40이다.

다른 풀이

$f\left(x-2+\frac{1}{x}\right)=x^4+\frac{1}{x^4}-7$

$=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-9$

$=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}^2-9$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5$

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면

$f(t-2)=t^4-4t^2-5$

이때 $t-2=X$로 놓으면 $t=X+2$이므로

$f(X)=(X+2)^4-4(X+2)^2-5$

$=(X^2+4X+4)^2-4(X^2+4X+4)-5$

$=X^4+8X^3+24X^2+32X+16-4X^2-16X-16-5$

$=X^4+8X^3+20X^2+16X-5$

따라서 다항식 $f(x)$의 모든 계수와 상수항의 합은

$1+8+20+16+(-5)=40$

NOTE

다항식 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$에 대하여 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$

따라서 다항식 $f(x)$의 모든 계수와 상수항의 합은 $f(1)$의 값과 같다.

04 답 22

$x^{2n}+8=a_{2n}(x-2)^{2n}+a_{2n-1}(x-2)^{2n-1}+\cdots+a_1(x-2)+a_0$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면

$2^{4n}+8=a_0+2a_1+2^2a_2+\cdots+2^{2n-1}a_{2n-1}+2^{2n}a_{2n}$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$8=a_0-2a_1+2^2a_2-\cdots-2^{2n-1}a_{2n-1}+2^{2n}a_{2n}$ …… ㉢

㉡−㉢을 하면

$2^{4n}=2(2a_1+2^3a_3+2^5a_5+\cdots+2^{2n-1}a_{2n-1})$

양변을 2^2으로 나누면

$2^{4n-2}=a_1+2^2a_3+2^4a_5+\cdots+2^{2n-2}a_{2n-1}$

이때 $a_1+2^2a_3+2^4a_5+\cdots+2^{2n-2}a_{2n-1}=2^{86}$이므로

$2^{4n-2}=2^{86}$

따라서 $4n-2=86$이므로

$n=22$

05 답 14

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $a_0=-6$이므로

$(x^2+2x)^4=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$

$\therefore x^4(x+2)^4=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$

이 식의 좌변에서 삼차 이하의 항의 계수는 모두 0이므로

$a_1=0,\ a_2=0,\ a_3=0$

즉, $x^4(x+2)^4=a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+a_7x^7+a_8x^8$이므로

$(x+2)^4=a_4+a_5x+a_6x^2+a_7x^3+a_8x^4$

양변에 $x=0$을 대입하면

$16=a_4$

양변에 $x=1$을 대입하면

$81=a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$

$\therefore a_5+a_6+a_7+a_8=65$

$\therefore \frac{1}{2}a_0+\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)+\frac{1}{4}a_4+\frac{1}{5}(a_5+a_6+a_7+a_8)$

$=\frac{1}{2}\times(-6)+\frac{1}{3}\times0+\frac{1}{4}\times16+\frac{1}{5}\times65$

$=14$

06 답 34

조립제법을 이용하여 $16x^4-8x^3+8x^2+kx-4$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누면

$\frac{1}{2}$	16	−8	8	k	−4
		8	0	4	$\frac{1}{2}k+2$
$\frac{1}{2}$	16	0	8	$k+4$	$\frac{1}{2}k-2$
		8	4	6	
$\frac{1}{2}$	16	8	12	$k+10$	
		8	8		
$\frac{1}{2}$	16	16	20		
		8			
	16	24			

$\therefore 16x^4-8x^3+8x^2+kx-4$

$=16\left(x-\frac{1}{2}\right)^4+24\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+20\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(k+10)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}k-2$

$=(2x-1)^4+3(2x-1)^3+5(2x-1)^2+\frac{k+10}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}k-2$

따라서 $a=1,\ b=3,\ c=5,\ 14=\frac{k+10}{2},\ d=\frac{1}{2}k-2$이므로

$k=18,\ d=7$

$\therefore k+a+b+c+d=34$

NOTE

조립제법을 연속으로 이용하면 내림차순으로 정리한 식에서 미정계수를 쉽게 구할 수 있다.

예 $x^3+3x-14=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$

1	1	0	3	−14	
		1	1	4	
1	1	1	4	−10	← d
		1	2		
1	1	2	6	← c	
		1			
	1	3	← b		
	↑				
	a				

$\therefore a=1,\ b=3,\ c=6,\ d=-10$

07 답 74

㈎에서 나머지 $g(x)-2x^2$의 차수는 $g(x)$의 차수보다 작아야 하므로

$g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차식이다.

$g(x)=2x^2+ax+b$(단, a, b는 상수)라 하면

$f(x)=g(x)\{g(x)-2x^2\}+g(x)-2x^2$

$=\{g(x)+1\}\{g(x)-2x^2\}$

$=(2x^2+ax+b+1)(ax+b)$

$f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $2a=1$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\left(2x^2+\frac{1}{2}x+b+1\right)\left(\frac{1}{2}x+b\right)$

㈏에서 $f(1)=-\frac{9}{4}$이므로

$f(1)=\left(2+\frac{1}{2}+b+1\right)\left(\frac{1}{2}+b\right)$

$=\left(b+\frac{7}{2}\right)\left(b+\frac{1}{2}\right)=b^2+4b+\frac{7}{4}$

즉, $b^2+4b+\frac{7}{4}=-\frac{9}{4}$이므로

$b^2+4b+4=0$, $(b+2)^2=0$ $\therefore b=-2$

따라서 $f(x)=\left(2x^2+\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x-2\right)$이므로

$f(6)=(72+3-1)(3-2)=74$

08 답 ㄱ, ㄴ

$f(x)$를 $x(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=x(x-2)(x-3)Q(x)+x^2-3x+5$ …… ㉠

ㄱ. $f(x)-2$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $f(2)-2=3-2=1$이므로 $f(x)-2$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

ㄴ. $f(x+2)=(x+2)x(x-1)Q(x+2)+(x+2)^2-3(x+2)+5$

$=x(x-1)(x+2)Q(x+2)+x^2+x+3$

$=x(x-1)(x+2)Q(x+2)+x(x-1)+2x+3$

$=x(x-1)\{(x+2)Q(x+2)+1\}+2x+3$

이므로 $f(x+2)$를 $x(x-1)$로 나누었을 때의 나머지는 $2x+3$이다.

ㄷ. $\frac{x}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)$를 $(x-4)(x-6)$으로 나누었을 때의 몫을 $P(x)$, 나머지를 $ax+b$(단, a, b는 상수)라 하면

$\frac{x}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=(x-4)(x-6)P(x)+ax+b$

이 식에 $x=4$, $x=6$을 각각 대입하면

$2f(2)=4a+b$, $3f(3)=6a+b$

이때 ㉠에서 $f(2)=3$, $f(3)=5$이므로

$4a+b=6$, $6a+b=15$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{9}{2}$, $b=-12$

따라서 $\frac{x}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)$를 $(x-4)(x-6)$으로 나누었을 때의 나머지는 $\frac{9}{2}x-12$이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

다른 풀이

ㄴ. $f(x+2)$를 $x(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를 $cx+d$(단, c, d는 상수)라 하면

$f(x+2)=x(x-1)Q_1(x)+cx+d$

이 식에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$f(2)=d$, $f(3)=c+d$

이때 ㉠에서 $f(2)=3$, $f(3)=5$이므로

$d=3$, $c+d=5$

두 식을 연립하여 풀면 $c=2$, $d=3$

따라서 $f(x+2)$를 $x(x-1)$로 나누었을 때의 나머지는 $2x+3$이다.

09 답 x^2+3x-2

$f(x)$를 $(x+1)^2(x+3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(단, a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)^2(x+3)Q(x)+ax^2+bx+c$

이때 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $3x+1$이므로

$f(x)=(x+1)^2(x+3)Q(x)+a(x+1)^2+3x+1$ …… ㉠

$f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 -4이므로 $f(-3)=-4$에서

$4a-8=-4$ $\therefore a=1$

이를 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x+1)^2(x+3)Q(x)+(x+1)^2+3x+1$

$=(x+1)^2(x+3)Q(x)+x^2+5x+2$

$\therefore f(x-1)=x^2(x+2)Q(x-1)+(x-1)^2+5(x-1)+2$

$=x^2(x+2)Q(x-1)+x^2+3x-2$

따라서 구하는 나머지는 x^2+3x-2이다.

10 답 -29

$P(x)$가 삼차다항식이므로 $P(x)-x^2$과 $-x-P(x)$는 모두 삼차다항식이다.

이때 $P(x)-x^2=(x+1)^2(ax+b)$(단, a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$P(x)=(x+1)^2(ax+b)+x^2$ …… ㉠ ··배점 20%

$-x-P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$-x-P(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$-x-P(x)=(x-1)^2Q(x)$

즉, $P(x)=-(x-1)^2Q(x)-x$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$(x+1)^2(ax+b)+x^2=-(x-1)^2Q(x)-x$ …… ㉢ ··배점 30%

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4(a+b)+1=-1$, $a+b=-\frac{1}{2}$

즉, $b=-a-\frac{1}{2}$이므로 이를 ㉢에 대입하면

$(x+1)^2\left(ax-a-\frac{1}{2}\right)+x^2=-(x-1)^2Q(x)-x$

즉, $a(x+1)^2(x-1)=-(x-1)^2Q(x)+\frac{1}{2}(x+1)^2-x^2-x$에서

$a(x+1)^2(x-1)=-(x-1)^2Q(x)-\frac{1}{2}(x+1)(x-1)$이고

양변을 $x-1$로 나누면 $a(x+1)^2=-(x-1)Q(x)-\frac{1}{2}(x+1)$이고

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4a=-1$에서 $a=-\frac{1}{4}$ ····· 배점 30%

이때 $b=-\frac{1}{4}$이므로 ㉠에서 $P(x)=(x+1)^2\left(-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\right)+x^2$

따라서 구하는 나머지는

$P(5)=36\times\left(-\frac{3}{2}\right)+25=-29$ ····· 배점 20%

idea

11 답 ③

$7^2=x$로 놓으면

$7^{2021}+7^{2022}+7^{2023}+7^{2024}$

$=7\times(7^2)^{1010}+(7^2)^{1011}+7\times(7^2)^{1011}+(7^2)^{1012}$

$=7x^{1010}+x^{1011}+7x^{1011}+x^{1012}$

$=7x^{1010}+8x^{1011}+x^{1012}$

이고, $96=2(7^2-1)=2(x-1)$

$f(x)=7x^{1010}+8x^{1011}+x^{1012}$이라 하면 $7^{2021}+7^{2022}+7^{2023}+7^{2024}$을 96으로 나누었을 때의 나머지는 $f(x)$를 $2(x-1)$로 나누었을 때의 나머지와 같으므로

$f(1)=7+8+1=16$

따라서 구하는 나머지는 16이다.

다른 풀이

$7=x$로 놓으면

$7^{2021}+7^{2022}+7^{2023}+7^{2024}=x^{2021}+x^{2022}+x^{2023}+x^{2024}$

이고, $96=2(7^2-1)=2(x^2-1)$

$f(x)=x^{2021}+x^{2022}+x^{2023}+x^{2024}$ …… ㉠

이라 하고 $f(x)$를 $2(x^2-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$(단, a, b는 상수)라 하면

$f(x)=2(x^2-1)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$f(-1)=-a+b$, $f(1)=a+b$

이때 ㉠에서 $f(-1)=-1+1-1+1=0$,

$f(1)=1+1+1+1=4$이므로

$-a+b=0$, $a+b=4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=2$

$\therefore R(x)=2x+2$

이때 $7^{2021}+7^{2022}+7^{2023}+7^{2024}$을 96으로 나누었을 때의 나머지는 $R(7)$과 같으므로 $R(7)=14+2=16$

따라서 구하는 나머지는 16이다.

12 답 33

$f(x)$를 $x^2+g(x)$로 나누었을 때의 몫은 $x+2$이고 나머지는 $\{g(x)\}^2-x^2$이므로

$f(x)=\{x^2+g(x)\}(x+2)+\{g(x)\}^2-x^2$ …… ㉠

이때 $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수는 $x^2+g(x)$의 차수보다 작다.

$g(x)$의 차수가 n $(n\geq 2)$이면 $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 $2n$으로 $x^2+g(x)$의 차수인 n보다 크게 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$g(x)$가 상수이면 $x^2+g(x)$의 차수와 $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 2로 같게 되어 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $g(x)$의 차수는 1이다.

이때 $x^2+g(x)$는 이차식이므로 $\{g(x)\}^2-x^2$은 일차식 또는 상수이어야 한다.

$g(x)$의 일차항의 계수가 양수이므로 $g(x)=x+a$(단, a는 상수)로 놓으면 ㉠에서

$f(x)=(x^2+x+a)(x+2)+(x+a)^2-x^2$

$\quad=(x^2+x+a)(x+2)+2ax+a^2$

㈏에서 $f(x)$가 $g(x)=x+a$로 나누어떨어지므로 $f(-a)=0$

$f(-a)=(a^2-a+a)(-a+2)-2a^2+a^2=-a^3+a^2=0$

$a^2(a-1)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=1$

(i) $a=0$일 때,

$f(x)=(x^2+x)(x+2)$에서 $f(0)=0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=1$일 때,

$f(x)=(x^2+x+1)(x+2)+2x+1$에서 $f(0)\neq 0$이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $f(x)=(x^2+x+1)(x+2)+2x+1$

$\therefore f(2)=7\times 4+4+1=33$

다른 풀이

$f(x)=\{x^2+g(x)\}(x+2)+\{g(x)\}^2-x^2$

$\quad=x^2(x+2)+(x+2)g(x)+\{g(x)\}^2-x^2$

$\quad=(x+2)g(x)+\{g(x)\}^2+x^2(x+2)-x^2$

$\quad=g(x)\{x+2+g(x)\}+x^2(x+1)$

이때 $f(x)$는 $g(x)$로 나누어떨어지므로 $x^2(x+1)$도 $g(x)$로 나누어떨어져야 한다. …… ㉠

$f(0)=g(0)\{2+g(0)\}\neq 0$에서 $g(0)\neq 0$이고 $g(0)\neq -2$ …… ㉡

$g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고 ㉠, ㉡에서

$g(x)=k(x+1)$ $(k>0)$

한편 $f(x)$를 $x^2+g(x)$로 나누었을 때의 나머지가 $\{g(x)\}^2-x^2$이므로 $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 $x^2+g(x)$의 차수보다 작아야 한다.

$x^2+g(x)=x^2+k(x+1)=x^2+kx+k$

$\{g(x)\}^2-x^2=\{k(x+1)\}^2-x^2=(k^2-1)x^2+2k^2x+k^2$

즉, $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 $x^2+g(x)$의 차수보다 작으려면

$k^2-1=0$ $\quad\therefore k=1$ $(\because k>0)$

$f(x)=(x+1)\{x+2+(x+1)\}+x^2(x+1)=(x+1)(x^2+2x+3)$

$\therefore f(2)=3\times 11=33$

idea

13 답 13

㈎에서 $Q(1)=0$인 경우와 $Q(1)\neq 0$인 경우로 나눌 수 있다.

(i) $Q(1)=0$인 경우

$Q(x)=a(x-1)$(단, $a\neq 0$)이라 하면 ㈏에서

$P(x)=x^3-10x+13-\{Q(x)\}^2$

$\quad=x^3-a^2x^2+(2a^2-10)x+13-a^2$

㈎에서 $x^3-a^2x^2+(2a^2-10)x+13-a^2$이 x^2-3x+3으로 나누어떨어져야 하므로

$$\begin{array}{r} x+(-a^2+3) \\ x^2-3x+3\overline{)\,x^3-a^2x^2+(2a^2-10)x+13-a^2} \\ \underline{\;x^3-3x^2+3x\;} \\ (-a^2+3)x^2+(2a^2-13)x+13-a^2 \\ \underline{\;(-a^2+3)x^2-3(-a^2+3)x+3(-a^2+3)\;} \\ (-a^2-4)x+4+2a^2 \end{array}$$

이때 $(-a^2-4)x+4+2a^2=0$을 만족시키는 a는 존재하지 않는다.

(ii) $Q(1)\neq 0$인 경우 → $-a^2-4=0$, $4+2a^2=0$을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

$P(x)$는 x^2-3x+3과 $x-1$을 인수로 가지고 ㈏에서

$x^3-10x+13-P(x)$는 이차식이 되어야 하므로 $P(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.

즉, $P(x)=(x^2-3x+3)(x-1)=x^3-4x^2+6x-3$이고, ㈏에서

$\{Q(x)\}^2=x^3-10x+13-P(x)$

$\quad=x^3-10x+13-(x^3-4x^2+6x-3)$

$\quad=4x^2-16x+16$

$\{Q(x)\}^2=(2x-4)^2$이므로

$Q(x)=2x-4$ 또는 $Q(x)=-2x+4$

$Q(0)<0$에서 $Q(x)=2x-4$

$\therefore P(2)+Q(8)=(8-16+12-3)+(16-4)=13$

다른 풀이

(i) $Q(1)=0$인 경우

$Q(x)=a(x-1)$(단, $a\neq 0$)이라 하면 ㈏에서

$P(x)=x^3-10x+13-\{Q(x)\}^2$

$\quad=x^3-a^2x^2+(2a^2-10)x+13-a^2$ …… ㉠

㈏에서 $x^3-10x+13-P(x)$는 이차식이 되어야 하므로 $P(x)$는 최고차항의 계수가 1이고, 이차식 x^2-3x+3을 인수로 가져야 한다.

$P(x)=(x^2-3x+3)(x+k)$(단, k는 상수)라 하면

$P(x)=x^3+(k-3)x^2+(-3k+3)x+3k$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-a^2=k-3$, $2a^2-10=-3k+3$, $13-a^2=3k$를 만족시키는 a와 k는 존재하지 않는다.

14 답 25

$P(x)$, $Q(x)$는 각각 이차다항식이고 (가)에서

$\{P(x)+Q(x)\}\times\{P(x)-Q(x)\}=x^2(x-1)(x-2)$ ····· ㉠

따라서 $P(x)+Q(x)$, $P(x)-Q(x)$는 각각 이차다항식이고 $x^2(x-1)(x-2)$의 인수이다.

이때 $P(x)-Q(x)$가 $x-1$을 인수로 가지면 $P(1)-Q(1)=0$이므로 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, $P(x)-Q(x)$는 $x-1$을 인수로 갖지 않으므로 $P(x)-Q(x)$는 x^2을 인수로 갖거나 $x(x-2)$를 인수로 갖는다.

(i) $P(x)-Q(x)=ax^2$(단, $a\neq0$)일 때,
$|P(2)-Q(2)|=|4a|$, $|P(1)-Q(1)|=|a|$이고 $|4a|>|a|$이므로 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $P(x)-Q(x)=ax(x-2)$(단, $a\neq0$)일 때,
$|P(2)-Q(2)|=0$, $|P(1)-Q(1)|=|a|$이고 $0<|a|$이므로 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $P(x)-Q(x)=ax(x-2)$이고 ㉠에서

$P(x)+Q(x)=\frac{1}{a}x(x-1)$

$P(3)+Q(3)=\frac{1}{a}\times3\times2=24$에서 $a=\frac{1}{4}$이므로

$P(x)-Q(x)=\frac{1}{4}x(x-2)$,

$P(x)+Q(x)=4x(x-1)$

두 식을 연립하여 풀면

$P(x)=\frac{17}{8}x^2-\frac{9}{4}x$, $Q(x)=\frac{15}{8}x^2-\frac{7}{4}x$

$\therefore P(4)=25$

15 답 $11x+4$

$f(x)-16$을 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 각각 -1, -4, -9이므로

$f(1)-16=-1^2$, $f(2)-16=-2^2$, $f(3)-16=-3^2$

$\therefore f(1)-16+1^2=0$, $f(2)-16+2^2=0$, $f(3)-16+3^2=0$

이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차다항식이므로

$g(x)=f(x)-16+x^2$이라 하면 $g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차다항식이고, $g(1)=g(2)=g(3)=0$이므로 $g(x)$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$을 인수로 갖는다.

$\therefore g(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)$

즉, $f(x)-16+x^2=2(x-1)(x-2)(x-3)$이므로

$f(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)+16-x^2$ ····· ㉠

$f(x)$를 $x(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$(단, a, b는 상수)라 하면

$f(x)=x(x-1)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$f(0)=b$, $f(1)=a+b$

이때 ㉠에서 $f(0)=-12+16=4$, $f(1)=16-1=15$이므로

$b=4$, $a+b=15$ $\therefore a=11$

따라서 구하는 나머지는 $11x+4$이다.

16 답 24

$f(x^2)+x^4f(x)=2x^4(2x^4-x^2-1)$ ····· ㉠

㉠에서 $f(x)$를 n차식이라 하면 $f(x^2)$의 차수는 $2n$, $x^4f(x)$의 차수는 $n+4$이다.

즉, ㉠에서 좌변의 차수는 $2n$ 또는 $n+4$이고 우변의 차수는 8이므로

$2n=8$ 또는 $n+4=8$ $\therefore n=4$

따라서 $f(x)$는 사차식이다.

한편 ㉠의 양변에

$x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

$x=1$을 대입하면 $f(1)+f(1)=0$ $\therefore f(1)=0$

$x=-1$을 대입하면 $f(1)+f(-1)=0$ $\therefore f(-1)=0$

따라서 다항식 $f(x)$는 x, $x-1$, $x+1$을 인수로 갖는다.

이때 $f(x)=x(x^2-1)(ax+b)$(단, a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면 ㉠에서

$x^2(x^4-1)(ax^2+b)+x^5(x^2-1)(ax+b)=2x^4(2x^4-x^2-1)$

즉, 좌변의 최고차항의 계수는 $2a$이고, 우변의 최고차항의 계수는 4이므로

$2a=4$ $\therefore a=2$

$\therefore x^2(x^4-1)(2x^2+b)+x^5(x^2-1)(2x+b)=2x^4(2x^2+1)(x^2-1)$

양변을 $x^2(x^2-1)$로 나누면

$(x^2+1)(2x^2+b)+x^3(2x+b)=2x^2(2x^2+1)$

상수항을 비교하면 $b=0$

$\therefore f(x)=2x^2(x^2-1)$

따라서 구하는 나머지는 $f(2)=2\times4\times3=24$

17 답 ⑤

(나)에서 $\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3=12x^4+24x^3+12x^2+16$이므로

$\{P(x)+Q(x)\}^3-3P(x)Q(x)\{P(x)+Q(x)\}$

$=12x^4+24x^3+12x^2+16$

(가)에서 $P(x)+Q(x)=4$이므로

$64-3P(x)Q(x)\times4=12x^4+24x^3+12x^2+16$

$-12P(x)Q(x)=12x^4+24x^3+12x^2-48$

$\therefore P(x)Q(x)=-x^4-2x^3-x^2+4$

$=-(x-1)(x+2)(x^2+x+2)$

$=-(x^2+x-2)(x^2+x+2)$

이때 $P(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 (가), (나)를 만족시키는 두 이차다항식 $P(x)$, $Q(x)$는

$P(x)=-x^2-x+2$, $Q(x)=x^2+x+2$ ⟶ $P(x)=-x^2-x-2$, $Q(x)=x^2+x-2$이면 $P(x)+Q(x)=-4$

$\therefore P(2)+Q(3)=(-4-2+2)+(9+3+2)=10$

18 답 ④

$P(x)=x^3+(a-1)x^2+(a^2-a)x-a^2$에서

$P(1)=1+a-1+a^2-a-a^2=0$

즉, $P(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.

조립제법을 이용하여 $x^3+(a-1)x^2+(a^2-a)x-a^2$을 $x-1$로 나누면

1	1	$a-1$	a^2-a	$-a^2$
		1	a	a^2
	1	a	a^2	0

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2+ax+a^2)$

$Q(x)=x^3+bx^2-bx+2a^2$에서 $Q(1)=1+b-b+2a^2=1+2a^2\neq0$이므로 $Q(x)$는 $x-1$을 인수로 갖지 않는다.

이때 $P(x)$와 $Q(x)$가 이차식인 공통 인수를 가지므로 $Q(x)$는 x^2+ax+a^2을 인수로 갖고, $Q(x)$의 삼차항의 계수가 1이므로

$Q(x)=(x+k)(x^2+ax+a^2)$(단, k는 상수)이라 하면

$x^3+bx^2-bx+2a^2=(x+k)(x^2+ax+a^2)$

$=x^3+(a+k)x^2+(a^2+ak)x+a^2k$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$b=a+k$ …… ㉠

$-b=a^2+ak$ …… ㉡

$2a^2=a^2k$ …… ㉢

㉢에서 $a\neq0$이므로 양변을 a^2으로 나누면 $k=2$

이를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$b=a+2$ …… ㉣

$-b=a^2+2a$ …… ㉤

㉣을 ㉤에 대입하면 $-a-2=a^2+2a$

$a^2+3a+2=0$, $(a+2)(a+1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=-1$

(i) $a=-2$일 때, $b=0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-1$일 때, $Q(x)=(x+2)(x^2-x+1)$

(i), (ii)에서 $Q(x)$의 인수인 것은 ④이다.

19 답 6

$x^3+(pq-4)x+n$이 $(x-2)(x+p)(x+q)$로 인수분해되므로

$x^3+(pq-4)x+n=(x-2)(x+p)(x+q)$

$=x^3+(p+q-2)x^2+(pq-2p-2q)x-2pq$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$p+q-2=0$ …… ㉠, $n=-2pq$ …… ㉡

㉠에서 $q=2-p$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$n=-2p(2-p)=2p(p-2)$

이때 n은 100 이하의 자연수이고 p, q는 정수이므로 $2<n<100$

(i) $n>2$일 때,

$p=2$이면 $n=2p(p-2)=2\times2\times0=0<2$

$p=3$이면 $n=2p(p-2)=2\times3\times1=6>2$

$\therefore p\geq3$

(ii) $n<100$일 때,

$p=8$이면 $n=2p(p-2)=2\times8\times6=96<100$

$p=9$이면 $n=2p(p-2)=2\times9\times7=126>100$

$\therefore p\leq8$

(i), (ii)에서 $3\leq p\leq8$이므로 정수 p는 3, 4, 5, 6, 7, 8이고, 정수 p의 개수만큼 다항식이 만들어지므로 구하는 모든 다항식의 개수는 6이다.

idea

20 답 ③

$x^3-5yz=y^3-5zx$에서 $x^3-y^3-5yz+5zx=0$

$(x-y)(x^2+xy+y^2)+5z(x-y)=0$

$\therefore (x-y)(x^2+xy+y^2+5z)=0$

이때 $x\neq y$이므로 $x^2+xy+y^2+5z=0$ …… ㉠

같은 방법으로 하면 $y^3-5zx=z^3-5xy$에서

$(y-z)(y^2+yz+z^2+5x)=0$

이때 $y\neq z$이므로 $y^2+yz+z^2+5x=0$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $x^2+xy+5z-yz-z^2-5x=0$

$(x^2-z^2)+(xy-yz)+(5z-5x)=0$

$(x-z)(x+z)+y(x-z)-5(x-z)=0$

$\therefore (x-z)(x+z+y-5)=0$

이때 $x\neq z$이므로 $x+y+z-5=0$

$\therefore x+y+z=5$

21 답 −6

$a^3+b^3+c^3=3abc$ …… ㉠

에서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore a+b+c=0$ 또는 $a=b=c$ …… 배점 30%

(i) $a+b+c=0$일 때,

$a=-b-c$이므로 양변을 제곱하면 $a^2=b^2+2bc+c^2$

$\therefore a^2-b^2-c^2=2bc$

같은 방법으로 하면

$b^2-c^2-a^2=2ca$, $c^2-a^2-b^2=2ab$

$\therefore \frac{4a^2}{a^2-b^2-c^2}+\frac{4b^2}{b^2-c^2-a^2}+\frac{4c^2}{c^2-a^2-b^2}$

$=\frac{4a^2}{2bc}+\frac{4b^2}{2ca}+\frac{4c^2}{2ab}=\frac{2a^3}{abc}+\frac{2b^3}{abc}+\frac{2c^3}{abc}$

$=\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$

$=\frac{2\times3abc}{abc}$ ($\because$ ㉠)

$=6$ …… 배점 30%

(ii) $a=b=c$일 때,

$b=a$, $c=a$를 대입하면

$\frac{4a^2}{a^2-b^2-c^2}+\frac{4b^2}{b^2-c^2-a^2}+\frac{4c^2}{c^2-a^2-b^2}$

$=\frac{4a^2}{-a^2}+\frac{4a^2}{-a^2}+\frac{4a^2}{-a^2}$

$=-4-4-4=-12$ …… 배점 30%

(i), (ii)에서 구하는 모든 값의 합은

$6+(-12)=-6$ …… 배점 10%

22 답 20

$n^4+n^2-2=(n^2-1)(n^2+2)$

$=(n-1)(n+1)(n^2+2)$

$=(n-1)(n^3+n^2+2n+2)$

$=(n-1)\{(n-2)(n^2+3n+8)+18\}$

$=(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)+18(n-1)$ …… ㉠

$(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)$은 $(n-1)(n-2)$의 배수이므로 ㉠이 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되려면 $18(n-1)$이 $(n-1)(n-2)$의 배수이어야 한다.

따라서 $18(n-1)=k(n-1)(n-2)$(단, k는 자연수)라 하면

$18=k(n-2)$

이때 k가 최소일 때, n이 최댓값을 갖고 자연수 k의 최솟값은 1이므로 그때의 n의 값은

$18=n-2$

$\therefore n=20$

다른 풀이

조립제법을 이용하여 n^4+n^2-2를 $(n-1)(n-2)$로 나누면

1	1	0	1	0	−2
		1	1	2	2
2	1	1	2	2	0
		2	6	16	
	1	3	8	18	

$\therefore n^4+n^2-2=(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)+18(n-1)$ …… ㉠

$(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)$은 $(n-1)(n-2)$의 배수이므로 ㉠이 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되려면 $18(n-1)$이 $(n-1)(n-2)$의 배수이어야 한다.

따라서 $18(n-1)=k(n-1)(n-2)$(단, k는 자연수)라 하면

$18=k(n-2)$

이때 k가 최소일 때, n이 최댓값을 갖고 자연수 k의 최솟값은 1이므로 그때의 n의 값은

$18=n-2$

$\therefore n=20$

23 답 21

$(x+y-1)^3-x^3-y^3$

$=\{(x+y)^3-3(x+y)^2+3(x+y)-1\}-x^3-y^3$

$=\{(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)-3(x+y)^2+3(x+y)-1\}-x^3-y^3$

$=3xy(x+y)-3(x+y)^2+3(x+y)-1$

$=3(x+y)(xy-x-y+1)-1$

$=3(x+y)(x-1)(y-1)-1$

이므로 $3(x+y)(x-1)(y-1)-1=269$

즉, $(x+y)(x-1)(y-1)=90$에서

$(x+y)(x-1)(y-1)=9\times5\times2$

이때 $x+y=9$, $x-1=5$, $y-1=2$이면 되므로 $x=6$, $y=3$

$\therefore 2x+3y=12+9=21$

24 답 ⑤

$a^3+b^3+c^3+(a+b)(ab-c^2)-(a^2+b^2)c$

$=c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+a^3+b^3+a^2b+ab^2$

$=c^2(c-a-b)-(a^2+b^2)c+a^2(a+b)+b^2(a+b)$

$=c^2(c-a-b)-(a^2+b^2)c+(a+b)(a^2+b^2)$

$=c^2(c-a-b)-(a^2+b^2)(c-a-b)$

$=(c-a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a+b>c$ ⟶ 삼각형에서 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다.

$\therefore c-a-b<0$

따라서 $c^2-a^2-b^2=0$, 즉 $c^2=a^2+b^2$이므로 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

개념 NOTE

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 a, b, c $(a\le b\le c)$라 할 때

(1) $c^2=a^2+b^2$ ➡ 직각삼각형

(2) $c^2<a^2+b^2$ ➡ 예각삼각형

(3) $c^2>a^2+b^2$ ➡ 둔각삼각형

(4) $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ➡ 이등변삼각형

(5) $a=b=c$ ➡ 정삼각형

25 답 34

$16=x$, $32=y$, $72=z$로 놓으면

$xyz=16\times32\times72=2^4\times2^5\times(2^3\times3^2)=3^2\times2^{12}$

$\therefore 16^3+32^3+72^3-3^3\times2^{12}$

$=x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$=\frac{1}{2}\times(16+32+72)\times\{(-16)^2+(-40)^2+56^2\}$

$=\frac{1}{2}\times(16+32+72)\times(8^2\times2^2+8^2\times5^2+8^2\times7^2)$

$=\frac{1}{2}\times120\times8^2\times(4+25+49)$

$=60\times8^2\times78$

$=2^9\times3^2\times5\times13$

따라서 $p=2$, $q=3$, $r=5$, $s=13$, $m=9$, $n=2$이므로

$p+q+r+s+m+n=34$

26 답 5

㈎에서

$a^2-16b^2+3c^2+6ab+2bc+4ca$

$=a^2+(6b+4c)a-16b^2+2bc+3c^2$

$=a^2+(6b+4c)a-(8b+3c)(2b-c)$

$=\{a+(8b+3c)\}\{a-(2b-c)\}$

$=(a+8b+3c)(a-2b+c)$

$=0$ …… 배점 30%

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+8b+3c>0$

따라서 $a-2b+c=0$이므로

$a+c=2b$ …… ㉠ …… 배점 20%

이때 ㉠에서 $a=b$이면 $c=b$, 즉 $a=b=c$이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

$\therefore a\ne b$

또 ㉠에서 $a>b$이면 $c<b$이어야 하므로 $c<b<a$

즉, 삼각형 ABC의 가장 긴 변의 길이는 a이다.

㈏에서 $a=\frac{2}{3}(b+c)$이므로

$3a-2c=2b$ …… ㉡ …… 배점 20%

㉠, ㉡에서 $a+c=3a-2c$

$\therefore a=\frac{3}{2}c$

같은 방법으로 $a<b$이면 $a<b<c$이므로 가장 긴 변의 길이는 c이고

$c=\frac{3}{2}a$

따라서 삼각형 ABC의 가장 긴 변의 길이는 가장 짧은 변의 길이의 $\frac{3}{2}$이므로

$p=2$, $q=3$ $\therefore p+q=5$ …… 배점 30%

idea

27 답 $ab+bc+ca$

직육면체 A, B의 부피는 각각 abc, $(a+b)(b+c)(c+a)$

이때 $a+b+c=t$로 놓으면

$a+b=t-c$, $b+c=t-a$, $c+a=t-b$

직육면체 C의 부피는

$abc+(a+b)(b+c)(c+a)$

$=abc+(t-c)(t-a)(t-b)$

$=abc+t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc$

$=t\{t^2-(a+b+c)t+ab+bc+ca\}$

$=t(t^2-t\times t+ab+bc+ca)$

$=t(ab+bc+ca)$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

따라서 직육면체 C의 밑면의 세로의 길이는 $ab+bc+ca$이다.

다른 풀이

직육면체 A, B의 부피는 각각 abc, $(a+b)(b+c)(c+a)$이므로 직육면체 C의 부피는

$abc+(a+b)(b+c)(c+a)$

$=abc+(a+b)(bc+ab+c^2+ac)$

$=abc+abc+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+ab^2+bc^2+abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=(b+c)a^2+\{(b+c)^2+bc\}a+bc(b+c)$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(a+b+c)$

$=a(b+c)(a+b+c)+bc(a+b+c)$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

따라서 직육면체 C의 밑면의 세로의 길이는 $ab+bc+ca$이다.

STEP 3 최고난도 문제 | 35~37쪽

01 16	02 ④	03 ③	04 0	05 12	06 18
07 ④	08 $8\sqrt{5}$	09 6000	10 ㄹ, ㅂ	11 146	12 126

01 답 16

1단계 항등식을 이용하여 a의 값 구하기

$\{P(x)+x\}^2=(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$

$=(x^2-a^2)(x^2+5)+9$

$=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$

이때 $P(x)$는 최고차항의 계수가 음수인 이차다항식이므로 $P(x)+x$는 이차항의 계수가 -1인 이차다항식이고 일차항이 없어야 한다.

$P(x)+x=-x^2+k$(단, k는 상수)라 하면

$(-x^2+k)^2=x^4-2kx^2+k^2$

즉, $x^4-2kx^2+k^2=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$에서 이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$-2k=5-a^2$ ····· ㉠

$k^2=-5a^2+9$ ····· ㉡

㉠에서 $a^2=2k+5$ ····· ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $k^2=-5(2k+5)+9$

$k^2+10k+16=0$, $(k+8)(k+2)=0$

$\therefore k=-8$ 또는 $k=-2$

이때 $k=-8$이면 ㉢에서 $a^2=-11<0$이므로 $k=-2$

이를 ㉢에 대입하면 $a^2=1$ $\therefore a=1$ ($\because a>0$)

2단계 $\{P(a)\}^2$의 값 구하기

이때 $P(x)+x=-x^2-2$, 즉 $P(x)=-x^2-x-2$이므로

$\{P(a)\}^2=\{P(1)\}^2=(-1-1-2)^2=16$

다른 풀이

$P(x)+x$가 이차다항식이므로 $(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$는 이차다항식의 완전제곱식이어야 한다.

$(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$

$=(x^2-a^2)(x^2+5)+9$

$=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$

$=x^4+(5-a^2)x^2+\frac{(5-a^2)^2}{4}-\frac{(5-a^2)^2}{4}-5a^2+9$

$=\left\{x^4+(5-a^2)x^2+\frac{(5-a^2)^2}{4}\right\}-\frac{(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)}{4}$

$=\left(x^2+\frac{5-a^2}{2}\right)^2-\frac{a^4+10a^2-11}{4}$

이때 $\frac{a^4+10a^2-11}{4}=0$이어야 하므로

$a^4+10a^2-11=0$, $(a^2+11)(a^2-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

$\{P(x)+x\}^2=(x^2+2)^2$에서

$|P(x)+x|=|x^2+2|$

$\therefore P(x)=x^2-x+2$ 또는 $P(x)=-x^2-x-2$

이때 최고차항의 계수가 음수이므로

$P(x)=-x^2-x-2$

$\therefore \{P(a)\}^2=\{P(1)\}^2=(-1-1-2)^2=16$

02 답 ④

1단계 $x^n(2x^3+8x^2+px+q)$를 $(x+2)^3$으로 나누었을 때의 몫을 정하고 식 세우기

$x^n(2x^3+8x^2+px+q)$를 $(x+2)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $r\times 2^{n+2}(x+2)^2$이므로

$x^n(2x^3+8x^2+px+q)$

$=(x+2)^3Q(x)+r\times 2^{n+2}(x+2)^2$

$=(x+2)^2\{(x+2)Q(x)+r\times 2^{n+2}\}$ ····· ㉠

2단계 p, q의 값 구하기

㉠에서 $2x^3+8x^2+px+q$는 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지므로 조립제법을 이용하면

-2	2	8	p	q
		-4	-8	$-2p+16$
-2	2	4	$p-8$	$q-2p+16$
		-4	0	
	2	0	$p-8$	

$\therefore 2x^3+8x^2+px+q=2x(x+2)^2$

이때 $p-8=0$, $q-2p+16=0$이므로

$p=8$, $q=0$

3단계 r의 값 구하기

$x^n(2x^3+8x^2+8x)=x^n\times 2x(x+2)^2=2x^{n+1}(x+2)^2$이므로 ㉠에서

$2x^{n+1}(x+2)^2=(x+2)^2\{(x+2)Q(x)+r\times 2^{n+2}\}$

양변을 $(x+2)^2$으로 나누면

$2x^{n+1}=(x+2)Q(x)+r\times 2^{n+2}$

양변에 $x=-2$를 대입하면

$2\times(-2)^{n+1}=r\times 2^{n+2}$

n이 짝수이므로 $(-2)^{n+1}=-2^{n+1}$에서

$-2^{n+2}=r\times 2^{n+2}$

$\therefore r=-1$

4단계 $p-q+r$**의 값 구하기**

$\therefore p-q+r=7$

03 답 ③

1단계 **다항식** $f(x)$ **구하기**

$f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 $2(x-1)^2$이므로

$f(x)=(x-1)^3Q_1(x)+2(x-1)^2$

$\quad=(x-1)^2\{(x-1)Q_1(x)+2\}$

$\therefore x^2(x^3+ax^2+bx+c)=(x-1)^2\{(x-1)Q_1(x)+2\}$

이때 $x^3+ax^2+bx+c=(x-1)^2(x+d)$인 상수 d가 존재하므로

$x^2(x-1)^2(x+d)=(x-1)^2\{(x-1)Q_1(x)+2\}$

양변을 $(x-1)^2$으로 나누면

$x^2(x+d)=(x-1)Q_1(x)+2$

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+d=2$

$\therefore d=1$

$\therefore f(x)=x^2(x-1)^2(x+1)$

2단계 p, q**의 값 구하기**

$f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지가 $px+q$이므로

$f(x)=(x+1)^2Q_2(x)+px+q$ ····· ㉠

$\therefore x^2(x-1)^2(x+1)=(x+1)^2Q_2(x)+px+q$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-p+q$

$\therefore p=q$

이를 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x+1)^2Q_2(x)+px+p$

$\quad=(x+1)^2Q_2(x)+p(x+1)$

$\quad=(x+1)\{(x+1)Q_2(x)+p\}$

$\therefore x^2(x-1)^2(x+1)=(x+1)\{(x+1)Q_2(x)+p\}$

양변을 $x+1$로 나누면

$x^2(x-1)^2=(x+1)Q_2(x)+p$

양변에 $x=-1$을 대입하면 $4=p$

$\therefore q=4$

3단계 pq**의 값 구하기**

$\therefore pq=16$

idea

04 답 0

1단계 **주어진 식을** $f(x)+x^3f\left(\frac{1}{x}\right)$ **꼴로 나타내기**

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{f(2)}{8}$에서

$f(2)+2^3f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{f(3)}{27}$에서

$f(3)+3^3f\left(\frac{1}{3}\right)=0$

2단계 **다항식** $f(x)$**의 식 세우기**

이때 $g(x)=f(x)+x^3f\left(\frac{1}{x}\right)$이라 하면 $g(2)=g(3)=0$

한편 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (단, a, b, c, d는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$x^3f\left(\frac{1}{x}\right)=dx^3+cx^2+bx+a$이므로

$g(x)=(a+d)x^3+(b+c)x^2+(b+c)x+(a+d)$

이때 $a+d=p$, $b+c=q$로 놓으면

$g(x)=px^3+qx^2+qx+p$

$g(2)=0$에서

$9p+6q=0$

$\therefore 3p+2q=0$ ····· ㉠

$g(3)=0$에서

$28p+12q=0$

$\therefore 7p+3q=0$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=0$, $q=0$

따라서 $d=-a$, $c=-b$이므로

$f(x)=ax^3+bx^2-bx-a$

3단계 $f(x)$**를** $x-1$**로 나누었을 때의 나머지 구하기**

따라서 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)=a+b-b-a=0$

05 답 12

1단계 $f(2)$**의 값 구하기**

$f(x)$를 $x-2$, $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$이므로 나머지를 각각 R_1, R_2라 하면

$f(x)=(x-2)Q_1(x)+R_1$ ····· ㉠

$f(x)=(x-3)Q_2(x)+R_2$ ····· ㉡

㉡의 양변에 $x=3$을 대입하면 $f(3)=R_2$

이때 $Q_2(2)=f(3)$이므로 $R_2=Q_2(2)$

즉, $f(x)=(x-3)Q_2(x)+Q_2(2)$이고 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=-Q_2(2)+Q_2(2)$ $\therefore f(2)=0$

2단계 $f(x)$ **구하기**

따라서 ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=R_1=0$

$\therefore f(x)=(x-2)Q_1(x)$ ····· ㉢

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로

$Q_1(x)=x+a$ (단, a는 상수)라 하면

$Q_1(2)=2+a$, $Q_1(3)=3+a$

㉢의 양변에 $x=3$을 대입하면 $f(3)=Q_1(3)$

이때 $Q_2(2)=f(3)=Q_1(3)=3+a$이므로

$Q_1(2)+Q_2(2)=3$에서

$(2+a)+(3+a)=3$

$2a+5=3$ $\therefore a=-1$

$\therefore f(x)=(x-2)(x-1)$

3단계 $f(5)$**의 값 구하기**

$\therefore f(5)=3\times 4=12$

06 답 18

1단계 다항식 $x^{2n+2}+x^{2n}+4x+3$을 x^2-1로 나누었을 때의 나머지 구하기

$x^{2n+2}+x^{2n}+4x+3$을 x^2-1, 즉 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이므로 나머지를 $ax+b$(단, a, b는 상수)라 하면

$x^{2n+2}+x^{2n}+4x+3=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1+1-4+3=-a+b$ $\therefore a-b=-1$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+1+4+3=a+b$ $\therefore a+b=9$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=5$

$\therefore x^{2n+2}+x^{2n}+4x+3=(x+1)(x-1)Q(x)+4x+5$

2단계 $Q(1)$을 n에 대한 식으로 나타내기

따라서 $(x+1)(x-1)Q(x)=x^{2n+2}+x^{2n}-2$이고,

$x^{2n+2}+x^{2n}-2$

$=(x^{2n+2}-1)+(x^{2n}-1)$

$=(x-1)(x^{2n+1}+x^{2n}+\cdots+x+1)+(x-1)(x^{2n-1}+x^{2n-2}+\cdots+1)$

이므로

$(x+1)(x-1)Q(x)$

$=(x-1)(x^{2n+1}+x^{2n}+\cdots+x+1)+(x-1)(x^{2n-1}+x^{2n-2}+\cdots+1)$

양변을 $x-1$로 나누면

$(x+1)Q(x)=(x^{2n+1}+x^{2n}+\cdots+x+1)+(x^{2n-1}+x^{2n-2}+\cdots+1)$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2Q(1)=(2n+2)+2n=4n+2$

$\therefore Q(1)=2n+1$

3단계 n의 값 구하기

이때 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 37이므로 $Q(1)=37$에서

$2n+1=37$ $\therefore n=18$

07 답 ④

1단계 조건을 만족시키는 다항식 $A(x)$ 구하기

㈏에서 $A(x)\{A(x)-4\}$는 x^2-4x, 즉 $x(x-4)$로 나누어떨어지므로 $A(x)\{A(x)-4\}$를 $x(x-4)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$A(x)\{A(x)-4\}=x(x-4)Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$A(0)\{A(0)-4\}=0$

$\therefore A(0)=0$ 또는 $A(0)=4$

㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면

$A(4)\{A(4)-4\}=0$

$\therefore A(4)=0$ 또는 $A(4)=4$

㈎에서 $A(x)$는 $x-1$을 인수로 가지므로 이차다항식 $A(x)$는 다음과 같다. ⟶ $A(0)=0$, $A(4)=0$이면 $x-1$을 인수로 가질 수 없다.

(i) $A(0)=0$, $A(4)=4$일 때,

$A(x)=ax(x-1)$(단, $a\neq0$인 상수)이라 하면

$A(4)=4$에서 $12a=4$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

$\therefore A(x)=\frac{1}{3}x(x-1)$

(ii) $A(0)=4$, $A(4)=0$일 때,

$A(x)=b(x-1)(x-4)$(단, $b\neq0$인 상수)라 하면

$A(0)=4$에서 $4b=4$ $\therefore b=1$

$\therefore A(x)=(x-1)(x-4)$

(iii) $A(0)=4$, $A(4)=4$일 때,

$A(x)=(x-1)(cx+d)$(단, c, d는 상수, $c\neq0$)라 하면

$A(0)=4$에서 $-d=4$ $\therefore d=-4$

$A(4)=4$에서 $12c+3d=4$

$12c-12=4$ ($\because d=-4$) $\therefore c=\frac{4}{3}$

$\therefore A(x)=(x-1)\left(\frac{4}{3}x-4\right)$

2단계 다항식 $B(x)$ 구하기

(i), (ii), (iii)에서

$B(x)=\frac{1}{3}x(x-1)+(x-1)(x-4)+(x-1)\left(\frac{4}{3}x-4\right)$

3단계 $B(x)$를 $x-6$으로 나누었을 때의 나머지 구하기

따라서 $B(x)$를 $x-6$으로 나누었을 때의 나머지는

$B(6)=10+10+20=40$

08 답 $8\sqrt{5}$

1단계 ㈐의 식을 인수분해하기

㈐에서

$a^3+2ca^2+(c^2-bc-b^2)a-bc(b+c)$

$=a^3+2ca^2+ac^2-abc-ab^2-b^2c-bc^2$

$=(a-b)c^2+(2a^2-ab-b^2)c+a^3-ab^2$

$=(a-b)c^2+(a-b)(2a+b)c+a(a+b)(a-b)$

$=(a-b)\{c^2+(2a+b)c+a(a+b)\}$

$=(a-b)(c+a)(c+a+b)=0$

2단계 a, b, c의 값 구하기

이때 a, b, c는 삼각형 ABC의 세 변의 길이이므로

$c+a>0$, $c+a+b>0$

따라서 $a-b=0$이므로 $b=a$ …… ㉠

이를 ㈎의 $a+3b=3c$에 대입하면

$4a=3c$ …… ㉡

㈏에서 $a+b+c=20$이므로 ㉠을 대입하면

$2a+c=20$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

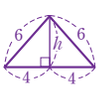
$a=6$, $c=8$

이를 ㉠에 대입하면 $b=6$

3단계 삼각형 ABC의 넓이 구하기

즉, 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이므로 삼각형의 높이를 h라 하면

$h=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$



따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times8\times2\sqrt{5}=8\sqrt{5}$

09 답 6000

1단계 수를 문자로 치환하여 나타내기

$335=a$, $333=b$, $332=c$로 놓으면

$N(335, 333, 332)=N(a, b, c)=a^3(b-c)$,

$N(333, 332, 335)=N(b, c, a)=b^3(c-a)$,

$N(332, 335, 333)=N(c, a, b)=c^3(a-b)$

2단계 문자로 치환한 식을 인수분해하여 식의 값 구하기

$\therefore N(335, 333, 332)+N(333, 332, 335)+N(332, 335, 333)$

$=a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

$=(b-c)a^3-(b^3-c^3)a+b^3c-bc^3$

$=(b-c)a^3-(b-c)(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)(b-c)$

$=(b-c)\{a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)\}$

$=(b-c)(a^3-ab^2-ac^2+bc^2-abc+b^2c)$

$=(b-c)\{a(a+b)(a-b)-c^2(a-b)-bc(a-b)\}$

$=(b-c)(a-b)(a^2+ab-c^2-bc)$

$=(b-c)(a-b)\{(a+c)(a-c)+b(a-c)\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)$

$=(333-332)(335-333)(335-332)(335+333+332)$

$=1\times2\times3\times1000$

$=6000$

idea

10 답 ㄹ, ㅂ

1단계 주어진 식의 인수를 찾아 인수분해하기

$f(x)=x^5+4x^4+nx^3+nx^2+4x+1$이라 하면

$f(-1)=-1+4-n+n-4+1=0$

즉, $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

조립제법을 이용하여 $x^5+4x^4+nx^3+nx^2+4x+1$을 $x+1$로 나누면

-1	1	4	n	n	4	1
		-1	-3	$-n+3$	-3	-1
	1	3	$n-3$	3	1	0

$\therefore f(x)=(x+1)\{x^4+3x^3+(n-3)x^2+3x+1\}$

$=x^2(x+1)\left\{x^2+3x+(n-3)+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right\}$

$=x^2(x+1)\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+n-5\right\}$

2단계 주어진 식의 인수가 될 수 있는 것 구하기

이때 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+n-5$를

$\left(x+\frac{1}{x}+\alpha\right)\left(x+\frac{1}{x}+\beta\right)$(단, α, β는 정수)로 놓으면

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+n-5=\left(x+\frac{1}{x}+\alpha\right)\left(x+\frac{1}{x}+\beta\right)$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+(\alpha+\beta)\left(x+\frac{1}{x}\right)+\alpha\beta$

이므로 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=n-5$ ····· ㉠

$\therefore f(x)=x^2(x+1)\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+n-5\right\}$

$=x^2(x+1)\left(x+\frac{1}{x}+\alpha\right)\left(x+\frac{1}{x}+\beta\right)$

$=(x+1)(x^2+\alpha x+1)(x^2+\beta x+1)$ ⟶ 보기의 다항식에 맞춰 α가 -3, -1, 4인 경우로 나누어 생각한다.

(i) $\alpha=-3$일 때,

㉠에 대입하여 풀면 $\beta=6$, $n=-13$

이때 n은 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=-1$일 때,

㉠에 대입하여 풀면 $\beta=4$, $n=1$이므로

$f(x)=(x+1)(x^2-x+1)(x^2+4x+1)$

(iii) $\alpha=4$일 때,

㉠에 대입하여 풀면 $\beta=-1$, $n=1$이므로

$f(x)=(x+1)(x^2+4x+1)(x^2-x+1)$ ⟶ (ii)와 $f(x)$가 같다.

(i), (ii), (iii)에서 보기 중 $x^5+4x^4+nx^3+nx^2+4x+1$의 인수가 될 수 있는 것은 ㄹ, ㅂ이다.

11 답 146

1단계 a의 값이 될 수 있는 자연수 구하기

$P(x)$가 일차식 $x-a$를 인수로 가지므로 $P(a)=0$

$a^4-290a^2+b=0$

$\therefore b=a^2(290-a^2)$ ····· ㉠

이때 b가 자연수이므로

$290-a^2>0$ ($\because a^2>0$)

따라서 $290-a^2>0$을 만족시키는 a의 값이 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, ..., 17이다.

2단계 다항식 $P(x)$를 인수분해하기

조립제법을 이용하여 x^4-290x^2+b를 $x-a$로 나누면

a	1	0	-290	0	b
		a	a^2	a^3-290a	a^4-290a^2
	1	a	a^2-290	a^3-290a	$b+a^4-290a^2$

$\therefore P(x)=(x-a)\{x^3+ax^2+(a^2-290)x+a^3-290a\}$

$P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$Q(x)=x^3+ax^2+(a^2-290)x+a^3-290a$

이때 $Q(-a)=-a^3+a^3-a^3+290a+a^3-290a=0$이므로 $Q(x)$는 $x+a$를 인수로 갖는다.

조립제법을 이용하여 $x^3+ax^2+(a^2-290)x+a^3-290a$를 $x+a$로 나누면

$-a$	1	a	a^2-290	a^3-290a
		$-a$	0	$-a^3+290a$
	1	0	a^2-290	0

$\therefore P(x)=(x-a)(x+a)(x^2+a^2-290)$ ····· ㉡

3단계 p의 값 구하기

주어진 조건을 만족시키려면 ㉡에서 이차식 x^2+a^2-290은 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해되지 않아야 한다.

이때 $x^2+a^2-290=x^2-(290-a^2)$이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우는 $290-a^2$이 제곱수인 경우이다.

즉, $290=1^2+17^2=11^2+13^2$이므로 $290-a^2$이 제곱수가 되는 자연수 a의 값은 1, 11, 13, 17이다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a의 개수는 $17-4=13$이고, 자연수 a의 개수만큼 $P(x)$가 만들어지므로 모든 $P(x)$의 개수는 13이다.

$\therefore p=13$

4단계 q의 값 구하기

한편 ㉠에서

$b=a^2(290-a^2)$

$=-(a^2-145)^2+145^2$

이때 a가 자연수이므로 b는 $a=12$일 때, 최댓값 $12^2\times(290-12^2)$을 갖는다.

$\therefore q=12^2\times(290-12^2)$

5단계 $\frac{q}{(p-1)^2}$의 값 구하기

$\therefore \frac{q}{(p-1)^2}=\frac{12^2\times(290-12^2)}{(13-1)^2}=146$

12 답 126

1단계 a^3+b^3**의 값 구하기**

정사각뿔 O−ABCD의 부피는

$\frac{1}{3}\times a^2\times\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$

정사각뿔 O−EFGH의 모든 모서리의 길이가 b이므로 그 부피는

$\frac{1}{3}\times b^2\times\sqrt{b^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{6}b^3$

두 정사각뿔 O−ABCD, O−EFGH의 부피의 합이 $2\sqrt{2}$이므로

$\frac{\sqrt{2}}{6}(a^3+b^3)=2\sqrt{2}$

$\therefore\ a^3+b^3=12$

2단계 $a+b$, $a-b$**의 값 구하기**

점 F에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼각형 BFI는 $\angle FBI=60^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{FI}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{FB}=\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)$

$\overline{BI}=\frac{1}{2}\overline{FB}=\frac{1}{2}(a-b)$에서

$\overline{AI}=a-\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}(a+b)$

삼각형 FAI는 직각삼각형이므로

$\overline{AF}^2=\overline{FI}^2+\overline{AI}^2$

$=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)\right\}^2+\left\{\frac{1}{2}(a+b)\right\}^2$

$=\frac{3}{4}(a^2-2ab+b^2)+\frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2)$

$=a^2-ab+b^2$

$=4$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=(a+b)\times4=12$

이므로 $a+b=3$

$a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab$

$=3^2-3ab=4$

이므로 $ab=\frac{5}{3}$

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$=3^2-4\times\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$

이므로 $a-b=\frac{\sqrt{21}}{3}$ ($\because\ a-b>0$)

3단계 $32\times S^2$**의 값 구하기**

사각형 ABFE의 넓이는 정삼각형 OAB의 넓이에서 정삼각형 OEF의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2-b^2)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(a+b)(a-b)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times3\times\frac{\sqrt{21}}{3}$

$=\frac{3\sqrt{7}}{4}$

$\therefore\ 32\times S^2=32\times\frac{63}{16}$

$=126$

기출 변형 문제로 단원 마스터 | 38~39쪽

01 ② 02 82 03 −40 04 1056 05 27 06 −58
07 139 08 160

01 답 ②

삼각형 ABC가 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$에서 $x^2+y^2=21$ …… ㉠

$\triangle ABC\backsim\triangle APS$ (AA 닮음)이고 닮음비가

$\overline{BC}:\overline{PS}=\sqrt{21}:\frac{3\sqrt{21}}{10}=10:3$이므로

$\overline{AP}=\frac{3}{10}x$, $\overline{AS}=\frac{3}{10}y$이고 $\overline{SC}=\frac{7}{10}y$

$\triangle APS\backsim\triangle RSC$ (AA 닮음)이므로 $\overline{PS}:\overline{SC}=\overline{AP}:\overline{RS}$에서

$\frac{3\sqrt{21}}{10}:\frac{7}{10}y=\frac{3}{10}x:\frac{3\sqrt{21}}{10}$

즉, $21xy=9\times21$, $xy=9$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=21-2\times9=3$이고, $x>y$이므로

$x-y=\sqrt{3}$

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=21+2\times9=39$이고, $x+y>0$이므로

$x+y=\sqrt{39}$

$\therefore\ x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=(\sqrt{3})^3+3\times9\times\sqrt{3}=30\sqrt{3}$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(\sqrt{39})^3-3\times9\times\sqrt{39}=12\sqrt{39}$

$\therefore\ \frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}=\frac{12\sqrt{39}}{30\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{13}}{5}$

02 답 82

$\overline{AB}=x$, $\overline{AD}=y$, $\overline{AE}=z$라 하면

$l_1=3x+3y+3z+\overline{AC}+\overline{CF}+\overline{FA}$,

$l_2=x+y+z+\overline{AC}+\overline{CF}+\overline{FA}$이므로 $l_1-l_2=2x+2y+2z=34$

$\therefore\ x+y+z=17$

$S_1=xy+yz+zx+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}zx+$(삼각형 AFC의 넓이),

$S_2=\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}zx+$(삼각형 AFC의 넓이)

이므로 $S_1-S_2=xy+yz+zx=83$

$\therefore\ \overline{AC}^2+\overline{CF}^2+\overline{FA}^2=(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(z^2+x^2)$

$=2(x^2+y^2+z^2)$

$=2\{(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\}$

$=2\times(17^2-2\times83)=246$

$\therefore\ \frac{1}{3}(\overline{AC}^2+\overline{CF}^2+\overline{FA}^2)=82$

03 답 −40

$f(x)g(x)$를 $f(x)+2x^2$으로 나누었을 때의 몫은 $-2x^2-6$이고 나머지는 $4\{f(x)-xg(x)\}$이므로

$f(x)g(x)=\{f(x)+2x^2\}(-2x^2-6)+4\{f(x)-xg(x)\}$ …… ㉠

㉠의 좌변이 삼차식이므로 우변도 삼차식이다.

즉, $\{f(x)+2x^2\}(-2x^2-6)$이 삼차식이므로 $f(x)+2x^2$은 일차식이고 나머지 $4\{f(x)-xg(x)\}$는 상수이다.

$f(x)+2x^2=ax+b$ (단, a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

나머지 $4\{f(x)-xg(x)\}=4\{(-2x^2+ax+b)-xg(x)\}$는 상수이므로

$g(x)=-2x+a$이고 $f(x)-xg(x)=b$

㉠에 $f(x)=-2x^2+ax+b$, $g(x)=-2x+a$를 대입하면

$(-2x^2+ax+b)(-2x+a)=(ax+b)(-2x^2-6)+4b$ …… ㉡

㉡의 좌변은 최고차항의 계수가 4이므로 $a=-2$

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면

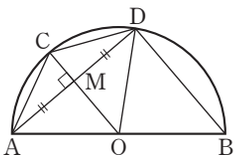
$0=(2+b)\times(-8)+4b$에서 $b=-4$

따라서 $f(x)=-2x^2-2x-4$이므로 $f(-2)=-8$

$\therefore 5f(-2)=-40$

04 답 1056

선분 AB의 중점을 O, 선분 AD와 선분 OC가 만나는 점을 M이라 하자.



$\triangle AOC\equiv\triangle DOC$ (SS 합동)이므로

$\angle ACO=\angle DCO$

$\overline{CM}$이 $\angle ACD$의 이등분선이고 $\triangle ACD$가 $\overline{AC}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이므로 $\overline{AM}=\overline{DM}$, $\angle AMC=90^\circ$

이때 $\angle ADB=90^\circ$이므로 $\triangle AMO\backsim\triangle ADB$ (AA 닮음)

$\overline{BD}=10$이므로 $\overline{OM}=5$

직각삼각형 AMC에서 $\overline{AM}^2=\overline{AC}^2-\overline{CM}^2$,

직각삼각형 AMO에서 $\overline{AM}^2=\overline{AO}^2-\overline{OM}^2$이므로

$\overline{AC}^2-\overline{CM}^2=\overline{AO}^2-\overline{OM}^2$

$(a-1)^2-(a-5)^2=a^2-5^2$

$a^2-8a-1=0$이므로 $a=4+\sqrt{17}$ ($\because a>5$)

$a-\dfrac{1}{a}=(4+\sqrt{17})-\dfrac{1}{4+\sqrt{17}}=(4+\sqrt{17})-(\sqrt{17}-4)=8$,

$a+\dfrac{1}{a}=(4+\sqrt{17})+(\sqrt{17}-4)=2\sqrt{17}$,

$a^2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-2=(2\sqrt{17})^2-2=66$

$\therefore a^4-\dfrac{1}{a^4}=\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$

$=66\times2\sqrt{17}\times8=1056\sqrt{17}$

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{17}}\left(a^4-\dfrac{1}{a^4}\right)=1056$

05 답 27

$n^4+2n^2-3=(n^2-1)(n^2+3)$

$=(n+1)(n-1)(n^2+3)$

$=(n+1)(n^3-n^2+3n-3)$

$=(n+1)\{(n-3)(n^2+2n+9)+24\}$

$=(n+1)(n-3)(n^2+2n+9)+24(n+1)$ …… ㉠

$(n+1)(n-3)(n^2+2n+9)$는 $(n+1)(n-3)$의 배수이므로 ㉠이 $(n+1)(n-3)$의 배수가 되려면 $24(n+1)$이 $(n+1)(n-3)$의 배수이어야 한다.

따라서 $24(n+1)=k(n+1)(n-3)$ (단, k는 자연수)이라 하면

$24=k(n-3)$

이때 k가 최소일 때, n이 최댓값을 갖고 자연수 k의 최솟값은 1이므로 그때의 n의 값은

$24=n-3$ $\therefore n=27$

다른 풀이

조립제법을 이용하여 n^4+2n^2-3을 $(n+1)(n-3)$으로 나누면

-1	1	0	2	0	-3
		-1	1	-3	3
3	1	-1	3	-3	0
		3	6	27	
	1	2	9	24	

$\therefore n^4+2n^2-3=(n+1)(n-3)(n^2+2n+9)+24(n+1)$ …… ㉠

$(n+1)(n-3)(n^2+2n+9)$는 $(n+1)(n-3)$의 배수이므로 ㉠이 $(n+1)(n-3)$의 배수가 되려면 $24(n+1)$이 $(n+1)(n-3)$의 배수이어야 한다.

따라서 $24(n+1)=k(n+1)(n-3)$ (단, k는 자연수)이라 하면

$24=k(n-3)$

이때 k가 최소일 때, n이 최댓값을 갖고 자연수 k의 최솟값은 1이므로 그때의 n의 값은

$24=n-3$ $\therefore n=27$

06 답 −58

$\{P(x)+2x\}^2=(x-a)(x+a)(x^2-3)+4$

$=(x^2-a^2)(x^2-3)+4$

$=x^4-(3+a^2)x^2+3a^2+4$

이때 $P(x)$는 최고차항의 계수가 음수인 이차다항식이므로 $P(x)+2x$는 이차항의 계수가 -1인 이차다항식이고 일차항이 없어야 한다.

$P(x)+2x=-x^2+k$ (단, k는 상수)라 하면

$(-x^2+k)^2=x^4-2kx^2+k^2$

즉, $x^4-2kx^2+k^2=x^4-(3+a^2)x^2+3a^2+4$에서 이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$-2k=-3-a^2$ …… ㉠

$k^2=3a^2+4$ …… ㉡

㉠에서 $a^2=2k-3$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$k^2=3(2k-3)+4$

$k^2-6k+5=0$

$(k-1)(k-5)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=5$

이때 $k=1$이면 ㉢에서 $a^2=-1<0$이므로 $k=5$

이를 ㉢에 대입하면 $a^2=7$

이때 $P(x)+2x=-x^2+5$, 즉 $P(x)=-x^2-2x+5$이므로

$P(a^2)=P(7)=-49-14+5=-58$

다른 풀이

$P(x)+2x$가 이차다항식이므로 $(x-a)(x+a)(x^2-3)+4$는 이차다항식의 완전제곱식이어야 한다.

$(x-a)(x+a)(x^2-3)+4$

$=(x^2-a^2)(x^2-3)+4$

$=x^4-(3+a^2)x^2+3a^2+4$

$=x^4-(3+a^2)x^2+\dfrac{(3+a^2)^2}{4}-\dfrac{(3+a^2)^2}{4}+3a^2+4$

$=\left\{x^4-(3+a^2)x^2+\dfrac{(3+a^2)^2}{4}\right\}-\dfrac{(3+a^2)^2-4(3a^2+4)}{4}$

$=\left(x^2-\dfrac{3+a^2}{2}\right)^2-\dfrac{a^4-6a^2-7}{4}$

이때 $\frac{a^4-6a^2-7}{4}=0$이어야 하므로

$a^4-6a^2-7=0$, $(a^2+1)(a^2-7)=0$

$\therefore\ a^2=7\ (\because\ a^2\geq 0)$

$\{P(x)+2x\}^2=(x^2-5)^2$에서 $|P(x)+2x|=|x^2-5|$

$P(x)=x^2-2x-5$ 또는 $P(x)=-x^2-2x+5$

이때 최고차항의 계수가 음수이므로

$P(x)=-x^2-2x+5$

$\therefore\ P(a^2)=P(7)=-49-14+5=-58$

07 답 139

$P(x)$가 일차식 $x-a$를 인수로 가지므로 $P(a)=0$

$a^4-260a^2+b=0$

$\therefore\ b=a^2(260-a^2)$ ····· ㉠

이때 b가 자연수이므로

$260-a^2>0\ (\because\ a^2>0)$

따라서 $260-a^2>0$을 만족시키는 a의 값이 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, …, 16이다.

조립제법을 이용하여 x^4-260x^2+b를 $x-a$로 나누면

a	1	0	-260	0	b
		a	a^2	a^3-260a	a^4-260a^2
	1	a	a^2-260	a^3-260a	$b+a^4-260a^2$

$\therefore\ P(x)=(x-a)\{x^3+ax^2+(a^2-260)x+a^3-260a\}$

$P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$Q(x)=x^3+ax^2+(a^2-260)x+a^3-260a$

이때 $Q(-a)=-a^3+a^3-a^3+260a+a^3-260a=0$이므로 $Q(x)$는 $x+a$를 인수로 갖는다.

조립제법을 이용하여 $x^3+ax^2+(a^2-260)x+a^3-260a$를 $x+a$로 나누면

$-a$	1	a	a^2-260	a^3-260a
		$-a$	0	$-a^3+260a$
	1	0	a^2-260	0

$\therefore\ P(x)=(x-a)(x+a)(x^2+a^2-260)$ ····· ㉡

주어진 조건을 만족시키려면 ㉡에서 이차식 x^2+a^2-260은 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해되지 않아야 한다.

이때 $x^2+a^2-260=x^2-(260-a^2)$이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우는 $260-a^2$이 제곱수인 경우이다.

즉, $260=2^2+16^2=8^2+14^2$이므로 $260-a^2$이 제곱수가 되는 자연수 a의 값은 2, 8, 14, 16이다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a의 개수는 $16-4=12$이고, 자연수 a의 개수만큼 $P(x)$가 만들어지므로 모든 $P(x)$의 개수는 12이다.

$\therefore\ p=12$

한편 ㉠에서 $b=a^2(260-a^2)=-(a^2-130)^2+130^2$

이때 a가 자연수이므로 b는 $a=11$일 때, 최댓값 $11^2\times(260-11^2)$을 갖는다.

$\therefore\ q=11^2\times(260-11^2)$

$\therefore\ \frac{q}{(p-1)^2}=\frac{11^2\times(260-11^2)}{(12-1)^2}=139$

08 답 160

정사각뿔 O−ABCD의 부피는

$\frac{1}{3}\times a^2\times\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$

정사각뿔 O−EFGH의 모든 모서리의 길이가 b이므로 그 부피는

$\frac{1}{3}\times b^2\times\sqrt{b^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{6}b^3$

두 정사각뿔 O−ABCD, O−EFGH의 부피의 합이 $4\sqrt{2}$이므로

$\frac{\sqrt{2}}{6}(a^3+b^3)=4\sqrt{2}$

$\therefore\ a^3+b^3=24$

점 F에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼각형 BFI는 $\angle FBI=60^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{FI}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{FB}=\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)$

$\overline{BI}=\frac{1}{2}\overline{FB}=\frac{1}{2}(a-b)$에서

$\overline{AI}=a-\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}(a+b)$

삼각형 FAI는 직각삼각형이므로

$\overline{AF}^2=\overline{FI}^2+\overline{AI}^2$

$=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)\right\}^2+\left\{\frac{1}{2}(a+b)\right\}^2$

$=\frac{3}{4}(a^2-2ab+b^2)+\frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2)$

$=a^2-ab+b^2=6$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)\times 6=24$

이므로 $a+b=4$

$a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab=4^2-3ab=6$

이므로 $ab=\frac{10}{3}$

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=4^2-4\times\frac{10}{3}=\frac{8}{3}$

이므로 $a-b=\frac{2\sqrt{6}}{3}\ (\because\ a-b>0)$

사각형 ABFE의 넓이는 정삼각형 OAB의 넓이에서 정삼각형 OEF의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2-b^2)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(a+b)(a-b)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4\times\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$=2\sqrt{2}$

$\therefore\ 20\times S^2=20\times 8=160$

03 복소수

STEP 1 핵심 문제 | 42~43쪽

01 ② 02 ④ 03 ② 04 $7-2i$ 05 15
06 ① 07 ㄱ, ㄷ 08 ⑤ 09 100 10 ②
11 ③ 12 8

01 답 ②

z^2이 실수가 되려면 $m-n=0$ 또는 $m+n-4=0$이어야 한다.
즉, $m=n$ 또는 $m+n=4$
(i) $m=n$일 때,
5 이하의 두 자연수 m, n의 모든 순서쌍은
$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$
(ii) $m+n=4$일 때,
5 이하의 두 자연수 m, n의 모든 순서쌍은
$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$
(i), (ii)에서 $(2, 2)$는 중복되므로 z^2이 실수가 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는 7이다.

02 답 ④

$f(x)=ax^2+bx+c$(a, b, c는 실수, $a\neq0$)라 하면
$f(0)=1$에서 $c=1$ $\therefore f(x)=ax^2+bx+1$
$f(1+i)=4-i$에서 $a(1+i)^2+b(1+i)+1=4-i$
$2ai+b+bi+1=4-i$, $(b+1)+(2a+b)i=4-i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$b+1=4$, $2a+b=-1$ $\therefore a=-2$, $b=3$
따라서 $f(x)=-2x^2+3x+1$이므로
$f(1+2i)=-2(1+2i)^2+3(1+2i)+1$
$=-2(-3+4i)+3+6i+1$
$=6-8i+3+6i+1=10-2i$

03 답 ②

$\alpha=\frac{1+i}{2i}$, $\beta=\frac{1-i}{2i}$에서
$\alpha+\beta=\frac{1+i}{2i}+\frac{1-i}{2i}=\frac{2}{2i}=\frac{1}{i}=-i$
$\alpha\beta=\frac{1+i}{2i}\times\frac{1-i}{2i}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$
$\therefore (2\alpha^2+3)(2\beta^2+3)=4\alpha^2\beta^2+6(\alpha^2+\beta^2)+9$
$=4(\alpha\beta)^2+6\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+9$
$=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+6\left\{(-i)^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}+9$
$=1+6(-1+1)+9=10$

다른 풀이

$\alpha=\frac{1+i}{2i}$, $\beta=\frac{1-i}{2i}$에서
$(2\alpha^2+3)(2\beta^2+3)=\left\{2\times\left(\frac{1+i}{2i}\right)^2+3\right\}\left\{2\times\left(\frac{1-i}{2i}\right)^2+3\right\}$
$=\left\{2\times\left(-\frac{1}{2}i\right)+3\right\}\left\{2\times\left(\frac{1}{2}i\right)+3\right\}$
$=(-i+3)(i+3)=1+9=10$

04 답 $7-2i$

$x=\frac{4-i}{1+i}+\frac{2+i}{1-i}=\frac{(4-i)(1-i)+(2+i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}$
$=\frac{(3-5i)+(1+3i)}{2}=2-i$ ····· 배점 30%
이때 $x-2=-i$이므로 양변을 제곱하면
$x^2-4x+4=-1$ $\therefore x^2-4x+5=0$ ····· 배점 30%
$\therefore x^5-4x^4+6x^3-4x^2+7x+3$
$=x^3(x^2-4x+5)+x(x^2-4x+5)+2x+3$
$=2x+3=2(2-i)+3$
$=7-2i$ ····· 배점 40%

05 답 15

㈎에서 $\overline{z_1}=\frac{z_1^2}{4i}$이므로 $4i\overline{z_1}=z_1^2$
$4i(a-2i)=(a+2i)^2$, $8+4ai=(a^2-4)+4ai$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$8=a^2-4$ $\therefore a^2=12$
㈏에서 $z_1\overline{z_2}=(a+2i)(3-bi)=(3a+2b)+(6-ab)i$가 실수이므로
$6-ab=0$ $\therefore ab=6$
이 식의 양변을 제곱하면 $a^2b^2=36$ ····· ㉠
$a^2=12$를 ㉠에 대입하면 $12b^2=36$ $\therefore b^2=3$
$\therefore a^2+b^2=12+3=15$

06 답 ①

복소수 z를 $z=a+bi$(a, b는 실수)라 하자.
㈎에서 $\overline{z}=-z$이므로 $a-bi=-a-bi$
즉, $a=0$이므로 $z=bi$
㈏에서 $-b^2+(k^2-3k-4)bi+(k^2+2k-8)=0$
즉, $(k^2+2k-8-b^2)+(k^2-3k-4)bi=0$이므로
$k^2+2k-8-b^2=0$ ····· ㉠, $(k^2-3k-4)b=0$ ····· ㉡
㉡에서 $b=0$ 또는 $k^2-3k-4=0$
(i) $b=0$일 때, ㉠에서 $k^2+2k-8=0$이므로 $k=-4$ 또는 $k=2$
(ii) $k^2-3k-4=0$, 즉 $k=-1$ 또는 $k=4$일 때,
$k=-1$이면 ㉠에서 $-9-b^2=0$이므로 이를 만족시키는 실수 b는 존재하지 않는다.
$k=4$이면 ㉠에서 $16-b^2=0$이므로 $b=-4$ 또는 $b=4$
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 k는 -4 또는 2 또는 4이므로 모든 실수 k의 값의 곱은 $-4\times2\times4=-32$

07 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $\overline{z_1}=z_2$이면 $z_1z_2=z_1\overline{z_1}$
이때 $z_1\overline{z_1}$는 항상 실수이므로 z_1z_2는 실수이다.
ㄴ. $z_1=1$, $z_2=i$이면 $z_1^2+z_2^2=1+(-1)=0$이지만 $z_1\neq0$, $z_2\neq0$이다.
ㄷ. $\overline{z_1}z_2=1$에서 $\frac{1}{z_1}=z_2$이므로 $z_1+\frac{1}{z_1}=z_1+z_2$ ····· ㉠
또 $\overline{z_1}z_2=1$에서 $\frac{1}{z_2}=\overline{z_1}$이므로 $\frac{1}{z_2}=z_1$
$\therefore z_2+\frac{1}{z_2}=z_2+z_1$ ····· ㉡
㉠, ㉡에서 $z_1+\frac{1}{z_1}=z_2+\frac{1}{z_2}$
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

08 답 ⑤

$\alpha=3+\sqrt{2}i$, $\beta=1+2\sqrt{2}i$에서

$\alpha+\beta=(3+\sqrt{2}i)+(1+2\sqrt{2}i)=4+3\sqrt{2}i$이므로

$\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\overline{\alpha}(\alpha+\beta)+\overline{\beta}(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

$=(4+3\sqrt{2}i)(4-3\sqrt{2}i)$

$=16+18$

$=34$

$\alpha-\beta=(3+\sqrt{2}i)-(1+2\sqrt{2}i)=2-\sqrt{2}i$이므로

$\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\overline{\alpha}(\alpha-\beta)-\overline{\beta}(\alpha-\beta)$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$

$=(2-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i)$

$=4+2$

$=6$

$\therefore \dfrac{\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}}{\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}}=\dfrac{34}{6}=\dfrac{17}{3}$

09 답 100

$\dfrac{1}{i}-\dfrac{2}{i^2}+\dfrac{3}{i^3}-\dfrac{4}{i^4}+\cdots+\dfrac{99}{i^{99}}-\dfrac{100}{i^{100}}$

$=\dfrac{1}{i}-\dfrac{2}{-1}+\dfrac{3}{-i}-\dfrac{4}{1}+\cdots+\dfrac{99}{-i}-\dfrac{100}{1}$

$=-i+2+3i-4-5i+6+7i-8-9i+\cdots+99i-100$

$=(-i+2+3i-4)+(-5i+6+7i-8)$

$+\cdots+(-97i+98+99i-100)$

$=(-2+2i)+(-2+2i)+\cdots+(-2+2i)$

$=(-2+2i)\times25$

$=-50+50i$

따라서 $a=-50$, $b=50$이므로

$b-a=100$

10 답 ②

$x=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}i}$라 하면

$x^2=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}i}\right)^2=\dfrac{2i}{-2}=-i$

$x^4=(x^2)^2=(-i)^2=-1$

$x^8=(x^4)^2=(-1)^2=1$

$y=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}i}$라 하면

$y^2=\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}i}\right)^2=\dfrac{-2i}{-2}=i$

$y^4=(y^2)^2=i^2=-1$

$y^8=(y^4)^2=(-1)^2=1$

$\therefore \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}i}\right)^{2022}-\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}i}\right)^{2024}\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}i}\right)^{2026}+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}i}\right)^{2028}$

$=x^{2022}-x^{2024}y^{2026}+y^{2028}$

$=(x^8)^{252}x^6-(x^8)^{253}(y^8)^{253}y^2+(y^8)^{253}y^4$

$=x^6-y^2+y^4$

$=x^4x^2-y^2+y^4$

$=-1\times(-i)-i+(-1)$

$=-1$

11 답 ③

$a>0$, $b<0$이고, $b=-B$로 놓으면 $B>0$이므로

$\sqrt{-a^2}\sqrt{-\dfrac{1}{b^2}}+\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

$=\sqrt{-a^2}\sqrt{-\dfrac{1}{B^2}}+\left(\sqrt{-\dfrac{a}{B}}\right)^2+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-B}}\sqrt{-\dfrac{a}{B}}$

$=\sqrt{a^2}i\times\sqrt{\dfrac{1}{B^2}}i+\left(\sqrt{\dfrac{a}{B}}i\right)^2+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{B}i}\times\sqrt{\dfrac{a}{B}}i$

$=-\dfrac{a}{B}-\dfrac{a}{B}+\dfrac{a}{B}$

$=-\dfrac{a}{B}=\dfrac{a}{b}$

12 답 8

$\sqrt{-(m+1)}\sqrt{m-3}=-\sqrt{-(m+1)(m-3)}$에서

$-(m+1)\le0$, $m-3\le0$이므로

$-1\le m\le3$

즉, $-3\le m-2\le1$이므로 정수 m에 대하여 $|m-2|$의 최댓값은 3이다.

$\dfrac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n-2}}=-\sqrt{\dfrac{n+3}{n-2}}$에서 $n+3\ge0$, $n-2<0$이므로

$-3\le n<2$

즉, $1\le n+4<6$이므로 정수 n에 대하여 $|n+4|$의 최댓값은 5이다.

따라서 $|m-2|+|n+4|$의 최댓값은

$3+5=8$

STEP 2 고난도 문제 | 44~47쪽

01 ①	02 2	03 ④	04 24	05 ⑤	06 ③
07 ①	08 ④	09 ⑤	10 ④	11 ㄴ	12 ㄴ, ㄷ
13 $\frac{1}{2}$	14 ㄴ	15 ③	16 85		
17 최솟값: 11, 최댓값: 99		18 ④	19 ③	20 27	
21 3	22 ⑤	23 12	24 ③		

01 답 ①

ㄱ. $(\alpha\beta)^2=\alpha^2\beta^2=2i\times(-2i)=4$이므로

$\alpha\beta=2$ 또는 $\alpha\beta=-2$ ····· ㉠

ㄴ. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=2i+2\alpha\beta-2i=2\alpha\beta$이므로

$(\alpha+\beta)^4=\{(\alpha+\beta)^2\}^2=(2\alpha\beta)^2=4\alpha^2\beta^2$

$=4\times2i\times(-2i)=16$

ㄷ. $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}=\dfrac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$

$=\dfrac{2i-2\alpha\beta-2i}{2i-(-2i)}=-\dfrac{\alpha\beta}{2i}=\dfrac{\alpha\beta}{2}i$

㉠에서 $\alpha\beta$는 실수이므로 $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$는 순허수이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

다른 풀이

ㄷ. $\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2=\dfrac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}=\dfrac{2i-2\alpha\beta-2i}{2i+2\alpha\beta-2i}=\dfrac{-2\alpha\beta}{2\alpha\beta}=-1$

즉, $\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2$이 음의 실수이므로 $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$는 순허수이다.

02 답 2

$z_1^2+z_2^2=-3+6i$에서

$(z_1-z_2)^2+2z_1z_2=-3+6i$, $(-i)^2+2z_1z_2=-3+6i$

$-1+2z_1z_2=-3+6i$ $\therefore z_1z_2=-1+3i$ ····· 배점 20%

$\therefore (z_1+z_2)^2=z_1^2+z_2^2+2z_1z_2$

$=(-3+6i)+2(-1+3i)=-5+12i$ ····· 배점 20%

$z_1^3+z_2^3=-13$에서

$(z_1+z_2)^3-3z_1z_2(z_1+z_2)=-13$

$(z_1+z_2)^2(z_1+z_2)-3z_1z_2(z_1+z_2)=-13$

$(-5+12i)(z_1+z_2)-3(-1+3i)(z_1+z_2)=-13$

$(-2+3i)(z_1+z_2)=-13$

$\therefore z_1+z_2=\dfrac{-13}{-2+3i}=\dfrac{-13(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)}=2+3i$ ····· 배점 30%

즉, $z_1-z_2=-i$, $z_1+z_2=2+3i$이므로

$z_1=1+i$, $z_2=1+2i$ ····· 배점 20%

따라서 $\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{1+2i}{1+i}=\dfrac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$이므로

$a=\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a+b=2$ ····· 배점 10%

03 답 ④

$x\neq0$이므로 $(ax^2+bx+b)x^4+2x^3+bx^2+bx+a=0$의 양변을 x^3으로 나누어 정리하면

$ax^3+bx^2+bx+2+\dfrac{b}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{a}{x^3}=0$

$a\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)+b\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2=0$ ····· ㉠

$x+\dfrac{1}{x}=i$에서

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=i^2-2=-3$

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=i^3-3i=-4i$

이를 ㉠에 대입하면

$a\times(-4i)+b\times(-3)+b\times i+2=0$

$(-3b+2)+(-4a+b)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-3b+2=0$, $-4a+b=0$ $\therefore a=\dfrac{1}{6}$, $b=\dfrac{2}{3}$

$\therefore a+b=\dfrac{5}{6}$

idea

04 답 24

$z^3=2-3i$에서 $z^3-2=-3i$이므로 양변을 제곱하면

$z^6-4z^3+4=-9$ $\therefore z^6-4z^3+13=0$

$z\neq0$이므로 이 식의 양변을 각각 z, z^2, z^3으로 나누면

$z^5-4z^2+\dfrac{13}{z}=0$, $z^4-4z+\dfrac{13}{z^2}=0$, $z^3-4+\dfrac{13}{z^3}=0$

$\therefore 2z^5-2z^4+5z^3-8z^2+8z+\dfrac{26}{z}-\dfrac{26}{z^2}+\dfrac{13}{z^3}$

$=2\left(z^5-4z^2+\dfrac{13}{z}\right)-2\left(z^4-4z+\dfrac{13}{z^2}\right)+\left(z^3-4+\dfrac{13}{z^3}\right)+4z^3+4$

$=4z^3+4=4(2-3i)+4=12-12i$

따라서 $a=12$, $b=-12$이므로 $a-b=24$

05 답 ⑤

$z=a+bi$(a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면

$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$

$z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

① $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{z+\bar{z}}{z\bar{z}}=\dfrac{2a}{a^2+b^2}$ ➡ 실수

② $z^2+z+\bar{z}^2+\bar{z}+1=(z+\bar{z})^2-2z\bar{z}+(z+\bar{z})+1$

$=(2a)^2-2(a^2+b^2)+2a+1$

$=2a^2-2b^2+2a+1$ ➡ 실수

③ $(2z+1)(2\bar{z}+1)=4z\bar{z}+2(z+\bar{z})+1$

$=4(a^2+b^2)+4a+1$ ➡ 실수

④ $(z+\bar{z})(z^2-z\bar{z}+\bar{z}^2)=z^3+\bar{z}^3=(z+\bar{z})^3-3z\bar{z}(z+\bar{z})$

$=(2a)^3-3(a^2+b^2)\times2a$

$=2a^3-6ab^2$ ➡ 실수

⑤ $\dfrac{z}{1-z}-\dfrac{\bar{z}}{1-\bar{z}}=\dfrac{z(1-\bar{z})-\bar{z}(1-z)}{(1-z)(1-\bar{z})}=\dfrac{z-\bar{z}}{1-(z+\bar{z})+z\bar{z}}$

$=\dfrac{2bi}{1-2a+a^2+b^2}$ ➡ 순허수

따라서 실수가 아닌 것은 ⑤이다.

06 답 ③

$z_1=(1-i)\bar{\alpha}$에서 $\bar{z_1}=\overline{(1-i)\bar{\alpha}}=(1+i)\alpha$이므로

$z_2=(1-i)\bar{z_1}=(1-i)(1+i)\alpha=2\alpha$

$z_3=(1-i)\bar{z_2}=(1-i)\times2\bar{\alpha}=2(1-i)\bar{\alpha}$

$z_4=(1-i)\bar{z_3}=(1-i)\times2(1+i)\alpha=2^2\alpha$

$z_5=(1-i)\bar{z_4}=(1-i)\times2^2\bar{\alpha}=2^2(1-i)\bar{\alpha}$

$z_6=(1-i)\bar{z_5}=(1-i)\times2^2(1+i)\alpha=2^3\alpha$

⋮

$\therefore z_{50}=2^{25}\alpha=2^{25}(16-16i)=2^{29}-2^{29}i$

따라서 $a=2^{29}$, $b=-2^{29}$이므로

$a-b=2^{29}+2^{29}=2\times2^{29}=2^{30}$

07 답 ①

㈎에서 $\left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)^2>0$이므로 $\dfrac{\bar{z}}{z}$는 실수이다.

$z=a+bi$(a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면

$\dfrac{\bar{z}}{z}=\dfrac{a-bi}{a+bi}=\dfrac{(a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)}=\dfrac{(a^2-b^2)-2abi}{a^2+b^2}$

이때 $\dfrac{\bar{z}}{z}$가 실수이므로 $ab=0$

그런데 $b\neq0$이므로 $a=0$

$\therefore z=bi$

㈏에서 $\bar{z}+\bar{z}^2+\bar{z}^3=-4+6i$이므로

$-bi+(-bi)^2+(-bi)^3=-4+6i$

$-bi-b^2+b^3i=-4+6i$

$-b^2+(b^3-b)i=-4+6i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$b^2=4$ ····· ㉠, $b^3-b=6$ ····· ㉡

㉡에서 $b(b^2-1)=6$

이 식에 ㉠을 대입하면 $3b=6$ $\therefore b=2$

따라서 $z=2i$, $\bar{z}=-2i$이므로

$z^3-\bar{z}^3=(2i)^3-(-2i)^3=-8i-8i=-16i$

08 답 ④

$z\bar{z}=1$에서 $\bar{z}=\frac{1}{z}$이고, $z+\bar{z}=-1$이므로 $z+\frac{1}{z}=-1$

즉, $z^2+z+1=0$이므로 양변에 $z-1$을 곱하면

$(z-1)(z^2+z+1)=0$, $z^3-1=0$ $\therefore z^3=1$

같은 방법으로 하면 $(\bar{z})^3=1$

$\therefore \frac{\bar{z}}{z^5}+\frac{(\bar{z})^2}{z^4}+\frac{(\bar{z})^3}{z^3}+\frac{(\bar{z})^4}{z^2}+\frac{(\bar{z})^5}{z}$

$=\frac{\bar{z}}{z^2}+\frac{(\bar{z})^2}{z}+\frac{1}{1}+\frac{\bar{z}}{z^2}+\frac{(\bar{z})^2}{z}=\frac{2\bar{z}}{z^2}+\frac{2(\bar{z})^2}{z}+1$

$=\frac{2z\bar{z}}{z^3}+\frac{2z^2(\bar{z})^2}{z^3}+1=2z\bar{z}+2(z\bar{z})^2+1=2+2+1=5$

다른 풀이

$z\bar{z}=1$에서 $\bar{z}=\frac{1}{z}$이고, $z+\bar{z}=-1$이므로 $z+\frac{1}{z}=-1$

즉, $z^2+z+1=0$이므로 양변에 $z-1$을 곱하면

$(z-1)(z^2+z+1)=0$, $z^3-1=0$ $\therefore z^3=1$

따라서 $(\bar{z})^2=\frac{1}{z^2}$, $(\bar{z})^3=\frac{1}{z^3}$, $(\bar{z})^4=\frac{1}{z^4}$, $(\bar{z})^5=\frac{1}{z^5}$이므로

$\frac{\bar{z}}{z^5}+\frac{(\bar{z})^2}{z^4}+\frac{(\bar{z})^3}{z^3}+\frac{(\bar{z})^4}{z^2}+\frac{(\bar{z})^5}{z}=\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^6}$

$=1+1+1+1+1=5$

09 답 ⑤

ㄱ. $z_1\overline{z_1}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=10$ …… ㉠

ㄴ. ㉠에서 $a=1$이면 $b=3$이고, $a=3$이면 $b=1$이다.

$a=2$ 또는 $a\geq 4$이면 ㉠을 만족시키는 자연수 b는 존재하지 않는다.

$z_1+\overline{z_2}=(a+bi)+(c-di)=(a+c)+(b-d)i=3$이므로

$a+c=3$, $b-d=0$

$a+c=3$에서 $a<3$이므로 $a=1$, $c=2$, $b=d=3$ $\therefore c+d=5$

ㄷ. $(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=\{(a+c)+(b+d)i\}\{(a+c)-(b+d)i\}$

$=(a+c)^2+(b+d)^2=41$ …… ㉡

이때 $a+c=4$이면 $b+d=5$이고, $a+c=5$이면 $b+d=4$이다.

$a+c=2$, 3 또는 $a+c\geq 6$이면 ㉡을 만족시키는 자연수 $b+d$는 존재하지 않는다.

(i) $a+c=4$, $b+d=5$일 때, $a^2+b^2=10$이므로

$a=1$이면 $c=3$이고, $b=3$에서 $d=2$이다.

$a=3$이면 $c=1$이고, $b=1$에서 $d=4$이다.

(ii) $a+c=5$, $b+d=4$일 때, $a^2+b^2=10$이므로

$a=1$이면 $c=4$이고, $b=3$에서 $d=1$이다.

$a=3$이면 $c=2$이고, $b=1$에서 $d=3$이다.

(i), (ii)에서 $z_2\overline{z_2}=c^2+d^2$의 값은 13 또는 17이므로 $z_2\overline{z_2}$의 최댓값은 17이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 답 ④

$\alpha^2-\beta=i$에서 $\bar{\alpha}^2-\bar{\beta}=-i$ …… ㉠

$\bar{\beta}^2-\bar{\alpha}=-i$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $(\bar{\alpha}^2-\bar{\beta}^2)+\bar{\alpha}-\bar{\beta}=0$

$(\bar{\alpha}+\bar{\beta})(\bar{\alpha}-\bar{\beta})+\bar{\alpha}-\bar{\beta}=0$, $(\bar{\alpha}-\bar{\beta})(\bar{\alpha}+\bar{\beta}+1)=0$

이때 $\bar{\alpha}\neq\bar{\beta}$이므로 $\bar{\alpha}+\bar{\beta}+1=0$ $\therefore \bar{\alpha}+\bar{\beta}=-1$

㉠+㉡을 하면

$(\bar{\alpha}^2+\bar{\beta}^2)-(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=-2i$, $(\bar{\alpha}+\bar{\beta})^2-2\bar{\alpha}\bar{\beta}-(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=-2i$

$(-1)^2-2\bar{\alpha}\bar{\beta}-(-1)=-2i$ $\therefore \bar{\alpha}\bar{\beta}=1+i$

$\therefore \bar{\alpha}^3+\bar{\beta}^3=(\bar{\alpha}+\bar{\beta})^3-3\bar{\alpha}\bar{\beta}(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$

$=(-1)^3-3(1+i)\times(-1)=2+3i$

따라서 $x=2$, $y=3$이므로 $xy=6$

11 답 ㄴ

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하자.

ㄱ. $f(\bar{z})=f(a-bi)=(a-bi)+(a+bi)-(a-bi)(a+bi)-1$

$=2a-a^2-b^2-1=-(a-1)^2-b^2$ …… ㉠

이때 $(a-1)^2\geq 0$, $b^2\geq 0$이므로 $f(\bar{z})\leq 0$

ㄴ. $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$이므로

$f(z+\bar{z})=f(2a)=2a+2a-(2a)^2-1=-4a^2+4a-1$

$f(z)=z+\bar{z}-z\bar{z}-1$, $f(\bar{z})=\bar{z}+z-\bar{z}z-1$에서

$f(\bar{z})=f(z)$이므로

$f(z)+f(\bar{z})+2=2f(\bar{z})+2=-2(a-1)^2-2b^2+2$ ($\because$ ㉠)

$=-2a^2+4a-2b^2$

$f(z+\bar{z})=f(z)+f(\bar{z})+2$에서

$-4a^2+4a-1=-2a^2+4a-2b^2$ $\therefore 2b^2=2a^2+1$

이때 $2a^2\geq 0$에서 $2b^2\geq 1$이므로 $b\neq 0$

따라서 $z=a+bi$는 허수이다.

ㄷ. $z=1$이면 $\bar{z}=1$이므로

$f(z\bar{z})=f(1)=1+1-1-1=0$

$f(z)=f(1)=0$, $f(\bar{z})=f(1)=0$

즉, $f(z\bar{z})=-f(z)f(\bar{z})$이지만 z는 실수이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

12 답 ㄴ, ㄷ

$z=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$라 하면

$z+\bar{z}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}+\frac{\sqrt{3}-i}{2}=\sqrt{3}$, $z\bar{z}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}\times\frac{\sqrt{3}-i}{2}=\frac{4}{4}=1$

ㄱ. $\alpha_3=z^3$, $\overline{\alpha_3}=\bar{z}^3$이므로

$\alpha_3+\overline{\alpha_3}=z^3+\bar{z}^3=(z+\bar{z})^3-3z\bar{z}(z+\bar{z})$

$=(\sqrt{3})^3-3\times 1\times\sqrt{3}=0$ …… ㉠

ㄴ. ㉠에서 $z^3+\bar{z}^3=0$이므로 $z^3=-\bar{z}^3$

이때 $z\bar{z}=1$에서 $\bar{z}=\frac{1}{z}$이므로

$z^3=-\frac{1}{z^3}$, $z^6=-1$ $\therefore \bar{z}^6=-1$ …… ㉡

$\therefore 1+\overline{\alpha_2}+\overline{\alpha_4}+\overline{\alpha_6}+\overline{\alpha_8}+\overline{\alpha_{10}}=1+\bar{z}^2+\bar{z}^4+\bar{z}^6+\bar{z}^8+\bar{z}^{10}$

$=1+\bar{z}^2+\bar{z}^4+\bar{z}^6(1+\bar{z}^2+\bar{z}^4)$

$=1+\bar{z}^2+\bar{z}^4-(1+\bar{z}^2+\bar{z}^4)=0$

ㄷ. $\frac{1}{\alpha_2-2}-\frac{1}{\overline{\alpha_8}+2}=\frac{1}{z^2-2}-\frac{1}{\bar{z}^8+2}$

$=\frac{1}{z^2-2}-\frac{1}{-\bar{z}^2+2}$ ($\because$ ㉡)

$=\frac{1}{z^2-2}+\frac{1}{\bar{z}^2-2}=\frac{(\bar{z}^2-2)+(z^2-2)}{(z^2-2)(\bar{z}^2-2)}$

$=\frac{z^2+\bar{z}^2-4}{(z\bar{z})^2-2(z^2+\bar{z}^2)+4}$

$=\frac{(z+\bar{z})^2-2z\bar{z}-4}{(z\bar{z})^2-2\{(z+\bar{z})^2-2z\bar{z}\}+4}$

$=\frac{(\sqrt{3})^2-2\times 1-4}{1^2-2\{(\sqrt{3})^2-2\times 1\}+4}=\frac{-3}{3}=-1$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

13 답 $\frac{1}{2}$

$z_1z_2=\frac{i}{1+i}\times\frac{i^2}{1+i}=\frac{i^3}{(1+i)^2}=\frac{-i}{2i}=-\frac{1}{2}$

$z_2z_3=\frac{i^2}{1+i}\times\frac{i^3}{1+i}=\frac{i^5}{(1+i)^2}=\frac{i}{2i}=\frac{1}{2}$

$z_3z_4=\frac{i^3}{1+i}\times\frac{i^4}{1+i}=\frac{i^7}{(1+i)^2}=\frac{-i}{2i}=-\frac{1}{2}$

$z_4z_5=\frac{i^4}{1+i}\times\frac{i^5}{1+i}=\frac{i^9}{(1+i)^2}=\frac{i}{2i}=\frac{1}{2}$

$\vdots$

$z_{49}z_{50}=\frac{i^{49}}{1+i}\times\frac{i^{50}}{1+i}=\frac{i^{99}}{(1+i)^2}=\frac{-i}{2i}=-\frac{1}{2}$

$\therefore z_1z_2i^2+z_2z_3i^3+z_3z_4i^4+\cdots+z_{49}z_{50}i^{50}$

$=-\frac{1}{2}i^2+\frac{1}{2}i^3-\frac{1}{2}i^4+\frac{1}{2}i^5-\cdots-\frac{1}{2}i^{50}$

$=-\frac{1}{2}(i^2-i^3+i^4-i^5+\cdots+i^{50})$

$=-\frac{1}{2}\{(i^2-i^3+i^4-i^5)+i^4(i^2-i^3+i^4-i^5)$

$+\cdots+i^{44}(i^2-i^3+i^4-i^5)+i^{48}\times i^2\}$

$=-\frac{1}{2}\{(-1+i+1-i)+(-1+i+1-i)$

$+\cdots+(-1+i+1-i)+(-1)\}$

$=-\frac{1}{2}\times(-1)$

$=\frac{1}{2}$

14 답 ㄴ

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

이므로

$z_n=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n=i^n+(-i)^n$

음이 아닌 정수 k에 대하여

$z_{4k+1}=i^{4k+1}+(-i)^{4k+1}=i+(-i)=0$

$z_{4k+2}=i^{4k+2}+(-i)^{4k+2}=i^2+(-i)^2=-2$

$z_{4k+3}=i^{4k+3}+(-i)^{4k+3}=i^3+(-i)^3=0$

$z_{4k+4}=i^{4k+4}+(-i)^{4k+4}=i^4+(-i)^4=2$

ㄱ. $n=1$일 때, $z_1=0$, $z_4=2$

$\therefore z_{4n}\neq z_n$

ㄴ. $z_1-z_2+z_3-z_4=0+2+0-2=0$이므로

$z_1-z_2+z_3-z_4+z_5-z_6+\cdots+z_{99}-z_{100}$

$=(z_1-z_2+z_3-z_4)+(z_5-z_6+z_7-z_8)+\cdots+(z_{97}-z_{98}+z_{99}-z_{100})$

$=(z_1-z_2+z_3-z_4)+(z_1-z_2+z_3-z_4)+\cdots+(z_1-z_2+z_3-z_4)$

$=0$

ㄷ. $z_1+2z_2+3z_3+4z_4+5z_5+\cdots+14z_{14}$

$=(z_1+2z_2+3z_3+4z_4)+(5z_5+6z_6+7z_7+8z_8)$

$+(9z_9+10z_{10}+11z_{11}+12z_{12})+13z_{13}+14z_{14}$

$=(z_1+2z_2+3z_3+4z_4)+(5z_1+6z_2+7z_3+8z_4)$

$+(9z_1+10z_2+11z_3+12z_4)+13z_1+14z_2$

$=(0-4+0+8)+(0-12+0+16)+(0-20+0+24)+0-28$

$=4\times3-28=-16$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

다른 풀이

ㄷ. $z_1+2z_2+3z_3+4z_4+5z_5+\cdots+14z_{14}$

$=2z_2+4z_4+6z_6+8z_8+10z_{10}+12z_{12}+14z_{14}$

$=2z_2+4z_4+6z_2+8z_4+10z_2+12z_4+14z_2$

$=\{2(z_2+z_4)+2z_4\}+\{6(z_2+z_4)+2z_4\}+\{10(z_2+z_4)+2z_4\}+14z_2$

$=6z_4+14z_2=6\times2+14\times(-2)=-16$

15 답 ③

$\alpha=1-i$에서

$\alpha^2=(1-i)^2=-2i$, $\alpha^3=\alpha^2\alpha=-2i(1-i)=-2-2i$

$\alpha^4=(\alpha^2)^2=(-2i)^2=-4$, $\alpha^8=(\alpha^4)^2=(-4)^2=16$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$

$=-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4-\cdots+\alpha^{10}$

$=(-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4)+\alpha^4(-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4)+\alpha^8(-\alpha+\alpha^2)$

이때 $-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4=-(1-i)-2i-(-2-2i)-4=-3+i$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$

$=(-3+i)-4(-3+i)+16(-1+i-2i)$

$=-3+i+12-4i-16-16i=-7-19i$

한편 $a\alpha+b=a(1-i)+b=a+b-ai$이므로

$-7-19i=a+b-ai$에서 $-7=a+b$, $-19=-a$

따라서 $a=19$, $b=-26$이므로 $a-b=45$

다른 풀이

$\alpha=1-i$에서 $\alpha-1=-i$

양변을 제곱하면 $\alpha^2-2\alpha+1=-1$ $\therefore \alpha^2=2\alpha-2$

$\alpha^3=\alpha^2\alpha=(2\alpha-2)\alpha=2\alpha^2-2\alpha=2(2\alpha-2)-2\alpha=2\alpha-4$

$\alpha^4=\alpha^3\alpha=(2\alpha-4)\alpha=2\alpha^2-4\alpha=2(2\alpha-2)-4\alpha=-4$

$\alpha^8=(\alpha^4)^2=(-4)^2=16$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$

$=-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4-\cdots+\alpha^{10}$

$=-(\alpha+\alpha^5+\alpha^9)+(\alpha^2+\alpha^6+\alpha^{10})-(\alpha^3+\alpha^7)+(\alpha^4+\alpha^8)$

$=-(\alpha-4\alpha+16\alpha)+(\alpha^2-4\alpha^2+16\alpha^2)-(\alpha^3-4\alpha^3)+(-4+16)$

$=-13\alpha+13\alpha^2+3\alpha^3+12$

$=-13\alpha+13(2\alpha-2)+3(2\alpha-4)+12$

$=19\alpha-26$

따라서 $a=19$, $b=-26$이므로 $a-b=45$

16 답 85

$\frac{\bar{z}}{z}=\frac{a+\sqrt{2}i}{a-\sqrt{2}i}=\frac{(a+\sqrt{2}i)^2}{(a-\sqrt{2}i)(a+\sqrt{2}i)}=\frac{a^2-2+2\sqrt{2}ai}{a^2+2}$

$\frac{\bar{z}}{z}$가 실수이므로 $2\sqrt{2}a=0$ $\therefore a=0$ ····· 배점 20%

즉, $z=-\sqrt{2}i$이므로

$z^2=(-\sqrt{2}i)^2=-2$, $z^3=z^2z=-2\times(-\sqrt{2}i)=2\sqrt{2}i$

$z^4=(z^2)^2=(-2)^2=4$ ····· 배점 30%

이때 $z+z^2+z^3+z^4=-\sqrt{2}i-2+2\sqrt{2}i+4=2+\sqrt{2}i$이므로

$z+z^2+z^3+z^4+\cdots+z^{16}$

$=(z+z^2+z^3+z^4)+z^4(z+z^2+z^3+z^4)+z^8(z+z^2+z^3+z^4)$

$+z^{12}(z+z^2+z^3+z^4)$

$=(2+\sqrt{2}i)+4(2+\sqrt{2}i)+4^2(2+\sqrt{2}i)+4^3(2+\sqrt{2}i)$

$=(1+4+16+64)(2+\sqrt{2}i)=85(2+\sqrt{2}i)$

$=170+85\sqrt{2}i$ ····· 배점 40%

따라서 $p=170$, $q=85$이므로 $p-q=85$ ····· 배점 10%

17 답 최솟값: 11, 최댓값: 99

$i-i^2+i^3-i^4=i+1-i-1=0$

음이 아닌 정수 k에 대하여

(i) $n=4k+1$일 때,

$f(n)=f(4k+1)$

$=i-i^2+i^3-i^4+i^5-\cdots+i^{4k+1}$

$=(i-i^2+i^3-i^4)+i^4(i-i^2+i^3-i^4)+\cdots+i^{4k}\times i=i$

(ii) $n=4k+2$일 때,

$f(n)=f(4k+2)$

$=i-i^2+i^3-i^4+i^5-\cdots+i^{4k+1}-i^{4k+2}$

$=(i-i^2+i^3-i^4)+i^4(i-i^2+i^3-i^4)+\cdots+i^{4k}(i-i^2)$

$=i+1$

(iii) $n=4k+3$일 때,

$f(n)=f(4k+3)$

$=i-i^2+i^3-i^4+i^5-\cdots+i^{4k+1}-i^{4k+2}+i^{4k+3}$

$=(i-i^2+i^3-i^4)+i^4(i-i^2+i^3-i^4)+\cdots+i^{4k}(i-i^2+i^3)$

$=1$

(iv) $n=4k+4$일 때,

$f(n)=f(4k+4)$

$=i-i^2+i^3-i^4+i^5-\cdots+i^{4k+1}-i^{4k+2}+i^{4k+3}-i^{4k+4}$

$=(i-i^2+i^3-i^4)+i^4(i-i^2+i^3-i^4)+\cdots+i^{4k}(i-i^2+i^3-i^4)$

$=0$

즉, $n=4k+1$일 때, $n^2+1=(4k+1)^2+1=4(4k^2+2k)+2$이므로

$f(n^2+1)=i+1$

$n=4k+2$일 때, $n^2+1=(4k+2)^2+1=4(4k^2+4k+1)+1$이므로

$f(n^2+1)=i$

$n=4k+3$일 때, $n^2+1=(4k+3)^2+1=4(4k^2+6k+2)+2$이므로

$f(n^2+1)=i+1$

$n=4k+4$일 때, $n^2+1=(4k+4)^2+1=4(2k+2)^2+1$이므로

$f(n^2+1)=i$

이때 $f(n^2+1)=i+1$을 만족시키기 위해서는 $n=4k+1$ 또는 $n=4k+3$이어야 한다.

따라서 두 자리의 자연수 n의 최솟값은 $4\times2+3=11$, 최댓값은 $4\times24+3=99$이다.

18 답 ④

$i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$, $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=-i-1+i+1=0$

음이 아닌 정수 m에 대하여

(i) $n=4m+1$일 때,

$i+i^2+i^3+\cdots+i^{4m+1}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots$

$+i^{4(m-1)}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{4m}\times i$

$=i$

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{4m+1}}$

$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\cdots$

$+\frac{1}{i^{4(m-1)}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^{4m}}\times\frac{1}{i}$

$=\frac{1}{i}=-i$

$\therefore f(n)=f(4m+1)=(4m+1)\times i\times(-i)=4m+1$

(ii) $n=4m+2$일 때,

$i+i^2+i^3+\cdots+i^{4m+2}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots$

$+i^{4(m-1)}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{4m}(i+i^2)$

$=i-1$

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{4m+2}}$

$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\cdots$

$+\frac{1}{i^{4(m-1)}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^{4m}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}\right)$

$=-i-1$

$\therefore f(n)=f(4m+2)=(4m+2)(i-1)(-i-1)=2(4m+2)$

(iii) $n=4m+3$일 때,

$i+i^2+i^3+\cdots+i^{4m+3}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots$

$+i^{4(m-1)}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{4m}(i+i^2+i^3)$

$=i-1-i=-1$

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{4m+3}}$

$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\cdots$

$+\frac{1}{i^{4(m-1)}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^{4m}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}\right)$

$=-i-1+i=-1$

$\therefore f(n)=f(4m+3)=(4m+3)\times(-1)\times(-1)=4m+3$

(iv) $n=4m+4$일 때,

$i+i^2+i^3+\cdots+i^{4m+4}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+i^{4m}(i+i^2+i^3+i^4)$

$=0$

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{4m+4}}$

$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\cdots$

$+\frac{1}{i^{4m}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)$

$=0$

$\therefore f(n)=f(4m+4)=(4m+4)\times0\times0=0$

이때 $f(k)+f(k+1)=233$에서

$k=4m+1$이면 (i), (ii)에 의하여

$(4m+1)+2(4m+2)=233$, $12m=228$

$\therefore m=19$

$\therefore k=4m+1=4\times19+1=77$

$k=4m+2$이면 (ii), (iii)에 의하여

$2(4m+2)+(4m+3)=233$, $12m=226$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 m은 존재하지 않는다.

$k=4m+3$이면 (iii), (iv)에 의하여

$(4m+3)+0=233$, $4m=230$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 m은 존재하지 않는다.

$k=4m+4$이면 (iv), (i)에 의하여

$0+(4m+5)=233$, $4m=228$

$\therefore m=57$ ← $f(k+1)=f(4m+5)=f(4(m+1)+1)=4(m+1)+1=4m+5$

$\therefore k=4m+4=4\times57+4=232$

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$77+232=309$

19 답 ③

ㄱ. $z^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z^3=z^2z=\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)=1$ …… ㉠

ㄴ. ㉠에서 $z^3=1$이므로

$z^4+z^5=z+z^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-1$

ㄷ. ㉠에서 $z^3=1$이므로 음이 아닌 정수 k에 대하여

$z^{3k+1}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $z^{3k+2}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $z^{3k+3}=1$

(i) $n=3k+1$일 때,

$z^n=z^{3k+1}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $z^{2n}=z^{3(2k)+2}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z^{3n}=z^{3(3k)+3}=1$, $z^{4n}=z^{3(4k+1)+1}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$z^{5n}=z^{3(5k+1)+2}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}$

$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}+1+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$=-1$

즉, $z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=-1$을 만족시키는 100 이하의 모든 자연수 n은 1, 4, 7, …, 100의 34개이다.

(ii) $n=3k+2$일 때,

$z^n=z^{3k+2}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $z^{2n}=z^{3(2k+1)+1}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$z^{3n}=z^{3(3k+1)+3}=1$, $z^{4n}=z^{3(4k+2)+2}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z^{5n}=z^{3(5k+3)+1}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}$

$=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+1+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$=-1$

즉, $z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=-1$을 만족시키는 100 이하의 모든 자연수 n은 2, 5, 8, …, 98의 33개이다.

(iii) $n=3k+3$일 때,

$z^n=z^{3k+3}=1$, $z^{2n}=z^{3(2k+1)+3}=1$

$z^{3n}=z^{3(3k+2)+3}=1$, $z^{4n}=z^{3(4k+3)+3}=1$

$z^{5n}=z^{3(5k+4)+3}=1$

$\therefore z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=1+1+1+1+1=5$

즉, $z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=-1$을 만족시키는 100 이하의 자연수는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 모든 자연수 n의 개수는 $34+33=67$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

다른 풀이

ㄱ. $z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2z+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $4z^2+4z+1=-3$

$\therefore z^2+z+1=0$ …… ㉠

양변에 $z-1$을 곱하면 $z^3-1=0$

따라서 $z^3=1$ …… ㉡

ㄴ. ㉠에서 $z^2+z+1=0$이므로 $z^2+z=-1$ …… ㉢

㉡에서 $z^3=1$이므로 $z^4+z^5=z+z^2$

따라서 $z^4+z^5=z+z^2=-1$

ㄷ. ㉡에서 $z^3=1$이므로 음이 아닌 정수 k에 대하여

$z^{3k+1}=z$, $z^{3k+2}=z^2$, $z^{3k+3}=1$

(i) $n=3k+1$일 때,

$z^n=z^{3k+1}=z$, $z^{2n}=z^{3(2k)+2}=z^2$

$z^{3n}=z^{3(3k)+3}=1$, $z^{4n}=z^{3(4k+1)+1}=z$

$z^{5n}=z^{3(5k+1)+2}=z^2$

$\therefore z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=z+z^2+1+z+z^2$

$=z+z^2$ ($\because$ ㉠)

$=-1$ ($\because$ ㉢)

즉, $z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=-1$을 만족시키는 100 이하의 모든 자연수 n은 1, 4, 7, …, 100의 34개이다.

(ii) $n=3k+2$일 때,

$z^n=z^{3k+2}=z^2$, $z^{2n}=z^{3(2k+1)+1}=z$

$z^{3n}=z^{3(3k+1)+3}=1$, $z^{4n}=z^{3(4k+2)+2}=z^2$

$z^{5n}=z^{3(5k+3)+1}=z$

$\therefore z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=z^2+z+1+z^2+z$

$=z^2+z$ ($\because$ ㉠)

$=-1$($\because$ ㉢)

즉, $z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=-1$을 만족시키는 100 이하의 모든 자연수 n은 2, 5, 8, …, 98의 33개이다.

(iii) $n=3k+3$일 때,

$z^n=z^{3k+3}=1$, $z^{2n}=z^{3(2k+1)+3}=1$

$z^{3n}=z^{3(3k+2)+3}=1$, $z^{4n}=z^{3(4k+3)+3}=1$

$z^{5n}=z^{3(5k+4)+3}=1$

$\therefore z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=1+1+1+1+1=5$

즉, $z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=-1$을 만족시키는 100 이하의 자연수는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 모든 자연수 n의 개수는 $34+33=67$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

20 답 27

$\alpha=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$에서 $\alpha^2=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\frac{2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\beta$

$\alpha^3=\alpha^2\alpha=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{4i}{4}=i$

$\alpha^6=(\alpha^3)^2=i^2=-1$

$\alpha^{12}=(\alpha^6)^2=(-1)^2=1$

한편 $\alpha^2=\beta$이므로 $\alpha^m\beta^n=\alpha^m(\alpha^2)^n=\alpha^{m+2n}$

$\alpha^{m+2n}=i$를 만족시키는 $m+2n$의 값은 $12k+3$(k는 음이 아닌 정수) 꼴이므로 3, 15, 27, 39, …

이때 m, n은 10 이하의 자연수이므로

$m+2n\le30$

따라서 $m+2n$의 최댓값은 27이다.

21 답 3

$x+y<0$, $xy>0$이므로 $x<0$, $y<0$

$x=-X$, $y=-Y$로 놓으면 $X>0$, $Y>0$이므로

$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\sqrt{\frac{-X}{-Y}}+\sqrt{\frac{-Y}{-X}}=\sqrt{\frac{X}{Y}}+\sqrt{\frac{Y}{X}}$

$=\frac{\sqrt{X}}{\sqrt{Y}}+\frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{X}}=\frac{(\sqrt{X})^2+(\sqrt{Y})^2}{\sqrt{X}\sqrt{Y}}$

$=\frac{X+Y}{\sqrt{XY}}$

이때 $x+y=-6$, $xy=4$에서 $X+Y=6$, $XY=4$이므로

$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{X+Y}{\sqrt{XY}}=\frac{6}{\sqrt{4}}=3$

22 답 ⑤

㈏에서 a, b, c 중 한 수는 양수, 두 수는 음수이다.

㈐에서 $\frac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{b+2}}=-\sqrt{\frac{a-2}{b+2}}$이므로

$a-2>0$, $b+2<0$ $\therefore a>2$, $b<-2$

즉, a가 양수, b가 음수이므로 c는 음수이다.

㈎에서 $a+c<b$, 즉 $b-c>a>0$이므로 $b>c$

$\therefore c<b<a$

23 답 12

(i) $a>0$일 때,

$$\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{-|a|}}{2\sqrt{a}+\sqrt{-|a|}}=\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{-a}}{2\sqrt{a}+\sqrt{-a}}=\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{a}i}{2\sqrt{a}+\sqrt{a}i}$$
$$=\frac{\sqrt{a}(2-i)}{\sqrt{a}(2+i)}=\frac{2-i}{2+i}$$
$$=\frac{(2-i)^2}{(2+i)(2-i)}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$$

(ii) $a<0$일 때,

$a=-A$로 놓으면 $A>0$이므로

$$\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{-|a|}}{2\sqrt{a}+\sqrt{-|a|}}=\frac{2\sqrt{-A}-\sqrt{-|-A|}}{2\sqrt{-A}+\sqrt{-|-A|}}$$
$$=\frac{2\sqrt{-A}-\sqrt{-A}}{2\sqrt{-A}+\sqrt{-A}}=\frac{\sqrt{A}i}{3\sqrt{A}i}=\frac{1}{3}$$

(i), (ii)에서 $\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{-|a|}}{2\sqrt{a}+\sqrt{-|a|}}$가 될 수 있는 모든 값의 합은

$\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)+\frac{1}{3}=\frac{14}{15}-\frac{4}{5}i$

따라서 $p=\frac{14}{15}$, $q=-\frac{4}{5}$이므로

$90(p+q)=90\times\left(\frac{14}{15}-\frac{4}{5}\right)=12$

24 답 ③

$a<0$, $b<0$이고, $a=-A$, $b=-B$로 놓으면 $A>0$, $B>0$이므로

$$\therefore z=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a}\sqrt{b}i}{\sqrt{ab}-\sqrt{a}i}=\frac{\sqrt{-A}-\sqrt{-A}\sqrt{-B}i}{\sqrt{AB}-\sqrt{-A}i}$$
$$=\frac{\sqrt{A}i-\sqrt{A}i\times\sqrt{B}i\times i}{\sqrt{AB}-\sqrt{A}i\times i}=\frac{\sqrt{A}i+\sqrt{AB}i}{\sqrt{AB}+\sqrt{A}}$$
$$=\frac{(\sqrt{AB}+\sqrt{A})i}{\sqrt{AB}+\sqrt{A}}=i$$

따라서 $z=i$, $\bar{z}=-i$이므로

$\frac{z-z\bar{z}}{\sqrt{2}}=\frac{i-i\times(-i)}{\sqrt{2}}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

이때 $x=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$라 하면

$x^2=\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$

$x^4=(x^2)^2=(-i)^2=-1$

$x^8=(x^4)^2=(-1)^2=1$

따라서 n이 8의 배수일 때 $\left(\frac{z-z\bar{z}}{\sqrt{2}}\right)^n=1$을 만족시키므로 100 이하의 자연수 n은 8, 16, 24, …, 96의 12개이다.

STEP 3 최고난도 문제 | 48~49쪽

01 $-42+24i$	02 ②	03 144	04 ④	05 150
06 ㄱ, ㄷ	07 94	08 $-i$, i		

01 답 $-42+24i$

1단계 조건 ㈎, ㈏를 만족시키는 식 구하기

a_k($k=1, 2, 3, \cdots, 10$)의 값 중에서 1, $1+i$, $(1-i)^2$의 개수를 각각 p, q, r(p, q, r는 음이 아닌 정수)라 하자.

㈎에서 $p+q+r=10$ …… ㉠

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=p\times1+q\times(1+i)+r\times(1-i)^2$
$=p+q(1+i)+r(-2i)$
$=(p+q)+(q-2r)i$

㈏에서 $(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})^2$의 값이 실수이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값은 실수이거나 순허수이다.

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=(p+q)+(q-2r)i$이므로

$p+q=0$ 또는 $q-2r=0$

2단계 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{10}^2$의 값 구하기

(i) $p+q=0$일 때,

$p\geq0$, $q\geq0$이므로 $p=q=0$이고, ㉠에서 $r=10$이므로

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{10}^2=10\times(1-i)^4$
$=10\times(-2i)^2=-40$

(ii) $q-2r=0$, 즉 $q=2r$일 때,

ⓘ $q=0$, $r=0$이면 ㉠에서 $p=10$이므로

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{10}^2=10\times1^2=10$

ⓘⓘ $q=2$, $r=1$이면 ㉠에서 $p=7$이므로

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{10}^2=7\times1^2+2\times(1+i)^2+1\times(1-i)^4$
$=7+4i-4=3+4i$

ⓘⓘⓘ $q=4$, $r=2$이면 ㉠에서 $p=4$이므로

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{10}^2=4\times1^2+4\times(1+i)^2+2\times(1-i)^4$
$=4+8i-8=-4+8i$

ⓘⓥ $q=6$, $r=3$이면 ㉠에서 $p=1$이므로

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{10}^2=1\times1^2+6\times(1+i)^2+3\times(1-i)^4$
$=1+12i-12=-11+12i$

3단계 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{10}^2$의 모든 값의 합 구하기

(i), (ii)에서 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{10}^2$의 모든 값의 합은

$-40+10+(3+4i)+(-4+8i)+(-11+12i)=-42+24i$

삐쁩 NOTE

복소수 $z=a+bi$(a, b는 실수)에 대하여

(1) z^2이 실수 ➡ z가 실수 또는 순허수 ➡ $a=0$ 또는 $b=0$

(2) z^2이 음의 실수 ➡ z가 순허수 ➡ $a=0$, $b\neq0$

(3) z^2이 양의 실수 ➡ z가 0이 아닌 실수 ➡ $a\neq0$, $b=0$

02 답 ②

1단계 α, β의 실수부분, 허수부분에 대한 식 세우기

$\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$(a, b, c, d는 실수)라 하면

$\bar{\alpha}\beta=2$에서 $(a-bi)(c+di)=2$

$(ac+bd)+(ad-bc)i=2$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$ac+bd=2$ …… ㉠, $ad-bc=0$ …… ㉡

$\alpha-\beta=\sqrt{5}i$에서 $(a+bi)-(c+di)=\sqrt{5}i$

$(a-c)+(b-d)i=\sqrt{5}i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-c=0$ …… ㉢, $b-d=\sqrt{5}$ …… ㉣

2단계 α, β**의 실수부분 구하기**

㉢에서 $a=c$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$ad-ab=0$, $-a(b-d)=0$

㉣을 대입하면 $-\sqrt{5}a=0$ $\therefore a=0$, $c=0$

3단계 $\alpha^3+7\beta$**의 값 구하기**

따라서 $\alpha=bi$, $\beta=di$이므로

$\alpha^3+7\beta=(bi)^3+7di=(-b^3+7d)i$ …… ㉤

㉠에서 $bd=2$이고, ㉣에서 $d=b-\sqrt{5}$이므로

$d=b-\sqrt{5}$를 $bd=2$에 대입하면

$b(b-\sqrt{5})=2$ $\therefore b^2=\sqrt{5}b+2$

$\therefore b^3=\sqrt{5}b^2+2b=\sqrt{5}(\sqrt{5}b+2)+2b=7b+2\sqrt{5}$

$b^3=7b+2\sqrt{5}$를 ㉤에 대입하면

$\alpha^3+7\beta=(-7b-2\sqrt{5}+7d)i$

$=\{-7(b-d)-2\sqrt{5}\}i$

$=(-7\sqrt{5}-2\sqrt{5})i$ ($\because$ ㉣)

$=-9\sqrt{5}i$

4단계 p^2+q^2**의 값 구하기**

따라서 $p=0$, $q=-9\sqrt{5}$이므로 $p^2+q^2=405$

다른 풀이

$\overline{\alpha}\beta=2$, $\alpha-\beta=\sqrt{5}i$에서 $\alpha\overline{\beta}=2$, $\overline{\alpha}-\overline{\beta}=-\sqrt{5}i$

이때 $\overline{\alpha}=\frac{2}{\beta}$, $\overline{\beta}=\frac{2}{\alpha}$이므로 $\frac{2}{\beta}-\frac{2}{\alpha}=-\sqrt{5}i$

$\frac{2(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}=-\sqrt{5}i$

$\therefore \alpha\beta=\frac{2(\alpha-\beta)}{-\sqrt{5}i}=\frac{2\sqrt{5}i}{-\sqrt{5}i}=-2$

$\alpha\beta=-2$, $\overline{\alpha}\beta=2$에서 각 변끼리 더하면

$\alpha\beta+\overline{\alpha}\beta=0$, $(\alpha+\overline{\alpha})\beta=0$

이때 $\beta\neq0$이므로 $\alpha+\overline{\alpha}=0$

$\alpha\beta=-2$, $\alpha\overline{\beta}=2$에서 각 변끼리 더하면

$\alpha\beta+\alpha\overline{\beta}=0$, $\alpha(\beta+\overline{\beta})=0$

이때 $\alpha\neq0$이므로 $\beta+\overline{\beta}=0$

따라서 α, β는 모두 순허수이므로

$\alpha=ai$, $\beta=bi$(a, b는 실수, $ab\neq0$)라 하면

$\alpha^3+7\beta=(ai)^3+7bi=(-a^3+7b)i$ …… ㉠

$\overline{\alpha}\beta=2$에서 $-ai\times bi=2$

$\therefore ab=2$ …… ㉡

$\alpha-\beta=\sqrt{5}i$에서 $ai-bi=\sqrt{5}i$

$\therefore a-b=\sqrt{5}$ …… ㉢

㉢에서 $b=a-\sqrt{5}$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$a(a-\sqrt{5})=2$ $\therefore a^2=\sqrt{5}a+2$

$\therefore a^3=\sqrt{5}a^2+2a=\sqrt{5}(\sqrt{5}a+2)+2a=7a+2\sqrt{5}$

$a^3=7a+2\sqrt{5}$를 ㉠에 대입하면

$\alpha^3+7\beta=(-7a-2\sqrt{5}+7b)i$

$=\{-7(a-b)-2\sqrt{5}\}i$

$=(-7\sqrt{5}-2\sqrt{5})i$ ($\because$ ㉢)

$=-9\sqrt{5}i$

따라서 $p=0$, $q=-9\sqrt{5}$이므로 $p^2+q^2=405$

idea

03 답 144

1단계 α, β, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, z, $\overline{z}$**에 대한 식 세우기**

임의의 복소수 z에 대하여 $\alpha z+\beta\overline{z}$가 실수이므로

$\alpha z+\beta\overline{z}=\overline{\alpha z+\beta\overline{z}}$ → 실수의 켤레복소수는 그 실수와 같다.

즉, $\alpha z+\beta\overline{z}=\overline{\alpha}\overline{z}+\overline{\beta}z$이므로

$(\alpha-\overline{\beta})z+(\beta-\overline{\alpha})\overline{z}=0$ …… ㉠

2단계 α, β, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ **사이의 관계식 구하기**

임의의 복소수 z에 대하여 ㉠이 성립하므로

(i) $z=1$일 때,

$\overline{z}=1$이므로 ㉠에 대입하면

$(\alpha-\overline{\beta})+(\beta-\overline{\alpha})=0$ …… ㉡

(ii) $z=i$일 때,

$\overline{z}=-i$이므로 ㉠에 대입하면

$(\alpha-\overline{\beta})i-(\beta-\overline{\alpha})i=0$

$\therefore (\alpha-\overline{\beta})-(\beta-\overline{\alpha})=0$ …… ㉢

㉡+㉢을 하면 $2(\alpha-\overline{\beta})=0$, $\alpha-\overline{\beta}=0$ $\therefore \overline{\beta}=\alpha$

㉡−㉢을 하면 $2(\beta-\overline{\alpha})=0$, $\beta-\overline{\alpha}=0$ $\therefore \overline{\alpha}=\beta$

3단계 $(\alpha+\overline{\beta})^2(\overline{\alpha}+\beta)^2+(\alpha-\overline{\beta})^2(\overline{\alpha}-\beta)^2$**의 값 구하기**

$\therefore (\alpha+\overline{\beta})^2(\overline{\alpha}+\beta)^2+(\alpha-\overline{\beta})^2(\overline{\alpha}-\beta)^2=(2\alpha)^2(2\beta)^2+0$

$=16(\alpha\beta)^2$

$=16\times3^2=144$

idea

04 답 ④

1단계 $z\overline{z}$**의 값 구하기**

$z+\frac{1}{z}$이 실수이므로

$z+\frac{1}{z}=\overline{z+\frac{1}{z}}$ → 실수의 켤레복소수는 그 실수와 같다.

$\therefore z+\frac{1}{z}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}$

양변에 $z\overline{z}$를 곱하면

$z^2\overline{z}+\overline{z}=z\overline{z}^2+z$, $z^2\overline{z}-z\overline{z}^2-z+\overline{z}=0$

$z\overline{z}(z-\overline{z})-(z-\overline{z})=0$, $(z-\overline{z})(z\overline{z}-1)=0$

이때 z가 실수가 아니므로 $z\neq\overline{z}$ $\therefore z\overline{z}=1$ …… ㉠

2단계 $z+\overline{z}$**의 값 구하기**

$\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$이 실수이므로

$\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=\overline{\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}}$ → 실수의 켤레복소수는 그 실수와 같다.

$\therefore \frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{\overline{z}}+\frac{1}{\overline{z}^2}$

양변에 $z^2\overline{z}^2$을 곱하면

$z\overline{z}^2+\overline{z}^2=z^2\overline{z}+z^2$, $z^2\overline{z}-z\overline{z}^2+z^2-\overline{z}^2=0$

$z\overline{z}(z-\overline{z})+(z+\overline{z})(z-\overline{z})=0$

$(z-\overline{z})(z\overline{z}+z+\overline{z})=0$

이때 $z\neq\overline{z}$이므로 $z\overline{z}+z+\overline{z}=0$

㉠을 대입하면

$1+z+\overline{z}=0$ $\therefore z+\overline{z}=-1$

3단계 $(z^2-1)(\overline{z}^2-1)$**의 값 구하기**

$\therefore (z^2-1)(\overline{z}^2-1)=(z\overline{z})^2-(z^2+\overline{z}^2)+1$

$=(z\overline{z})^2-\{(z+\overline{z})^2-2z\overline{z}\}+1$

$=1^2-\{(-1)^2-2\times1\}+1=3$

05 답 150

1단계 $\left\{i^n+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n}\right\}^m$ 간단히 하기

$$\left\{i^n+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n}\right\}^m=\{i^n+(-i)^{2n}\}^m$$
$$=\{i^n+(-1)^n\}^m$$

2단계 n의 값의 경우를 나누어 조건을 만족시키는 m, n의 개수 구하기

$f(n)=i^n+(-1)^n$이라 하면 음이 아닌 정수 k에 대하여

(i) $n=4k+1$일 때,

$f(n)=f(4k+1)=i^{4k+1}+(-1)^{4k+1}=i-1$

이므로

$\{f(n)\}^2=(i-1)^2=-2i$

$\{f(n)\}^4=(-2i)^2=-4$

$\{f(n)\}^8=4^2$

$\{f(n)\}^{12}=-4^3$

$\{f(n)\}^{16}=4^4$

$\{f(n)\}^{20}=-4^5$

$\{f(n)\}^{24}=4^6$

$\{f(n)\}^{28}=-4^7$

⋮

즉, $n=4k+1$일 때 $\{f(n)\}^m$의 값이 음의 실수가 되도록 하는 50 이하의 자연수 m은 4, 12, 20, 28, 36, 44의 6개이다.

또 $n=4k+1$ 꼴인 50 이하의 자연수 n은 1, 5, 9, …, 49의 13개이다.

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$6\times13=78$

(ii) $n=4k+2$일 때,

$f(n)=f(4k+2)=i^{4k+2}+(-1)^{4k+2}=i^2+1=-1+1=0$이므로

$\{f(n)\}^m$의 값은 음의 실수가 될 수 없다.

(iii) $n=4k+3$일 때,

$f(n)=f(4k+3)=i^{4k+3}+(-1)^{4k+3}=i^3-1=-i-1$

이므로

$\{f(n)\}^2=(-i-1)^2=2i$

$\{f(n)\}^4=(2i)^2=-4$

$\{f(n)\}^8=4^2$

$\{f(n)\}^{12}=-4^3$

$\{f(n)\}^{16}=4^4$

$\{f(n)\}^{20}=-4^5$

$\{f(n)\}^{24}=4^6$

$\{f(n)\}^{28}=-4^7$

⋮

즉, $n=4k+3$일 때 $\{f(n)\}^m$의 값이 음의 실수가 되도록 하는 50 이하의 자연수 m은 4, 12, 20, 28, 36, 44의 6개이다.

또 $n=4k+3$ 꼴인 50 이하의 자연수 n은 3, 7, 11, …, 47의 12개이다.

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$6\times12=72$

(iv) $n=4k+4$일 때,

$f(n)=f(4k+4)=i^{4k+4}+(-1)^{4k+4}=1+1=2$이므로 $\{f(n)\}^m$의 값은 음의 실수가 될 수 없다.

3단계 순서쌍 (m, n)의 개수 구하기

(i)~(iv)에서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$78+72=150$

06 답 ㄱ, ㄷ

1단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. 24의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24이므로

$f(24)=i+i^2+i^3+i^4+i^6+i^8+i^{12}+i^{24}$

$=i-1-i+1-1+1+1+1=2$

2단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. 2^{4m}의 양의 약수는 1, 2, 2^2, 2^3, …, 2^{4m}의 $(4m+1)$개이고, 이때 2^2, 2^3, …, 2^{4m}은 4의 배수이므로

$f(2^{4m})=i+i^2+\underbrace{i^{2^2}+i^{2^3}+\cdots+i^{2^{4m}}}_{(4m-1)\text{개}}=i-1+(4m-1)\times1$

$=4m-2+i$

3단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. $10^m=2^m\times5^m$의 양의 약수는 다음과 같이 $(m+1)(m+1)$개이다.

1	2	2^2	2^3	…	2^m
5	2×5	$2^2\times5$	$2^3\times5$	…	$2^m\times5$
5^2	2×5^2	$2^2\times5^2$	$2^3\times5^2$	…	$2^m\times5^2$
5^3	2×5^3	$2^2\times5^3$	$2^3\times5^3$	…	$2^m\times5^3$
⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮
5^m	2×5^m	$2^2\times5^m$	$2^3\times5^m$	…	$2^m\times5^m$
4로 나눈 나머지 1	4로 나눈 나머지 2	4의 배수			

$\therefore f(10^m)=(m+1)i+(m+1)i^2+(m+1)(m-1)\times1$

$=(m+1)i-(m+1)+(m+1)(m-1)$

$=(m+1)(m-2)+(m+1)i$

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

07 답 94

1단계 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m$의 값 구하기

49 이하의 자연수 m에 대하여 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m$의 값은 다음과 같다.

$m=1, 9, 17, \ldots, 41, 49$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$m=2, 10, 18, \ldots, 42$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=i$

$m=3, 11, 19, \ldots, 43$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$m=4, 12, 20, \ldots, 44$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=-1$

$m=5, 13, 21, \ldots, 45$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$

$m=6, 14, 22, \ldots, 46$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=-i$

$m=7, 15, 23, \ldots, 47$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$m=8, 16, 24, \ldots, 48$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=1$

2단계 i^n의 값 구하기

49 이하의 자연수 n에 대하여 i^n의 값은 다음과 같다.

$n=1, 5, 9, \ldots, 45, 49$일 때, $i^n=i$

$n=2, 6, 10, \ldots, 46$일 때, $i^n=-1$

$n=3, 7, 11, \ldots, 47$일 때, $i^n=-i$

$n=4, 8, 12, \ldots, 48$일 때, $i^n=1$

3단계 $\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n\right\}^2=4$를 만족시키는 $m+n$의 최댓값 구하기

$\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n\right\}^2=4$이므로

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=2$ 또는 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=-2$

(i) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=2$일 때,

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=1$, $i^n=-1$이므로 $m=48$, $n=46$인 경우에 $m+n$은 최댓값 94를 갖는다.

(ii) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=-2$일 때,

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=-1$, $i^n=1$이므로 $m=44$, $n=48$인 경우에 $m+n$은 최댓값 92를 갖는다.

(i), (ii)에서 $m+n$의 최댓값은 94이다.

08 답 $-i$, i

1단계 $\sqrt{a_1}\sqrt{a_3}\sqrt{a_5}\cdots\sqrt{a_{199}}$의 값 구하기

(i) $a_1a_3a_5\cdots a_{199}=-1$이므로 홀수 n에 대하여 값이 -1인 a_n의 개수는 홀수이다.

값이 -1인 a_n이 1개이면

$\sqrt{a_1}\sqrt{a_3}\sqrt{a_5}\cdots\sqrt{a_{199}}=\sqrt{-1}=i$

값이 -1인 a_n이 3개이면

$\sqrt{a_1}\sqrt{a_3}\sqrt{a_5}\cdots\sqrt{a_{199}}=(\sqrt{-1})^3=i^3=-i$

값이 -1인 a_n이 5개이면

$\sqrt{a_1}\sqrt{a_3}\sqrt{a_5}\cdots\sqrt{a_{199}}=(\sqrt{-1})^5=i^5=i$

값이 -1인 a_n이 7개이면

$\sqrt{a_1}\sqrt{a_3}\sqrt{a_5}\cdots\sqrt{a_{199}}=(\sqrt{-1})^7=i^7=-i$

⋮

따라서 $\sqrt{a_1}\sqrt{a_3}\sqrt{a_5}\cdots\sqrt{a_{199}}$의 값은 i 또는 $-i$이다.

2단계 $\sqrt{a_2}\sqrt{a_4}\sqrt{a_6}\cdots\sqrt{a_{200}}$의 값 구하기

(ii) $a_2a_4a_6\cdots a_{200}=1$이므로 짝수 m에 대하여 값이 -1인 a_m의 개수는 0 또는 짝수이다.

값이 -1인 a_m이 0개이면

$\sqrt{a_2}\sqrt{a_4}\sqrt{a_6}\cdots\sqrt{a_{200}}=1$

값이 -1인 a_m이 2개이면

$\sqrt{a_2}\sqrt{a_4}\sqrt{a_6}\cdots\sqrt{a_{200}}=(\sqrt{-1})^2=i^2=-1$

값이 -1인 a_m이 4개이면

$\sqrt{a_2}\sqrt{a_4}\sqrt{a_6}\cdots\sqrt{a_{200}}=(\sqrt{-1})^4=i^4=1$

값이 -1인 a_m이 6개이면

$\sqrt{a_2}\sqrt{a_4}\sqrt{a_6}\cdots\sqrt{a_{200}}=(\sqrt{-1})^6=i^6=-1$

⋮

따라서 $\sqrt{a_2}\sqrt{a_4}\sqrt{a_6}\cdots\sqrt{a_{200}}$의 값은 1 또는 -1이다.

3단계 $\frac{\sqrt{a_2}\sqrt{a_4}\sqrt{a_6}\cdots\sqrt{a_{200}}}{\sqrt{a_1}\sqrt{a_3}\sqrt{a_5}\cdots\sqrt{a_{199}}}$의 값 구하기

(i), (ii)에서 $\frac{\sqrt{a_2}\sqrt{a_4}\sqrt{a_6}\cdots\sqrt{a_{200}}}{\sqrt{a_1}\sqrt{a_3}\sqrt{a_5}\cdots\sqrt{a_{199}}}$의 값은

$\frac{1}{i}$, $\frac{1}{-i}$, $\frac{-1}{i}$, $\frac{-1}{-i}$ → $\frac{1}{i}=-i$, $-\frac{1}{i}=i$

따라서 구하는 값은

$-i$, i

04 이차방정식

STEP 1 핵심 문제 | 50~51쪽

01 ①	02 ①	03 ③	04 15	05 6	06 ②
07 4	08 $\frac{28}{13}$	09 ②	10 33	11 2	12 ②

01 답 ①

방정식 $x^2-|2x|=\sqrt{(2x-2)^2}+2$에서 $x^2-|2x|=2|x-1|+2$

(i) $x<0$일 때, $|2x|=-2x$, $|x-1|=-(x-1)$이므로

$x^2+2x=-2(x-1)+2$, $x^2+4x-4=0$ ∴ $x=-2\pm2\sqrt{2}$

그런데 $x<0$이므로 $x=-2-2\sqrt{2}$

(ii) $0\le x<1$일 때, $|2x|=2x$, $|x-1|=-(x-1)$이므로

$x^2-2x=-2(x-1)+2$, $x^2=4$ ∴ $x=\pm2$

그런데 $0\le x<1$이므로 근이 없다.

(iii) $x\ge1$일 때, $|2x|=2x$, $|x-1|=x-1$이므로

$x^2-2x=2(x-1)+2$, $x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$ ∴ $x=0$ 또는 $x=4$

그런데 $x\ge1$이므로 $x=4$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$-2-2\sqrt{2}+4=2-2\sqrt{2}$

02 답 ①

이차방정식 $x^2-2(m+a)x+m^2+m+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(m+a)^2-(m^2+m+b)=0$

$(2a-1)m+a^2-b=0$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2a-1=0$, $a^2-b=0$ ∴ $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$

∴ $12(a+b)=12\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=9$

03 답 ③

이차식 $(a+2)x^2-4(a-1)x+ka$가 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $(a+2)x^2-4(a-1)x+ka=0$의 판별식이 0이어야 한다.

이차방정식 $(a+2)x^2-4(a-1)x+ka=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=4(a-1)^2-ka(a+2)=0$

∴ $(4-k)a^2-2(k+4)a+4=0$ …… ㉠

이때 ㉠을 만족시키는 실수 a의 값은 오직 하나뿐이므로

(i) $4-k=0$, 즉 $k=4$일 때,

㉠에서 $-16a+4=0$ ∴ $a=\frac{1}{4}$

즉, $k=4$일 때 a의 값이 한 개 존재한다.

(ii) $4-k\ne0$, 즉 $k\ne4$일 때,

이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(k+4)^2-4(4-k)=0$, $k^2+12k=0$

$k(k+12)=0$ ∴ $k=-12$ 또는 $k=0$

(i), (ii)에서 실수 k는 -12, 0, 4의 3개이다.

04 답 15

이차방정식 $3x^2-4ax+4b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-12b<0$

$\therefore a^2<3b$

이때 a, b는 주사위를 던져서 나오는 눈의 수이므로 1부터 6까지의 자연수를 값으로 갖는다.

(i) $a=1$일 때,

$1<3b$이므로 $b>\frac{1}{3}$

즉, b의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 6이다.

(ii) $a=2$일 때,

$4<3b$이므로 $b>\frac{4}{3}$

즉, b의 값은 2, 3, 4, 5, 6이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 5이다.

(iii) $a=3$일 때,

$9<3b$이므로 $b>3$

즉, b의 값은 4, 5, 6이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 3이다.

(iv) $a=4$일 때,

$16<3b$이므로 $b>\frac{16}{3}$

즉, $b=6$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 1이다.

(v) $a=5$일 때,

$25<3b$이므로 $b>\frac{25}{3}$

이를 만족시키는 b의 값은 존재하지 않는다.

(vi) $a=6$일 때,

$36<3b$이므로 $b>12$

이를 만족시키는 b의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(vi)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$6+5+3+1=15$

05 답 6

이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-3\alpha+k=0$, $\beta^2-3\beta+k=0$

즉, $\alpha^2-\alpha+k=2\alpha$, $\beta^2-\beta+k=2\beta$이고,

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=k$

따라서 $\frac{1}{\alpha^2-\alpha+k}+\frac{1}{\beta^2-\beta+k}=\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\frac{3}{2k}$이므로

$\frac{3}{2k}=\frac{1}{4}$ $\therefore k=6$

06 답 ②

이차방정식 $x^2-(n^2+5n+6)x+n+2=0$의 두 근이 α_n, β_n이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=n^2+5n+6$, $\alpha_n\beta_n=n+2$

$\therefore \frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{n^2+5n+6}{n+2}$

$=\frac{(n+3)(n+2)}{n+2}=n+3$

$\therefore \left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{10}}\right)+\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}+\frac{1}{\beta_3}+\cdots+\frac{1}{\beta_{10}}\right)$

$=\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\beta_1}\right)+\left(\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\beta_2}\right)+\left(\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\beta_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\alpha_{10}}+\frac{1}{\beta_{10}}\right)$

$=4+5+6+\cdots+13=85$

07 답 4

이차방정식 $x^2+(4k-3)x+2k^2+10=0$의 두 근을 α, $\alpha+1$이라 하면

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=-4k+3$ $\therefore \alpha=-2k+1$ ····· ㉠

$\alpha(\alpha+1)=2k^2+10$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(-2k+1)(-2k+2)=2k^2+10$, $k^2-3k-4=0$

$(k+1)(k-4)=0$ $\therefore k=-1$ 또는 $k=4$

(i) $k=-1$을 ㉠에 대입하면 두 근은 3, 4이다.

즉, 두 근은 음의 정수가 아니다.

(ii) $k=4$를 ㉠에 대입하면 두 근은 -7, -6이다.

즉, 두 근은 연속하는 음의 정수이다.

따라서 구하는 k의 값은 4이다.

08 답 $\frac{28}{13}$

이차방정식 $x^2+(2m-10)x+m^2+1=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-2m+10$, $\alpha\beta=m^2+1$

이때 두 근의 차가 6이므로 $|\alpha-\beta|=6$에서

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=36$

즉, $(-2m+10)^2-4(m^2+1)=36$이므로

$-40m+96=36$ $\therefore m=\frac{3}{2}$

$m=\frac{3}{2}$을 $(m^2+1)x^2+(2m-10)x+1=0$에 대입하면

$\frac{13}{4}x^2-7x+1=0$, 즉 $13x^2-28x+4=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $\frac{28}{13}$이다.

09 답 ②

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

이차방정식 $f(2x-1)=0$의 두 근은 $2x-1=\alpha$ 또는 $2x-1=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha+1}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta+1}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x-1)=0$의 두 근의 곱은

$\frac{\alpha+1}{2}\times\frac{\beta+1}{2}=\frac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{4}=\frac{6+1+1}{4}=2$

비법 NOTE

(1) 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근에 대한 조건이 주어진 경우

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

따라서 이차방정식 $f(ax+b)=0$의 두 근은

$ax+b=\alpha$ 또는 $ax+b=\beta$ $\therefore x=\frac{\alpha-b}{a}$ 또는 $x=\frac{\beta-b}{a}$

(2) 이차방정식 $f(ax+b)=0$의 두 근에 대한 조건이 주어진 경우

이차방정식 $f(ax+b)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$f(a\alpha+b)=0$, $f(a\beta+b)=0$

따라서 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근은

$x=a\alpha+b$ 또는 $x=a\beta+b$

다른 풀이

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 α, β의 합이 1, 곱이 6이므로

$f(x)=k(x^2-x+6)(k\neq0)$이라 하면

$f(2x-1)=k\{(2x-1)^2-(2x-1)+6\}=k(4x^2-6x+8)$

따라서 이차방정식 $f(2x-1)=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 2이다.

10 답 33

이차방정식 $x^2-3x-5=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-5$ ····· 배점 20%

$\alpha+\frac{1}{\alpha}$, $\beta+\frac{1}{\beta}$의 합과 곱을 각각 구하면

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3+\frac{3}{-5}=\frac{12}{5}$$

$$\begin{aligned}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)&=\alpha\beta+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\beta}\\&=\alpha\beta+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}\\&=\alpha\beta+\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+1}{\alpha\beta}\\&=-5+\frac{3^2-2\times(-5)+1}{-5}=-9\end{aligned}$$ ····· 배점 30%

즉, $\alpha+\frac{1}{\alpha}$, $\beta+\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 5인 이차방정식은

$5\left(x^2-\frac{12}{5}x-9\right)=0$ $\therefore 5x^2-12x-45=0$ ····· 배점 30%

따라서 $a=-12$, $b=-45$이므로

$a-b=33$ ····· 배점 20%

11 답 2

원래의 이차방정식을 $ax^2+bx+c=0$(a, b, c는 실수, $a\neq0$)이라 하자.

x의 계수를 잘못 보고 풀었을 때는 한 근이 $1+\sqrt{2}i$이고, 계수가 실수이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}i$이다.

이때 a와 c는 바르게 보고 풀었으므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=\frac{c}{a}$ $\therefore c=3a$

상수항을 잘못 보고 풀었을 때는 한 근이 $\sqrt{2}+i$이고, 계수가 실수이므로 다른 한 근은 $\sqrt{2}-i$이다.

이때 a와 b는 바르게 보고 풀었으므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

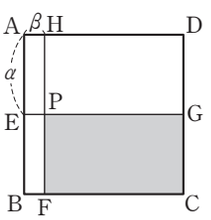
$(\sqrt{2}+i)+(\sqrt{2}-i)=-\frac{b}{a}$ $\therefore b=-2\sqrt{2}a$

따라서 원래의 이차방정식 $ax^2-2\sqrt{2}ax+3a=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2\sqrt{2}$, $\alpha\beta=3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(2\sqrt{2})^2-2\times3=2$

12 답 ②



$\overline{AE}=\alpha$, $\overline{AH}=\beta$라 하면

$\overline{PF}=10-\alpha$, $\overline{PG}=10-\beta$

직사각형 PFCG의 둘레의 길이가 28이므로

$2\{(10-\alpha)+(10-\beta)\}=28$

$20-\alpha-\beta=14$ $\therefore \alpha+\beta=6$

직사각형 PFCG의 넓이가 46이므로

$(10-\alpha)(10-\beta)=46$

$100-10(\alpha+\beta)+\alpha\beta=46$

$100-10\times6+\alpha\beta=46$ $\therefore \alpha\beta=6$

따라서 이차항의 계수가 1이고 두 선분 AE와 AH의 길이 α, β를 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-6x+6=0$

STEP 2 고난도 문제 | 52~56쪽

01 -1	02 ③	03 ④	04 $\frac{5}{2}$	05 ③	06 ㄱ, ㄷ
07 ⑤	08 ⑤	09 10	10 -6	11 ①	12 ①
13 ㄱ, ㄴ, ㄷ		14 11	15 83	16 ②	17 ④
18 ④	19 4	20 5	21 10	22 -1	23 ①
24 ②	25 ⑤	26 $\frac{9}{2}$	27 $8\sqrt{3}$		

01 답 -1

방정식 $(a^2+2a)x=a(4x-3)+3x+9$에서

$(a^2-2a-3)x=-3a+9$

이 방정식의 해가 무수히 많으려면

$a^2-2a-3=0$ ····· ㉠, $-3a+9=0$ ····· ㉡

㉡에서 $a=3$

이를 ㉠에 대입하면 성립하므로 $a=3$ ····· 배점 40%

이차방정식 $x^2-a|x-1|-7=0$에서 $x^2-3|x-1|-7=0$

(i) $x<1$일 때,

$|x-1|=-(x-1)$이므로

$x^2+3(x-1)-7=0$, $x^2+3x-10=0$

$(x+5)(x-2)=0$ $\therefore x=-5$ 또는 $x=2$

그런데 $x<1$이므로 $x=-5$ ····· 배점 20%

(ii) $x\geq1$일 때,

$|x-1|=x-1$이므로

$x^2-3(x-1)-7=0$, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

그런데 $x\geq1$이므로 $x=4$ ····· 배점 20%

(i), (ii)에서 주어진 이차방정식의 모든 근의 합은

$-5+4=-1$ ····· 배점 20%

개념 NOTE

x에 대한 방정식 $ax=b$에서

(1) 해가 존재하지 않으려면 $a=0$, $b\neq0$

(2) 해가 무수히 많으려면 $a=0$, $b=0$

02 답 ③

이차방정식 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$의 한 근이 $\alpha=2+\sqrt{3}$이므로

$a(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}b(2+\sqrt{3})+c=0$, $a(7+4\sqrt{3})+2\sqrt{3}b+3b+c=0$

$\therefore (7a+3b+c)+(4a+2b)\sqrt{3}=0$

이때 a, b, c가 유리수이므로

$7a+3b+c=0$, $4a+2b=0$

$\therefore b=-2a$, $c=-7a-3b=-7a-3\times(-2a)=-a$

이를 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$에 대입하면 $ax^2-2\sqrt{3}ax-a=0$

$x^2-2\sqrt{3}x-1=0$ ($\because a\neq0$) $\therefore x=\sqrt{3}\pm2$

따라서 $\beta=\sqrt{3}-2$이므로

$$\begin{aligned}\alpha+\frac{1}{\beta}&=2+\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}-2}=2+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}\\&=2+\sqrt{3}-(\sqrt{3}+2)=0\end{aligned}$$

주의 주어진 이차방정식에서 일차항의 계수가 유리수가 아니므로 한 근이 $2+\sqrt{3}$이라고 해서 다른 한 근을 $2-\sqrt{3}$으로 생각하지 않도록 한다.

개념 NOTE

a, b, c, d는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수일 때

(1) $a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m}$이면 $a=c$, $b=d$

(2) $a+b\sqrt{m}=0$이면 $a=0$, $b=0$

다른 풀이

$t=\sqrt{3}x$라 하면 $x=\dfrac{t}{\sqrt{3}}$

$ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$에서 $\dfrac{a}{3}t^2+bt+c=0$

$\therefore at^2+3bt+3c=0$

이 이차방정식의 한 근이 $\sqrt{3}\alpha=\sqrt{3}(2+\sqrt{3})=3+2\sqrt{3}$이고, 계수가 유리수이므로 다른 한 근은 $3-2\sqrt{3}$이다.

$\therefore \beta=\dfrac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2$

$\therefore \alpha+\dfrac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}=2+\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}$

$=2+\sqrt{3}-(\sqrt{3}+2)=0$

03 답 ④

(i) $1<x<2$일 때,

$|4x-8|=-(4x-8)$이고, $[x]=1$이므로

$-x(4x-8)=3$, $4x^2-8x+3=0$

$(2x-1)(2x-3)=0$ $\therefore x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$

그런데 $1<x<2$이므로 $x=\dfrac{3}{2}$

(ii) $2\le x<3$일 때,

$|4x-8|=4x-8$이고, $[x]=2$이므로

$x(4x-8)=5$, $4x^2-8x-5=0$

$(2x+1)(2x-5)=0$ $\therefore x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{5}{2}$

그런데 $2\le x<3$이므로 $x=\dfrac{5}{2}$

(i), (ii)에서 모든 근의 곱은 $\dfrac{3}{2}\times\dfrac{5}{2}=\dfrac{15}{4}$

04 답 $\dfrac{5}{2}$

$[2x]^2-6[x]-13=0$에서

(i) $n\le x<n+\dfrac{1}{2}$(n은 정수)일 때,

$2n\le 2x<2n+1$이므로 $[2x]=2n$, $[x]=n$

즉, $(2n)^2-6n-13=0$에서 $4n^2-6n-13=0$

$\therefore n=\dfrac{3\pm\sqrt{61}}{4}$

그런데 n은 정수이므로 해가 없다.

(ii) $n+\dfrac{1}{2}\le x<n+1$(n은 정수)일 때,

$2n+1\le 2x<2n+2$이므로 $[2x]=2n+1$, $[x]=n$

즉, $(2n+1)^2-6n-13=0$에서 $2n^2-n-6=0$

$(2n+3)(n-2)=0$ $\therefore n=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $n=2$

그런데 n은 정수이므로 $n=2$

$\therefore \dfrac{5}{2}\le x<3$

(i), (ii)에서 실수 x의 최솟값은 $\dfrac{5}{2}$이다.

idea

05 답 ③

p는 소수이므로 이차방정식 $px^2-(p^2+1)x+3=0$의 계수는 모두 정수이다.

이 이차방정식이 유리수인 근을 가지려면 이차식 $px^2-(p^2+1)x+3$은 정수 a, b에 대하여 $(px-a)(x-b)$로 인수분해되어야 한다.

즉, $px^2-(p^2+1)x+3=(px-a)(x-b)$에서

$px^2-(p^2+1)x+3=px^2-(a+pb)x+ab$

이때 $ab=3$이고, a, b는 정수이므로 순서쌍 (a, b)는

$(-3, -1)$, $(-1, -3)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$

또 이차방정식 $(px-a)(x-b)=0$의 한 근이 b이므로 이차방정식 $px^2-(p^2+1)x+3=0$의 한 근도 b이다.

(i) $b=-3$일 때,

이차방정식 $px^2-(p^2+1)x+3=0$의 한 근이 -3이므로

$9p+3(p^2+1)+3=0$, $p^2+3p+2=0$

$(p+2)(p+1)=0$ $\therefore p=-2$ 또는 $p=-1$

그런데 p는 소수이므로 값이 존재하지 않는다.

(ii) $b=-1$일 때,

이차방정식 $px^2-(p^2+1)x+3=0$의 한 근이 -1이므로

$p+p^2+1+3=0$, $p^2+p+4=0$

$\therefore p=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$

그런데 p는 소수이므로 값이 존재하지 않는다.

(iii) $b=1$일 때,

이차방정식 $px^2-(p^2+1)x+3=0$의 한 근이 1이므로

$p-(p^2+1)+3=0$, $p^2-p-2=0$

$(p+1)(p-2)=0$ $\therefore p=-1$ 또는 $p=2$

그런데 p는 소수이므로 $p=2$

(iv) $b=3$일 때,

이차방정식 $px^2-(p^2+1)x+3=0$의 한 근이 3이므로

$9p-3(p^2+1)+3=0$, $p^2-3p=0$

$p(p-3)=0$ $\therefore p=0$ 또는 $p=3$

그런데 p는 소수이므로 $p=3$

(i)~(iv)에서 모든 p의 값의 합은 $2+3=5$

06 답 ㄱ, ㄷ

이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=b^2-4ac$

이차방정식 $g(x)=0$, 즉 $ax^2+2bx+c=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=b^2-ac$

ㄱ. $f(x)$, $g(x)$가 이차식이므로 $a\ne 0$ …… ㉠

두 이차방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$이 모두 중근을 가지면

$b^2-4ac=0$, $b^2-ac=0$ …… ㉡

즉, $-4ac=-ac$이므로 $ac=0$ $\therefore c=0$ ($\because$ ㉠)

이를 ㉡에 대입하면 $b^2=0$

$\therefore b^2+c^2=0$

ㄴ. $a=1$, $b=1$, $c=\dfrac{1}{2}$이면 $\dfrac{D_2}{4}=1-1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}>0$이므로 이차방정식 $g(x)=0$은 실근을 갖는다.

그런데 $D_1=1-4\times1\times\dfrac{1}{2}=-1<0$이므로 이차방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖는다.

ㄷ. 이차방정식 $g(x)=0$이 허근을 가지면 $D_2<0$이므로

$\frac{D_2}{4}=b^2-ac<0$

$\therefore 4b^2-4ac<0$

이때 $D_1=b^2-4ac\le 4b^2-4ac<0$이므로 이차방정식 $f(x)=0$도 허근을 갖는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

07 답 ⑤

이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2+2(a+b)x+a^2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(a+b)^2-a^2=2ab+b^2$

이차방정식 $g(x)=0$, 즉 $(b-a)x^2+bx-b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=b^2+4b(b-a)=5b^2-4ab$

ㄱ. $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0$, $b<0$ ⟶ 조건에서 a, b는 0이 아닌 실수이다.

이때 $2ab>0$, $b^2>0$이므로 $\frac{D_1}{4}=2ab+b^2>0$

즉, 이차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이면 $a>0$, $b<0$ ⟶ 조건에서 a, b는 0이 아닌 실수이다.

이때 $5b^2>0$, $-4ab>0$이므로 $D_2=5b^2-4ab>0$

즉, 이차방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $ab>0$ 또는 $ab<0$이므로 ⟶ 조건에서 a, b는 0이 아닌 실수이다.

(i) $ab>0$일 때,

$2ab>0$, $b^2>0$이므로 $\frac{D_1}{4}=2ab+b^2>0$

즉, 이차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $ab<0$일 때,

$5b^2>0$, $-4ab>0$이므로 $D_2=5b^2-4ab>0$

즉, 이차방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 두 이차방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$ 중에서 적어도 하나는 실근을 갖는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

08 답 ⑤

방정식 $|x^2-4x+2k-2|=k+5$에서 $k+5<0$이면 근이 존재하지 않으므로

$k+5\ge 0$ $\therefore k\ge -5$ …… ㉠

즉, $x^2-4x+2k-2=k+5$ 또는 $x^2-4x+2k-2=-(k+5)$

(i) $x^2-4x+2k-2=k+5$, 즉 $x^2-4x+k-7=0$일 때,

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=4-(k-7)\ge 0$, $-k+11\ge 0$ $\therefore k\le 11$

㉠에서 $-5\le k\le 11$

(ii) $x^2-4x+2k-2=-(k+5)$, 즉 $x^2-4x+3k+3=0$일 때,

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=4-(3k+3)\ge 0$, $-3k+1\ge 0$ $\therefore k\le \frac{1}{3}$

㉠에서 $-5\le k\le \frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $-5\le k\le 11$

└ (i), (ii) 중 하나만 실근을 가지면 되므로 두 범위를 합한 부분을 생각한다.

따라서 정수 k의 값은 -5, -4, -3, …, 11이므로

$M=11$, $m=-5$

$\therefore M-m=16$

09 답 10

이차방정식 $x^2+2kx+k^2-k+5=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=k^2-(k^2-k+5)=k-5$

이차방정식 $x^2-2(k+3)x+k^2+12=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(k+3)^2-(k^2+12)=6k-3$

(i) 이차방정식 $x^2+2kx+k^2-k+5=0$이 허근을 갖는 경우

$\frac{D_1}{4}=k-5<0$ $\therefore k<5$

(ii) 이차방정식 $x^2-2(k+3)x+k^2+12=0$이 허근을 갖는 경우

$\frac{D_2}{4}=6k-3<0$ $\therefore k<\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 두 이차방정식 중에서 적어도 하나는 허근을 가지려면 $k<5$이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 k의 값은 1, 2, 3, 4이므로 그 합은

$1+2+3+4=10$

10 답 −6

$x=\frac{y^2-4y-2}{y^2+4y+4}$에서 $x(y^2+4y+4)=y^2-4y-2$

$\therefore (x-1)y^2+4(x+1)y+4x+2=0$ …… ㉠

(i) $x=1$일 때,

㉠에서 $8y+6=0$ $\therefore y=-\frac{3}{4}$

즉, 실수 y가 존재하므로 $x=1$

(ii) $x\ne 1$일 때,

㉠은 y에 대한 이차방정식이고 y가 실수이므로 ㉠의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=4(x+1)^2-(x-1)(4x+2)\ge 0$

$10x+6\ge 0$ $\therefore x\ge -\frac{3}{5}$

그런데 $x\ne 1$이므로 $-\frac{3}{5}\le x<1$ 또는 $x>1$

(i), (ii)에서 $x\ge -\frac{3}{5}$

따라서 $m=-\frac{3}{5}$이므로 $10m=10\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-6$

11 답 ①

이차방정식 $x^2+(m+1)x+2m-1=0$에서

$x=\frac{-(m+1)\pm\sqrt{(m+1)^2-4(2m-1)}}{2}$

즉, $x=\frac{-(m+1)\pm\sqrt{m^2-6m+5}}{2}$ …… ㉠

$D=m^2-6m+5$라 할 때, 주어진 이차방정식의 두 근이 모두 정수가 되려면 D가 제곱수이거나 0이어야 한다.

이때 $D=(m-3)^2-4$이고, m이 정수이므로 $D=0$이어야 한다.

└ $(m-3)^2-4=n^2$(n은 자연수)이라 하면 $(m-3)^2-n^2=4$
그런데 $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, …이므로 차가 4가 되는 두 제곱수는 존재하지 않는다.
즉, D가 제곱수인 경우는 존재하지 않는다.

즉, $m^2-6m+5=0$에서

$(m-1)(m-5)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $m=5$

(i) $m=1$일 때, ㉠에서 $x=-1$

따라서 근이 정수이다.

(ii) $m=5$일 때, ㉠에서 $x=-3$

따라서 근이 정수이다.

(i), (ii)에서 모든 정수 m의 값의 합은 $1+5=6$

12 답 ①

이차방정식 $f(x)=0$의 이차항의 계수가 1이고,

㈎에서 두 근의 곱이 5이므로 $f(x)=x^2+kx+5$(k는 실수)라 하자.

㈏에서 이차방정식 $x^2-5x+5=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=5$

즉, $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=5$에서 $\alpha-\beta=\pm\sqrt{5}$

$\therefore f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha^2+k\alpha+5)-(\beta^2+k\beta+5)$

$=(\alpha^2-\beta^2)+k(\alpha-\beta)$

$=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+k(\alpha-\beta)$

$=(\alpha-\beta)(k+5)$

(i) $\alpha-\beta=\sqrt{5}$일 때,

$f(\alpha)-f(\beta)=(k+5)\sqrt{5}=3\sqrt{5}$이므로 $k=-2$

즉, $f(x)=x^2-2x+5$이므로 $f(3)=8$

(ii) $\alpha-\beta=-\sqrt{5}$일 때,

$f(\alpha)-f(\beta)=-(k+5)\sqrt{5}=3\sqrt{5}$이므로 $k=-8$

즉, $f(x)=x^2-8x+5$이므로 $f(3)=-10$

(i), (ii)에서 모든 $f(3)$의 값의 합은 $8+(-10)=-2$

13 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

이차방정식 $x^2+(a-5)x+1=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-(a-5)$, $\alpha\beta=1$

ㄱ. 이차방정식 $x^2+(a-5)x+1=0$의 판별식을 D라 하면 서로 다른 두 실근이 존재하므로 $D=(a-5)^2-4>0$, 즉 $(a-5)^2>4$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(a-5)^2-2>4-2=2$ …… ㉠

ㄴ. $\dfrac{\beta^3}{\alpha}+\dfrac{\alpha^3}{\beta}=\dfrac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha\beta}=\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2$

$=(\alpha^2+\beta^2)^2-2>2^2-2=2$ ($\because$ ㉠)

ㄷ. $\alpha^2+(a-5)\alpha+1=0$, $\beta^2+(a-5)\beta+1=0$에서

$\alpha^2+1=(5-a)\alpha$, $\beta^2+1=(5-a)\beta$

$\therefore (\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2+5\beta+1)=(10-a)\alpha\times(10-a)\beta$

$=(10-a)^2\alpha\beta=(10-a)^2=9$

즉, $10-a=\pm3$이므로 $a=7$ 또는 $a=13$

(i) $a=7$이면 주어진 이차방정식은 $x^2+2x+1=0$이므로 중근을 갖는다.

(ii) $a=13$이면 주어진 이차방정식은 $x^2+8x+1=0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 $a=13$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14 답 11

이차방정식 $x^2+(a-1)x+2a-2=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-(a-1)$, $\alpha\beta=2a-2$

이때 $a<1$에서 $a-1<0$이므로 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta<0$

즉, α와 β는 서로 부호가 다르므로 $(|\alpha|+|\beta|)^2=(\alpha-\beta)^2$

$(4\sqrt{3})^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$, $48=(a-1)^2-4(2a-2)$

$a^2-10a-39=0$, $(a+3)(a-13)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=13$

그런데 $a<1$이므로 $a=-3$

따라서 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-8$이므로

$|\alpha-1||\beta-1|=|(\alpha-1)(\beta-1)|$

$=|\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1|$

$=|-8-4+1|=11$

15 답 83

이차방정식 $ax^2-(5a-4)x-20=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$\alpha\beta=-\dfrac{20}{a}<0$ ($\because a>0$)

즉, α와 β는 서로 부호가 다르다.

이때 두 근의 절댓값의 비가 2 : 5이므로 $|\alpha|:|\beta|=2:5$라 하면

$\alpha=2k$, $\beta=-5k$($k\neq0$)로 놓을 수 있다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합은 $-3k=\dfrac{5a-4}{a}$, $-3k=5-\dfrac{4}{a}$

$\therefore \dfrac{4}{a}=3k+5$ …… ㉠

두 근의 곱은 $-10k^2=-\dfrac{20}{a}$

$\therefore 2k^2=\dfrac{4}{a}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2k^2=3k+5$, $2k^2-3k-5=0$

$(k+1)(2k-5)=0$ $\therefore k=-1$ 또는 $k=\dfrac{5}{2}$

이를 ㉡에 대입하여 풀면 $a=2$ 또는 $a=\dfrac{8}{25}$

따라서 모든 a의 값의 합은 $2+\dfrac{8}{25}=\dfrac{58}{25}$이므로

$p=25$, $q=58$

$\therefore p+q=83$

다른 풀이

이차방정식 $ax^2-(5a-4)x-20=0$에서

$(x-5)(ax+4)=0$ $\therefore x=5$ 또는 $x=-\dfrac{4}{a}$

두 근의 절댓값의 비가 2 : 5이므로

$5:\left|-\dfrac{4}{a}\right|=2:5$ …… ㉠ 또는 $\left|-\dfrac{4}{a}\right|:5=2:5$ …… ㉡

㉠에서 $\left|-\dfrac{4}{a}\right|=\dfrac{25}{2}$이고, $a>0$이므로 $a=\dfrac{8}{25}$

㉡에서 $\left|-\dfrac{4}{a}\right|=2$이고, $a>0$이므로 $a=2$

따라서 모든 a의 값의 합은 $\dfrac{8}{25}+2=\dfrac{58}{25}$이므로

$p=25$, $q=58$ $\therefore p+q=83$

16 답 ②

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 c, d이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$c+d=a$, $cd=b$ …… ㉠

이때 ㈎에서 a, b는 100 이하의 자연수이므로

$c+d\le100$, $cd\le100$

㈏에서 c와 d는 각각 3개의 양의 약수를 가지므로 c, d는 소수의 제곱수이다.

㈎에서 c, d는 100 이하의 서로 다른 자연수이므로 4, 9, 25, 49 중에서 서로 다른 값을 갖는다.

그런데 $cd\le100$이어야 하므로

(i) $c=4$, $d=9$ 또는 $c=9$, $d=4$일 때,

㉠에서 $a=c+d=13$, $b=cd=36$

즉, 순서쌍 (a, b)는 $(13, 36)$의 1개이다.

(ii) $c=4$, $d=25$ 또는 $c=25$, $d=4$일 때,

㉠에서 $a=c+d=29$, $b=cd=100$

즉, 순서쌍 (a, b)는 $(29, 100)$의 1개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$1+1=2$

배쌤 NOTE

- 어떤 자연수 p가 2개의 양의 약수를 가지면 p는 소수이다.
- 어떤 자연수 p가 3개의 양의 약수를 가지면 p는 소수의 제곱수이다.
- 어떤 자연수 p를 1이 아닌 서로 다른 두 자연수 m, n에 대하여 $p=m\times n$ 꼴로 나타낼 수 있으면 p의 양의 약수는 4개 이상이다.

17 답 ④

이차방정식 $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$에서

$x^2-(a+b)x+ab+x^2-(b+c)x+bc+x^2-(c+a)x+ca=0$

$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$

이 이차방정식의 두 근의 합과 곱이 각각 4, -3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{2(a+b+c)}{3}=4$, $\frac{ab+bc+ca}{3}=-3$

$\therefore a+b+c=6$, $ab+bc+ca=-9$

이차방정식 $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=0$에서

$x^2-2ax+a^2+x^2-2bx+b^2+x^2-2cx+c^2=0$

$3x^2-2(a+b+c)x+a^2+b^2+c^2=0$

이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=\frac{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}{3}$$

$$=\frac{6^2-2\times(-9)}{3}=18$$

18 답 ④

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$ …… ㉠, $\alpha\beta=b$ …… ㉡

이차방정식 $3x^2+ax-1=0$의 두 근이 $\alpha+2$, $-\frac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2-\frac{1}{\beta}=-\frac{a}{3}$ …… ㉢, $-\frac{\alpha+2}{\beta}=-\frac{1}{3}$ …… ㉣

㉠을 ㉢의 우변에 대입하면

$\alpha+2-\frac{1}{\beta}=\frac{1}{3}(\alpha+\beta)$ …… ㉤

㉣에서 $\alpha+2=\frac{1}{3}\beta$ $\therefore \alpha=\frac{1}{3}\beta-2$ …… ㉥

㉥을 ㉤에 대입하면

$\frac{1}{3}\beta-\frac{1}{\beta}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\beta-2+\beta\right)$, $\frac{1}{3}\beta-\frac{1}{\beta}=\frac{4}{9}\beta-\frac{2}{3}$

양변에 9β를 곱하면

$3\beta^2-9=4\beta^2-6\beta$, $\beta^2-6\beta+9=0$

$(\beta-3)^2=0$ $\therefore \beta=3$

이를 ㉥에 대입하면

$\alpha=\frac{1}{3}\times3-2=-1$

㉠, ㉡에서 $a=-(\alpha+\beta)=-2$, $b=\alpha\beta=-3$이므로

$|a|+|b|=2+3=5$

19 답 4

이차방정식 $x^2-mx+n=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=n$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-2mx+3n=0$의 두 근이 $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=2m$, $(\alpha^2+\beta^2)\alpha\beta=3n$

㉠에서 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=m^2-2n$, $\alpha\beta=n$이므로

$m^2-n=2m$ …… ㉡

$(m^2-2n)n=3n$ …… ㉢

㉢에서 $(m^2-2n-3)n=0$

$\therefore n=0$ 또는 $m^2-2n-3=0$

(i) $n=0$일 때,

㉡에 대입하면

$m^2=2m$, $m^2-2m=0$, $m(m-2)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=2$

즉, 순서쌍 (m, n)은 $(0, 0)$, $(2, 0)$의 2개이다.

(ii) $m^2-2n-3=0$일 때,

$n=\frac{m^2-3}{2}$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$m^2-\frac{m^2-3}{2}=2m$, $m^2-4m+3=0$

$(m-1)(m-3)=0$ $\therefore m=1$ 또는 $m=3$

이를 $n=\frac{m^2-3}{2}$에 대입하면

$m=1$일 때 $n=-1$, $m=3$일 때 $n=3$

즉, 순서쌍 (m, n)은 $(1, -1)$, $(3, 3)$의 2개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (m, n)의 개수는 $2+2=4$

20 답 5

이차방정식 $x^2+6x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=4$

즉, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$에서 $\alpha<0$, $\beta<0$이므로

$\sqrt{\alpha^2}\sqrt{\beta^2}=|\alpha||\beta|=(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta=4$

$$\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}=\frac{-\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2}}{-\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{-|\alpha|-|\beta|}{-\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$=\frac{-(-\alpha)-(-\beta)}{-\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\alpha+\beta}{-\sqrt{4}}=\frac{-6}{-2}=3$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-7x+12=0$이므로

$p=-7$, $q=12$ $\therefore p+q=5$

21 답 10

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+\alpha+1=0$, $\beta^2+\beta+1=0$ …… ㉠

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$\alpha+\beta=-1$ …… ㉡

$\therefore \alpha+1=-\beta$, $\beta+1=-\alpha$

이를 ㉠에 대입하면

$\alpha^2-\beta=0$, $\beta^2-\alpha=0$ $\therefore \alpha^2=\beta$, $\beta^2=\alpha$

㉡에서 $\alpha=-\beta-1$이므로

$f(\alpha^2)=-4\alpha$에서 $f(\beta)=-4(-\beta-1)$

$\therefore f(\beta)-4\beta-4=0$

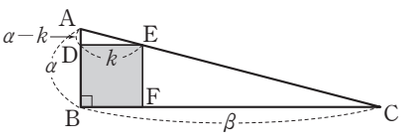
㉡에서 $\beta=-\alpha-1$이므로
$f(\beta^2)=-4\beta$에서 $f(\alpha)=-4(-\alpha-1)$
$\therefore f(\alpha)-4\alpha-4=0$
즉, 이차방정식 $f(x)-4x-4=0$의 두 근이 α, β이고, 이차항의 계수가 1이므로
$f(x)-4x-4=(x-\alpha)(x-\beta)$에서
$f(x)-4x-4=x^2+x+1$ $\therefore f(x)=x^2+5x+5$
따라서 $p=5$, $q=5$이므로 $p+q=10$

idea
22 답 -1
$f(x)=x^2-kx-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 γ, δ이고, 이차항의 계수가 1이므로
$f(x)=(x-\gamma)(x-\delta)$
한편 $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)=4k^2$에서
$\{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\}\{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\}=4k^2$
$f(\alpha)f(\beta)=4k^2$
$\therefore (\alpha^2-k\alpha-1)(\beta^2-k\beta-1)=4k^2$ …… ㉠
이차방정식 $x^2-x-k=0$의 두 근이 α, β이므로
$\alpha^2-\alpha-k=0$, $\beta^2-\beta-k=0$ $\therefore \alpha^2=\alpha+k$, $\beta^2=\beta+k$
또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-k$
즉, ㉠에서
$(\alpha^2-k\alpha-1)(\beta^2-k\beta-1)$
$=(\alpha+k-k\alpha-1)(\beta+k-k\beta-1)$
$=\{(1-k)\alpha-(1-k)\}\{(1-k)\beta-(1-k)\}$
$=(1-k)^2(\alpha-1)(\beta-1)$
$=(1-k)^2\{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\}=-k(1-k)^2$
따라서 $-k(1-k)^2=4k^2$이고, $k\neq0$이므로
$-(1-k)^2=4k$, $k^2+2k+1=0$
$(k+1)^2=0$ $\therefore k=-1$

23 답 ①
이차방정식 $f(x)=0$의 계수가 실수이고, 한 근이 $\alpha=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$이므로 다른 한 근은 $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$이다.
이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 근과 계수의 관계에 의하여
두 근의 합은 $\frac{1-i}{\sqrt{2}}+\frac{1+i}{\sqrt{2}}=-a$ $\therefore a=-\sqrt{2}$
두 근의 곱은 $\frac{1-i}{\sqrt{2}}\times\frac{1+i}{\sqrt{2}}=b$ $\therefore b=1$
$\therefore f(x)=x^2-\sqrt{2}x+1$
이차방정식 $x^2-\sqrt{2}x+1=0$의 한 근이 α이므로
$\alpha^2-\sqrt{2}\alpha+1=0$ $\therefore \alpha^2=\sqrt{2}\alpha-1$
또 $\alpha^2+1=\sqrt{2}\alpha$이므로 양변을 제곱하면 $\alpha^4+2\alpha^2+1=2\alpha^2$
$\therefore \alpha^4=-1$ $\therefore \alpha^5=\alpha^4\alpha=-\alpha$
$\therefore f(\alpha^5+2\alpha+\sqrt{2})=f(-\alpha+2\alpha+\sqrt{2})=f(\alpha+\sqrt{2})$
$=(\alpha+\sqrt{2})^2-\sqrt{2}(\alpha+\sqrt{2})+1$
$=\alpha^2+2\sqrt{2}\alpha+2-\sqrt{2}\alpha-2+1$
$=\alpha^2+\sqrt{2}\alpha+1$
$=(\sqrt{2}\alpha-1)+\sqrt{2}\alpha+1=2\sqrt{2}\alpha$
$=2\sqrt{2}\times\frac{1-i}{\sqrt{2}}=2-2i$

24 답 ②
이차방정식 $f(x)=0$의 계수가 유리수이고, $f(\sqrt{b}-1)=0$에서 $\sqrt{b}-1$이 한 근이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{b}-1$이다. ⟶ b가 소수이므로 $\sqrt{b}$는 무리수이다.
이차방정식 $x^2+ax-4=0$의 근과 계수의 관계에 의하여
두 근의 합은 $(\sqrt{b}-1)+(-\sqrt{b}-1)=-a$ $\therefore a=2$
두 근의 곱은 $(\sqrt{b}-1)(-\sqrt{b}-1)=-4$, $1-b=-4$ $\therefore b=5$
한편 $g(x)$를 $f(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=px+q$ (p, q는 상수)라 하면
$g(x)=f(x)Q(x)+px+q$ …… ㉠
이때 $f(x)$, $g(x)$는 계수가 유리수인 다항식이므로 p, q도 유리수이다.
$f(-\sqrt{5}-1)=0$이고, $g(-\sqrt{5}-1)=1+\sqrt{5}$이므로
㉠의 양변에 $x=-\sqrt{5}-1$을 대입하면
$1+\sqrt{5}=p(-\sqrt{5}-1)+q$, $(q-p)-p\sqrt{5}=1+\sqrt{5}$
즉, $q-p=1$, $-p=1$이므로 $p=-1$, $q=0$
따라서 $R(x)=-x$이므로 $R(a)=R(2)=-2$

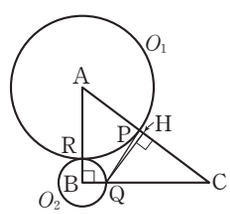
25 답 ⑤
이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$



그림과 같이 정사각형의 꼭짓점 중 B가 아닌 점을 각각 D, E, F라 할 때,
두 삼각형 ADE, ABC에서
$\angle ADE=\angle ABC=90^\circ$, $\angle DAE=\angle BAC$이므로
$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$ (AA 닮음)
즉, $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{BC}$이므로 정사각형의 한 변의 길이를 k라 하면
$(\alpha-k):\alpha=k:\beta$, $\alpha k=(\alpha-k)\beta$
$(\alpha+\beta)k=\alpha\beta$ $\therefore k=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

정사각형 DBFE의 넓이는 $k^2=\frac{1}{4}$, 둘레의 길이는 $4k=2$이므로
$\frac{1}{4}$, 2를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 4인 x에 대한 이차방정식은
$4\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-2)=0$ $\therefore 4x^2-9x+2=0$
따라서 $m=-9$, $n=2$이므로 $m+n=-7$

26 답 $\frac{9}{2}$
그림과 같이 변 AB와 원 O_1의 교점을 R, 점 Q에서 변 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 원 O_1의 반지름의 길이를 x라 하면
$\overline{AP}=\overline{AR}=x$, $\overline{BR}=\overline{BQ}=6-x$,
$\overline{CQ}=x+2$



두 삼각형 ABC, QHC에서
$\angle ABC=\angle QHC=90^\circ$, $\angle ACB=\angle QCH$이므로
$\triangle ABC\backsim\triangle QHC$ (AA 닮음)
즉, $\overline{CB}:\overline{CH}=\overline{CA}:\overline{CQ}$이므로 $8:\overline{CH}=10:\overline{CQ}$ $\therefore \overline{CH}=\frac{4}{5}\overline{CQ}$
또 $\overline{BA}:\overline{HQ}=\overline{CA}:\overline{CQ}$이므로 $6:\overline{HQ}=10:\overline{CQ}$ $\therefore \overline{HQ}=\frac{3}{5}\overline{CQ}$
$\therefore \overline{CH}=\frac{4}{5}(x+2)$, $\overline{HQ}=\frac{3}{5}(x+2)$

$\therefore \overline{PH}=10-\overline{AP}-\overline{CH}=10-x-\frac{4}{5}(x+2)$

$=\frac{42}{5}-\frac{9}{5}x=-\frac{3}{5}(3x-14)$

직각삼각형 PQH에서 $\overline{HQ}^2+\overline{HP}^2=\overline{PQ}^2$이므로

$\frac{9}{25}(x+2)^2+\frac{9}{25}(3x-14)^2=\frac{153}{10}$

$2(x+2)^2+2(3x-14)^2=85,\ 4x^2-32x+63=0$

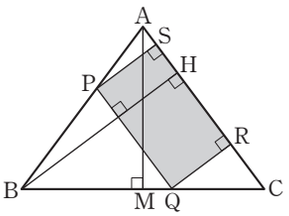
$(2x-7)(2x-9)=0 \quad \therefore x=\frac{7}{2}$ 또는 $x=\frac{9}{2}$

그런데 $x>4$이므로 $x=\frac{9}{2}$

따라서 원 O_1의 반지름의 길이는 $\frac{9}{2}$이다.

27 답 $8\sqrt{3}$

삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면



$\overline{BM}=\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=15$

직각삼각형 ABM에서 $\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=\overline{AB}^2$이므로

$\overline{AM}^2+15^2=25^2,\ \overline{AM}^2=400$

$\therefore \overline{AM}=20\ (\because \overline{AM}>0)$ ····· 배점 20%

삼각형 ABC의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AM}=\frac{1}{2}\times30\times20=300$

또 $S_1=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times25\times\overline{BH}$이므로

$\frac{25}{2}\overline{BH}=300 \quad \therefore \overline{BH}=24$ ····· 배점 20%

직각삼각형 ABH에서 $\overline{AH}^2+\overline{BH}^2=\overline{AB}^2$이므로

$\overline{AH}^2+24^2=25^2,\ \overline{AH}^2=49 \quad \therefore \overline{AH}=7\ (\because \overline{AH}>0)$

$\therefore \overline{CH}=\overline{AC}-\overline{AH}=25-7=18$

두 삼각형 APS, ABH에서

$\angle ASP=\angle AHB=90^\circ,\ \angle PAS=\angle BAH$이므로

$\triangle APS\backsim\triangle ABH$ (AA 닮음)

즉, $\overline{PS}:\overline{BH}=\overline{AS}:\overline{AH}$이므로 $\overline{PS}=x$라 하면

$x:24=\overline{AS}:7,\ 24\overline{AS}=7x \quad \therefore \overline{AS}=\frac{7}{24}x$

또 두 삼각형 CRQ, CHB에서

$\angle CRQ=\angle CHB=90^\circ,\ \angle QCR=\angle BCH$이므로

$\triangle CRQ\backsim\triangle CHB$ (AA 닮음)

즉, $\overline{RQ}:\overline{HB}=\overline{CR}:\overline{CH}$이므로

$x:24=\overline{CR}:18,\ 24\overline{CR}=18x \quad \therefore \overline{CR}=\frac{3}{4}x$

$\therefore \overline{SR}=\overline{AC}-\overline{AS}-\overline{CR}=25-\frac{7}{24}x-\frac{3}{4}x=25-\frac{25}{24}x$

이때 직사각형 PQRS의 넓이가 100이므로

$\left(25-\frac{25}{24}x\right)x=100,\ 25x-\frac{25}{24}x^2=100$

$24x-x^2=96 \quad \therefore x^2-24x+96=0$ ····· 배점 40%

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=24,\ \alpha\beta=96$

$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{24^2-4\times96}=\sqrt{192}=8\sqrt{3}$ ····· 배점 20%

STEP 3 최고난도 문제 | 57~59쪽

01 $-\frac{5}{3}$	02 ②	03 27	04 ③	05 6	06 -9
07 ㄱ, ㄴ	08 ①	09 $-6\sqrt{3}$, $6\sqrt{3}$	10 $\frac{5}{8}$		
11 50					

01 답 $-\frac{5}{3}$

1단계 $[x]=n$으로 놓고 주어진 방정식을 n에 대한 방정식으로 나타내기

$x=[x]+\frac{1}{3}$에서 $[x]=n$ (n은 정수)이라 하면

$x=n+\frac{1}{3},\ 3x=3n+1$

$\therefore [3x]=3n+1$ ⟶ n이 정수이므로 $3n+1$도 정수이다.

방정식 $[3x][x]+3[x]=\frac{7}{3}+|x|$에서

$(3n+1)n+3n=\frac{7}{3}+\left|n+\frac{1}{3}\right|$

2단계 근 구하기

(i) $n<-\frac{1}{3}$일 때,

$(3n+1)n+3n=\frac{7}{3}-\left(n+\frac{1}{3}\right)$

$3n^2+5n-2=0,\ (n+2)(3n-1)=0$

$\therefore n=-2$ 또는 $n=\frac{1}{3}$

그런데 n은 $-\frac{1}{3}$보다 작은 정수이므로 $n=-2$

(ii) $n\geq-\frac{1}{3}$일 때,

$(3n+1)n+3n=\frac{7}{3}+\left(n+\frac{1}{3}\right)$

$9n^2+9n-8=0 \quad \therefore n=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{6}$

그런데 정수 n은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $n=-2$이므로

$x=n+\frac{1}{3}=-2+\frac{1}{3}=-\frac{5}{3}$

02 답 ②

1단계 주어진 방정식의 정수인 근 알기

방정식 $x^2+a|x|+b=0$에서

$|x|^2+a|x|+b=0$

$|x|=t$로 놓으면 $t\geq0$이고

$t^2+at+b=0$ ····· ㉠

이 이차방정식의 양의 정수인 근이 존재해야 한다.

이차방정식 ㉠이 하나의 양의 정수인 근(중근 포함) $t=p$만을 가지면

$|x|=p$에서 $x=p$ 또는 $x=-p$이므로 두 근의 곱은

$-p^2<0$

이는 정수인 근의 곱이 256이라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 개의 양의 정수인 근을 가지므로

이를 α, β ($\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha\neq\beta$)라 하면

$t=\alpha$ 또는 $t=\beta$에서

$|x|=\alpha$ 또는 $|x|=\beta$

$\therefore x=\alpha$ 또는 $x=-\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=-\beta$

2단계 a, b의 값 구하기

정수인 근의 곱이 256이므로 $\alpha\times(-\alpha)\times\beta\times(-\beta)=256$

$(\alpha\beta)^2=256$ $\therefore \alpha\beta=16$ ($\because \alpha>0$, $\beta>0$)

α, β는 $\alpha\neq\beta$인 양의 정수이므로 순서쌍 (α, β)는

$(1, 16)$, $(2, 8)$, $(8, 2)$, $(16, 1)$

이차방정식 ㉠의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합은 $-a=17$ 또는 $-a=10$ $\therefore a=-17$ 또는 $a=-10$

두 근의 곱은 $b=16$

3단계 모든 $a+b$의 값의 합 구하기

$\therefore a+b=-17+16=-1$ 또는 $a+b=-10+16=6$

따라서 모든 $a+b$의 값의 합은

$-1+6=5$

03 답 27

1단계 m, n의 값 구하기

$\alpha=\dfrac{f(a)}{a-b}$, $\beta=\dfrac{f(b)}{b-a}$라 하면

$$\alpha+\beta=\frac{f(a)}{a-b}+\frac{f(b)}{b-a}=\frac{f(a)}{a-b}-\frac{f(b)}{a-b}$$
$$=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{7(a-b)}{a-b}=7$$

$$\alpha\beta=\frac{f(a)}{a-b}\times\frac{f(b)}{b-a}=-\frac{f(a)f(b)}{(a-b)^2}=-\frac{-12(a-b)^2}{(a-b)^2}=12$$

따라서 두 근이 α, β이고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-7x+12=0$ $\therefore m=-7$, $n=12$

2단계 $\dfrac{f(a)}{a-b}$, $\dfrac{f(b)}{b-a}$의 값 구하기

이차방정식 $x^2-7x+12=0$에서

$(x-3)(x-4)=0$ $\therefore x=3$ 또는 $x=4$

이때 $\alpha-\beta=\dfrac{f(a)}{a-b}-\dfrac{f(b)}{b-a}=\dfrac{f(a)+f(b)}{a-b}>0$ → $a>b$에서 $a-b>0$, $f(a)+f(b)>0$이므로 $\dfrac{f(a)+f(b)}{a-b}>0$

즉, $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=4$, $\beta=3$

3단계 $\dfrac{nf(a)-mf(b)}{a-b}$의 값 구하기

$$\therefore \frac{nf(a)-mf(b)}{a-b}=n\times\frac{f(a)}{a-b}+m\times\frac{f(b)}{b-a}=n\alpha+m\beta$$
$$=12\times4+(-7)\times3=48-21=27$$

04 답 ③

1단계 α, $\dfrac{1}{\alpha}$ 사이의 관계식 구하기

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근이 α이므로 $\alpha^2-\alpha+1=0$

$\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면 $\alpha-1+\dfrac{1}{\alpha}=0$ …… ㉠

$\therefore \alpha=-\dfrac{1}{\alpha}+1$, $\dfrac{1}{\alpha}=-\alpha+1$

2단계 α, $\dfrac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하는 이차방정식 세우기

$f(\alpha)=\dfrac{m}{\alpha}+5$에서 $f(\alpha)=m(-\alpha+1)+5$

$\therefore f(\alpha)+m\alpha-m-5=0$

$f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=m\alpha+5$에서 $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=m\left(-\dfrac{1}{\alpha}+1\right)+5$

$\therefore f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)+\dfrac{m}{\alpha}-m-5=0$

따라서 α, $\dfrac{1}{\alpha}$은 이차방정식 $f(x)+mx-m-5=0$의 두 근이다.

3단계 $f(1)$의 값 구하기

㉠에서 $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=1$이고 $\alpha\times\dfrac{1}{\alpha}=1$이므로 이차항의 계수가 1이고 두 근의 합이 1, 두 근의 곱이 1인 이차방정식은

$x^2-x+1=0$

따라서 $f(x)+mx-m-5=x^2-x+1$이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)-5=1$ $\therefore f(1)=6$

다른 풀이

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D=1-4=-3<0$이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이때 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 계수가 실수이고 한 근이 허수 α이므로 다른 한 근은 α의 켤레복소수인 $\bar{\alpha}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\bar{\alpha}=1$, $\alpha\bar{\alpha}=1$

$\therefore \alpha=1-\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}=1-\alpha$, $\bar{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$

$f(\alpha)=\dfrac{m}{\alpha}+5$에서 $f(\alpha)=m\bar{\alpha}+5$

$f(\alpha)=m(1-\alpha)+5$ $\therefore f(\alpha)+m\alpha-m-5=0$

$f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=m\alpha+5$에서 $f(\bar{\alpha})=m\alpha+5$

$f(\bar{\alpha})=m(1-\bar{\alpha})+5$ $\therefore f(\bar{\alpha})+m\bar{\alpha}-m-5=0$

따라서 이차방정식 $f(x)+mx-m-5=0$의 두 근이 α, $\bar{\alpha}$이고, 이차항의 계수가 1이므로

$f(x)+mx-m-5=(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$

즉, $f(x)+mx-m-5=x^2-x+1$이므로

$f(x)=x^2-(m+1)x+m+6$

$\therefore f(1)=1-(m+1)+m+6=6$

05 답 6

1단계 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식 세우기

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 서로 다른 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$ …… ㉠, $\alpha\beta=b$ …… ㉡

이차방정식 $x^2+3ax+3b=0$의 서로 다른 두 근이 $\alpha+2$, $\beta+2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+2)+(\beta+2)=-3a$ …… ㉢, $(\alpha+2)(\beta+2)=3b$ …… ㉣

2단계 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기

㉠, ㉢에서 $-a+4=-3a$ $\therefore a=-2$

㉠, ㉡을 ㉣의 정리한 식에 대입하면

$b+2\times2+4=3b$, $2b=8$ $\therefore b=4$

$\therefore \alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=4$

3단계 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값 구하기

한편 $\alpha^2-2\alpha+4=0$에서 $\alpha^3=-8$, $\beta^2-2\beta+4=0$에서 $\beta^3=-8$이므로

$\alpha+\beta=2>0$ → 양변에 $\alpha+2$를 곱하면 $(\alpha+2)(\alpha^2-2\alpha+4)=0$ $\therefore \alpha^3+8=0$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times4=-4<0$

$\alpha^3+\beta^3=(-8)+(-8)=-16<0$

$\alpha^4+\beta^4=\alpha^3\times\alpha+\beta^3\times\beta=-8(\alpha+\beta)=-8\times2=-16<0$

$\alpha^5+\beta^5=\alpha^3\times\alpha^2+\beta^3\times\beta^2=-8(\alpha^2+\beta^2)=-8\times(-4)=32>0$

$\alpha^6+\beta^6=(\alpha^3)^2+(\beta^3)^2=(-8)^2+(-8)^2=128>0$

$\alpha^7+\beta^7=(\alpha^3)^2\times\alpha+(\beta^3)^2\times\beta=64(\alpha+\beta)=64\times2=128>0$

따라서 $\alpha^6+\beta^6=\alpha^7+\beta^7=128$이므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6이다.

06 답 -9

1단계 이차방정식의 켤레근을 이용하여 식 세우기

이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 계수가 실수이고 서로 다른 두 허근 α, β를 가지므로 $\alpha=a+bi$(a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면 $\beta=a-bi$이다.

$\therefore \alpha^3=(a+bi)^3=a^3+3a^2bi+3a(bi)^2+(bi)^3$

$=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$

같은 방법으로 하면 $\beta^3=(a-bi)^3=(a^3-3ab^2)-(3a^2b-b^3)i$

이때 ㈏에서 α^3, β^3이 모두 실수이므로

$3a^2b-b^3=0$, $b(3a^2-b^2)=0$

$\therefore 3a^2-b^2=0$ ($\because b\neq0$) …… ㉠

2단계 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식 세우기

한편 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=(a+bi)+(a-bi)=p$ $\therefore 2a=p$ …… ㉡

$\alpha\beta=(a+bi)(a-bi)=p+3$ $\therefore a^2+b^2=p+3$ …… ㉢

㉠, ㉢에서 $4a^2=p+3$이므로 $p^2=p+3$ ($\because$ ㉡)

3단계 $(\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4)+(\beta^2-\beta^3+\beta^4)$의 값 구하기

따라서 $\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=p+3$, $p^2=p+3$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=p^2-2(p+3)$

$=(p+3)-2(p+3)=-(p+3)$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=p^3-3p(p+3)$

$=p(p+3)-3p(p+3)=-2p^2-6p$

$=-2(p+3)-6p=-8p-6$

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=(p+3)^2-2(p+3)^2$

$=-p^2-6p-9=-(p+3)-6p-9=-7p-12$

$\therefore (\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4)+(\beta^2-\beta^3+\beta^4)$

$=(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha^3+\beta^3)+(\alpha^4+\beta^4)$

$=-(p+3)-(-8p-6)+(-7p-12)$

$=-9$

다른 풀이

이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 허근이 α이므로

$\alpha^2-p\alpha+p+3=0$

즉, $\alpha^2-p\alpha=-p-3$이므로 $\alpha^2-p\alpha+p^2=p^2-p-3$

양변에 $\alpha+p$를 곱하면 $(\alpha+p)(\alpha^2-p\alpha+p^2)=(\alpha+p)(p^2-p-3)$

$\alpha^3+p^3=(p^2-p-3)\alpha+p^3-p^2-3p$

$\therefore \alpha^3=(p^2-p-3)\alpha-p^2-3p$

이때 α^3이 실수이려면 $p^2-p-3=0$, 즉 $p^2=p+3$이어야 한다.

한편 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=p+3$

따라서 $\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=p+3$, $p^2=p+3$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=p^2-2(p+3)$

$=(p+3)-2(p+3)=-(p+3)$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=p^3-3p(p+3)$

$=p(p+3)-3p(p+3)=-2p^2-6p$

$=-2(p+3)-6p=-8p-6$

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=(p+3)^2-2(p+3)^2$

$=-p^2-6p-9=-(p+3)-6p-9=-7p-12$

$\therefore (\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4)+(\beta^2-\beta^3+\beta^4)$

$=(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha^3+\beta^3)+(\alpha^4+\beta^4)$

$=-(p+3)-(-8p-6)+(-7p-12)$

$=-9$

07 답 ㄱ, ㄴ

1단계 $\alpha+\bar{\alpha}$, $\alpha\bar{\alpha}$의 값 구하기

이차방정식 $x^2+\sqrt{3}x+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D=3-4=-1<0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이때 이차방정식 $x^2+\sqrt{3}x+1=0$의 계수가 실수이고 한 근이 α이므로 다른 한 근은 $\bar{\alpha}$이다.

즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\bar{\alpha}=-\sqrt{3}$, $\alpha\bar{\alpha}=1$

2단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. $\alpha^2+\bar{\alpha}^2=(\alpha+\bar{\alpha})^2-2\alpha\bar{\alpha}$

$=(-\sqrt{3})^2-2\times1=1$

3단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. $\alpha^3+\bar{\alpha}^3=(\alpha+\bar{\alpha})^3-3\alpha\bar{\alpha}(\alpha+\bar{\alpha})$

$=(-\sqrt{3})^3-3\times1\times(-\sqrt{3})=0$ …… ㉠

$\alpha\bar{\alpha}=1$에서 $\alpha^3\bar{\alpha}^3=1$ …… ㉡

㉠에서 $\bar{\alpha}^3=-\alpha^3$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$-\alpha^6=1$ $\therefore \alpha^6=-1$ …… ㉢

㉠에서 $\alpha^3=-\bar{\alpha}^3$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$-\bar{\alpha}^6=1$ $\therefore \bar{\alpha}^6=-1$

$\therefore \dfrac{1}{1+\alpha^8}+\dfrac{1}{1+\bar{\alpha}^8}=\dfrac{1}{1+\alpha^6\alpha^2}+\dfrac{1}{1+\bar{\alpha}^{6-2}\alpha^2}$

$=\dfrac{1}{1-\alpha^2}+\dfrac{1}{1-\bar{\alpha}^2}$

$=\dfrac{(1-\bar{\alpha}^2)+(1-\alpha^2)}{(1-\alpha^2)(1-\bar{\alpha}^2)}$

$=\dfrac{2-(\alpha^2+\bar{\alpha}^2)}{1-(\alpha^2+\bar{\alpha}^2)+(\alpha\bar{\alpha})^2}$

$=\dfrac{2-1}{1-1+1}=1$

4단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. ㉢에서 $\alpha^6=-1$이므로 $\alpha^{12}=(\alpha^6)^2=(-1)^2=1$

$\therefore \alpha^2+\alpha^4+\alpha^6+\cdots+\alpha^{20}$

$=(\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6+\alpha^8+\alpha^{10})+\alpha^{12}(1+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6+\alpha^8)$

$=(\alpha^2+\alpha^4-1-\alpha^2-\alpha^4)+(1+\alpha^2+\alpha^4-1-\alpha^2)$

$=\alpha^4-1$

같은 방법으로 하면 $\bar{\alpha}^2+\bar{\alpha}^4+\bar{\alpha}^6+\cdots+\bar{\alpha}^{20}=\bar{\alpha}^4-1$

$\therefore (\alpha^2+\bar{\alpha}^2)+(\alpha^4+\bar{\alpha}^4)+(\alpha^6+\bar{\alpha}^6)+\cdots+(\alpha^{20}+\bar{\alpha}^{20})$

$=(\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6+\cdots+\alpha^{20})+(\bar{\alpha}^2+\bar{\alpha}^4+\bar{\alpha}^6+\cdots+\bar{\alpha}^{20})$

$=(\alpha^4-1)+(\bar{\alpha}^4-1)$

$=\alpha^4+\bar{\alpha}^4-2$

$=(\alpha^2+\bar{\alpha}^2)^2-2(\alpha\bar{\alpha})^2-2$

$=1-2\times1-2=-3$

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

08 답 ①

1단계 a, b, c, d에 대한 식 세우기

$\alpha=m+ni$, $\beta=p+qi$(m, n, p, q는 실수)라 하면

$\alpha+\beta=(m+ni)+(p+qi)=(m+p)+(n+q)i$

이때 $\alpha+\beta$는 순허수이므로

$m+p=0$, $n+q\neq0$ …… ㉠

$\therefore p=-m$

즉, $\beta=-m+qi$이므로

$\alpha\beta=(m+ni)(-m+qi)=(-m^2-nq)+(mq-mn)i$

이때 $\alpha\beta$는 실수이므로

$mq-mn=0$, $m(q-n)=0$ $\therefore m=0$ 또는 $q=n$

그런데 $m=0$이면 $\alpha=ni$

이때 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 계수가 실수이고 한 근이 $\alpha=ni$이므로 다른 한 근은 $-ni$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$ni+(-ni)=-a$ $\therefore a=0$

그런데 a는 0이 아닌 실수이므로 $m\neq0$이고 $q=n$이다.

이때 ㉠에서 $n+q\neq0$이므로

$2n\neq0$ $\therefore n\neq0$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 계수가 실수이고 한 근이 $\alpha=m+ni$이므로 다른 한 근은 $m-ni$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(m+ni)+(m-ni)=-a$, $(m+ni)(m-ni)=b$

$\therefore a=-2m$, $b=m^2+n^2$

또 이차방정식 $x^2+cx+d=0$의 계수가 실수이고 한 근이 $\beta=-m+ni$이므로 다른 한 근은 $-m-ni$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-m+ni)+(-m-ni)=-c$, $(-m+ni)(-m-ni)=d$

$\therefore c=2m$, $d=m^2+n^2$

2단계 $abcd$**의 값 구하기**

이차방정식 $x^2+(a-c)x+b+d=0$의 계수가 실수이고 한 근이 $2+i$이므로 다른 한 근은 $2-i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합은 $(2+i)+(2-i)=-(a-c)$

$4=-(-2m-2m)$ $\therefore m=1$

두 근의 곱은 $(2+i)(2-i)=b+d$

$5=2(m^2+n^2)$ $\therefore m^2+n^2=\frac{5}{2}$

따라서 $a=-2$, $b=d=\frac{5}{2}$, $c=2$이므로

$abcd=-2\times\frac{5}{2}\times2\times\frac{5}{2}=-25$

09 답 $-6\sqrt{3}$, $6\sqrt{3}$

1단계 α^3**이 실수임을 알기**

α가 실수이면 β도 실수이므로

$\alpha^4+\beta^4\geq0$

이는 ㈏를 만족시키지 않으므로 α는 허수이다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 계수가 실수이고 한 근이 허수 α이므로 다른 한 근은 α의 켤레복소수인 $\overline{\alpha}$이다.

$\therefore \beta=\overline{\alpha}$

㈎에서 $\frac{\alpha^2}{\beta}$이 실수이므로 $\frac{\alpha^2}{\beta}=\frac{\alpha^2}{\overline{\alpha}}=\frac{\alpha^3}{\alpha\overline{\alpha}}$이 실수이다.

이때 $\alpha\overline{\alpha}$는 항상 실수이므로 α^3도 실수이다.

2단계 b**를** a**에 대한 식으로 나타내기**

한편 α는 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이므로

$\alpha^2+a\alpha+b=0$, $\alpha^2=-a\alpha-b$

$\therefore \alpha^3=\alpha^2\alpha=(-a\alpha-b)\alpha=-a\alpha^2-b\alpha$

$=-a(-a\alpha-b)-b\alpha=(a^2-b)\alpha+ab$

이때 α^3이 실수이므로 $a^2-b=0$ $\therefore b=a^2$

3단계 a**의 값 구하기**

따라서 이차방정식 $x^2+ax+a^2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=a^2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-a)^2-2a^2=-a^2$,

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2=(-a^2)^2-2a^4=-a^4$

㈏에서 $\alpha^4+\beta^4=-9$이므로 $-a^4=-9$, $a^2=3$ ($\because a$는 실수)

$\therefore a=\pm\sqrt{3}$

4단계 $\alpha^3+\beta^3$**의 값 구하기**

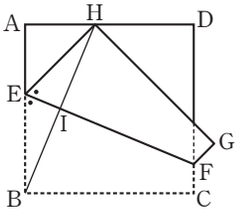
$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-a)^3-3a^2\times(-a)$

$=2a^3=2\times(\pm\sqrt{3})^3=\pm6\sqrt{3}$

10 답 $\frac{5}{8}$

1단계 $\overline{CF}$**를** a, b**에 대한 식으로 나타내기**

그림과 같이 두 선분 BH, EF가 만나는 점을 I라 하자.



두 사각형 EBCF, EHGF는 합동이므로

두 삼각형 EIB, EIH에서

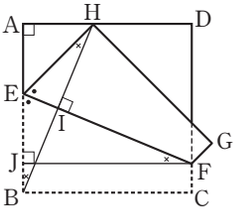
$\overline{BE}=\overline{HE}$, $\angle BEI=\angle HEI$

$\overline{EI}$는 공통이므로

$\triangle EIB\equiv\triangle EIH$ (SAS 합동)

즉, $\angle EIB=\angle EIH$이므로 $\angle EIB=\angle EIH=90^\circ$

그림과 같이 점 F에서 변 AB에 내린 수선의 발을 J라 하면



두 삼각형 EBI, EFJ에서

$\angle EIB=\angle EJF=90^\circ$, $\angle BEI=\angle FEJ$

이므로 $\triangle EBI\backsim\triangle EFJ$ (AA 닮음)

이때 두 삼각형 EJF, HAB에서

$\angle EFJ=\angle HBA$, $\overline{JF}=\overline{AB}$,

$\angle EJF=\angle HAB=90^\circ$이므로

$\triangle EJF\equiv\triangle HAB$ (ASA 합동)

즉, $\overline{JE}=\overline{AH}=b$이므로 $\overline{CF}=a-b$

2단계 a, b**의 값 구하기**

직각삼각형 AHE에서 $\overline{AH}^2+\overline{AE}^2=\overline{HE}^2$이므로

$b^2+(2-a)^2=a^2$, $b^2+4-4a=0$

$\therefore a=\frac{1}{4}b^2+1$ …… ㉠

사각형 EBCF의 넓이가 $\frac{13}{8}$이므로 $\frac{1}{2}\times(\overline{BE}+\overline{CF})\times\overline{BC}=\frac{13}{8}$

$\frac{1}{2}\times\{a+(a-b)\}\times2=\frac{13}{8}$, $2a-b=\frac{13}{8}$

이 식에 ㉠을 대입하면

$2\left(\frac{1}{4}b^2+1\right)-b=\frac{13}{8}$, $4b^2-8b+3=0$

$(2b-1)(2b-3)=0$ $\therefore b=\frac{1}{2}$ 또는 $b=\frac{3}{2}$

이를 ㉠에 대입하면

$b=\frac{1}{2}$일 때 $a=\frac{17}{16}$, $b=\frac{3}{2}$일 때 $a=\frac{25}{16}$

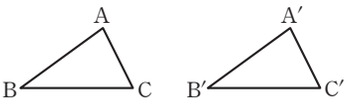
3단계 **모든** $a-b$**의 값의 합 구하기**

따라서 $a-b=\frac{9}{16}$ 또는 $a-b=\frac{1}{16}$이므로

모든 $a-b$의 값의 합은 $\frac{9}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{8}$

개념 NOTE

다음의 각 경우에 두 삼각형 ABC, A′B′C′은 서로 합동이다.



(1) 대응하는 세 변의 길이가 각각 같을 때 (SSS 합동)
➡ $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\overline{BC}=\overline{B'C'}$, $\overline{AC}=\overline{A'C'}$

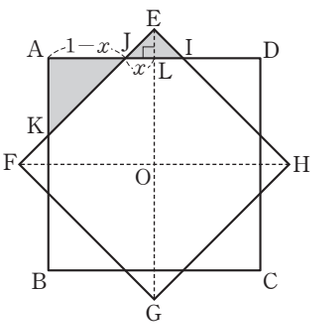
(2) 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때 (SAS 합동)
➡ $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\overline{BC}=\overline{B'C'}$, $\angle B=\angle B'$

(3) 대응하는 한 변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같을 때 (ASA 합동)
➡ $\overline{BC}=\overline{B'C'}$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$

11 답 50

1단계 $\frac{1}{2}\overline{JI}$의 값 구하기

두 정사각형의 대각선이 모두 한 점 O에서 만나고 정사각형 EFGH의 대각선이 정사각형 ABCD의 한 변을 이등분하므로 주어진 도형은 각각의 대각선에 대하여 대칭이다.
꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선의 발을 L이라 하고, $\overline{JL}=x$라 하면 삼각형 EJL은 직각이등변삼각형이므로 $\overline{EL}=x$



따라서 삼각형 EJI의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{JI}\times\overline{EL}=\frac{1}{2}\times 2x\times x=x^2$

삼각형 AKJ도 직각이등변삼각형이고, $\overline{AJ}=1-x$이므로
삼각형 AKJ의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AJ}\times\overline{AK}=\frac{1}{2}(1-x)^2$

삼각형 AKJ의 넓이가 삼각형 EJI의 넓이의 $\frac{3}{2}$배이어야 하므로

$\frac{1}{2}(1-x)^2=\frac{3}{2}x^2$, $1-2x+x^2=3x^2$

$2x^2+2x-1=0$ $\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

2단계 k의 값 구하기

직각이등변삼각형 EJL에서 $\overline{EJ}=\sqrt{2}x$, 직각이등변삼각형 AKJ에서 $\overline{KJ}=\sqrt{2}(1-x)$
즉, $\overline{EF}=2\overline{EJ}+\overline{KJ}$이므로 $2k=2\sqrt{2}x+\sqrt{2}(1-x)$

$\therefore k=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+1\right)$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
$=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}$

3단계 $100(p+q)$의 값 구하기

따라서 $p=\frac{1}{4}$, $q=\frac{1}{4}$이므로

$100(p+q)=100\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=50$

05 이차방정식과 이차함수

STEP 1 핵심 문제 | 60~61쪽

01 1, $\frac{7}{4}$ **02** ④ **03** ③ **04** ② **05** ②
06 $-2<k<2$ **07** -16 **08** ① **09** ④ **10** ③
11 8 **12** ②

01 답 1, $\frac{7}{4}$

이차함수 $y=x^2+2(2m-3)x-m-2$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 α, β라 하면 두 점 사이의 거리가 4이므로 $|\alpha-\beta|=4$
이차방정식 $x^2+2(2m-3)x-m-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-2(2m-3)$, $\alpha\beta=-m-2$
$|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2=16$이므로
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16$
$4(2m-3)^2-4(-m-2)=16$, $4m^2-11m+7=0$
$(m-1)(4m-7)=0$ $\therefore m=1$ 또는 $m=\frac{7}{4}$

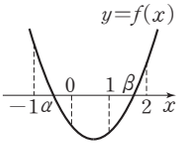
02 답 ④

이차함수 $y=x^2-2(a-1)x-b^2+25$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-2(a-1)x-b^2+25=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=(a-1)^2+b^2-25=0$ $\therefore (a-1)^2+b^2=25$

a, b는 자연수이므로 $a-1$은 0 또는 자연수이다.
이때 제곱수의 합이 25가 되는 경우는 0과 5^2의 합인 경우와 3^2과 4^2의 합인 경우가 있다.
즉, 순서쌍 $(a-1, b)$는 $(0, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$
따라서 순서쌍 (a, b)는 $(1, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$ …… ㉠
이차함수 $y=-x^2+2bx+c^2-25$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로
이차방정식 $-x^2+2bx+c^2-25=0$의 판별식을 D_2라 하면
$\frac{D_2}{4}=b^2+c^2-25<0$ $\therefore c^2<25-b^2$ …… ㉡
이때 ㉠에서 b의 값은 3, 4, 5이므로
(i) $b=3$일 때,
㉡에서 $c^2<16$이므로 자연수 c의 값은 1, 2, 3이다.
(ii) $b=4$일 때,
㉡에서 $c^2<9$이므로 자연수 c의 값은 1, 2이다.
(iii) $b=5$일 때,
㉡에서 $c^2<0$이므로 자연수 c는 존재하지 않는다.
(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 (a, b, c)는 $(4, 4, 1)$, $(4, 4, 2)$, $(5, 3, 1)$, $(5, 3, 2)$, $(5, 3, 3)$의 5개이다.

03 답 ③

$f(x)=5x^2-(a+1)x-a$라 할 때, 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 α, β에 대하여 $-1<\alpha<0$, $1<\beta<2$이려면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같이 -1과 0 사이에서 x축과 한 점에서 만나고, 1과 2 사이에서 x축과 한 점에서 만나야 한다.



즉, $f(-1)>0$, $f(0)<0$, $f(1)<0$, $f(2)>0$이므로

$f(-1)>0$에서 $6>0$

$f(0)<0$에서 $-a<0$ $\therefore a>0$ ····· ㉠

$f(1)<0$에서 $-2a+4<0$ $\therefore a>2$ ····· ㉡

$f(2)>0$에서 $-3a+18>0$ $\therefore a<6$ ····· ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $2<a<6$이므로 정수 a는 3, 4, 5의 3개이다.

04 답 ②

이차함수 $y=ax^2(a>0)$의 그래프와 직선 $y=x+6$이 만나는 점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2=x+6$, 즉 $ax^2-x-6=0$의 두 실근 α, $\beta(\alpha<\beta)$와 같으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{1}{a}$, $\alpha\beta=-\frac{6}{a}$

이때 $\overline{AC}=\beta-\alpha$이고, 직선 $y=x+6$의 기울기가 1이므로

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BC}}{\beta-\alpha}=1$에서 $\beta-\alpha=\overline{BC}=\frac{7}{2}$

따라서 $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$\left(\frac{7}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2-4\times\left(-\frac{6}{a}\right)$, $\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{24}{a}-\frac{49}{4}=0$

$49a^2-96a-4=0$, $(49a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=-\frac{2}{49}$ 또는 $a=2$

그런데 $a>0$이므로 $a=2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times\left(-\frac{6}{2}\right)$

$=\frac{1}{4}+6=\frac{25}{4}$

05 답 ②

이차함수 $y=x^2-4kx+4k^2+k$의 그래프와 직선 $y=2ax+b$가 접하므로 이차방정식 $x^2-4kx+4k^2+k=2ax+b$, 즉

$x^2-2(2k+a)x+4k^2+k-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k+a)^2-4k^2-k+b=0$

$4ak+a^2-k+b=0$

$(4a-1)k+a^2+b=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4a-1=0$, $a^2+b=0$ $\therefore a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{16}$

$\therefore a+b=\frac{3}{16}$

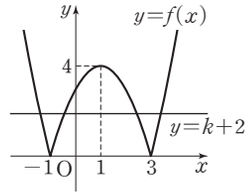
06 답 $-2<k<2$

방정식 $|x^2-2x-3|=k+2$가 서로 다른 네 개의 실근을 가지면 함수 $y=|x^2-2x-3|$의 그래프와 직선 $y=k+2$가 서로 다른 네 점에서 만난다.

$f(x)=|x^2-2x-3|$이라 할 때, $x^2-2x-3=0$에서

$(x+1)(x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

또 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



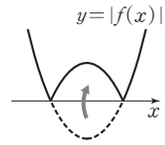
이때 교점이 4개가 되도록 직선 $y=k+2$를 그어 보면

$0<k+2<4$

$\therefore -2<k<2$

배움 NOTE

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x축보다 아래쪽에 있는 부분을 x축에 대하여 대칭이동하여 그린다.



07 답 -16

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 만나는 두 점의 x좌표가 2, 6이므로 이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 두 근이 2, 6이다. ····· 배점 20%

이때 $h(x)=f(x)-g(x)$에서 이차방정식 $h(x)=0$의 두 근이 2, 6이므로 $h(x)$의 최고차항의 계수를 $a(a<0)$라 하면

$h(x)=a(x-2)(x-6)$

$=a(x^2-8x+12)$

$=a(x-4)^2-4a$ ····· 배점 30%

한편 $0\le x\le 3$에서 이차함수 $h(x)$는 $x=3$일 때 최댓값이 $-3a$이므로

$-3a=6$ $\therefore a=-2$

$\therefore h(x)=-2(x-4)^2+8$ ····· 배점 30%

즉, $0\le x\le 6$에서 함수 $h(x)$는 $x=4$일 때 최댓값이 8, $x=0$일 때 최솟값이 -24이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 -16이다. ····· 배점 20%

08 답 ①

$f(x)=x^2-(2a-b)x+a^2-4b$

$=\left(x-\frac{2a-b}{2}\right)^2+a^2-4b-\left(\frac{2a-b}{2}\right)^2$

㈎에서 이차함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 가지므로

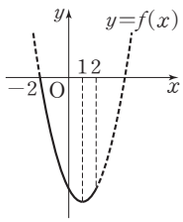
$\frac{2a-b}{2}=1$ $\therefore b=2a-2$

$\therefore f(x)=x^2-\{2a-(2a-2)\}x+a^2-4(2a-2)$

$=x^2-2x+a^2-8a+8$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 $x=1$이므로 $-2\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값이 $f(-2)$이다.

㈏에서 $f(-2)=0$이므로 이차함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, $f(-2)=a^2-8a+16=(a-4)^2=0$이므로

$a=4$

$\therefore b=2a-2=2\times4-2=6$

$\therefore a+b=10$

09 답 ④

$x^2-4x+1=t$로 놓으면

$t=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$ ····· ㉠

$1\le x\le 4$에서 ㉠은 $x=4$일 때 최댓값이 1, $x=2$일 때 최솟값이 -3이므로 $-3\le t\le 1$

주어진 함수는

$y=-(x^2-4x+1)^2-4(x^2-4x)-2$

$=-t^2-4(t-1)-2$

$=-t^2-4t+2$

$=-(t+2)^2+6$ ····· ㉡

즉, $-3\le t\le 1$에서 ㉡은 $t=-2$일 때 최댓값이 6, $t=1$일 때 최솟값이 -3이다.
따라서 $M=6$, $m=-3$이므로
$M-m=9$

10 답 ③

$z^2+(\overline{z})^2=0$에서 $(a+2bi)^2+(a-2bi)^2=0$
$a^2+4abi-4b^2+a^2-4abi-4b^2=0$
$2a^2-8b^2=0$ $\therefore b^2=\frac{1}{4}a^2$
이를 $6a+12b^2+11$에 대입하면
$6a+12b^2+11=6a+12\times\frac{1}{4}a^2+11$
$=3a^2+6a+11$
$=3(a+1)^2+8$
따라서 $6a+12b^2+11$은 $a=-1$일 때 최솟값이 8이다.

11 답 8

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 이차함수 $y=x^2-5x+6$의 그래프 위의 점이므로
$b=a^2-5a+6$ …… ㉠
이차함수 $y=x^2-5x+6$의 그래프가 y축과 만나는 점은 $\mathrm{A}(0,\ 6)$
이차함수 $y=x^2-5x+6$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하면
$x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=3$
$\therefore \mathrm{B}(2,\ 0)$, $\mathrm{C}(3,\ 0)$
점 P가 점 A에서 점 B를 지나 점 C까지 움직이므로 $0\le a\le 3$
$a+b$에 ㉠을 대입하면
$a+b=a+a^2-5a+6$
$=a^2-4a+6$
$=(a-2)^2+2$ …… ㉡
즉, $0\le a\le 3$에서 ㉡은 $a=0$일 때 최댓값이 6, $a=2$일 때 최솟값이 2이다.
따라서 $a+b$의 최댓값과 최솟값의 합은
$6+2=8$

12 답 ②

상품 한 개의 작년 가격을 a라 하면 가격을 작년보다 $x\,\%$만큼 내린 올해 상품 한 개의 가격은
$a\left(1-\frac{x}{100}\right)$
상품의 작년 판매량을 b라 하면 올해 판매량은 작년보다 $2.5x\,\%$만큼 증가하므로 올해 판매량은
$b\left(1+\frac{2.5x}{100}\right)=b\left(1+\frac{x}{40}\right)$
즉, 올해 총 판매 금액은
$ab\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{40}\right)=-\frac{ab}{4000}(x-100)(x+40)$
$=-\frac{ab}{4000}(x^2-60x-4000)$
$=-\frac{ab}{4000}(x-30)^2+\frac{49}{40}ab$ …… ㉠
따라서 $0\le x\le 50$에서 ㉠은 $x=30$일 때 최댓값이 $\frac{49}{40}ab$이다.
이때 $\frac{49}{40}ab=\left(1+\frac{22.5}{100}\right)ab$이므로 올해 총 판매 금액의 최댓값은 작년 총 판매 금액인 ab보다 $22.5\,\%$ 증가한 것이다.
$\therefore p=22.5$

STEP 2 고난도 문제 | 62~66쪽

01 $3\sqrt{2}$	02 2	03 ④	04 ④	05 ③	06 39
07 $\frac{7}{4}$	08 ③	09 45	10 9	11 ④	12 $\frac{3}{2}$
13 $\frac{400}{9}$ m		14 28	15 ⑤	16 ③	17 0
18 67	19 121	20 ⑤	21 98	22 $12\sqrt{3}-7$	

01 답 $3\sqrt{2}$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 α, β라 하면
$\overline{\mathrm{AB}}^2=|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2$
이차함수 $y=f(ax-1)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 이차방정식 $f(ax-1)=0$의 실근과 같다.
이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$
즉, 이차방정식 $f(ax-1)=0$의 두 근은
$ax-1=\alpha$ 또는 $ax-1=\beta$
$\therefore x=\frac{\alpha+1}{a}$ 또는 $x=\frac{\beta+1}{a}$
$\therefore \overline{\mathrm{CD}}^2=\left|\frac{\alpha+1}{a}-\frac{\beta+1}{a}\right|^2=\frac{(\alpha-\beta)^2}{a^2}$
$\overline{\mathrm{AB}}^2=18\overline{\mathrm{CD}}^2$에서 $(\alpha-\beta)^2=\frac{18(\alpha-\beta)^2}{a^2}$
이때 $\alpha\ne\beta$에서 $(\alpha-\beta)^2\ne 0$이므로
$1=\frac{18}{a^2}$, $a^2=18$ $\therefore a=3\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

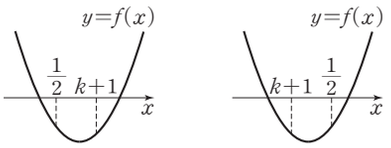
다른 풀이

이차함수 $y=x^2+ax+a$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 α, β라 하면 이차방정식 $x^2+ax+a=0$의 두 근이 α, β이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=a$
$\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2=|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2$
$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2-4a$
$f(ax-1)=(ax-1)^2+a(ax-1)+a=a^2x^2+(a^2-2a)x+1$에서 이차함수 $y=a^2x^2+(a^2-2a)x+1$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 γ, δ라 하면 이차방정식 $a^2x^2+(a^2-2a)x+1=0$의 두 근이 γ, δ이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\gamma+\delta=-\frac{a^2-2a}{a^2}=-\frac{a-2}{a}$, $\gamma\delta=\frac{1}{a^2}$
$\therefore \overline{\mathrm{CD}}^2=|\gamma-\delta|^2=(\gamma-\delta)^2=(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta$
$=\frac{(a-2)^2}{a^2}-\frac{4}{a^2}=\frac{a^2-4a}{a^2}$
$\overline{\mathrm{AB}}^2=18\overline{\mathrm{CD}}^2$에서 $a^2-4a=\frac{18(a^2-4a)}{a^2}$
이때 $a^2-4a\ne 0$이므로 → $\overline{\mathrm{AB}}^2=a^2-4a>0$
$1=\frac{18}{a^2}$, $a^2=18$ $\therefore a=3\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

02 답 2

이차방정식 $2x^2-(2k+3)x+k+1=0$에서
$(2x-1)\{x-(k+1)\}=0$ $\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=k+1$
$\frac{1}{2}\ne k+1$이어야 하므로 $k\ne-\frac{1}{2}$ …… ㉠

$f(x)=x^2-kx+2k-8$이라 할 때, $\frac{1}{2}$, $k+1$ 모두 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 있으려면 그림과 같이 $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$, $f(k+1)<0$이어야 한다.



$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$에서 $\frac{3}{2}k-\frac{31}{4}<0$ $\therefore k<\frac{31}{6}$ …… ㉡

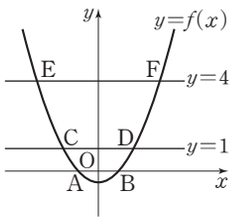
$f(k+1)<0$에서 $(k+1)^2-k(k+1)+2k-8<0$

$3k-7<0$ $\therefore k<\frac{7}{3}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $k<-\frac{1}{2}$ 또는 $-\frac{1}{2}<k<\frac{7}{3}$이므로 정수 k의 최댓값은 2이다.

03 답 ④

이차함수의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하여도 x축 또는 x축에 평행한 직선과 만나는 두 점 사이의 거리는 변하지 않으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 그림과 같이 y축에 대하여 대칭인 그래프라 하자.



$\overline{AB}=l$이므로 두 점 A, B의 x좌표는 $-\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$이다.

즉, 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 $-\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$이므로 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $a\,(a>0)$라 하면

$f(x)=a\left(x+\frac{l}{2}\right)\left(x-\frac{l}{2}\right)$ ← $\overline{AB}<\overline{CD}<\overline{EF}$이므로 $a>0$

$\overline{CD}=l+1$이므로 두 점 C, D의 x좌표는 $-\frac{l+1}{2}$, $\frac{l+1}{2}$이다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(\frac{l+1}{2},\ 1\right)$을 지나므로

$f\left(\frac{l+1}{2}\right)=1$에서 $a\left(l+\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=1$

$\therefore al+\frac{1}{2}a=2$ …… ㉠

$\overline{EF}=l+3$이므로 두 점 E, F의 x좌표는 $-\frac{l+3}{2}$, $\frac{l+3}{2}$이다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(\frac{l+3}{2},\ 4\right)$를 지나므로

$f\left(\frac{l+3}{2}\right)=4$에서 $a\left(l+\frac{3}{2}\right)\times\frac{3}{2}=4$

$\therefore al+\frac{3}{2}a=\frac{8}{3}$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면 $a=\frac{2}{3}$

이를 ㉡에 대입하면 $\frac{2}{3}l+1=\frac{8}{3}$ $\therefore l=\frac{5}{2}$

04 답 ④

이차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y=kx$ 위에 있으므로 꼭짓점의 좌표를 $(a,\ ka)$라 하면

$f(x)=(x-a)^2+ka$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=kx+5$와 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표가 α, β이므로 이차방정식 $(x-a)^2+ka=kx+5$, 즉 $x^2-(k+2a)x+a^2+ka-5=0$의 두 근이 α, β이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k+2a$, $\alpha\beta=a^2+ka-5$

한편 이차함수 $f(x)=(x-a)^2+ka$의 그래프의 축이 직선 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$이므로 $\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{4}=a$

$\alpha+\beta=k+2a$를 대입하면

$\frac{k+2a}{2}-\frac{1}{4}=a$, $\frac{k}{2}=\frac{1}{4}$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha+\beta=2a+\frac{1}{2}$, $\alpha\beta=a^2+\frac{a}{2}-5$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(2a+\frac{1}{2}\right)^2-4\left(a^2+\frac{a}{2}-5\right)=\frac{81}{4}$

$\therefore\ |\alpha-\beta|=\frac{9}{2}$

05 답 ③

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(2)$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고 아래로 볼록하다.

ㄱ. $f(-1)=0$이고, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $f(5)=0$

ㄴ. $f(-1)=0$, $f(5)=0$이므로 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -1, 5이다.

$f(x)=a(x+1)(x-5)\,(a>0)$ ← 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(2)$이므로 $a>0$라 하면

$f(0)=-5a$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{13}{4}a$, $f(6)=7a$

$\therefore f(0)<f\left(-\frac{3}{2}\right)<f(6)$ $(\because a>0)$

ㄷ. $f(x)=a(x+1)(x-5)$에서 $f(0)=k$이므로

$-5a=k$ …… ㉠

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2kx$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=2kx$의 실근과 같다.

$f(x)=2kx$에서 $a(x+1)(x-5)=2kx$

㉠을 대입하면 $ax^2-4ax-5a=-10ax$

$\therefore x^2+6x-5=0$ $(\because a>0)$

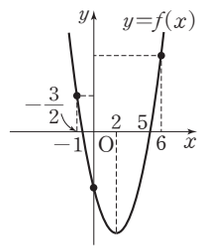
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은 -6이므로 두 교점의 x좌표의 합은 -6이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

다른 풀이

ㄴ. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$f(0)<f\left(-\frac{3}{2}\right)<f(6)$



NOTE

이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(x)\geq f(a)$이면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=a$이고 아래로 볼록하다.

(2) $f(x)\leq f(b)$이면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=b$이고 위로 볼록하다.

06 답 39

이차함수 $y=-x^2+1$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$A(\alpha, 2\alpha+k)$, $B(\beta, 2\beta+k)$, $A_1(\alpha, 0)$, $B_1(\beta, 0)$

또 $y=2x+k$에 $y=0$을 대입하면 $2x+k=0$ $\therefore x=-\frac{k}{2}$

$\therefore C\left(-\frac{k}{2}, 0\right)$

이차방정식 $-x^2+1=2x+k$, 즉 $x^2+2x+k-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=k-1$

삼각형 ACA_1의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{A_1C}\times\overline{A_1A}$

$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{k}{2}-\alpha\right)\times(-2\alpha-k)=\left(\alpha+\frac{k}{2}\right)^2$

삼각형 BCB_1의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{B_1C}\times\overline{B_1B}$

$=\frac{1}{2}\times\left(\beta+\frac{k}{2}\right)\times(2\beta+k)=\left(\beta+\frac{k}{2}\right)^2$

이때 $S_1+S_2=\frac{3}{2}$이므로

$\left(\alpha+\frac{k}{2}\right)^2+\left(\beta+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$, $\alpha^2+\beta^2+k(\alpha+\beta)+\frac{k^2}{2}=\frac{3}{2}$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+k(\alpha+\beta)+\frac{k^2}{2}=\frac{3}{2}$

$(-2)^2-2(k-1)+k\times(-2)+\frac{k^2}{2}=\frac{3}{2}$

$k^2-8k+9=0$ $\therefore k=4\pm\sqrt{7}$

그런데 $-2<k<2$이므로 $k=4-\sqrt{7}$

따라서 $p=4$, $q=-1$이므로

$10p+q=40-1=39$

idea

07 답 $\frac{7}{4}$

두 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 길이가 각각 p, q이므로 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $y=-p$, 두 점 C, D를 지나는 직선의 방정식은 $y=q$이다.

$A(\alpha, -p)$, $B(\beta, -p)$, $C(\gamma, q)$, $D(\delta, q)$라 하면

이차함수 $y=x^2-3x$의 그래프와 직선 $y=-p$가 만나는 두 점의 x좌표가 α, β이므로 이차방정식 $x^2-3x=-p$, 즉 $x^2-3x+p=0$의 두 근이 α, β이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=p$

또 이차함수 $y=-x^2+4x$의 그래프와 직선 $y=q$가 만나는 두 점의 x좌표가 γ, δ이므로 이차방정식 $-x^2+4x=q$, 즉 $x^2-4x+q=0$의 두 근이 γ, δ이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\gamma+\delta=4$, $\gamma\delta=q$

사각형 ABCD가 평행사변형이면 $\overline{AB}=\overline{DC}$이므로 $|\beta-\alpha|=|\delta-\gamma|$

$(\beta-\alpha)^2=(\delta-\gamma)^2$, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta$

$3^2-4p=4^2-4q$, $4(q-p)=7$

$\therefore q-p=\frac{7}{4}$

08 답 ③

ㄱ. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2-4b$

이때 $a^2<4b$이면 $D_1<0$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

즉, $f(2)=4+2a+b>0$이므로 $b>-2a-4$

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(-x+2)$이면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=2$이다.

이때 $f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$이므로

$-\frac{a}{2}=2$ $\therefore a=-4$

$x^2+ax+b=bx+a$에서

$x^2+(a-b)x-a+b=0$

$a=-4$를 대입하면

$x^2-(4+b)x+4+b=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(4+b)^2-4(4+b)=b(b+4)$

이때 $b<-4$이면 $D_2>0$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=bx+a$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

ㄷ. $x^2+ax+b=-ax+3$에서

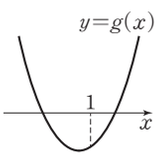
$x^2+2ax+b-3=0$

$g(x)=x^2+2ax+b-3$이라 하면

$g(1)=2a+b-2$

이때 $2a+b<2$이면 $g(1)<0$

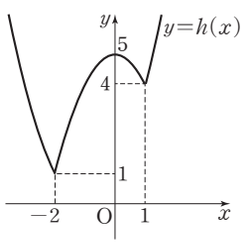
즉, 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-ax+3$은 서로 다른 두 점에서 만난다.



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

09 답 45

함수 $h(x)=\begin{cases}f(x) & (x\le-2 \text{ 또는 } x\ge1)\\ g(x) & (-2<x<1)\end{cases}$의 그래프는 그림과 같다.

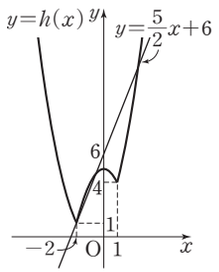


직선 $y=mx+6$의 y절편은 6이므로 y절편이 6인 직선의 기울기를 변화시키며 그래프를 그려 보면 직선 $y=mx+6$과 함수 $y=h(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $y=mx+6$이 점 $(-2, 1)$을 지날 때,

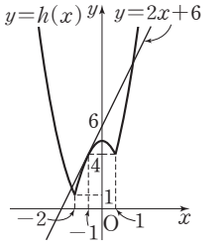
$1=-2m+6$, $2m=5$

$\therefore m=\frac{5}{2}$

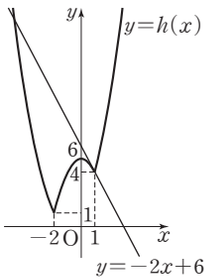


(ii) 직선 $y=mx+6$이 함수 $y=g(x)$의 그래프에 접할 때,
$-x^2+5=mx+6$에서
$x^2+mx+1=0$ …… ㉠
이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$D=m^2-4=0$
$\therefore m=\pm2$

ⓘ $m=2$일 때,
㉠에서 $x^2+2x+1=0$
$(x+1)^2=0$ $\therefore x=-1$
$\therefore y=2\times(-1)+6=4$
즉, 직선 $y=2x+6$과 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같이 점 $(-1, 4)$를 포함한 서로 다른 세 점에서 만난다.



ⓘⓘ $m=-2$일 때,
㉠에서 $x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$
$\therefore y=-2\times1+6=4$
즉, $f(1)=g(1)=4$이고, $m=-2$일 때도 점 $(1, 4)$를 지나므로 직선 $y=-2x+6$과 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같이 점 $(1, 4)$를 포함한 서로 다른 두 점에서 만난다.



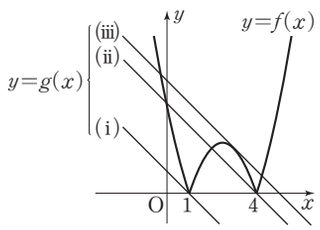
(i), (ii)에서 모든 m의 값은 $\frac{5}{2}$, 2이므로

$S=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$

$\therefore 10S=10\times\frac{9}{2}=45$

10 답 9

방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수 $h(k)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 개수와 같다.
$f(x)=|x^2-5x+4|$에서 $x^2-5x+4=0$이면
$(x-1)(x-4)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=4$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 기울기가 -1인 직선 $y=g(x)$는 그림과 같다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(1, 0)$을 지날 때,
$0=-1+k$ $\therefore k=1$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 점 $(4, 0)$을 지날 때,
$0=-4+k$ $\therefore k=4$

(iii) $1<x<4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접할 때,
$1<x<4$에서 $f(x)=-(x^2-5x+4)$이므로 이차방정식
$-(x^2-5x+4)=-x+k$, 즉 $x^2-6x+k+4=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=9-k-4=0$ $\therefore k=5$

(i), (ii), (iii)에서

$$h(k)=\begin{cases}0\ (k<1)\\1\ (k=1)\\2\ (1<k<4 \text{ 또는 } k>5)\\3\ (k=4 \text{ 또는 } k=5)\\4\ (4<k<5)\end{cases}$$

$\therefore h\left(\frac{1}{2}\right)+h(1)+h\left(\frac{7}{2}\right)+h\left(\frac{9}{2}\right)+h\left(\frac{11}{2}\right)=0+1+2+4+2=9$

11 답 ④

두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 $x=\alpha$인 점에서 접하므로 방정식 $f(x)=h(x)$, 즉 $f(x)-h(x)=0$은 중근 α를 갖는다.
이때 (가)에서 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로
$f(x)-h(x)=(x-\alpha)^2$ …… ㉠
두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 $x=\beta$인 점에서 접하므로 방정식 $g(x)=h(x)$, 즉 $g(x)-h(x)=0$은 중근 β를 갖는다.
이때 (가)에서 $g(x)$의 최고차항의 계수가 4이므로
$g(x)-h(x)=4(x-\beta)^2$ …… ㉡
(나)에서 $\alpha:\beta=1:2$이므로 $\beta=2\alpha$
이를 ㉡에 대입하면
$g(x)-h(x)=4(x-2\alpha)^2$ …… ㉢
㉠−㉢을 하면 $f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2-4(x-2\alpha)^2$
$\therefore f(x)-g(x)=-3x^2+14\alpha x-15\alpha^2$
두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 $x=t$인 점에서 만나므로
$f(t)=g(t)$에서 $f(t)-g(t)=0$
$3t^2-14\alpha t+15\alpha^2=0$, $(3t-5\alpha)(t-3\alpha)=0$
$\therefore t=\frac{5}{3}\alpha$ 또는 $t=3\alpha$

그런데 $\alpha<t<\beta$, 즉 $\alpha<t<2\alpha$이므로 $t=\frac{5}{3}\alpha$

$\therefore \frac{t}{\alpha}=\frac{5}{3}$

12 답 $\frac{3}{2}$

이차함수 $y=x^2-4mx$의 그래프와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표를 구하면
$x^2-4mx=mx$, $x^2-5mx=0$, $x(x-5m)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=5m$
따라서 점 A의 x좌표가 $5m$이므로 $A'(5m, 0)$
직선 l의 y절편을 k라 하면
직선 l의 방정식은 $y=-\frac{1}{m}x+k$

$x^2-4mx=-\frac{1}{m}x+k$에서 $x^2-\left(4m-\frac{1}{m}\right)x-k=0$ …… ㉠
이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$D=\left(4m-\frac{1}{m}\right)^2+4k=0$ $\therefore k=-\frac{1}{4}\left(4m-\frac{1}{m}\right)^2$
이를 ㉠에 대입하면
$x^2-\left(4m-\frac{1}{m}\right)x+\frac{1}{4}\left(4m-\frac{1}{m}\right)^2=0$
$\left\{x-\frac{1}{2}\left(4m-\frac{1}{m}\right)\right\}^2=0$
$\therefore x=\frac{1}{2}\left(4m-\frac{1}{m}\right)$

따라서 점 B의 x좌표가 $\frac{1}{2}\left(4m-\frac{1}{m}\right)$, 즉 $2m-\frac{1}{2m}$이므로

$\mathrm{B}'\left(2m-\frac{1}{2m},\ 0\right)$

이때 $\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}=\frac{29}{6}$이므로

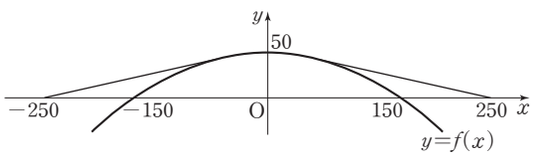
$5m-\left(2m-\frac{1}{2m}\right)=\frac{29}{6}$, $18m^2-29m+3=0$

$(9m-1)(2m-3)=0$ $\therefore\ m=\frac{1}{9}$ 또는 $m=\frac{3}{2}$

그런데 $m>1$이므로 $m=\frac{3}{2}$

13 답 $\frac{400}{9}$ m

그림과 같이 다리를 x축, 아치의 높이가 최대인 점을 지나고 다리에 수직인 직선을 y축, 포물선 모양의 아치가 나타내는 이차함수의 식을 $f(x)$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ 50)$이므로

$f(x)=ax^2+50$ (단, $a<0$)

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(150,\ 0)$을 지나므로 $f(150)=0$에서

$150^2a+50=0$ $\therefore\ a=-\frac{1}{450}$

$\therefore\ f(x)=-\frac{1}{450}x^2+50$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 철끈과 아치가 만나는 두 지점의 높이는 서로 같다.

철끈이 나타내는 두 접선 중 기울기가 양수인 직선의 기울기를 m, y절편을 b라 하면 직선의 방정식은 $y=mx+b$

이 직선은 점 $(-250,\ 0)$을 지나므로

$0=-250m+b$, $b=250m$

$\therefore\ y=mx+250m$

$-\frac{1}{450}x^2+50=mx+250m$에서

$x^2+450mx+450(250m-50)=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=225^2m^2-450(250m-50)=0$

$9m^2-20m+4=0$, $(9m-2)(m-2)=0$

$\therefore\ m=\frac{2}{9}$ 또는 $m=2$

(i) $m=\frac{2}{9}$일 때,

㉠에서 $x^2+100x+2500=0$, $(x+50)^2=0$ $\therefore\ x=-50$

이때 접점의 x좌표 -50은 $-150<x<0$에 속한다.

(ii) $m=2$일 때,

㉠에서 $x^2+900x+450^2=0$, $(x+450)^2=0$ $\therefore\ x=-450$

이때 접점의 x좌표 -450은 $-150<x<0$에 속하지 않는다.

(i), (ii)에서 철끈과 아치는 $x=-50$인 점에서 접하므로 그때의 y좌표는

$f(-50)=-\frac{1}{450}\times(-50)^2+50=\frac{400}{9}$

따라서 구하는 높이는 $\frac{400}{9}$ m이다.

14 답 28

$2x+3y=8$에서 $3y=8-2x$

이때 $x>0$, $y>0$이므로 $8-2x>0$

$\therefore\ 0<x<4$

$(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+5})^2=2x+1+2\sqrt{(2x+1)(3y+5)}+3y+5$

$=2x+1+2\sqrt{(2x+1)(8-2x+5)}+8-2x+5$

$=2\sqrt{-4x^2+24x+13}+14$

$f(x)=-4x^2+24x+13$이라 하면

$f(x)=-4(x-3)^2+49$

$0<x<4$에서 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값이 49이므로

$(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+5})^2=2\sqrt{-4x^2+24x+13}+14$

$\le 2\sqrt{49}+14=28$

따라서 $(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+5})^2$의 최댓값은 28이다.

15 답 ⑤

ㄱ. $a=\frac{3}{2}$일 때,

이차함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$일 때 최솟값이 b이다.

이때 최솟값이 5이므로 $b=5$

ㄴ. $a\le 1$일 때,

이차함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값이 $(1-a)^2+b$이다.

이때 최솟값이 5이므로 $(1-a)^2+b=5$

$\therefore\ b=-a^2+2a+4$ …… ㉠

ㄷ. (i) $a\le 1$일 때,

㉠에서 $b=-a^2+2a+4$이므로

$a+b=-a^2+3a+4=-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$

즉, $a+b$는 $a=1$일 때 최댓값이 6이다.

(ii) $1<a\le 2$일 때,

이차함수 $f(x)$는 $x=a$일 때 최솟값이 b이다.

이때 최솟값이 5이므로 $b=5$

즉, $6<a+b\le 7$이므로 $a+b$는 $a=2$일 때 최댓값이 7이다.

(iii) $a>2$일 때,

이차함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값이 $(2-a)^2+b$이다.

이때 최솟값이 5이므로 $(2-a)^2+b=5$

$\therefore\ b=-a^2+4a+1$

즉, $a+b=-a^2+5a+1=-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{29}{4}$이므로 $a+b$는

$a=\frac{5}{2}$일 때 최댓값이 $\frac{29}{4}$이다.

(i), (ii), (iii)에서 $a+b$의 최댓값은 $\frac{29}{4}$이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

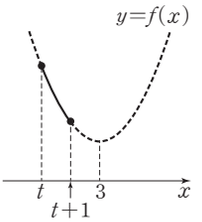
16 답 ③

$f(x)=x^2-6x+11=(x-3)^2+2$

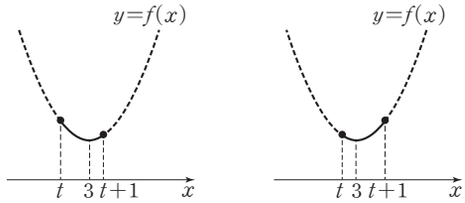
(i) $t+1<3$, 즉 $t<2$일 때,

꼭짓점의 x좌표가 $t\le x\le t+1$에 포함되지 않으므로 이차함수 $f(x)$는 $x=t$일 때 최댓값이

$f(t)=t^2-6t+11$



(ii) $t\le 3\le t+1$, 즉 $2\le t\le 3$일 때,



꼭짓점의 x좌표가 $t\le x\le t+1$에 포함되므로

ⓘ $3-t\ge(t+1)-3$, 즉 $2\le t\le\frac{5}{2}$이면 이차함수 $f(x)$는 $x=t$일 때 최댓값이

$f(t)=t^2-6t+11$

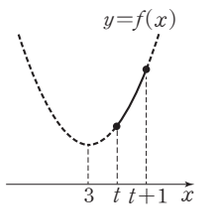
ⓘ $3-t<(t+1)-3$, 즉 $\frac{5}{2}<t\le 3$이면 이차함수 $f(x)$는 $x=t+1$일 때 최댓값이

$f(t+1)=(t+1)^2-6(t+1)+11=t^2-4t+6$

(iii) $t>3$일 때,

꼭짓점의 x좌표가 $t\le x\le t+1$에 포함되지 않으므로 이차함수 $f(x)$는 $x=t+1$일 때 최댓값이

$f(t+1)=t^2-4t+6$



(i), (ii), (iii)에서

$$g(t)=\begin{cases}t^2-6t+11 & \left(t\le\frac{5}{2}\right)\\ t^2-4t+6 & \left(t>\frac{5}{2}\right)\end{cases}$$

$t\le\frac{5}{2}$일 때, 방정식 $g(t)=3$에서

$t^2-6t+11=3$, $t^2-6t+8=0$

$(t-2)(t-4)=0$ $\therefore t=2\left(\because t\le\frac{5}{2}\right)$

$t>\frac{5}{2}$일 때, 방정식 $g(t)=3$에서

$t^2-4t+6=3$, $t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$ $\therefore t=3\left(\because t>\frac{5}{2}\right)$

따라서 방정식 $g(t)=3$의 모든 실근의 합은

$2+3=5$

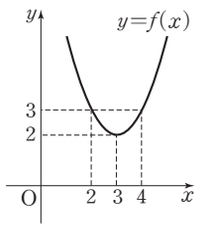
다른 풀이

$f(x)=x^2-6x+11=(x-3)^2+2$

$f(x)=3$에서 $(x-3)^2+2=3$, $(x-3)^2=1$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

t의 값의 범위에 따라 이차함수 $f(x)$의 최댓값 $g(t)$가 3인 경우를 찾으면



(i) $t<2$일 때,

$t\le x\le t+1$에서 $g(t)>3$

(ii) $t=2$일 때,

$t\le x\le t+1$에서 $g(t)=f(2)=3$

(iii) $2<t<3$일 때,

$t\le x\le t+1$에서 $g(t)<3$

(iv) $t=3$일 때,

$t\le x\le t+1$에서 $g(t)=f(4)=3$

(v) $t>3$일 때,

$t\le x\le t+1$에서 $g(t)>3$

(i)~(v)에서 방정식 $g(t)=3$의 실근은 $t=2$ 또는 $t=3$

따라서 모든 실근의 합은 $2+3=5$

17 답 0

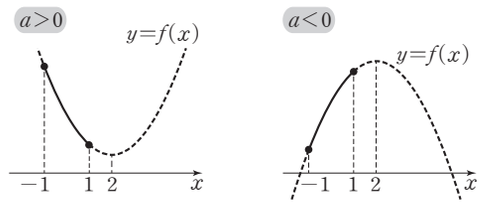
$f\left(\frac{3}{2}+x\right)=f\left(\frac{5}{2}-x\right)$의 양변에 x 대신 $\frac{1}{2}+x$를 대입하면

$f(2+x)=f(2-x)$

따라서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=2$이므로

$f(x)=a(x-2)^2+b$ (a, b는 상수, $a\ne 0$) ····· 배점 20%

(i) $-1\le x\le 1$일 때,



꼭짓점의 x좌표가 $-1\le x\le 1$에 포함되지 않으므로

ⓘ $a>0$인 경우

이차함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값이 $9a+b$, $x=1$일 때 최솟값이 $a+b$이다.

ⓘ $a<0$인 경우

이차함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값이 $a+b$, $x=-1$일 때 최솟값이 $9a+b$이다.

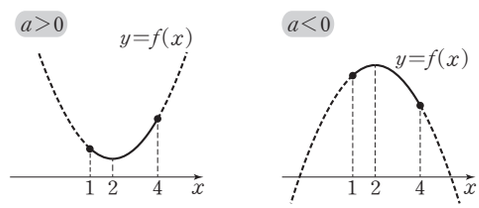
ⓘ, ⓘ에서 a의 값의 부호에 관계없이 이차함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$(9a+b)+(a+b)=10a+2b$

즉, $10a+2b=14$이므로

$5a+b=7$ ····· ㉠ ····· 배점 30%

(ii) $1\le x\le 4$일 때,



꼭짓점의 x좌표가 $1\le x\le 4$에 포함되므로

ⓘ $a>0$인 경우

이차함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값이 $4a+b$, $x=2$일 때 최솟값이 b이다.

ⓘ $a<0$인 경우

이차함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값이 b, $x=4$일 때 최솟값이 $4a+b$이다.

ⓘ, ⓘ에서 a의 값의 부호에 관계없이 이차함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$(4a+b)+b=4a+2b$

즉, $4a+2b=26$이므로

$2a+b=13$ ····· ㉡ ····· 배점 30%

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=17$ ····· 배점 10%

따라서 $f(x)=-2(x-2)^2+17$이므로

$f(-2)+f(3)=-15+15=0$ ····· 배점 10%

18 답 67

$0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 최솟값과 $0\le x\le 5$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 m으로 같으므로

$0<p\le 3$, $q=m$

$\therefore f(x)=(x-p)^2+m$

(i) $0<p\le\frac{3}{2}$일 때,

㈐에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값이 $(3-p)^2+m$이므로

$(3-p)^2+m=m+4$, $(3-p)^2=4$ $\therefore p=1$ 또는 $p=5$

그런데 $0<p\le\frac{3}{2}$이므로 $p=1$

$\therefore f(x)=(x-1)^2+m$

㈏에서 함수 $f(x)$는 $x=5$일 때 최댓값이 $(5-1)^2+m$이므로

$(5-1)^2+m=4m$, $3m=16$ $\therefore m=\frac{16}{3}$

그런데 m은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\frac{3}{2}<p\le 3$일 때,

㈐에서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값이 $(0-p)^2+m$이므로

$(0-p)^2+m=m+4$, $p^2=4$ $\therefore p=\pm 2$

그런데 $\frac{3}{2}<p\le 3$이므로 $p=2$

$\therefore f(x)=(x-2)^2+m$

㈏에서 함수 $f(x)$는 $x=5$일 때 최댓값이 $(5-2)^2+m$이므로

$(5-2)^2+m=4m$, $3m=9$ $\therefore m=3$

(i), (ii)에서 $f(x)=(x-2)^2+3$

$\therefore f(10)=(10-2)^2+3=67$

19 답 121

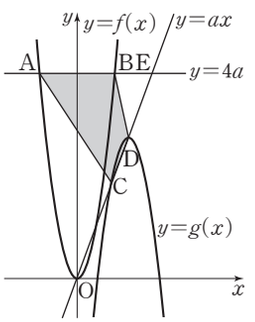
두 점 A, B는 직선 $y=4a$와 함수 $f(x)=ax^2$의 그래프가 만나는 점이므로

$4a=ax^2$에서 $x^2=4$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

즉, 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(-2, 4a)$, $(2, 4a)$

두 점 C, D는 직선 $y=ax$와 함수 $g(x)=-a(x-a)^2+a^2$의 그래프가 만나는 점이므로



$ax=-a(x-a)^2+a^2$에서

$x^2-(2a-1)x+a(a-1)=0$

$(x-a+1)(x-a)=0$

$\therefore x=a-1$ 또는 $x=a$

즉, 두 점 C, D의 좌표는 각각 $(a-1, a^2-a)$, (a, a^2)

직선 $y=4a$와 직선 $y=ax$가 만나는 점을 E라 하면

$4a=ax$에서 $x=4$

즉, 점 E의 좌표는 $(4, 4a)$

$\therefore \overline{AE}=|4-(-2)|=6$, $\overline{BE}=|4-2|=2$

점 $C(a-1, a^2-a)$와 직선 $y=4a$ 사이의 거리를 h_1이라 하면

$h_1=|4a-(a^2-a)|=|-a^2+5a|$

$=-a^2+5a$ ⟶ $-a^2+5a=-a(a-5)$에서 $a>0$, $a-5<0$이므로 $-a(a-5)>0$

삼각형 ACE의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times h_1=\frac{1}{2}\times 6\times(-a^2+5a)=-3a^2+15a$

점 $D(a, a^2)$과 직선 $y=4a$ 사이의 거리를 h_2라 하면

$h_2=|4a-a^2|=-a^2+4a$ ⟶ $-a^2+4a=-a(a-4)$에서 $a>0$, $a-4<0$이므로 $-a^2+4a>0$

삼각형 BDE의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{BE}\times h_2=\frac{1}{2}\times 2\times(-a^2+4a)=-a^2+4a$

사각형 ACDB의 넓이를 S라 하면

$S=S_1-S_2=(-3a^2+15a)-(-a^2+4a)$

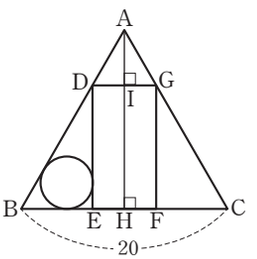
$=-2a^2+11a=-2\left(a-\frac{11}{4}\right)^2+\frac{121}{8}$

이때 $2<a<4$이므로 사각형 ACDB의 넓이는 $a=\frac{11}{4}$일 때 최댓값이 $\frac{121}{8}$이다.

따라서 $M=\frac{121}{8}$이므로 $8\times M=121$

20 답 ⑤

그림과 같이 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 AH가 변 DG와 만나는 점을 I라 하자.



$\overline{DI}=a(0<a<10)$라 하면 직각삼각형 ADI에서 $\angle ADI=60^\circ$이므로

$\overline{AI}=\overline{DI}\tan 60^\circ=\sqrt{3}a$

직각삼각형 ABH에서

$\overline{BH}=10$, $\angle B=60^\circ$이므로

$\overline{AH}=\overline{BH}\tan 60^\circ=10\sqrt{3}$

$\therefore \overline{DE}=\overline{AH}-\overline{AI}=10\sqrt{3}-\sqrt{3}a$

직사각형 DEFG의 넓이를 S라 하면

$S=2\overline{DI}\times\overline{DE}=2a(10\sqrt{3}-\sqrt{3}a)$

$=-2\sqrt{3}a^2+20\sqrt{3}a=-2\sqrt{3}(a-5)^2+50\sqrt{3}$

즉, 직사각형 DEFG의 넓이는 $a=\overline{DI}=5$일 때 최대이다.

$\overline{DI}=5$일 때, 직각삼각형 DBE에서

$\overline{BE}=10-5=5$, $\overline{DE}=10\sqrt{3}-5\sqrt{3}=5\sqrt{3}$, $\overline{DB}=\sqrt{5^2+(5\sqrt{3})^2}=10$

이때 삼각형 DBE에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\frac{1}{2}\times\overline{BE}\times\overline{DE}=\frac{1}{2}r(\overline{BE}+\overline{DE}+\overline{DB})$이므로

$\frac{1}{2}\times 5\times 5\sqrt{3}=\frac{1}{2}r(5+5\sqrt{3}+10)$

$\therefore r=\frac{25\sqrt{3}}{15+5\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

$=\frac{5\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$

$=\frac{15\sqrt{3}-15}{6}=\frac{5\sqrt{3}-5}{2}$

따라서 원의 둘레의 길이는

$2\pi r=2\pi\times\frac{5\sqrt{3}-5}{2}=(5\sqrt{3}-5)\pi$

즉, $p=5$, $q=-5$이므로

$p^2+q^2=25+25=50$

21 답 98

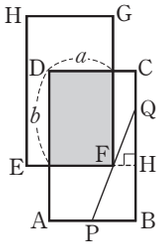
변 AB의 중점이 P이므로 $\overline{PB}=\frac{1}{2}\overline{AB}=2$

변 BC의 4등분점 중 꼭짓점 C에 가장 가까운 점이 Q이므로

$\overline{QB}=\frac{3}{4}\overline{BC}=3\sqrt{3}$, $\overline{QC}=\sqrt{3}$ ····· 배점 10%

두 직사각형의 공통부분인 직사각형의 가로의 길이를 $a(2\le a\le 4)$, 세로의 길이를 b라 하자.

그림과 같이 점 F에서 선분 QB에 내린 수선의 발을 H라 하면



두 삼각형 QFH, QPB에서

$\angle FQH=\angle PQB$, $\angle FHQ=\angle PBQ=90^\circ$이므로

$\triangle QFH\backsim\triangle QPB$ (AA 닮음)

즉, $\overline{FH}:\overline{PB}=\overline{QH}:\overline{QB}$이므로

$(4-a):2=(b-\sqrt{3}):3\sqrt{3}$

$3\sqrt{3}(4-a)=2(b-\sqrt{3})$

$2b=14\sqrt{3}-3\sqrt{3}a$

$\therefore\ b=7\sqrt{3}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a$ ····· 배점 30%

두 직사각형의 공통부분의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=ab$

$=a\left(7\sqrt{3}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a\right)$

$=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2+7\sqrt{3}a$

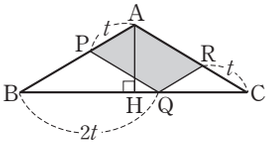
$=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(a-\dfrac{7}{3}\right)^2+\dfrac{49\sqrt{3}}{6}$ ····· 배점 30%

따라서 $2\le a\le 4$에서 $S(a)$는 $a=\dfrac{7}{3}$일 때 최댓값이 $\dfrac{49\sqrt{3}}{6}$, $a=4$일 때 최솟값이 $4\sqrt{3}$이므로

$M=\dfrac{49\sqrt{3}}{6}$, $m=4\sqrt{3}$ $\quad\therefore\ Mm=98$ ····· 배점 30%

22 답 $12\sqrt{3}-7$

점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로



$\overline{BH}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=4\sqrt{3}$

직각삼각형 ABH에서 $\angle B=\theta$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\theta=30^\circ$

$\therefore\ \angle B=\angle C=30^\circ$

삼각형 ABC의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin 30^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times 8\times 8\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=16\sqrt{3}$

t초 후 세 점 P, Q, R가 움직인 거리는 각각 t, $2t$, t이므로

삼각형 PBQ의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\dfrac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{BQ}\times\sin 30^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times(8-t)\times 2t\times\dfrac{1}{2}$

$=-\dfrac{1}{2}t^2+4t$

삼각형 RQC의 넓이를 S_3이라 하면

$S_3=\dfrac{1}{2}\times\overline{RC}\times\overline{CQ}\times\sin 30^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times t\times(8\sqrt{3}-2t)\times\dfrac{1}{2}$

$=-\dfrac{1}{2}t^2+2\sqrt{3}t$

사각형 APQR의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=S_1-S_2-S_3$

$=16\sqrt{3}-\left(-\dfrac{1}{2}t^2+4t\right)-\left(-\dfrac{1}{2}t^2+2\sqrt{3}t\right)$

$=t^2-2(2+\sqrt{3})t+16\sqrt{3}$

$=\{t-(2+\sqrt{3})\}^2+12\sqrt{3}-7$

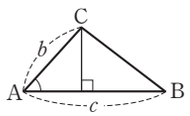
이때 $0<t<4\sqrt{3}$이므로 $S(t)$는 $t=2+\sqrt{3}$일 때 최솟값이 $12\sqrt{3}-7$이다.

개념 NOTE

삼각형 ABC에서 두 변의 길이 b, c와 끼인각 $\angle A$의 크기를 알 때, 삼각형 ABC의 넓이 S는

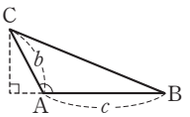
(1) $A<90^\circ$일 때,

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$



(2) $90^\circ<A<180^\circ$일 때,

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin(180^\circ-A)$



STEP 3 최고난도 문제 | 67~69쪽

01 ⑤	02 2	03 ⑤	04 ⑤	05 $10-6\sqrt{2}$
06 ②	07 $\dfrac{17}{8}$	08 13	09 ④	

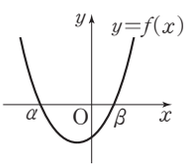
01 답 ⑤

1단계 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 부호 알기

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록하고 $f(0)<0$이므로

$a>0$, $c<0$

따라서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.



이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표를 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha<0$, $\beta>0$

2단계 $c|x-3|^2-b|x-3|+a=0$의 근 구하기

한편 함수 $y=c|x-3|^2-b|x-3|+a$에서 $|x-3|=t\ (t\ge 0)$로 놓으면

$y=ct^2-bt+a$ ····· ㉠

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 α이므로

$a\alpha^2+b\alpha+c=0$

$\alpha\ne 0$이므로 양변을 α^2으로 나누면

$a+\dfrac{b}{\alpha}+\dfrac{c}{\alpha^2}=0$

$\therefore\ c\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-b\times\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)+a=0$

즉, $-\dfrac{1}{\alpha}$은 이차방정식 $cx^2-bx+a=0$의 한 근이다.

같은 방법으로 하면 $-\dfrac{1}{\beta}$도 이차방정식 $cx^2-bx+a=0$의 한 근이다.

그런데 $-\dfrac{1}{\alpha}>0$, $-\dfrac{1}{\beta}<0$이고, ㉠에서 $t\ge 0$이므로

이차방정식 $ct^2-bt+a=0$의 근은

$t=-\frac{1}{a}$

즉, 방정식 $c|x-3|^2-b|x-3|+a=0$의 근은

$|x-3|=-\frac{1}{a}$

$\therefore x=3-\frac{1}{a}$ 또는 $x=3+\frac{1}{a}$ ····· ㉡

3단계 $y=c|x-3|^2-b|x-3|+a$**의 그래프와 x축의 교점의 x좌표의 합 구하기**

㉡은 함수 $y=c|x-3|^2-b|x-3|+a$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표와 같으므로 그 합은

$3-\frac{1}{a}+3+\frac{1}{a}=6$

배움 NOTE

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때, (단, a, b, c는 실수, $ac\neq0$)

(1) 이차방정식 $cx^2+bx+a=0$의 두 근은 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$

(2) 이차방정식 $cx^2-bx+a=0$의 두 근은 $-\frac{1}{\alpha}$, $-\frac{1}{\beta}$

idea

02 답 2

1단계 **변환하였을 때, 판별식 비교하기**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=b^2-4ac$

이차방정식 $a(x+1)^2+bx(x+1)+cx^2=0$, 즉

$(a+b+c)x^2+(2a+b)x+a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(2a+b)^2-4a(a+b+c)=b^2-4ac=D_1$

이차방정식 $a+b(x+1)+c(x+1)^2=0$, 즉

$cx^2+(b+2c)x+a+b+c=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$D_3=(b+2c)^2-4c(a+b+c)=b^2-4ac=D_1$

$D_1=D_2=D_3$이므로 변환 후 판별식의 값이 모두 같다.

따라서 함수 $y=f_n(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 이차함수 $y=f_0(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수와 같다.

2단계 $y=g_0(x)$**의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수 구하기**

$g_0(x)=x^2+3x+1$에서 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 판별식을 D_4라 하면 $D_4=9-4=5>0$

따라서 이차함수 $y=g_0(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

3단계 $y=h_0(x)$**의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수 구하기**

$h_0(x)=x^2-3x+5$에서 이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 판별식을 D_5라 하면

$D_5=9-20=-11<0$

따라서 이차함수 $y=h_0(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

4단계 $p+q$**의 값 구하기**

따라서 두 함수 $y=g_{10}(x)$, $y=h_{10}(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수도 각각 2, 0이므로 $p=2$, $q=0$

$\therefore p+q=2$

03 답 ⑤

1단계 $f(x)$, $g(x)$**의 식 세우기**

㈎에서 $f(x)g(x)=(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$

㈏에서 $f(x)=0$의 두 실근은 α, $\alpha+5$

즉, $f(x)=0$의 두 실근의 차는 5이다.

$\therefore \begin{cases} f(x)=a(x-2)(x+3) \\ g(x)=\frac{1}{a}(x+2)(x-3) \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)=a(x+2)(x-3) \\ g(x)=\frac{1}{a}(x-2)(x+3) \end{cases}$

(단, $a\neq0$인 상수)

2단계 **ㄱ이 옳은지 확인하기**

ㄱ. $f(2)=0$이면 $\begin{cases} f(x)=a(x-2)(x+3) \\ g(x)=\frac{1}{a}(x+2)(x-3) \end{cases}$이므로

$g(3)=0$

3단계 **ㄴ이 옳은지 확인하기**

ㄴ. $g(2)>0$이므로 $\begin{cases} f(x)=a(x-2)(x+3) \\ g(x)=\frac{1}{a}(x+2)(x-3) \end{cases}$이고, $a<0$이다.

즉, $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{11}{4}a<0$, $g\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{9}{4a}>0$이므로

$f\left(\frac{5}{2}\right)<0<g\left(\frac{5}{2}\right)$

4단계 **ㄷ이 옳은지 확인하기**

ㄷ. (i) $\begin{cases} f(x)=a(x-2)(x+3) \\ g(x)=\frac{1}{a}(x+2)(x-3) \end{cases}$ (단, $a\neq0$인 상수)일 때,

방정식 $f(x)-g(x)=0$, 즉

$\left(a-\frac{1}{a}\right)x^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)x-6\left(a-\frac{1}{a}\right)=0$은 서로 다른 두 정수 근을 갖는다.

$f(x)-g(x)=0$의 양변에 a를 곱하면

$(a^2-1)x^2+(a^2+1)x-6(a^2-1)=0$

근과 계수의 관계에 의하여 $mn=-6$이고, m, n이 정수이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (m, n)은

$(-6, 1)$, $(1, -6)$, $(-3, 2)$, $(2, -3)$, $(-2, 3)$, $(3, -2)$, $(-1, 6)$, $(6, -1)$

ⓘ $(-6, 1)$, $(1, -6)$인 경우

$m+n=\frac{-a^2-1}{a^2-1}=-5$에서

$-a^2-1=-5a^2+5$

$4a^2=6$ $\therefore a=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

즉, 방정식 $f(x)-g(x)=0$은 두 정수 -6, 1을 근으로 갖는다.

ⓘⓘ $(-3, 2)$, $(2, -3)$인 경우

$m+n=\frac{-a^2-1}{a^2-1}=-1$에서 $-a^2-1=-a^2+1$을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

즉, 방정식 $f(x)-g(x)=0$은 두 정수 -3, 2를 근으로 가질 수 없다.

ⓘⓘⓘ $(-2, 3)$, $(3, -2)$인 경우

$m+n=\frac{-a^2-1}{a^2-1}=1$에서

$-a^2-1=a^2-1$ $\therefore a=0$

그런데 $a\neq0$이므로 방정식 $f(x)-g(x)=0$은 두 정수 -2, 3을 근으로 가질 수 없다.

ⓘⓥ $(-1, 6)$, $(6, -1)$인 경우

$m+n=\frac{-a^2-1}{a^2-1}=5$에서

$-a^2-1=5a^2-5$

$6a^2=4$ $\therefore a=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

즉, 방정식 $f(x)-g(x)=0$은 두 정수 -1, 6을 근으로 갖는다.

(ii) $\begin{cases} f(x)=a(x+2)(x-3) \\ g(x)=\frac{1}{a}(x-2)(x+3) \end{cases}$ (단, $a\neq0$인 상수)일 때,

방정식 $f(x)-g(x)=\left(a-\frac{1}{a}\right)x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x-6\left(a-\frac{1}{a}\right)$에서 (i)과 같은 방법으로 하면 된다.

(i), (ii)에서 방정식 $f(x)-g(x)=0$이 서로 다른 두 정수 m, n을 근으로 가지면 $|m+n|=5$이다.

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

04 답 ⑤

1단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. 이차함수 $y=x^2-6x+6$의 그래프와 직선 $y=6$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2-6x+6=6$, $x^2-6x=0$, $x(x-6)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=6$

즉, C(0, 6), D(6, 6)이므로 $\overline{CD}=6$

2단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2=k$ $\therefore x=\pm\sqrt{k}$

즉, $A(-\sqrt{k}, k)$, $B(\sqrt{k}, k)$이므로 $\overline{AB}=2\sqrt{k}$ …… ㉠

$\therefore \overline{AB}^2=4k$

두 점 C, D의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$x^2-6x+6=k$에서 $x^2-6x+6-k=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=6-k$

$\therefore \overline{CD}^2=(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=12+4k$

즉, $\overline{CD}^2-\overline{AB}^2=12$로 일정하다. …… ㉡

3단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. $\overline{CD}^2-\overline{AB}^2=(\overline{CD}+\overline{AB})(\overline{CD}-\overline{AB})=12$(∵ ㉡)에서

$\overline{CD}+\overline{AB}=4$이므로 $\overline{CD}-\overline{AB}=3$

즉, $\overline{AB}=\frac{1}{2}$, $\overline{CD}=\frac{7}{2}$

㉠에서 $\overline{AB}=2\sqrt{k}$이므로

$2\sqrt{k}=\frac{1}{2}$ $\therefore k=\frac{1}{16}$

$\therefore B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$

한편 $x^2-6x+6=\frac{1}{16}$에서 $16x^2-96x+95=0$

$(4x-5)(4x-19)=0$ $\therefore x=\frac{5}{4}$ 또는 $x=\frac{19}{4}$

이때 점 C의 x좌표는 점 D의 x좌표보다 작으므로 점 C의 x좌표는 $\frac{5}{4}$이다.

따라서 $\overline{BC}=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}=1$이므로

$k+\overline{BC}=\frac{1}{16}+1=\frac{17}{16}$

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

idea

05 답 $10-6\sqrt{2}$

1단계 $f(0)$, $f(3)$의 값 구하기

$-3\le x\le0$에서 정의된 함수 $y=g(x)$의 그래프와 $0\le x\le3$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 한 점에서 만나므로

$g(0)=f(0)$ …… ㉠

$g(x)=-f(-x)$에 $x=0$을 대입하면 $g(0)=-f(0)$

㉠을 대입하면 $f(0)=-f(0)$ $\therefore f(0)=0$

또 $3\le x\le6$에서 정의된 함수 $y=h(x)$의 그래프와 $0\le x\le3$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 한 점에서 만나므로

$h(3)=f(3)$ …… ㉡

$h(x)=6-f(6-x)$에 $x=3$을 대입하면

$h(3)=6-f(3)$

㉡을 대입하면 $f(3)=6-f(3)$

$2f(3)=6$ $\therefore f(3)=3$

2단계 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$의 식 구하기

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$f(0)=0$에서 $b=0$

$f(3)=3$에서 $9+3a+b=3$

$9+3a=3$ $\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=x^2-2x$ $(0\le x\le3)$이므로

$g(x)=-f(-x)=-(x^2+2x)$

$=-x^2-2x$ $(-3\le x\le0)$

$h(x)=6-f(6-x)$

$=6-\{(6-x)^2-2(6-x)\}$

$=-x^2+10x-18$ $(3\le x\le6)$

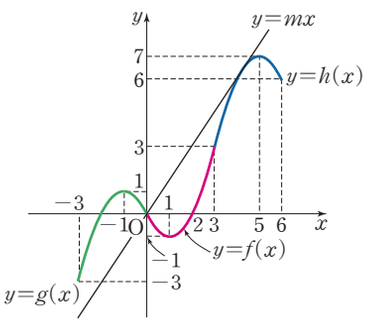
3단계 직선이 함수 $k(x)$의 그래프와 두 점에서 만나는 경우 알기

이때 $f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$,

$g(x)=-x^2-2x=-(x+1)^2+1$,

$h(x)=-x^2+10x-18=-(x-5)^2+7$이고,

$g(-3)=-3$, $g(0)=f(0)=0$, $f(3)=h(3)=3$, $h(6)=6$이므로 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



원점을 지나고 기울기가 1보다 큰 직선 $y=mx$가 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선 $y=mx$와 함수 $y=h(x)$의 그래프가 $3\le x\le5$에서 접해야 한다.

4단계 m의 값 구하기

$mx=-x^2+10x-18$에서

$x^2+(m-10)x+18=0$ …… ㉢

이차방정식 ㉢의 판별식을 D라 하면

$D=(m-10)^2-72=0$

$m^2-20m+28=0$ $\therefore m=10\pm6\sqrt{2}$

(i) $m=10+6\sqrt{2}$일 때,

㉢에서 $x^2+6\sqrt{2}x+18=0$

$(x+3\sqrt{2})^2=0$ $\therefore x=-3\sqrt{2}$

이때 접점의 x좌표 $-3\sqrt{2}$가 $3\le x\le 5$에 속하지 않는다.

(ii) $m=10-6\sqrt{2}$일 때,

㉢에서 $x^2-6\sqrt{2}x+18=0$

$(x-3\sqrt{2})^2=0$ $\therefore x=3\sqrt{2}$

이때 접점의 x좌표 $3\sqrt{2}$가 $3\le x\le 5$에 속한다.

(i), (ii)에서 $m=10-6\sqrt{2}$

idea

06 답 ②

1단계 주어진 함수가 최댓값을 갖는 경우 알기

주어진 함수를 $f_n(x)$라 하면

$f_n(x)=-2[x]^2+n[x]+3$

$=-2\left([x]-\frac{n}{4}\right)^2+\frac{n^2}{8}+3$

이때 $[x]$는 정수이므로 $\frac{n}{4}$의 값에 가장 가까운 정수에서 최댓값을 갖는다.

2단계 $M(12)$, $M(13)$, $M(15)$, $M(16)$의 값 구하기

(i) $n=12$일 때,

$\frac{n}{4}=\frac{12}{4}=3$이므로 함수 $f_{12}(x)=-2[x]^2+12[x]+3$은

$[x]=3$에서 최대이다.

$\therefore M(12)=-2\times 3^2+12\times 3+3=21$

(ii) $n=13$일 때,

$\frac{n}{4}=\frac{13}{4}=3.25$이므로 함수 $f_{13}(x)=-2[x]^2+13[x]+3$은

$[x]=3$에서 최대이다.

$\therefore M(13)=-2\times 3^2+13\times 3+3=24$

(iii) $n=15$일 때,

$\frac{n}{4}=\frac{15}{4}=3.75$이므로 함수 $f_{15}(x)=-2[x]^2+15[x]+3$은

$[x]=4$에서 최대이다.

$\therefore M(15)=-2\times 4^2+15\times 4+3=31$

(iv) $n=16$일 때,

$\frac{n}{4}=\frac{16}{4}=4$이므로 함수 $f_{16}(x)=-2[x]^2+16[x]+3$은

$[x]=4$에서 최대이다.

$\therefore M(16)=-2\times 4^2+16\times 4+3=35$

3단계 $M(12)+M(13)+M(15)+M(16)$의 값 구하기

(i)~(iv)에서

$M(12)+M(13)+M(15)+M(16)=21+24+31+35=111$

07 답 $\frac{17}{8}$

1단계 $g(x)$의 식 세우기

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a>2$)라 하자.

㈎에서 $f(1)=-1$이므로

$a+b+c=-1$ …… ㉠

㈏에서 $f(x)=f(-x)$이므로

$ax^2+bx+c=ax^2-bx+c$, $2bx=0$

이 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $b=0$

이를 ㉠에 대입하면 $a+c=-1$ $\therefore c=-a-1$

따라서 $f(x)=ax^2-a-1$이므로

$g(x)=f(x-p)=a(x-p)^2-a-1$

2단계 $\overline{HT}\times\overline{QT}$를 식으로 나타내기

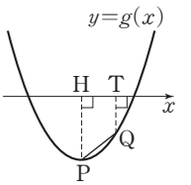
이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 꼭짓점은

$P(p, -a-1)$이므로 $H(p, 0)$

$Q(q, r)$ ($q>p$)라 하면 $T(q, 0)$

직선 PQ의 기울기는 2이므로

$\frac{r+a+1}{q-p}=2$



$\therefore r+a+1=2(q-p)$ …… ㉡

$Q(q, r)$는 이차함수 $g(x)=a(x-p)^2-a-1$의 그래프 위의 점이므로

$r=a(q-p)^2-a-1$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$a(q-p)^2=2(q-p)$

$q\ne p$이므로 양변을 $q-p$로 나누면

$a(q-p)=2$ $\therefore q-p=\frac{2}{a}$

이를 ㉢에 대입하면

$r=a\times\left(\frac{2}{a}\right)^2-a-1=\frac{4}{a}-a-1$

$\therefore \overline{HT}\times\overline{QT}=(q-p)\times|r|=|(q-p)r|$

$=\left|\frac{2}{a}\left(\frac{4}{a}-a-1\right)\right|=\left|\frac{8}{a^2}-\frac{2}{a}-2\right|$

3단계 $\overline{HT}\times\overline{QT}$의 최댓값 구하기

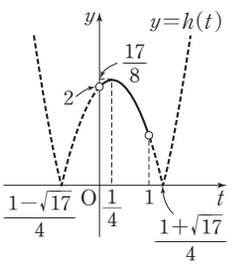
$\frac{2}{a}=t$로 놓으면 $a>2$이므로 $0<t<1$

$h(t)=\overline{HT}\times\overline{QT}$라 하면

$h(t)=|2t^2-t-2|=\left|2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{17}{8}\right|$

$2t^2-t-2=0$에서 $t=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

따라서 함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같으므로 $0<t<1$에서 $h(t)$, 즉 $\overline{HT}\times\overline{QT}$는 $t=\frac{1}{4}$일 때 최댓값이 $\frac{17}{8}$이다.



08 답 13

1단계 $S(x)$를 식으로 나타내기

선분 BC의 중점을 M이라 하고, 점 M을 지나고 직선 OB에 평행한 직선이 선분 OA와 만나는 점을 H라 하자.

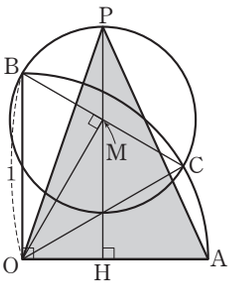
$\overline{OB}=\overline{OC}$인 이등변삼각형 OBC에서 점 M이 선분 BC의 중점이므로

$\angle OMB=90^\circ$

삼각형 OAP의 넓이 $S(x)$는

$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{PH}$

$=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times(\overline{MH}+\overline{PM})$ …… ㉠



2단계 $S(x)$의 최댓값 구하기

$\overline{PM}=\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{x}{2}$이므로 직각삼각형 OMB에서

$\overline{OM}^2=\overline{OB}^2-\overline{BM}^2=1^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2=1-\frac{x^2}{4}$

두 삼각형 OHM, BMO에서

$\angle OHM=\angle BMO=90^\circ$, $\angle OMH=\angle BOM$ (엇각)이므로

$\triangle OHM\backsim\triangle BMO$ (AA 닮음)

즉, $\overline{MH}:\overline{OM}=\overline{OM}:\overline{BO}$이고, $\overline{OB}=1$이므로

$\overline{MH}=\overline{OM}^2=1-\frac{x^2}{4}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $S(x)=\frac{1}{2}\times1\times\left(1-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{5}{8}$

이때 $0<x<\sqrt{2}$이므로 $S(x)$는 $x=1$일 때 최댓값이 $\frac{5}{8}$이다.

3단계 $p+q$의 값 구하기

따라서 $p=8$, $q=5$이므로 $p+q=13$

09 답 ④

1단계 원 O_1의 반지름의 길이를 a에 대한 식으로 나타내기

정삼각형 DEF의 넓이를 S_1이라 하면 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

원 O_1의 반지름의 길이를 r_1이라 하면 $S_1=\frac{1}{2}r_1\times3a=\frac{3}{2}ar_1$

즉, $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{3}{2}ar_1$이므로 $r_1=\frac{\sqrt{3}}{6}a$

2단계 원 O_2의 반지름의 길이를 a에 대한 식으로 나타내기

세 삼각형 ADF, BED, CFE에서 $\overline{DF}=\overline{ED}=\overline{FE}=a$이고,

$\angle ADF=\theta$라 하면 $\angle BDE=120^\circ-\theta$, $\angle BED=\theta$

$\angle CEF=120^\circ-\theta$, $\angle CFE=\theta$, $\angle AFD=120^\circ-\theta$

$\therefore$ $\triangle ADF\equiv\triangle BED\equiv\triangle CFE$ (ASA 합동)

정삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times8^2=16\sqrt{3}$이므로 삼각형 ADF의 넓이를 S_2라 하면 $S_2=\frac{1}{3}\left(16\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)=\frac{\sqrt{3}}{12}(64-a^2)$

삼각형 ADF에서 $\overline{AD}+\overline{AF}=8$, $\overline{DF}=a$이므로

원 O_2의 반지름의 길이를 r_2라 하면 $S_2=\frac{1}{2}r_2(8+a)$

즉, $\frac{\sqrt{3}}{12}(64-a^2)=\frac{1}{2}r_2(8+a)$이므로

$r_2=\frac{\sqrt{3}(64-a^2)}{6(8+a)}=\frac{\sqrt{3}(8+a)(8-a)}{6(8+a)}=\frac{\sqrt{3}}{6}(8-a)$

3단계 네 원의 넓이의 합이 최소가 되도록 하는 a의 값 구하기

네 원 O_1, O_2, O_3, O_4의 넓이의 합을 $S(a)$라 하면

$S(a)=\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2+3\times\pi\left\{\frac{\sqrt{3}}{6}(8-a)\right\}^2$

$=\frac{\pi}{12}a^2+\frac{\pi}{4}(a^2-16a+64)$

$=\frac{\pi}{3}(a^2-12a+48)$

$=\frac{\pi}{3}(a-6)^2+4\pi$

따라서 $0<a<8$에서 $S(a)$가 최소가 되도록 하는 a의 값은 6이다.

개념 NOTE

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

06 여러 가지 방정식

STEP 1 핵심 문제 | 70~71쪽

01 ①	02 84	03 ④	04 −4	05 ②	06 ⑤
07 ㄱ, ㄷ		08 16	09 ②	10 4	11 6
12 ②					

01 답 ①

주어진 방정식의 좌변을 전개하면

$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=(1+x+x^2+x^3)(1+x^4)$

$=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7=x^7+x^6+x^5+x^4$

$x^3+x^2+x+1=0$

$x^2(x+1)+x+1=0$

$(x+1)(x^2+1)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=\pm i$

이 세 근이 α, β, γ이므로

$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=(-1)^4+i^4+(-i)^4=1+1+1=3$

다른 풀이

주어진 방정식의 우변을 인수분해하면

$x^7+x^6+x^5+x^4=x^4(x^3+x^2+x+1)$

$=x^4\{x^2(x+1)+x+1\}$

$=x^4(x+1)(x^2+1)$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=x^4(x+1)(x^2+1)$

$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)-x^4(x+1)(x^2+1)=0$

$\{(1+x^4)-x^4\}(x+1)(x^2+1)=0$

$(x+1)(x^2+1)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=\pm i$

이 세 근이 α, β, γ이므로

$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=(-1)^4+i^4+(-i)^4=1+1+1=3$

02 답 84

$f(x)=(x^2+8x+k)(x^2+8x+15)+15$가 $x+2$로 나누어떨어지면

$f(-2)=0$이므로

$(4-16+k)(4-16+15)+15=0$

$3k-21=0$ $\therefore$ $k=7$

따라서 $f(x)=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$이므로 사차방정식 $f(x)=0$에서 $x^2+8x+7=t$로 놓으면

$t(t+8)+15=0$, $t^2+8t+15=0$

$(t+5)(t+3)=0$ $\therefore$ $t=-5$ 또는 $t=-3$

(i) $t=-5$일 때,

$x^2+8x+7=-5$에서 $x^2+8x+12=0$

$(x+6)(x+2)=0$ $\therefore$ $x=-6$ 또는 $x=-2$

(ii) $t=-3$일 때,

$x^2+8x+7=-3$에서 $x^2+8x+10=0$

$\therefore$ $x=-4\pm\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 네 근이 α, β, γ, δ이므로

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=(-6)^2+(-2)^2+(-4+\sqrt{6})^2+(-4-\sqrt{6})^2$

$=36+4+(22-8\sqrt{6})+(22+8\sqrt{6})=84$

다른 풀이

$f(x)=(x^2+8x+k)(x^2+8x+15)+15$가 $x+2$로 나누어떨어지면

$f(-2)=0$이므로

$(4-16+k)(4-16+15)+15=0$

$3k-21=0$ $\therefore k=7$

따라서 $f(x)=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$이므로 사차방정식 $f(x)=0$에서 $x^2+8x+7=t$로 놓으면

$t(t+8)+15=0$, $t^2+8t+15=0$

$(t+5)(t+3)=0$ $\therefore t=-5$ 또는 $t=-3$

(i) $t=-5$일 때,

$x^2+8x+7=-5$에서 $x^2+8x+12=0$

이차방정식 $x^2+8x+12=0$의 두 근을 α, β라 하면

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-8$, $\alpha\beta=12$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-8)^2-2\times12=40$

(ii) $t=-3$일 때,

$x^2+8x+7=-3$에서 $x^2+8x+10=0$

이차방정식 $x^2+8x+10=0$의 두 근을 γ, δ라 하면

근과 계수의 관계에 의하여

$\gamma+\delta=-8$, $\gamma\delta=10$

$\therefore \gamma^2+\delta^2=(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta=(-8)^2-2\times10=44$

(i), (ii)에서

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=40+44=84$

03 답 ④

$x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$2x^2+3x-1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0$

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$

$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면

$2t^2+3t-5=0$, $(2t+5)(t-1)=0$

$\therefore t=-\frac{5}{2}$ 또는 $t=1$

(i) $t=-\frac{5}{2}$일 때,

$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$에서 $2x^2+5x+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면 $D_1=25-16=9>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $t=1$일 때,

$x+\frac{1}{x}=1$에서 $x^2-x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면 $D_2=1-4=-3<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 허근은 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 두 허근의 곱은 1이다.

04 답 −4

$f(x)=2x^3+(a-11)x^2+(a^2-2a+14)x-2a^2$이라 하면 $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	2	$a-11$	$a^2-2a+14$	$-2a^2$
		4	$2a-14$	$2a^2$
	2	$a-7$	a^2	0

$\therefore f(x)=(x-2)\{2x^2+(a-7)x+a^2\}$ ····· 배점 30%

삼차방정식 $(x-2)\{2x^2+(a-7)x+a^2\}=0$에서

$x=2$ 또는 $2x^2+(a-7)x+a^2=0$

주어진 삼차방정식이 중근을 가지므로 이차방정식 $2x^2+(a-7)x+a^2=0$이 2를 근으로 갖거나 중근을 갖는다. ····· 배점 30%

(i) 이차방정식 $2x^2+(a-7)x+a^2=0$이 2를 근으로 갖는 경우

$x=2$를 대입하면 $8+2(a-7)+a^2=0$

$a^2+2a-6=0$ ⟶ 판별식을 D_1이라 하면 $\frac{D_1}{4}=1+6=7>0$ ➡ 서로 다른 두 실근

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 실수 a의 값의 합은 -2이다.

(ii) 이차방정식 $2x^2+(a-7)x+a^2=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a-7)^2-8a^2=0$, $-7a^2-14a+49=0$

$a^2+2a-7=0$ ⟶ 판별식을 D_2라 하면 $\frac{D_2}{4}=1+7=8>0$ ➡ 서로 다른 두 실근

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 실수 a의 값의 합은 -2이다.

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은 $-2+(-2)=-4$ ····· 배점 40%

05 답 ②

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=4$

$\therefore (\alpha+\beta+1)(\beta+\gamma+1)(\gamma+\alpha+1)$

$=(3-\gamma)(3-\alpha)(3-\beta)$

$=27-9(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=27-9\times2+3\times3-4=14$

06 답 ⑤

삼차방정식 $x^3+(a-2)x^2+13x+b=0$의 계수가 실수이고 $\sqrt{2}i+1$이 한 근이므로 $1-\sqrt{2}i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)+(1+\sqrt{2}i)\alpha+(1-\sqrt{2}i)\alpha=13$에서

$1+2+\alpha+\alpha\sqrt{2}i+\alpha-\alpha\sqrt{2}i=13$

$3+2\alpha=13$, $2\alpha=10$ $\therefore \alpha=5$

이때 $(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)+5=-(a-2)$이므로

$-a+2=7$ $\therefore a=-5$

또 $(1+\sqrt{2}i)\times(1-\sqrt{2}i)\times5=-b$이므로

$-b=15$ $\therefore b=-15$

$\therefore a-b=-5-(-15)=10$

07 답 ㄱ, ㄷ

삼차방정식 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 계수가 실수이고 한 허근이 ω이므로 다른 한 허근은 $\overline{\omega}$이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

ㄱ. $\omega^{16}=(\omega^3)^5\omega=\omega$

ㄴ. $\omega^2+\overline{\omega}^2=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}=(-1)^2-2\times1=-1$

ㄷ. $\omega^2+\omega+1=0$에서 $1+\omega^2=-\omega$, $1+\omega=-\omega^2$이므로

$$\frac{1}{1+\omega^2}+\frac{1}{1+\omega^4}+\frac{1}{1+\omega^6}=-\frac{1}{\omega}+\frac{1}{1+\omega^3\omega}+\frac{1}{1+(\omega^3)^2}$$

$$=-\frac{1}{\omega}+\frac{1}{1+\omega}+\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{2}=-\frac{\omega+1}{\omega^2}+\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{-\omega^2}{\omega^2}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

08 답 16

$f(x)=x^3-3x^2+4x-2$라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	−3	4	−2
		1	−2	2
	1	−2	2	0

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2-2x+2)$

삼차방정식 $(x-1)(x^2-2x+2)=0$에서

$\omega\neq1$이므로 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 두 허근은 ω, $\overline{\omega}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=2$, $\omega\overline{\omega}=2$

$\therefore \{\omega(\overline{\omega}-1)\}^n=(\omega\overline{\omega}-\omega)^n=(2-\omega)^n=\overline{\omega}^n$

이차방정식 $x^2-2x+2=0$에서 $x=1+i$ 또는 $x=1-i$

$\omega=1+i$, $\overline{\omega}=1-i$일 때,

$\overline{\omega}^2=-2i$, $\overline{\omega}^4=-4$, $\overline{\omega}^{16}=256$

마찬가지로 $\omega=1-i$, $\overline{\omega}=1+i$일 때,

$\overline{\omega}^{16}=256$

$\therefore n=16$

09 답 ②

주어진 두 연립방정식의 해가 일치하므로 그 해는 연립방정식

$\begin{cases}2x+2y=1\\x^2-y^2=-1\end{cases}$의 해와 같다.

방정식 $2x+2y=1$에서 $2y=1-2x$ $\therefore y=\frac{1}{2}-x$ …… ㉠

㉠을 $x^2-y^2=-1$에 대입하면 $x^2-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2=-1$

$-\frac{1}{4}+x=-1$ $\therefore x=-\frac{3}{4}$

이를 ㉠에 대입하면 $y=\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$

$x=-\frac{3}{4}$, $y=\frac{5}{4}$를 $3x+y=a$에 대입하면

$a=-\frac{9}{4}+\frac{5}{4}=-1$

$x=-\frac{3}{4}$, $y=\frac{5}{4}$를 $x-y=b$에 대입하면

$b=-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}=-2$

$\therefore ab=-1\times(-2)=2$

10 답 4

방정식 $(x+1)(y+1)=-4$에서 $xy+x+y=-5$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases}u+v=-5 & \cdots\cdots ㉠\\u^2-v=7 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $v=-u-5$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$u^2-(-u-5)=7$, $u^2+u-2=0$

$(u+2)(u-1)=0$ $\therefore u=-2$ 또는 $u=1$

이를 각각 $v=-u-5$에 대입하면

$u=-2$일 때 $v=-3$, $u=1$일 때 $v=-6$

(i) $u=-2$, $v=-3$, 즉 $x+y=-2$, $xy=-3$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2+2t-3=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-1)=0$ $\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

$\therefore x=-3$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=-3$

$\therefore x+2y=-1$ 또는 $x+2y=-5$

(ii) $u=1$, $v=-6$, 즉 $x+y=1$, $xy=-6$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-t-6=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-3)=0$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=3$

$\therefore x=-2$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=-2$

$\therefore x+2y=4$ 또는 $x+2y=-1$

(i), (ii)에서 $x+2y$의 최댓값은 4이다.

11 답 6

$2x-y=5$에서 $y=2x-5$

이를 $x^2-3y=k$에 대입하면 $x^2-3(2x-5)=k$

$\therefore x^2-6x+15-k=0$ …… ㉠

㉠을 만족시키는 x의 값을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=6$

이때 α, β는 자연수이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (α, β)는

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$

따라서 ㉠을 만족시키는 x의 값은 1, 5 또는 2, 4 또는 3(중근)이다.

(i) x의 값이 1, 5일 때,

$x=1$이면 $y=-3$이므로 자연수가 아니다.

(ii) x의 값이 2, 4일 때,

$x=2$이면 $y=-1$이므로 자연수가 아니다.

(iii) x의 값이 3(중근)일 때,

$x=3$이면 $y=1$이므로 자연수이다.

(i), (ii), (iii)에서 $x=3$, $y=1$이므로 ㉠에 대입하면

$9-18+15-k=0$ $\therefore k=6$

12 답 ②

방정식 $2x^2+6xy+9y^2-2x+1=0$에서

$(x^2+6xy+9y^2)+(x^2-2x+1)=0$

$\therefore (x+3y)^2+(x-1)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$x+3y=0$, $x-1=0$ $\therefore x=1$, $y=-\frac{1}{3}$

$\therefore x-3y=1+1=2$

다른 풀이

주어진 방정식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+2(3y-1)x+9y^2+1=0$ …… ㉠

x가 실수이므로 x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(3y-1)^2-2(9y^2+1)\geq 0$

$9y^2+6y+1\leq 0$ $\therefore (3y+1)^2\leq 0$

이때 y가 실수이므로

$3y+1=0$ $\therefore y=-\frac{1}{3}$

이를 ㉠에 대입하면 $2x^2-4x+2=0$

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$

$\therefore x-3y=1+1=2$

STEP 2 고난도 문제 | 72~76쪽

01 ③	02 ①	03 ⑤	04 4	05 38	06 ①
07 4	08 32	09 $-\frac{3}{2}$	10 ④	11 31	12 ③
13 ⑤	14 16	15 $\frac{3}{4}$ cm		16 3	17 48
18 5	19 $\frac{31}{8}$	20 6	21 ②	22 ②	23 39
24 3	25 12	26 ②	27 10	28 8	

01 답 ③

$g(x)=2x^3-nx^2+(n-n^2)x-n^2$이라 하면 $g(n)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

n	2	$-n$	$n-n^2$	$-n^2$
		$2n$	n^2	n^2
	2	n	n	0

$\therefore g(x)=(x-n)(2x^2+nx+n)$

삼차방정식 $(x-n)(2x^2+nx+n)=0$에서

$x=n$ 또는 $2x^2+nx+n=0$ …… ㉠

(i) $n=7$일 때,

㉠에 대입하면 $x=7$ 또는 $2x^2+7x+7=0$

이차방정식 $2x^2+7x+7=0$에서

$x=\frac{-7\pm\sqrt{7}i}{4}$

$\therefore f(7)=1$

(ii) $n=8$일 때,

㉠에 대입하면 $x=8$ 또는 $2x^2+8x+8=0$

이차방정식 $2x^2+8x+8=0$에서 $x^2+4x+4=0$

$(x+2)^2=0$ $\therefore x=-2$

$\therefore f(8)=2$

(iii) $n=9$일 때,

㉠에 대입하면 $x=9$ 또는 $2x^2+9x+9=0$

이차방정식 $2x^2+9x+9=0$에서

$(x+3)(2x+3)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=-\frac{3}{2}$

$\therefore f(9)=3$

(i), (ii), (iii)에서 $f(7)+f(8)+f(9)=1+2+3=6$

02 답 ①

방정식 $P(x)=0$의 한 실근을 α, 서로 다른 두 허근을 β, γ라 하면

방정식 $P(3x-1)=0$의 세 근은 $\frac{\alpha+1}{3}$, $\frac{\beta+1}{3}$, $\frac{\gamma+1}{3}$

㈎에서 $\beta\gamma=5$ …… ㉠

㈏에서 $\frac{\alpha+1}{3}=0$이고, $\frac{\beta+1}{3}+\frac{\gamma+1}{3}=2$이므로

$\alpha=-1$, $\beta+\gamma=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 α, β, γ를 세 근으로 하고, x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$(x+1)(x^2-4x+5)=0$

즉, $P(x)=(x+1)(x^2-4x+5)=x^3-3x^2+x+5$이므로

$a=-3$, $b=1$, $c=5$

$\therefore a+b+c=3$

idea

03 답 ⑤

$g(x)=2x^4-3x^3+4x^2-3x+2$라 하면 사차방정식 $g(x)=0$의 네 근이 α, β, γ, δ이므로

$g(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$ …… ㉠

사차방정식 $g(x)=0$의 상수항이 2이므로

$2\alpha\beta\gamma\delta=2$ $\therefore \alpha\beta\gamma\delta=1$ …… ㉡

사차방정식 $f(x)=0$의 네 근이 α^2, β^2, γ^2, δ^2이므로 $f(x)$의 사차항의 계수를 $k\,(k\neq 0)$라 하면

$f(x)=k(x-\alpha^2)(x-\beta^2)(x-\gamma^2)(x-\delta^2)$

이때 $f(0)=2$이므로

$k\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2=2$, $k(\alpha\beta\gamma\delta)^2=2$

$\therefore k=2$ ($\because$ ㉡)

따라서 $f(x)=2(x-\alpha^2)(x-\beta^2)(x-\gamma^2)(x-\delta^2)$이므로

$f(1)=2(1-\alpha^2)(1-\beta^2)(1-\gamma^2)(1-\delta^2)$

$=2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)$

이때 $g(1)=2-3+4-3+2=2$이므로 ㉠에 $x=1$을 대입하면

$2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)=2$

$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)=1$

또 $g(-1)=2+3+4+3+2=14$이므로 ㉠에 $x=-1$을 대입하면

$2(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)(-1-\delta)=14$

$\therefore (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)=7$

$\therefore f(1)=2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)$

$=2\times 1\times 7=14$

다른 풀이

사차방정식 $f(x)=0$의 네 근이 α^2, β^2, γ^2, δ^2이므로 $f(x)$의 사차항의 계수를 $k\,(k\neq 0)$라 하면

$f(x)=k(x-\alpha^2)(x-\beta^2)(x-\gamma^2)(x-\delta^2)$

사차방정식 $2x^4-3x^3+4x^2-3x+2=0$에서 $x\neq 0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$2x^2-3x+4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0$

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$

$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면

$2t^2-3t=0$, $t(2t-3)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=\frac{3}{2}$

(i) $t=0$일 때,

$x+\frac{1}{x}=0$에서 $x^2+1=0$

이 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha^2=-1$, $\beta^2=-1$

(ii) $t=\frac{3}{2}$일 때,

$x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$에서 $2x^2-3x+2=0$

이 이차방정식의 두 근을 γ, δ라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\gamma+\delta=\frac{3}{2}$, $\gamma\delta=1$

$\therefore \gamma^2+\delta^2=(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\times1=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서

$f(x)=k(x-\alpha^2)(x-\beta^2)(x-\gamma^2)(x-\delta^2)$

$=k(x+1)^2\{x^2-(\gamma^2+\delta^2)x+\gamma^2\delta^2\}$

$=k(x+1)^2\left(x^2-\frac{1}{4}x+1\right)$

이때 $f(0)=2$이므로 $k=2$

따라서 $f(x)=2(x+1)^2\left(x^2-\frac{1}{4}x+1\right)$이므로

$f(1)=2\times4\times\frac{7}{4}=14$

04 답 4

$x^2+kx=X$로 놓으면

$(x^2+kx+2)(x^2+kx+6)+3=0$에서

$(X+2)(X+6)+3=0$, $X^2+8X+15=0$

$(X+3)(X+5)=0$, $(x^2+kx+3)(x^2+kx+5)=0$

두 이차방정식 $x^2+kx+3=0$, $x^2+kx+5=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$D_1=k^2-12$, $D_2=k^2-20$

사차방정식 $(x^2+kx+3)(x^2+kx+5)=0$이 실근과 허근을 모두 가지려면 $D_1<0$, $D_2\geq0$ 또는 $D_1\geq0$, $D_2<0$이어야 한다.

$D_1<0$, $D_2\geq0$에서 $k^2<12$, $k^2\geq20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 존재하지 않는다.

$D_1\geq0$, $D_2<0$에서 $12\leq k^2<20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 4이다.

따라서 사차방정식 $(x^2+kx+2)(x^2+kx+6)+3=0$이 실근과 허근을 모두 갖도록 하는 자연수 k의 값은 4이다.

05 답 38

삼차방정식 $x^3-(p-4)x^2+2px+q=0$의 세 근을 $n-1$, n, $n+1$ (n은 정수)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$(n-1)+n+(n+1)=p-4$에서 $3n=p-4$

$\therefore p=3n+4$ ····· ㉠

$(n-1)n+n(n+1)+(n+1)(n-1)=2p$

$\therefore 3n^2-1=2p$ ····· ㉡

$n(n-1)(n+1)=-q$ ····· ㉢

㉠, ㉡에서 $3n^2-1=2(3n+4)$이므로 $3n^2-6n-9=0$

$n^2-2n-3=0$, $(n+1)(n-3)=0$ $\therefore n=-1$ 또는 $n=3$

(i) $n=-1$일 때,

삼차방정식의 세 근은 -2, -1, 0이다.

이때 ㉠, ㉢에서 $p=1$, $q=0$이므로 $|p|+|q|=1+0=1$

(ii) $n=3$일 때,

삼차방정식의 세 근은 2, 3, 4이다.

이때 ㉠, ㉢에서 $p=13$, $q=-24$이므로

$|p|+|q|=13+24=37$

(i), (ii)에서 $|p|+|q|$의 값의 합은

$1+37=38$

06 답 ①

삼차방정식 $x^3-(a^2+a-1)x^2-a(a-3)x+4a=0$의 서로 다른 세 실근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=a^2+a-1$ ····· ㉠

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-a(a-3)$ ····· ㉡

$\alpha\beta\gamma=-4a$ ····· ㉢

한편 $f(x)=x^3-(a^2+a-1)x^2-a(a-3)x+4a$라 하면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	$-a^2-a+1$	$-a^2+3a$	$4a$
		-1	a^2+a	$-4a$
	1	$-a^2-a$	$4a$	0

$\therefore f(x)=(x+1)\{x^2-a(a+1)x+4a\}$

이때 삼차방정식 $x^3-(a^2+a-1)x^2-a(a-3)x+4a=0$의 한 실근은 $x=-1$이다.

(i) $\alpha=-1$일 때,

$-1\times\gamma=-4$에서 $\gamma=4$이므로 $-1<\beta<4$

이때 ㉢에서 $-4\beta=-4a$이므로 $\beta=a$

㉠에서 $-1+a+4=a^2+a-1$, $a^2=4$ $\therefore a=\pm2$

㉡에서 $-a+4a-4=-a(a-3)$, $a^2=4$ $\therefore a=\pm2$

이 중에서 $-1<\beta=a<4$를 만족시키는 것은 $a=2$

(ii) $\beta=-1$일 때,

㉢에서 $-a\gamma=-4a$ $\therefore a\gamma=4a$

그런데 주어진 조건에서 $a\gamma=-4$이므로 $a=-1$

$a=-1$을 이차방정식 $x^2-a(a+1)x+4a=0$에 대입하면

$x^2=4$ $\therefore x=\pm2$

즉, $\alpha=-2$, $\gamma=2$이므로 $\alpha<\beta<\gamma$를 만족시킨다.

(iii) $\gamma=-1$일 때,

$\alpha\times(-1)=-4$에서 $\alpha=4$이므로 $\alpha<\beta<\gamma$를 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=2$ 또는 $a=-1$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$2+(-1)=1$

07 답 4

삼차방정식 $2x^3-mx^2+(m^3-10m)x+n=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{m}{2}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{m^3-10m}{2}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{n}{2}$

또 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$도 주어진 삼차방정식의 세 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 곱은

$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{n}{2}$ $\therefore \alpha\beta\gamma=-\frac{2}{n}$

즉, $-\frac{2}{n}=-\frac{n}{2}$이므로 $n^2=4$ $\therefore n=2$ ($\because n$은 자연수)

$\therefore \alpha\beta\gamma=-1$

두 근의 곱의 합은 $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{m^3-10m}{2}$이므로

$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{m^3-10m}{2}$

$-\frac{m}{2}=\frac{m^3-10m}{2}$, $m^3-9m=0$

$m(m+3)(m-3)=0$ $\therefore m=3$ ($\because m$은 자연수)

따라서 주어진 삼차방정식은 $2x^3-3x^2-3x+2=0$이다.

$f(x)=2x^3-3x^2-3x+2$라 하면 $f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	2	-3	-3	2
		-2	5	-2
2	2	-5	2	0
		4	-2	
	2	-1	0	

$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)(2x-1)$

삼차방정식 $(x+1)(2x-1)(x-2)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=2$이므로 $\beta\gamma-3\alpha=1+3=4$

다른 풀이

α는 삼차방정식 $2x^3-mx^2+(m^3-10m)x+n=0$의 한 근이므로

$2\alpha^3-m\alpha^2+(m^3-10m)\alpha+n=0$

$\alpha\neq0$이므로 양변을 α^3으로 나누면

$2-\frac{m}{\alpha}+\frac{m^3-10m}{\alpha^2}+\frac{n}{\alpha^3}=0$

$n\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+(m^3-10m)\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2-m\times\frac{1}{\alpha}+2=0$

즉, $\frac{1}{\alpha}$은 삼차방정식 $nx^3+(m^3-10m)x^2-mx+2=0$의 한 근이다.

같은 방법으로 하면 $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$도 삼차방정식

$nx^3+(m^3-10m)x^2-mx+2=0$의 근이다.

이때 두 삼차방정식 $2x^3-mx^2+(m^3-10m)x+n=0$,

$nx^3+(m^3-10m)x^2-mx+2=0$은 서로 같은 근을 가지므로 계수의 비가 같다.

즉, $\frac{n}{2}=\frac{2}{n}$이므로 $n^2=4$ $\therefore n=2$ ($\because n$은 자연수)

또 $m^3-10m=-m$이므로

$m^3-9m=0$, $m(m+3)(m-3)=0$ $\therefore m=3$ ($\because m$은 자연수)

따라서 주어진 삼차방정식은 $2x^3-3x^2-3x+2=0$이다.

$f(x)=2x^3-3x^2-3x+2$라 하면 $f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	2	-3	-3	2
		-2	5	-2
2	2	-5	2	0
		4	-2	
	2	-1	0	

$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)(2x-1)$

삼차방정식 $(x+1)(2x-1)(x-2)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=2$이므로 $\beta\gamma-3\alpha=1+3=4$

08 답 32

삼차방정식 $x^3-ax^2+8x+b=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta+\gamma=a$

$\therefore \beta+\gamma=a-\alpha$, $\gamma+\alpha=a-\beta$, $\alpha+\beta=a-\gamma$

즉, $f(\alpha)=4(\beta+\gamma)=4a-4\alpha$, $f(\beta)=4(\gamma+\alpha)=4a-4\beta$,

$f(\gamma)=4(\alpha+\beta)=4a-4\gamma$이므로

$f(\alpha)+4\alpha-4a=0$, $f(\beta)+4\beta-4a=0$, $f(\gamma)+4\gamma-4a=0$

따라서 α, β, γ는 삼차방정식 $f(x)+4x-4a=0$의 세 근임을 알 수 있다.

이때 $f(x)+4x-4a$는 x^3의 계수가 1인 삼차식이므로

$f(x)+4x-4a=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

또 $x^3-ax^2+8x+b=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$이므로

$f(x)+4x-4a=x^3-ax^2+8x+b$

$\therefore f(x)=x^3-ax^2+4x+4a+b$

따라서 $f(2)=8-4a+8+4a+b=16+b$,

$f(-2)=-8-4a-8+4a+b=-16+b$이므로

$f(2)-f(-2)=(16+b)-(-16+b)=32$

09 답 $-\frac{3}{2}$

㈎에서 $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 $x-1$이므로

$f(x)=(x^2-1)Q(x)+x-1$

$\therefore f(-1)=-2$, $f(1)=0$ ····· 배점 30%

이때 $f(1)=0$이므로 사차방정식 $f(x)=0$의 한 근은 1이다.

또 사차방정식 $f(x)=0$의 계수가 유리수이고, ㈏에서 $-1-\sqrt{2}$가 한 근이므로 $-1+\sqrt{2}$도 근이다.

이때 사차방정식 $f(x)=0$의 나머지 한 근을 α라 하면

$f(x)=(x-1)\{x-(-1-\sqrt{2})\}\{x-(-1+\sqrt{2})\}(x-\alpha)$

$=(x-1)(x^2+2x-1)(x-\alpha)$ ····· 배점 30%

$f(-1)=-2$이므로

$-2\times(1-2-1)(-1-\alpha)=-2$

$-4-4\alpha=-2$ $\therefore \alpha=-\frac{1}{2}$ ····· 배점 20%

따라서 사차방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 합은

$1+(-1-\sqrt{2})+(-1+\sqrt{2})+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$ ····· 배점 20%

10 답 ④

사차방정식 $x^4+ax^3+8x^2+bx-3=0$의 계수가 실수이고, 허수 α가 한 근이므로 α의 켤레복소수인 $\overline{\alpha}$도 근이다.

이때 $-\alpha^2=\overline{\alpha}$이므로

$(-\alpha^2)^2=(\overline{\alpha})^2$ $\therefore \alpha^4=\overline{(\alpha^2)}=\overline{(-\overline{\alpha})}=-\alpha$

그런데 $\alpha\neq0$이므로 $\alpha^3=-1$

즉, $\alpha^3+1=0$이므로 $(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$

그런데 $\alpha\neq-1$이므로 $\alpha^2-\alpha+1=0$

이때 α, $-\alpha^2$은 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 허근이므로 주어진 사차방정식은 $(x^2-x+1)(x^2+px-3)=0$ (p는 상수)으로 놓을 수 있다.

즉, $x^4+ax^3+8x^2+bx-3=(x^2-x+1)(x^2+px-3)$에서

$x^4+ax^3+8x^2+bx-3=x^4+(p-1)x^3+(-p-2)x^2+(p+3)x-3$

따라서 $a=p-1$, $8=-p-2$, $b=p+3$이므로

$p=-10$, $a=-11$, $b=-7$

$\therefore b-a=4$

11 답 31

$g(x)=x^3-2x^2-x-6$이라 하면 $g(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

3	1	−2	−1	−6
		3	3	6
	1	1	2	0

$\therefore g(x)=(x-3)(x^2+x+2)$

삼차방정식 $(x-3)(x^2+x+2)=0$에서

$x=3$ 또는 $x^2+x+2=0$

삼차방정식 $x^3-2x^2-x-6=0$의 계수가 실수이고, 허수 α가 한 근이므로 α의 켤레복소수인 $\overline{\alpha}$도 근이다.

이때 α와 $\overline{\alpha}$는 이차방정식 $x^2+x+2=0$의 두 근이므로

$\alpha^2+\alpha+2=0$, $\overline{\alpha}^2+\overline{\alpha}+2=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=-1$, $\alpha\overline{\alpha}=2$

$\overline{\alpha}^2+\overline{\alpha}+2=0$에서 $\overline{\alpha}^2+2=-\overline{\alpha}$이고, $\alpha\overline{\alpha}=2$에서 $\overline{\alpha}=\frac{2}{\alpha}$이므로

$$f(\alpha)=\frac{1}{\overline{\alpha}^2+2}=-\frac{1}{\overline{\alpha}}=-\frac{1}{\frac{2}{\alpha}}=-\frac{\alpha}{2}$$

$\therefore f(\alpha)+\frac{\alpha}{2}=0$ ····· ㉠

$\alpha^2+\alpha+2=0$에서 $\alpha^2=-\alpha-2$,

$\alpha^3=\alpha(-\alpha-2)=-\alpha^2-2\alpha=-(-\alpha-2)-2\alpha=-\alpha+2$이고,

$\alpha\overline{\alpha}=2$에서 $\alpha=\frac{2}{\overline{\alpha}}$이므로

$$f(\overline{\alpha})=\frac{1}{\alpha^3-2}=-\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{\frac{2}{\overline{\alpha}}}=-\frac{\overline{\alpha}}{2}$$

$\therefore f(\overline{\alpha})+\frac{\overline{\alpha}}{2}=0$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 삼차방정식 $f(x)+\frac{x}{2}=0$의 두 근이 α, $\overline{\alpha}$이고, 삼차항의 계수가 1이므로 나머지 한 근을 β라 하면

$$f(x)+\frac{x}{2}=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-\beta)$$
$$=(x^2+x+2)(x-\beta)$$

$\therefore f(x)=(x^2+x+2)(x-\beta)-\frac{x}{2}$

이때 $f(0)=4$이므로

$2\times(-\beta)=4$ $\therefore \beta=-2$

따라서 $f(x)=(x^2+x+2)(x+2)-\frac{x}{2}$이므로

$f(2)=(4+2+2)(2+2)-1=31$

12 답 ③

삼차방정식 $x^3=1$에서

$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로 $\overline{\omega}$도 근이다.

$\therefore \omega^3=1$, $\overline{\omega}^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \omega+1=-\overline{\omega}$, $\overline{\omega}+1=-\omega$

$f(n)=\frac{\overline{\omega}^{2n}}{\omega^{2n}+1}+\frac{\omega^{2n}}{\overline{\omega}^{2n}+1}$에서

$$f(1)=\frac{\overline{\omega}^2}{\omega^2+1}+\frac{\omega^2}{\overline{\omega}^2+1}=\frac{\overline{\omega}^2}{-\omega}+\frac{\omega^2}{-\overline{\omega}}$$
$$=-\frac{\overline{\omega}^3+\omega^3}{\omega\overline{\omega}}=-\frac{1+1}{1}=-2$$

$$f(2)=\frac{\overline{\omega}^4}{\omega^4+1}+\frac{\omega^4}{\overline{\omega}^4+1}=\frac{\overline{\omega}^3\overline{\omega}}{\omega^3\omega+1}+\frac{\omega^3\omega}{\overline{\omega}^3\overline{\omega}+1}$$
$$=\frac{\overline{\omega}}{\omega+1}+\frac{\omega}{\overline{\omega}+1}=\frac{\overline{\omega}}{-\overline{\omega}}+\frac{\omega}{-\omega}=-1-1=-2$$

$$f(3)=\frac{\overline{\omega}^6}{\omega^6+1}+\frac{\omega^6}{\overline{\omega}^6+1}=\frac{(\overline{\omega}^3)^2}{(\omega^3)^2+1}+\frac{(\omega^3)^2}{(\overline{\omega}^3)^2+1}$$
$$=\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+1}=1$$

이때 $\omega^2=\omega^8=\omega^{14}=\cdots$, $\overline{\omega}^2=\overline{\omega}^8=\overline{\omega}^{14}=\cdots$, $\omega^4=\omega^{10}=\omega^{16}=\cdots$, $\overline{\omega}^4=\overline{\omega}^{10}=\overline{\omega}^{16}=\cdots$, $\omega^6=\omega^{12}=\omega^{18}=\cdots$, $\overline{\omega}^6=\overline{\omega}^{12}=\overline{\omega}^{18}=\cdots$이므로

$f(1)=f(4)=f(7)=\cdots$, $f(2)=f(5)=f(8)=\cdots$,

$f(3)=f(6)=f(9)=\cdots$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)=f(4)+f(5)+f(6)=f(7)+f(8)+f(9)$
$=\cdots=-3$

즉, $-101=33\times(-3)+(-2)$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(97)+f(98)+f(99)+f(100)=-101$

$\therefore k=100$

13 답 ⑤

삼차방정식 $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 α는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\alpha^3=1$, $\alpha^2+\alpha+1=0$

$\alpha+1=-\alpha^2$, $\alpha^2+1=-\alpha$, $\alpha^2+\alpha=-1$이므로

$f(n)=(\alpha+1)^n+(\alpha^2+1)^n+(\alpha^2+\alpha)^n$
$=(-\alpha^2)^n+(-\alpha)^n+(-1)^n$
$=(-1)^n(\alpha^{2n}+\alpha^n+1)$

또 삼차방정식 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

이때 β는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\beta^3=-1$, $\beta^2-\beta+1=0$

$1-\beta=-\beta^2$, $1+\beta^2=\beta$, $\beta^2-\beta=-1$이므로

$g(n)=(1-\beta)^n+(1+\beta^2)^n+(\beta^2-\beta)^n$
$=(-\beta^2)^n+\beta^n+(-1)^n$
$=(-1)^n\{\beta^{2n}+(-\beta)^n+1\}$

ㄱ. $f(1)=-(\alpha^2+\alpha+1)=0$, $g(1)=-(\beta^2-\beta+1)=0$이므로
$f(1)=g(1)$

ㄴ. $f(101)=-(\alpha^{202}+\alpha^{101}+1)=-\{(\alpha^3)^{67}\alpha+(\alpha^3)^{33}\alpha^2+1\}$
$=-(\alpha+\alpha^2+1)=0$
$g(101)=-(\beta^{202}-\beta^{101}+1)=-\{(\beta^3)^{67}\beta-(\beta^3)^{33}\beta^2+1\}$
$=-(-\beta+\beta^2+1)=0$
$\therefore f(101)=g(101)$

ㄷ. 음이 아닌 정수 k에 대하여
(i) $n=3k+1$일 때,
$f(3k+1)=(-1)^{3k+1}\{\alpha^{2(3k+1)}+\alpha^{3k+1}+1\}$
$=(-1)^{3k+1}\{(\alpha^3)^{2k}\alpha^2+(\alpha^3)^k\alpha+1\}$
$=(-1)^{3k+1}(\alpha^2+\alpha+1)=0$
$g(3k+1)=(-1)^{3k+1}\{\beta^{2(3k+1)}+(-\beta)^{3k+1}+1\}$
$=(-1)^{3k+1}\{(\beta^3)^{2k}\beta^2+(-\beta^3)^k(-\beta)+1\}$
$=(-1)^{3k+1}(\beta^2-\beta+1)=0$
$\therefore f(3k+1)=g(3k+1)$

(ii) $n=3k+2$일 때,

$f(3k+2)=(-1)^{3k+2}\{\alpha^{2(3k+2)}+\alpha^{3k+2}+1\}$

$=(-1)^{3k+2}\{(\alpha^3)^{2k+1}\alpha+(\alpha^3)^k\alpha^2+1\}$

$=(-1)^{3k+2}(\alpha+\alpha^2+1)=0$

$g(3k+2)=(-1)^{3k+2}\{\beta^{2(3k+2)}+(-\beta)^{3k+2}+1\}$

$=(-1)^{3k+2}\{(\beta^3)^{2k+1}\beta+(-\beta^3)^k(-\beta)^2+1\}$

$=(-1)^{3k+2}(-\beta+\beta^2+1)=0$

$\therefore f(3k+2)=g(3k+2)$

(iii) $n=3k+3$일 때,

$f(3k+3)=(-1)^{3k+3}\{\alpha^{2(3k+3)}+\alpha^{3k+3}+1\}$

$=(-1)^{3k+3}\{(\alpha^3)^{2k+2}+(\alpha^3)^{k+1}+1\}$

$=(-1)^{3k+3}(1+1+1)$

$=(-1)^{3k+3}\times3$

$g(3k+3)=(-1)^{3k+3}\{\beta^{2(3k+3)}+(-\beta)^{3k+3}+1\}$

$=(-1)^{3k+3}\{(\beta^3)^{2k+2}+(-\beta^3)^{k+1}+1\}$

$=(-1)^{3k+3}(1+1+1)$

$=(-1)^{3k+3}\times3$

$\therefore f(3k+3)=g(3k+3)$

(i), (ii), (iii)에서 $f(n)=g(n)$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(1000)$

$=g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(1000)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14 답 16

삼차방정식 $x^3=1$에서

$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

또 ω가 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로 $\overline{\omega}$도 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$

㈎에서 $\left(\frac{1}{\omega}-\omega+\frac{1}{\omega^2}\right)^n=\left(\frac{\omega-\omega^3+1}{\omega^2}\right)^n=\left(\frac{\omega}{\omega^2}\right)^n=\frac{1}{\omega^n}$

즉, $\frac{1}{\omega^n}=1$이므로 $\omega^n=1$

따라서 n은 3의 배수이다. …… ㉠

$\omega+\overline{\omega}=-1$에서 $\overline{\omega}=-\omega-1$이므로 ㈏의 좌변에 대입하면

$(-\omega-1)^n=\overline{\omega}^n$

㈏의 우변에서 $\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n=(-\overline{\omega})^n$

즉, $\overline{\omega}^n=(-\overline{\omega})^n$이므로 n은 2의 배수이다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 n은 6의 배수이므로 100 이하의 자연수 n은 6, 12, 18, …, 96의 16개이다.

15 답 $\frac{3}{4}$ cm

상자의 세 모서리의 길이를 각각 a cm, b cm, c cm라 하면

모든 모서리의 길이의 합이 30 cm이므로

$4(a+b+c)=30$ $\therefore a+b+c=\frac{15}{2}$

겉넓이가 34 cm^{2}이므로

$2(ab+bc+ca)=34$ $\therefore ab+bc+ca=17$

부피가 12 cm^{3}이므로

$abc=12$

이때 a, b, c를 세 근으로 하는 삼차방정식은

$x^3-\frac{15}{2}x^2+17x-12=0$

$\therefore 2x^3-15x^2+34x-24=0$

$f(x)=2x^3-15x^2+34x-24$라 하면 $f(2)=0$, $f(4)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	2	−15	34	−24
		4	−22	24
4	2	−11	12	0
		8	−12	
	2	−3	0	

$\therefore f(x)=(x-2)(x-4)(2x-3)$

삼차방정식 $(2x-3)(x-2)(x-4)=0$에서

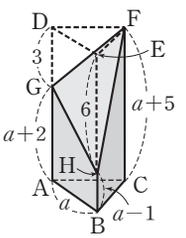
$x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

즉, 상자의 세 모서리의 길이가 $\frac{3}{2}$ cm, 2 cm, 4 cm이므로 상자 안에 구 모양의 물건을 넣으려면 지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ cm보다 작거나 같아야 한다.

따라서 물건의 반지름의 길이의 최댓값은 $\frac{3}{4}$ cm이다.

16 답 3

밑면이 한 변의 길이가 a인 정삼각형이고 높이가 $a+5$인 정삼각기둥의 꼭짓점을 그림과 같이 각각 A, B, C, D, E, F라 하고, 이 정삼각기둥의 부피를 V_1이라 하면



$V_1=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2(a+5)$

이 정삼각기둥을 자른 단면이 변 AD, 변 BE와 만나는 점을 각각 G, H라 하면

$\overline{DG}=3$, $\overline{EH}=6$

잘려 나간 입체도형은 밑면이 사다리꼴 DGHE인 사각뿔이므로 밑면의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(3+6)\times a=\frac{9}{2}a$

이 사각뿔의 높이는 꼭짓점 F에서 변 DE에 내린 수선의 길이와 같고 이는 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이와 같으므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

이 사각뿔의 부피를 V_2라 하면

$V_2=\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

따라서 주어진 입체도형의 부피를 V라 하면

$V=V_1-V_2=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2(a+5)-\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2(a+2)$

이때 $V=\frac{45\sqrt{3}}{4}$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2(a+2)=\frac{45\sqrt{3}}{4}$

$a^2(a+2)=45$, $a^3+2a^2-45=0$

$f(a)=a^3+2a^2-45$라 하면 $f(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(a)$를 인수분해하면

3	1	2	0	−45
		3	15	45
	1	5	15	0

$\therefore f(a)=(a-3)(a^2+5a+15)$

삼차방정식 $(a-3)(a^2+5a+15)=0$에서 $a=3$ ($\because a$는 실수)

개념 NOTE

(1) 기둥의 밑넓이를 S, 높이를 h, 부피를 V라 하면

$V=Sh$

(2) 뿔의 밑넓이를 S, 높이를 h, 부피를 V라 하면

$V=\frac{1}{3}Sh$

17 답 48

$|x+2y|=6$에서 $x+2y=\pm 6$

(i) $x+2y=6$, 즉 $2y=6-x$인 경우

$2y=6-x$를 $x^2+4y^2=50$에 대입하면 $x^2+(6-x)^2=50$

$x^2-6x-7=0$, $(x+1)(x-7)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=7$

즉, $x=-1$일 때 $y=\frac{7}{2}$, $x=7$일 때 $y=-\frac{1}{2}$이므로

$\left(-1,\ \frac{7}{2}\right)$, $\left(7,\ -\frac{1}{2}\right)$

(ii) $x+2y=-6$, 즉 $2y=-6-x$인 경우

$2y=-6-x$를 $x^2+4y^2=50$에 대입하면 $x^2+(-6-x)^2=50$

$x^2+6x-7=0$, $(x+7)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-7$ 또는 $x=1$

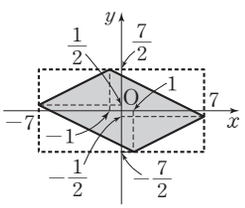
즉, $x=-7$일 때 $y=\frac{1}{2}$, $x=1$일 때 $y=-\frac{7}{2}$이므로

$\left(-7,\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(1,\ -\frac{7}{2}\right)$

따라서 네 점 $\left(-1,\ \frac{7}{2}\right)$, $\left(7,\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-7,\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(1,\ -\frac{7}{2}\right)$을 꼭짓점으로 하는 사각형은 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$14\times 7-2\times\left(\frac{1}{2}\times 8\times 4\right)-2\times\left(\frac{1}{2}\times 6\times 3\right)$

$=98-32-18=48$



18 답 5

(i) $x\geq y$일 때,

주어진 연립방정식은 $\begin{cases} xy-2x+2=-x \\ 2xy-3x+3y-5=-x \end{cases}$

$\therefore\ \begin{cases} xy-x+2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2xy-2x+3y-5=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$2\times$㉠$-$㉡을 하면 $-3y+9=0$ $\therefore\ y=3$

이를 ㉠에 대입하면 $3x-x+2=0$ $\therefore\ x=-1$

그런데 $x\geq y$이므로 $x=-1$, $y=3$은 해가 아니다. ····· 배점 40%

(ii) $x<y$일 때,

주어진 연립방정식은 $\begin{cases} xy-2x+2=y \\ 2xy-3x+3y-5=y \end{cases}$

$\therefore\ \begin{cases} xy-2x-y+2=0 & \cdots\cdots ㉢ \\ 2xy-3x+2y-5=0 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

$2\times$㉢$-$㉣을 하면 $-x-4y+9=0$

$\therefore\ x=-4y+9$ $\cdots\cdots$ ㉤

㉤을 ㉢에 대입하면

$(-4y+9)y-2(-4y+9)-y+2=0$

$-4y^2+16y-16=0$, $y^2-4y+4=0$

$(y-2)^2=0$ $\therefore\ y=2$

이를 ㉤에 대입하면 $x=1$

이때 $x<y$이므로 $x=1$, $y=2$는 해이다. ····· 배점 40%

(i), (ii)에서 $x^2+y^2=1+4=5$ ····· 배점 20%

19 답 $\frac{31}{8}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2-2v-u=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $v=u^2-k$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$u^2-2(u^2-k)-u=8$

$\therefore\ u^2+u-2k+8=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

이때 $x+y$, 즉 u의 값이 항상 음수이므로 이차방정식 ㉢의 두 근이 모두 음수이다.

즉, 이차방정식 ㉢의 판별식을 D, 두 실근을 α, β라 하면

$D\geq 0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$이어야 한다.

(i) $D\geq 0$에서 $1-4(-2k+8)\geq 0$

$8k-31\geq 0$ $\therefore\ k\geq\frac{31}{8}$

(ii) $\alpha+\beta<0$에서 $-1<0$

즉, k의 값에 관계없이 항상 성립한다.

(iii) $\alpha\beta>0$에서 $-2k+8>0$ $\therefore\ k<4$

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{31}{8}\leq k<4$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{31}{8}$이다.

20 답 6

두 이차방정식의 공통인 근을 α라 하면

$\alpha^2-p\alpha-q=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha^2-q\alpha-p=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$(p-q)\alpha-p+q=0$

$\therefore\ (p-q)(\alpha-1)=0$

그런데 $p=q$이면 두 이차방정식이 서로 같으므로 공통인 근이 2개이다.

즉, $p\neq q$이므로

$\alpha-1=0$ $\therefore\ \alpha=1$

이차방정식 $x^2-px-q=0$의 한 근이 1이고, 두 근의 차가 3이므로 다른 한 근은 4 또는 -2이다.

(i) 두 근이 1과 4일 때,

이차방정식 $x^2-px-q=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$p=5$, $q=-4$

이차방정식 $x^2-qx-p=0$에서 $x^2+4x-5=0$

$(x+5)(x-1)=0$ $\therefore\ x=-5$ 또는 $x=1$

따라서 두 근의 차는 $|1-(-5)|=6$

(ii) 두 근이 1과 -2일 때,

이차방정식 $x^2-px-q=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$p=-1$, $q=2$

이차방정식 $x^2-qx-p=0$에서 $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$ $\therefore\ x=1$ (중근)

따라서 두 근의 차는 $|1-1|=0$

(i), (ii)에서 이차방정식 $x^2-qx-p=0$의 두 근의 차의 최댓값은 6이다.

비법 NOTE

두 방정식의 공통인 근은 다음과 같이 구한다.

(1) 인수분해가 가능한 경우

두 방정식을 각각 인수분해하여 공통인 근을 구한다.

(2) 인수분해가 가능하지 않은 경우

① 공통인 근을 α라 하고, $x=\alpha$를 두 방정식에 대입한다.

② α에 대한 두 방정식을 연립하여 인수분해가 되는 식을 얻는다.

③ ②에서 얻은 식을 인수분해하여 α의 값을 구한다.

21 답 ②

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 계수가 실수이고 $1+\sqrt{3}i$가 한 근이므로 $1-\sqrt{3}i$도 근이다.

이차방정식 $x^2+ax+2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 2이지만 $(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)=4$이므로 $1-\sqrt{3}i$ 또는 $1+\sqrt{3}i$는 이차방정식 $x^2+ax+2=0$의 근이 아니다.

$\therefore m\neq 1-\sqrt{3}i,\ m\neq 1+\sqrt{3}i$

m이 이차방정식 $x^2+ax+2=0$의 한 근이므로

$m^2+am+2=0$ …… ㉠

한편 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 $1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$, m이므로 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 합은

$(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)+m=-a$

$\therefore a=-m-2$

이를 ㉠에 대입하면 $m^2+(-m-2)m+2=0$

$-2m+2=0$ $\therefore m=1$

22 답 ②

사차방정식 $(x^2+2x)^2-6x(x^2+2x+m)-m^2=0$에서 $x^2+2x=t$로 놓으면

$t^2-6x(t+m)-m^2=0$

$t^2-6xt-6xm-m^2=0$

$(t+m)(t-m)-6x(t+m)=0$

$(t+m)(t-6x-m)=0$

$(x^2+2x+m)(x^2-4x-m)=0$

$\therefore x^2+2x+m=0$ 또는 $x^2-4x-m=0$

주어진 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지므로 두 이차방정식 $x^2+2x+m=0$, $x^2-4x-m=0$은 각각 서로 다른 두 실근을 갖고 공통인 근을 갖지 않아야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2+2x+m=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=1-m>0$ $\therefore m<1$ …… ㉠

(ii) 이차방정식 $x^2-4x-m=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=4+m>0$ $\therefore m>-4$ …… ㉡

(iii) 두 이차방정식 $x^2+2x+m=0$, $x^2-4x-m=0$이 공통인 근을 갖는다고 하고, 공통인 근을 α라 하면

$\alpha^2+2\alpha+m=0$, $\alpha^2-4\alpha-m=0$

두 식을 변끼리 더하면 $2\alpha^2-2\alpha=0$

$2\alpha(\alpha-1)=0$ $\therefore \alpha=0$ 또는 $\alpha=1$

$\alpha=0$일 때 $m=0$이고, $\alpha=1$일 때 $m=-3$이다.

따라서 두 이차방정식이 공통인 근을 갖지 않으려면

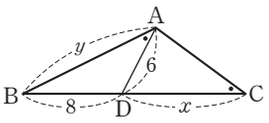
$m\neq -3,\ m\neq 0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 정수 m은 -2, -1의 2개이다.

23 답 39

$\overline{CD}=x$, $\overline{AB}=y$라 하면

$\overline{AC}=x-1$



두 삼각형 ABC, DBA에서

$\angle BCA=\angle BAD$,

$\angle ABC=\angle DBA$이므로

$\triangle ABC\backsim\triangle DBA$ (AA 닮음)

$\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{DA}$이므로

$y:8=(x-1):6$, $8(x-1)=6y$ $\therefore y=\frac{4}{3}(x-1)$ …… ㉠

또 $\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{BC}:\overline{BA}$이므로

$y:8=(8+x):y$ $\therefore y^2=8x+64$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{16}{9}(x-1)^2=8x+64$

$2x^2-13x-70=0$, $(2x+7)(x-10)=0$ $\therefore x=10$ ($\because x>0$)

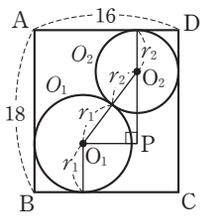
이를 ㉠에 대입하면 $y=12$

따라서 $\overline{AB}=12$, $\overline{BC}=8+10=18$, $\overline{AC}=10-1=9$이므로

삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $12+18+9=39$

24 답 3

그림과 같이 두 원 O_1, O_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하고, 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하자.



두 원의 넓이의 합이 58π이므로

$\pi r_1^2+\pi r_2^2=58\pi$

$\therefore r_1^2+r_2^2=58$ …… ㉠

점 O_1에서 변 CD에 내린 수선과 점 O_2에서 변 BC에 내린 수선의 교점을 P라 하면

$\overline{O_1P}=16-(r_1+r_2)$, $\overline{O_2P}=18-(r_1+r_2)$

이때 직각삼각형 O_1PO_2에서 $\overline{O_1O_2}^2=\overline{O_1P}^2+\overline{O_2P}^2$이므로

$(r_1+r_2)^2=\{16-(r_1+r_2)\}^2+\{18-(r_1+r_2)\}^2$

$r_1+r_2=X$로 놓으면

$X^2=(16-X)^2+(18-X)^2$

$X^2-68X+580=0$, $(X-10)(X-58)=0$

$\therefore X=10$ 또는 $X=58$

$\therefore r_1+r_2=10$ 또는 $r_1+r_2=58$

그런데 $r_1+r_2<16$이므로

$r_1+r_2=10$ $\therefore r_2=10-r_1$

이를 ㉠에 대입하면 $r_1^2+(10-r_1)^2=58$

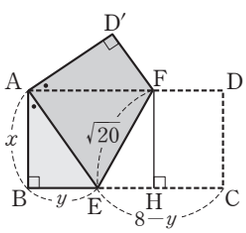
$r_1^2-10r_1+21=0$, $(r_1-3)(r_1-7)=0$

$\therefore r_1=3$ 또는 $r_1=7$

따라서 $r_1=3$일 때 $r_2=7$이고, $r_1=7$일 때 $r_2=3$이므로 작은 원의 반지름의 길이는 3이다.

25 답 12

그림과 같이 직사각형 ABCD를 접었을 때, 꼭짓점 D가 이동한 점을 D′, 점 F에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{AB}=x$, $\overline{BE}=y$라 하면



$\overline{AE}=\overline{CE}=8-y$

직각삼각형 ABE에서 $\overline{AE}^2=\overline{AB}^2+\overline{BE}^2$이므로

$(8-y)^2=x^2+y^2$ $\therefore x^2=64-16y$ …… ㉠

두 삼각형 ABE, AD′F에서
$\overline{AB}=\overline{AD'}$, $\angle ABE=\angle AD'F=90^\circ$,
$\angle BAE=90^\circ-\angle EAF=\angle D'AF$이므로
$\triangle ABE\equiv\triangle AD'F$ (ASA 합동)
즉, $\overline{BE}=\overline{D'F}$이므로 $\overline{D'F}=\overline{DF}=y$
$\therefore \overline{EH}=8-y-y=8-2y$, $\overline{FH}=\overline{AB}=x$
직각삼각형 EHF에서 $\overline{EF}^2=\overline{EH}^2+\overline{FH}^2$이므로
$(\sqrt{20})^2=(8-2y)^2+x^2$
$\therefore 4y^2+x^2-32y+44=0$
이 식에 ㉠을 대입하면
$4y^2+(64-16y)-32y+44=0$, $4y^2-48y+108=0$
$y^2-12y+27=0$, $(y-3)(y-9)=0$
$\therefore y=3$ ($\because y<8$)
이를 ㉠에 대입하면
$x^2=64-48=16$ $\therefore x=4$ ($\because x>0$)
$\therefore \overline{AB}\times\overline{BE}=xy=4\times3=12$

26 답 ②

$(2x^2-5xy+y^2-26)^2+(xy+2x-3y-8)^2=0$에서
$(2x^2-5xy+y^2-26)^2\geq0$, $(xy+2x-3y-8)^2\geq0$이므로
$2x^2-5xy+y^2-26=0$ …… ㉠
$xy+2x-3y-8=0$ …… ㉡
㉡에서 $x(y+2)-3(y+2)-2=0$
$\therefore (x-3)(y+2)=2$
이때 x, y는 정수이므로 $x-3$, $y+2$도 정수이다.
따라서 $(x-3)(y+2)=2$인 경우는
(i) $x-3=-2$, $y+2=-1$일 때, $x=1$, $y=-3$
이를 ㉠에 대입하면 $2+15+9-26=0$이므로 주어진 방정식을 만족시킨다.
(ii) $x-3=-1$, $y+2=-2$일 때, $x=2$, $y=-4$
이를 ㉠에 대입하면 $8+40+16-26=38\neq0$이므로 주어진 방정식을 만족시키지 않는다.
(iii) $x-3=1$, $y+2=2$일 때, $x=4$, $y=0$
이를 ㉠에 대입하면 $32-26=6\neq0$이므로 주어진 방정식을 만족시키지 않는다.
(iv) $x-3=2$, $y+2=1$일 때, $x=5$, $y=-1$
이를 ㉠에 대입하면 $50+25+1-26=50\neq0$이므로 주어진 방정식을 만족시키지 않는다.
(i)~(iv)에서 주어진 방정식을 만족시키는 정수 x, y의 값은
$x=1$, $y=-3$
$\therefore x-y=4$

27 답 10

$f(x)=x^4-kx^3+2(3k-2)x^2+4kx-24k$라 하면 $f(-2)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-2	1	$-k$	$2(3k-2)$	$4k$	$-24k$
		-2	$2k+4$	$-16k$	$24k$
2	1	$-k-2$	$8k$	$-12k$	0
		2	$-2k$	$12k$	
	1	$-k$	$6k$	0	

$\therefore f(x)=(x+2)(x-2)(x^2-kx+6k)$

사차방정식 $(x+2)(x-2)(x^2-kx+6k)=0$에서
$x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x^2-kx+6k=0$
이때 m, n이 자연수이므로 $3m\geq3$, $4n\geq4$
즉, 이차방정식 $x^2-kx+6k=0$의 두 근이 $3m$, $4n$이므로
근과 계수의 관계에 의하여
$3m+4n=k$ …… ㉠
$12mn=6k$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$12mn=6(3m+4n)$, $2mn-3m-4n=0$
$2n(m-2)-3(m-2)=6$
$\therefore (m-2)(2n-3)=6$
이때 m, n이 자연수이므로 $m-2$, $2n-3$은 $m-2\geq-1$, $2n-3\geq-1$인 정수이다.
따라서 $(m-2)(2n-3)=6$인 경우는
(i) $m-2=1$, $2n-3=6$일 때, $m=3$, $n=\frac{9}{2}$
그런데 n이 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $m-2=2$, $2n-3=3$일 때, $m=4$, $n=3$
$\therefore m+n=7$
(iii) $m-2=3$, $2n-3=2$일 때, $m=5$, $n=\frac{5}{2}$
그런데 n이 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.
(iv) $m-2=6$, $2n-3=1$일 때, $m=8$, $n=2$
$\therefore m+n=10$
(i)~(iv)에서 $m+n$의 최댓값은 10이다.

28 답 8

이차방정식 $x^2-2(a+2b)x+a^2+4b^2+10ab-10a-10b=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(a+2b)^2-(a^2+4b^2+10ab-10a-10b)=0$
$-6ab+10a+10b=0$
$3ab-5a-5b=0$
$9ab-15a-15b=0$
$3a(3b-5)-5(3b-5)=25$
$\therefore (3a-5)(3b-5)=25$ …… 배점 40%
이때 a, b는 정수이므로 $3a-5$, $3b-5$도 정수이다.
따라서 $(3a-5)(3b-5)=25$인 경우는
(i) $3a-5=-25$, $3b-5=-1$일 때, $a=-\frac{20}{3}$, $b=\frac{4}{3}$
그런데 a, b가 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $3a-5=-5$, $3b-5=-5$일 때, $a=0$, $b=0$
$\therefore |a-b|=0$
(iii) $3a-5=-1$, $3b-5=-25$일 때, $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{20}{3}$
그런데 a, b가 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.
(iv) $3a-5=1$, $3b-5=25$일 때, $a=2$, $b=10$
$\therefore |a-b|=|-8|=8$
(v) $3a-5=5$, $3b-5=5$일 때, $a=\frac{10}{3}$, $b=\frac{10}{3}$
그런데 a, b가 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.
(vi) $3a-5=25$, $3b-5=1$일 때, $a=10$, $b=2$
$\therefore |a-b|=8$ …… 배점 40%
(i)~(vi)에서 $|a-b|$의 최댓값은 8이다. …… 배점 20%

STEP 3 최고난도 문제 | 77~79쪽

01 4	02 64	03 46	04 20	05 4	06 ②
07 ⑤	08 164	09 ③	10 12	11 ③	12 8

01 답 4

1단계 인수 정리를 이용하여 한 실근 구하기

$f(x)=x^4+(k-2)x^3+(k^2-9)x^2+(k^2-k)x+6$이라 하면

$f(-1)=1-(k-2)+(k^2-9)-(k^2-k)+6=0$

즉, $x=-1$은 방정식 $f(x)=0$의 한 실근이다.

2단계 서로 다른 실근이 한 개일 조건 알기

방정식 $f(x)=0$의 계수가 실수이므로 어떤 허수를 근으로 가지면 그 켤레복소수도 근이 된다.

즉, 방정식 $f(x)=0$의 허근은 없거나 2개이다.

따라서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 한 개인 경우는 $x=-1$을 사중근으로 갖거나 $x=-1$을 중근으로 갖는 경우이다.

3단계 k의 값 구하기

(i) $x=-1$이 사중근일 때,

$f(x)=(x+1)^4$

이때 우변을 전개하면 상수항이 1이므로 성립하지 않는다.

(ii) $x=-1$이 중근일 때,

$f(x)$가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로 조립제법에 의하여

-1	1	$k-2$	k^2-9	k^2-k	6
		-1	$-k+3$	$-k^2+k+6$	-6
-1	1	$k-3$	k^2-k-6	6	0
		-1	$-k+4$	$-k^2+2k+2$	
	1	$k-4$	k^2-2k-2	$-k^2+2k+8$	

이때 $-k^2+2k+8=0$이어야 하므로

$(k+2)(k-4)=0$ $\therefore k=-2$ 또는 $k=4$

ⓘ $k=-2$이면 $f(x)=(x+1)^2(x^2-6x+6)$이므로 서로 다른 실근 3개를 가진다. ($\frac{D_1}{4}=9-6=3>0$)

ⓘ $k=4$이면 $f(x)=(x+1)^2(x^2+6)$이므로 서로 다른 실근 1개를 가진다. ($D_2=-24<0$)

(i), (ii)에서 실수 k의 값은 4이다.

02 답 64

1단계 $f(x)$, $g(x)$의 식 세우기

㈎에서 이차함수 $f(x)$의 최댓값이 0이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고, x축에 접한다.

이때 ㈏에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(m, 0)$을 지나므로 $f(x)$의 이차항의 계수를 k라 하면

$f(x)=k(x-m)^2$ (단, $k<0$)

㈏에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(m+4, 32n)$을 지나므로

$f(m+4)=32n$에서 $16k=32n$ $\therefore k=2n$

$\therefore f(x)=2n(x-m)^2$

㈏에서 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 두 점 $(m, 0)$, $(m+4, 32n)$을 지나므로 직선 $y=g(x)$의 기울기는 $\frac{32n}{4}=8n$

$\therefore g(x)=8n(x-m)$

2단계 n의 값 구하기

㈐에서 정수 a에 대하여 $0\le a\le 4$이므로

(i) $a=0$일 때,

$g(m+a)=g(m)=0$, $f(m+a)=f(m)=0$이므로 $0\le b\le 0$을 만족시키는 정수 b의 개수는 1이다.

즉, 순서쌍 (a, b)의 개수는 1이다.

(ii) $a=1$일 때,

$g(m+a)=g(m+1)=8n$, $f(m+a)=f(m+1)=2n$이므로 정수 n에 대하여 $8n\le b\le 2n$을 만족시키는 정수 b의 개수는

$2n-8n+1=-6n+1$

즉, 순서쌍 (a, b)의 개수는 $-6n+1$이다.

(iii) $a=2$일 때,

$g(m+a)=g(m+2)=16n$, $f(m+a)=f(m+2)=8n$이므로 정수 n에 대하여 $16n\le b\le 8n$을 만족시키는 정수 b의 개수는

$8n-16n+1=-8n+1$

즉, 순서쌍 (a, b)의 개수는 $-8n+1$이다.

(iv) $a=3$일 때,

$g(m+a)=g(m+3)=24n$, $f(m+a)=f(m+3)=18n$이므로 정수 n에 대하여 $24n\le b\le 18n$을 만족시키는 정수 b의 개수는

$18n-24n+1=-6n+1$

즉, 순서쌍 (a, b)의 개수는 $-6n+1$이다.

(v) $a=4$일 때,

$g(m+a)=g(m+4)=32n$, $f(m+a)=f(m+4)=32n$이므로 정수 n에 대하여 $32n\le b\le 32n$을 만족시키는 정수 b의 개수는 1이다.

즉, 순서쌍 (a, b)의 개수는 1이다.

(i)~(v)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$1+(-6n+1)+(-8n+1)+(-6n+1)+1=-20n+5$

이때 ㈑에서 순서쌍 (a, b)의 개수가 45이므로

$-20n+5=45$ $\therefore n=-2$

3단계 m의 값 구하기

$\therefore f(x)=-4(x-m)^2$, $g(x)=-16(x-m)$

방정식 $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=0$에서

$16(x-m)^4-16^2(x-m)^2=0$

$16(x-m)^2\{(x-m)^2-16\}=0$

$16(x-m)^2(x-m+4)(x-m-4)=0$

$\therefore x=m$ 또는 $x=m-4$ 또는 $x=m+4$

이 실근 중 최댓값은 $m+4$, 최솟값은 $m-4$이고, 최댓값과 최솟값의 합이 8이므로

$(m+4)+(m-4)=8$, $2m=8$ $\therefore m=4$

4단계 $f(5)\times g(5)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=-4(x-4)^2$, $g(x)=-16(x-4)$이므로

$f(5)\times g(5)=-4\times(-16)=64$

03 답 46

1단계 주어진 삼차방정식의 근 구하기

$f(x)=ax^3+2bx^2+4bx+8a$라 하면 $f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-2	a	$2b$	$4b$	$8a$
		$-2a$	$4a-4b$	$-8a$
	a	$-2a+2b$	$4a$	0

$\therefore f(x)=(x+2)\{ax^2-2(a-b)x+4a\}$

삼차방정식 $(x+2)\{ax^2-2(a-b)x+4a\}=0$에서

$x=-2$ 또는 $ax^2-2(a-b)x+4a=0$

주어진 삼차방정식이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지므로 이차방정식 $ax^2-2(a-b)x+4a=0$은 $x\neq-2$인 서로 다른 두 정수를 근으로 가져야 한다.

즉, $4a+4(a-b)+4a\neq0$이므로 $b\neq3a$

이차방정식 $ax^2-2(a-b)x+4a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $\frac{4a}{a}=4$이므로 서로 다른 두 정수인 근은

-1과 -4 또는 1과 4

2단계 a, b 사이의 관계식 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$\frac{2(a-b)}{a}=-5$ 또는 $\frac{2(a-b)}{a}=5$

$2a-2b=-5a$ 또는 $2a-2b=5a$

$\therefore a=\frac{2}{7}b$ 또는 $a=-\frac{2}{3}b$

3단계 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기

(i) $a=\frac{2}{7}b$일 때,

$k=0$이면 $b=3a$를 만족시키지 않는다.

$b=7k$(k는 0이 아닌 정수) 꼴인 정수이고, $|b|\leq50$이면

$|a|\leq\frac{100}{7}$이므로 $|a|\leq50$, $|b|\leq50$을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(-14, -49)$, $(-12, -42)$, $(-10, -35)$, …, $(-2, -7)$, $(2, 7)$, …, $(10, 35)$, $(12, 42)$, $(14, 49)$의 14개이다.

(ii) $a=-\frac{2}{3}b$일 때,

$b=3k$(k는 0이 아닌 정수) 꼴인 정수이고, $|b|\leq50$이면

$|a|\leq\frac{100}{3}$이므로 $|a|\leq50$, $|b|\leq50$을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(-32, 48)$, $(-30, 45)$, $(-28, 42)$, …, $(-2, 3)$, $(2, -3)$, …, $(28, -42)$, $(30, -45)$, $(32, -48)$의 32개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$14+32=46$

idea

04 답 20

1단계 a의 값 구하기

사차방정식 $x^4-2ax^2+a+1=0$에서 $x^2=t$로 놓으면

$t^2-2at+a+1=0$ …… ㉠

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지면 $t\geq0$이므로 t에 대한 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 양의 실근을 A, B($A<B$)라 하면

$x^2=A$ 또는 $x^2=B$ $\therefore x=\pm\sqrt{A}$ 또는 $x=\pm\sqrt{B}$

$\therefore \alpha=-\sqrt{B}$, $\beta=-\sqrt{A}$, $\gamma=\sqrt{A}$, $\delta=\sqrt{B}$

$\beta\gamma-\alpha\delta=2$에서

$-A-(-B)=2$ $\therefore B-A=2$ …… ㉡

이차방정식 ㉠의 두 근이 A, B이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$A+B=2a$, $AB=a+1$

㉡에서 $(B-A)^2=4$이므로 $(A+B)^2-4AB=4$

$(2a)^2-4(a+1)=4$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

그런데 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가지면 두 근의 합이 양수이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2a>0$ $\therefore a>0$

$\therefore a=2$

2단계 $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4$의 값 구하기

이차방정식 ㉠에서 $t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 $x^2=1$ 또는 $x^2=3$이므로

$x=\pm1$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=-\sqrt{3}$, $\beta=-1$, $\gamma=1$, $\delta=\sqrt{3}$이므로

$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4=9+1+1+9=20$

05 답 4

1단계 α, β에 대한 조건 알기

사차방정식 $\left(x^2-\frac{p}{3}x+1\right)\left(x^2+\frac{20}{p}x+1\right)=0$에서

$x^2-\frac{p}{3}x+1=0$ …… ㉠ 또는 $x^2+\frac{20}{p}x+1=0$ …… ㉡

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 ㉠의 두 근의 합은 $\frac{p}{3}$, ㉡의 두 근의 합은 $-\frac{20}{p}$이고, 두 근의 곱은 모두 1이다.

두 근의 부호가 서로 같다.

이때 $p>0$, $\alpha>0$, $\beta<0$이므로 α는 이차방정식 ㉠의 근이고, β는 이차방정식 ㉡의 근이다.

또 두 근의 곱이 모두 1이므로 한 근이 α이면 다른 한 근은 $\frac{1}{\alpha}$이고, 한 근이 β이면 다른 한 근은 $\frac{1}{\beta}$이다.

2단계 α의 값 구하기

즉, $\alpha+\frac{1}{\alpha}=\frac{p}{3}$, $\beta+\frac{1}{\beta}=-\frac{20}{p}$이므로 각 변끼리 곱하면

$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=-\frac{20}{3}$

이때 $3\alpha+\beta=0$에서 $\beta=-3\alpha$이므로

$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(-3\alpha-\frac{1}{3\alpha}\right)=-\frac{20}{3}$, $-3\alpha^2-\frac{10}{3}-\frac{1}{3\alpha^2}=-\frac{20}{3}$

$9\alpha^4-10\alpha^2+1=0$, $(9\alpha^2-1)(\alpha^2-1)=0$

$(3\alpha+1)(3\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha-1)=0$

$\therefore \alpha=\frac{1}{3}$ 또는 $\alpha=1$ ($\because \alpha>0$)

3단계 사차방정식의 네 실근 중 가장 큰 근과 가장 작은 근의 차 구하기

(i) $\alpha=\frac{1}{3}$일 때,

$\frac{1}{\alpha}=3$이고, $3\alpha+\beta=0$에서 $\beta=-1$, $\frac{1}{\beta}=-1$이므로 주어진 사차방정식의 네 실근 중 가장 큰 근은 3, 가장 작은 근은 -1이다.

따라서 그 차는 $|3-(-1)|=4$

(ii) $\alpha=1$일 때,

$\frac{1}{\alpha}=1$이고, $3\alpha+\beta=0$에서 $\beta=-3$, $\frac{1}{\beta}=-\frac{1}{3}$이므로 주어진 사차방정식의 네 실근 중 가장 큰 근은 1, 가장 작은 근은 -3이다.

따라서 그 차는 $|1-(-3)|=4$

(i), (ii)에서 주어진 사차방정식의 네 실근 중 가장 큰 근과 가장 작은 근의 차는 4이다.

06 답 ②

1단계 α, β, γ 사이의 관계식 구하기

삼차방정식 $x^3-x^2-6x+2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$

2단계 $f(x)$를 이용하여 세 근이 α, β, γ이고, 상수항이 2인 삼차방정식 세우기

$\beta+\gamma=1-\alpha$, $\gamma+\alpha=1-\beta$, $\alpha+\beta=1-\gamma$이므로

$f\left(\frac{2\beta+2\gamma}{\alpha}\right)=f\left(\frac{2\gamma+2\alpha}{\beta}\right)=f\left(\frac{2\alpha+2\beta}{\gamma}\right)=1$에서

$f\left(\frac{2-2\alpha}{\alpha}\right)=f\left(\frac{2-2\beta}{\beta}\right)=f\left(\frac{2-2\gamma}{\gamma}\right)=1$

$f\left(\frac{2}{\alpha}-2\right)=f\left(\frac{2}{\beta}-2\right)=f\left(\frac{2}{\gamma}-2\right)=1$

$f\left(\frac{2}{\alpha}-2\right)=1$에서 $\left(\frac{2}{\alpha}\right)^3+a\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2+b\times\frac{2}{\alpha}+c=1$

이때 양변에 α^3을 곱하면

$8+4a\alpha+2b\alpha^2+c\alpha^3=\alpha^3$

$\therefore (c-1)\alpha^3+2b\alpha^2+4a\alpha+8=0$

같은 방법으로 하면

$f\left(\frac{2}{\beta}-2\right)=1$, $f\left(\frac{2}{\gamma}-2\right)=1$에서

$(c-1)\beta^3+2b\beta^2+4a\beta+8=0$

$(c-1)\gamma^3+2b\gamma^2+4a\gamma+8=0$

따라서 α, β, γ를 세 근으로 하는 삼차방정식은

$(c-1)x^3+2bx^2+4ax+8=0$

이때 양변을 4로 나누면

$\frac{c-1}{4}x^3+\frac{b}{2}x^2+ax+2=0$

3단계 $a+b+c$의 값 구하기

즉, $x^3-x^2-6x+2=\frac{c-1}{4}x^3+\frac{b}{2}x^2+ax+2$이므로

$\frac{c-1}{4}=1$, $\frac{b}{2}=-1$, $a=-6$

따라서 $a=-6$, $b=-2$, $c=5$이므로 $a+b+c=-3$

07 답 ⑤

1단계 주어진 식을 변형하여 관계식 구하기

삼차방정식 $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 α는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\alpha^3=1$, $\alpha^2+\alpha+1=0$에서 $\alpha^2=-\alpha-1$

$\therefore \alpha^3+3\alpha^2+a\alpha+b=1+3(-\alpha-1)+a\alpha+b$

$=(a-3)\alpha+b-2$

즉, 주어진 식은

$(a-3)\alpha+b-2+\frac{1}{(a-3)\alpha+b-2}$ …… ㉠

이때 a, b는 정수이므로 $a-3$, $b-2$도 정수이다.

$a-3=m$, $b-2=n$(m, n은 정수)으로 놓으면

㉠에서 $m\alpha+n+\frac{1}{m\alpha+n}=k$ (단, k는 정수)

양변에 $m\alpha+n$을 곱하면

$(m\alpha+n)^2+1=k(m\alpha+n)$

$km\alpha+kn=m^2\alpha^2+2mn\alpha+n^2+1$

$=m^2(-\alpha-1)+2mn\alpha+n^2+1$

$=(2mn-m^2)\alpha-m^2+n^2+1$

$\therefore km=2mn-m^2$ …… ㉡, $kn=-m^2+n^2+1$ …… ㉢

2단계 관계식을 이용하여 순서쌍 (a, b) 구하기

(i) $m=0$일 때,

㉢에서 $kn=n^2+1$ $\therefore k=n+\frac{1}{n}$

n이 정수이므로 k가 정수이려면 $\frac{1}{n}$이 정수이어야 한다.

따라서 n의 값은 -1, 1이다.

즉, 정수 m, n의 순서쌍 (m, n)은

$(0, -1)$, $(0, 1)$

(ii) $m\neq0$일 때,

㉡에서 $k=2n-m$

이를 ㉢에 대입하면 $(2n-m)n=-m^2+n^2+1$

$\therefore n^2-mn+m^2-1=0$

이를 n에 대한 이차방정식으로 생각하여 풀면

$n=\frac{m\pm\sqrt{-3m^2+4}}{2}$ …… ㉣

n이 정수이려면 $-3m^2+4\geq0$, 즉 $m^2\leq\frac{4}{3}$이어야 하므로 정수 m의 값은 -1, 0, 1이다.

그런데 $m\neq0$이므로 $m=-1$ 또는 $m=1$

이를 각각 ㉣에 대입하면

$m=-1$일 때, $n=-1$ 또는 $n=0$

$m=1$일 때, $n=0$ 또는 $n=1$

즉, 정수 m, n의 순서쌍 (m, n)은

$(-1, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 정수 m, n의 순서쌍 (m, n)은

$(-1, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$

$m=a-3$, $n=b-2$에서

$a=m+3$, $b=n+2$

따라서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$

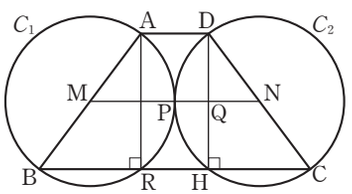
3단계 $a+b$의 최댓값 구하기

이때 $a+b$의 값은 3, 4, 6, 7이므로 최댓값은 7이다.

08 답 164

1단계 보조선을 그어 $\overline{DH}^2$과 $\overline{BC}$를 r에 대한 식으로 나타내기

그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원을 C_1, 선분 CD를 지름으로 하는 원을 C_2라 하고, 두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하면 두 점 M, N은 각각 두 원 C_1, C_2의 중심이다.



$\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이가 서로 같고 원 C_1과 원 C_2는 오직 한 점에서 만나므로 원 C_1과 원 C_2가 만나는 점은 선분 MN의 중점이다. 선분 MN의 중점을 P, 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 DH와 선분 MN이 만나는 점을 Q라 하고, 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{QN}=\overline{PN}-\overline{PQ}=r-2$, $\overline{HC}=2\overline{QN}=2r-4$이므로

직각삼각형 DHC에서

$\overline{DH}^2=\overline{CD}^2-\overline{HC}^2=(2r)^2-(2r-4)^2=16r-16$ …… ㉠

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 R라 하면

$\overline{BR}=\overline{HC}=2r-4$, $\overline{RH}=\overline{AD}=4$이므로

$\overline{BC}=\overline{BR}+\overline{RH}+\overline{HC}=(2r-4)+4+(2r-4)=4r-4$ …… ㉡

2단계 S^2과 l을 r에 대한 식으로 나타내기

㉠, ㉡에서

$$S^2=\left\{\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{DH}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{4}\times(\overline{AD}+\overline{BC})^2\times\overline{DH}^2$$

$$=\frac{1}{4}\times\{4+(4r-4)\}^2\times(16r-16)$$

$$=64r^2(r-1)$$

$$l=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$$

$$=2r+(4r-4)+2r+4=8r$$

3단계 r의 값 구하기

이때 $S^2+8l=6720$이므로

$64r^2(r-1)+64r=6720$

$r^3-r^2+r-105=0$

$(r-5)(r^2+4r+21)=0$

$\therefore\ r=5$ 또는 $r^2+4r+21=0$

이차방정식 $r^2+4r+21=0$의 판별식 D가 $\frac{D}{4}=4-21=-17<0$이므로

$r^2+4r+21=0$을 만족시키는 실수 r의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore\ r=5$

4단계 $\overline{BD}^2$의 값 구하기

따라서 $\overline{BH}=\overline{BR}+\overline{RH}=6+4=10$, $\overline{DH}^2=80-16=64$이므로

직각삼각형 DBH에서 $\overline{BD}^2=\overline{BH}^2+\overline{DH}^2=100+64=164$

idea

09 답 ③

1단계 $\frac{n}{m}=t$로 놓고, 이차방정식 세우기

주어진 연립방정식의 해가 $x=m$, $y=n$이므로

$$\begin{cases}3m^2+kmn-3n^2=-2 & \cdots\cdots ㉠\\ 6m^2-5mn+2n^2=1 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠$+2\times$㉡을 하면

$15m^2+(k-10)mn+n^2=0$

$m\neq0$이므로 양변을 m^2으로 나누면

$\left(\frac{n}{m}\right)^2+(k-10)\frac{n}{m}+15=0$

이때 $\frac{n}{m}=t$(t는 정수)로 놓으면

$t^2+(k-10)t+15=0$

2단계 t에 대한 이차방정식의 정수인 해 구하기

이차방정식 $t^2+(k-10)t+15=0$의 두 근을 정수 α, β라 하면 ← t가 정수이므로 α, β도 정수이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k+10$ ····· ㉢

$\alpha\beta=15$ ····· ㉣

따라서 정수 α, β에 대하여 ㉣을 만족시키는 순서쌍 (α, β)는

$(-15, -1)$, $(-5, -3)$, $(-3, -5)$, $(-1, -15)$,

$(1, 15)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$, $(15, 1)$

3단계 모든 k의 값의 합 구하기

이때 $\alpha+\beta$의 값은 -16, -8, 8, 16이고,

㉢에서 $k=10-(\alpha+\beta)$이므로

$k=26$ 또는 $k=18$ 또는 $k=2$ 또는 $k=-6$

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$26+18+2+(-6)=40$

10 답 12

1단계 α의 값 구하기

$f(x)=x^3+2x^2+(p^2+1)x+2p^2+2$라 하면 $f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-2	1	2	p^2+1	$2p^2+2$
		-2	0	$-2p^2-2$
	1	0	p^2+1	0

$\therefore\ f(x)=(x+2)(x^2+p^2+1)$

삼차방정식 $(x+2)(x^2+p^2+1)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x^2+p^2+1=0$

이때 이차방정식 $x^2+p^2+1=0$은 실근을 갖지 않으므로 ← $D=-4(p^2+1)<0$

$\alpha=-2$

2단계 x^3+4x^2+ax+b를 인수분해하기

즉, 삼차방정식 $x^3+4x^2+ax+b=0$의 한 근이 -2이므로

$-8+16-2a+b=0$ $\therefore\ b=2a-8$ ····· ㉠

$g(x)=x^3+4x^2+ax+2a-8$이라 하면 $g(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

-2	1	4	a	$2a-8$
		-2	-4	$-2a+8$
	1	2	$a-4$	0

$\therefore\ g(x)=(x+2)(x^2+2x+a-4)$

3단계 a, b, c의 값 구하기

$h(x)=x^3+6x^2+cx+a-7$이라 하면 두 삼차방정식 $g(x)=0$, $h(x)=0$은 $x\neq-2$인 서로 다른 두 근을 공통인 근으로 가지므로 삼차식 $h(x)$는 $x^2+2x+a-4$를 인수로 갖는다.

따라서 $h(x)=(x^2+2x+a-4)(x+q)$(q는 실수)로 놓으면

$x^3+6x^2+cx+a-7=(x^2+2x+a-4)(x+q)$

$=x^3+(q+2)x^2+(2q+a-4)x+(a-4)q$

$6=q+2$이므로 $q=4$

$a-7=(a-4)q$이므로 $a-7=4(a-4)$

$3a=9$ $\therefore\ a=3$

$c=2q+a-4$이므로 $c=2\times4+3-4=7$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=2\times3-8=-2$

4단계 $a-b+c$의 값 구하기

$\therefore\ a-b+c=3-(-2)+7=12$

idea

11 답 ③

1단계 공통인 근 사이의 관계 구하기

두 이차방정식 $x^2+x+a=0$, $x^2+bx+c=0$의 공통인 실근을 α라 하면

$\alpha^2+\alpha+a=0$ ····· ㉠

$\alpha^2+b\alpha+c=0$ ····· ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $(1-b)\alpha+a-c=0$

$\therefore\ \alpha=\frac{a-c}{b-1}$ ($\because\ b\neq1$) ····· ㉢

두 이차방정식 $x^2+ax+1=0$, $x^2+cx+b=0$의 공통인 실근을 β라 하면

$\beta^2+a\beta+1=0$ ····· ㉣

$\beta^2+c\beta+b=0$ ····· ㉤

㉣$-$㉤을 하면 $(a-c)\beta+1-b=0$

$\therefore\ \beta=\frac{b-1}{a-c}$ ($\because\ a\neq c$) ····· ㉥

㉢, ㉤에서 $\alpha\beta=\frac{a-c}{b-1}\times\frac{b-1}{a-c}=1$이므로 $\alpha=\frac{1}{\beta}$

2단계 a, $b+c$의 값 구하기

$\alpha=\frac{1}{\beta}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta}+a=0$

$\therefore a\beta^2+\beta+1=0$ …… ㉥

㉣−㉥을 하면 $(1-a)\beta^2+(a-1)\beta=0$

$(1-a)\beta(\beta-1)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $\beta=1$ ($\because \beta\neq0$)

(i) $a=1$일 때,

이차방정식 $x^2+x+a=0$, 즉 $x^2+x+1=0$이 실근을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다. ($D=1-4=-3<0$)

(ii) $\beta=1$일 때,

㉡에 대입하면 $1+a+1=0$ $\therefore a=-2$

㉤에 대입하면 $1+c+b=0$ $\therefore b+c=-1$

3단계 $b+c-2a$의 값 구하기

(i), (ii)에서 $b+c-2a=-1-2\times(-2)=3$

12 답 8

1단계 $f(x)$를 m에 대한 식으로 나타내기

이차방정식 $f(x)-4=0$의 한 근이 1이므로 $f(1)-4=0$에서

$1+m+n-4=0$ $\therefore n=3-m$

$\therefore f(x)=x^2+mx+3-m$

2단계 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기

(i) $b=0$일 때,

이차방정식 $f(x)=0$의 한 근은 a이고, 다른 한 근을 k라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$a+k=-m$ …… ㉠, $ak=3-m$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면 $ak-a-k=3$

$a(k-1)-(k-1)=4$

$\therefore (a-1)(k-1)=4$

이때 a, m이 정수이므로 ㉠에서 k도 정수이다.

즉, $a-1$, $k-1$도 정수이므로 $(a-1)(k-1)=4$를 만족시키는 순서쌍 $(a-1, k-1)$은

$(-4, -1), (-2, -2), (-1, -4), (1, 4), (2, 2), (4, 1)$

따라서 a의 값은 -3, -1, 0, 2, 3, 5이므로 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(-3, 0), (-1, 0), (0, 0), (2, 0), (3, 0), (5, 0)$의 6개이다.

(ii) $b\neq0$일 때,

이차방정식 $f(x)=0$의 계수가 실수이고, $a+bi$가 한 근이므로 다른 한 근은 $a-bi$이다.

이차방정식 $x^2+mx+3-m=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$(a+bi)+(a-bi)=-m$, $(a+bi)(a-bi)=3-m$

$\therefore 2a=-m$ …… ㉢, $a^2+b^2=3-m$ …… ㉣

㉣−㉢을 하면 $a^2-2a+b^2=3$

$\therefore (a-1)^2+b^2=4$

이때 a는 정수이므로 $a-1$도 정수이고, b는 0이 아닌 정수이므로

$(a-1)^2=0$, $b^2=4$

$\therefore a=1$, $b=\pm2$

따라서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, -2)$, $(1, 2)$의 2개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$6+2=8$

07 여러 가지 부등식

STEP 1 핵심 문제 | 80~81쪽

01 $x>-2$	02 9	03 16	04 ⑤	05 5
06 $0\le a\le3$	07 2	08 ③	09 7	10 5
11 ③	12 ④	13 ①	14 ⑤	

01 답 $x>-2$

부등식 $(a+b)x+3a-b\ge0$에서

$(a+b)x\ge-3a+b$

이 부등식의 해가 없으므로

$a+b=0$ …… ㉠, $-3a+b>0$ …… ㉡

㉠에서 $b=-a$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $-3a-a>0$

$-4a>0$ $\therefore a<0$

㉢을 부등식 $(2a-b)x+5a-b<0$에 대입하면

$(2a+a)x+5a+a<0$

$3ax<-6a$ $\therefore x>-2$ ($\because a<0$)

02 답 9

$3x-2y=1$에서 $y=\frac{3x-1}{2}$

이를 주어진 부등식에 대입하면

$\frac{5x-1}{3}\le\frac{3x-1}{2}+2\le\frac{5x+7}{2}$

$\therefore \frac{5x-1}{3}\le\frac{3x+3}{2}\le\frac{5x+7}{2}$ …… 배점 30%

부등식 $\frac{5x-1}{3}\le\frac{3x+3}{2}$에서

$10x-2\le9x+9$ $\therefore x\le11$ …… ㉠

부등식 $\frac{3x+3}{2}\le\frac{5x+7}{2}$에서

$3x+3\le5x+7$, $-2x\le4$ $\therefore x\ge-2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-2\le x\le11$ …… 배점 40%

따라서 $M=11$, $m=-2$이므로

$M+m=9$ …… 배점 30%

03 답 16

부등식 $3x-a\le-x+4$에서

$4x\le a+4$ $\therefore x\le\frac{a+4}{4}$ …… ㉠

부등식 $-x+4\le b(x-2)$에서

$-x+4\le bx-2b$, $(b+1)x\ge2b+4$ …… ㉡

이때 주어진 부등식의 해가 $3\le x\le5$이므로

㉠에서 $\frac{a+4}{4}=5$이고, ㉡에서 $b+1>0$, $\frac{2b+4}{b+1}=3$이다.

즉, $\frac{a+4}{4}=5$에서 $a=16$

$\frac{2b+4}{b+1}=3$에서 $2b+4=3b+3$ $\therefore b=1$

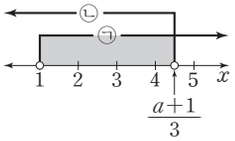
$\therefore ab=16\times1=16$

04 답 ⑤

부등식 $x+2>3$에서 $x>1$ ····· ㉠

부등식 $3x<a+1$에서 $x<\frac{a+1}{3}$ ····· ㉡

주어진 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 9가 되려면



$9=2+3+4$이므로

$4<\frac{a+1}{3}\leq 5$

$12<a+1\leq 15$ $\therefore 11<a\leq 14$

따라서 자연수 a의 최댓값은 14이다.

05 답 5

부등식 $2x+3>1$에서 $2x>-2$ $\therefore x>-1$

부등식 $5-3x>-4$에서 $-3x>-9$ $\therefore x<3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $-1<x<3$

한편 $|3x-1|<x+a$에서

(i) $x<\frac{1}{3}$일 때,

$|3x-1|=-(3x-1)$이므로 $-(3x-1)<x+a$

$-3x+1<x+a$, $-4x<a-1$ $\therefore x>\frac{1-a}{4}$

그런데 $a>0$이고, $\frac{1-a}{4}<\frac{1}{3}$이므로 $\frac{1-a}{4}<x<\frac{1}{3}$

(ii) $x\geq\frac{1}{3}$일 때,

$|3x-1|=3x-1$이므로 $3x-1<x+a$

$2x<a+1$ $\therefore x<\frac{a+1}{2}$

그런데 $a>0$이고, $\frac{1}{3}<\frac{a+1}{2}$이므로 $\frac{1}{3}\leq x<\frac{a+1}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $\frac{1-a}{4}<x<\frac{a+1}{2}$

따라서 $\frac{1-a}{4}=-1$, $\frac{a+1}{2}=3$이므로 $a=5$

06 답 $0\leq a\leq 3$

$\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$이므로 주어진 부등식은

$|x-2|+|x-1|<4$

(i) $x<1$일 때,

$|x-2|=-(x-2)$, $|x-1|=-(x-1)$이므로

$-(x-2)-(x-1)<4$

$-2x<1$ $\therefore x>-\frac{1}{2}$

그런데 $x<1$이므로 $-\frac{1}{2}<x<1$

(ii) $1\leq x<2$일 때,

$|x-2|=-(x-2)$, $|x-1|=x-1$이므로

$-(x-2)+(x-1)<4$

이때 $0\times x<3$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $1\leq x<2$이므로 $1\leq x<2$

(iii) $x\geq 2$일 때,

$|x-2|=x-2$, $|x-1|=x-1$이므로

$(x-2)+(x-1)<4$

$2x<7$ $\therefore x<\frac{7}{2}$

그런데 $x\geq 2$이므로 $2\leq x<\frac{7}{2}$

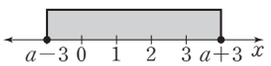
(i), (ii), (iii)에서 $-\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}$이므로 정수 x의 값은 0, 1, 2, 3이다.

한편 부등식 $|x-a|\leq 3$에서

$-3\leq x-a\leq 3$

$\therefore a-3\leq x\leq a+3$

x의 값이 0, 1, 2, 3일 때, 위의 부등식이 성립해야 하므로



$a-3\leq 0$, $a+3\geq 3$

$\therefore 0\leq a\leq 3$

07 답 2

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-1<x<5$이므로

$a<0$

해가 $-1<x<5$이고, 이차항의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-5)<0$

$\therefore x^2-4x-5<0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2-4ax-5a>0$ ($\because a<0$)

이 이차부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 같으므로

$b=-4a$, $c=-5a$

이를 부등식 $a(x-12)^2-bx(x-12)+cx^2>0$에 대입하면

$a(x-12)^2+4ax(x-12)-5ax^2>0$

양변을 a로 나누면

$(x-12)^2+4x(x-12)-5x^2<0$ ($\because a<0$)

$-72x+144<0$, $-72x<-144$ $\therefore x>2$

$\therefore a=2$

08 답 ③

이차부등식 $x^2-(n+5)x+5n\leq 0$에서

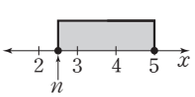
$(x-n)(x-5)\leq 0$

(i) $n<5$일 때,

이차부등식 $(x-n)(x-5)\leq 0$에서

$n\leq x\leq 5$

이를 만족시키는 정수 x가 3개이려면



$2<n\leq 3$

이때 n은 자연수이므로 $n=3$

(ii) $n=5$일 때,

이차부등식 $(x-n)(x-5)\leq 0$에서

$(x-5)^2\leq 0$

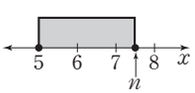
이를 만족시키는 정수 x는 5뿐이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $n>5$일 때,

이차부등식 $(x-n)(x-5)\leq 0$에서

$5\leq x\leq n$

이를 만족시키는 정수 x가 3개이려면



$7\leq n<8$

이때 n은 자연수이므로 $n=7$

(i), (ii), (iii)에서 모든 자연수 n의 값의 합은

$3+7=10$

09 답 7

이차부등식 $x^2-4ax+(a-1)^2<0$이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-4ax+(a-1)^2\geq 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-4ax+(a-1)^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-(a-1)^2\leq 0$에서 $3a^2+2a-1\leq 0$

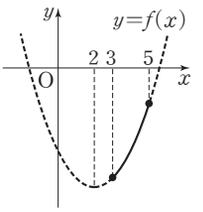
$(a+1)(3a-1)\leq 0$ $\therefore -1\leq a\leq \frac{1}{3}$

$\therefore M=\frac{1}{3}$

또 $f(x)=x^2-4x-4b+3$이라 하면

$f(x)=(x-2)^2-4b-1$

$3\leq x\leq 5$에서 $f(x)\leq 0$이어야 하므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



$3\leq x\leq 5$에서 $f(x)$는 $x=5$일 때 최대이므로

$f(5)\leq 0$에서

$-4b+8\leq 0$, $-4b\leq -8$ $\therefore b\geq 2$

$\therefore m=2$

$\therefore 3(M+m)=3\left(\frac{1}{3}+2\right)=7$

10 답 5

이차부등식 $x^2+x-6\geq 0$에서

$(x+3)(x-2)\geq 0$

$\therefore x\leq -3$ 또는 $x\geq 2$

이때 연립부등식 $\begin{cases} x^2+x-6\geq 0 \\ x^2-ax+b\leq 0 \end{cases}$의 해가 $2\leq x\leq 3$이므로 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근은 3이다. ····· 배점 30%

또 이차부등식 $x^2+x-2<0$에서

$(x+2)(x-1)<0$

$\therefore -2<x<1$

이때 연립부등식 $\begin{cases} x^2-ax+b>0 \\ x^2+x-2<0 \end{cases}$의 해가 $-2<x<-1$이므로 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근은 -1이다. ····· 배점 30%

따라서 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 3, -1이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$a=3+(-1)=2$, $b=3\times(-1)=-3$

$\therefore a-b=5$ ····· 배점 40%

11 답 ③

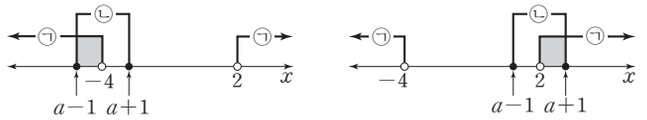
이차부등식 $x^2+2x-8>0$에서

$(x+4)(x-2)>0$ $\therefore x<-4$ 또는 $x>2$ ····· ㉠

부등식 $|x-a|\leq 1$에서

$-1\leq x-a\leq 1$ $\therefore a-1\leq x\leq a+1$ ····· ㉡

이때 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재하도록 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 주어진 연립부등식이 해를 가지려면

$a-1<-4$ 또는 $a+1>2$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>1$

12 답 ④

이차방정식 $x^2+2(a-2)x-a+14=0$의 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(a-2)^2-(-a+14)\geq 0$에서 $a^2-3a-10\geq 0$

$(a+2)(a-5)\geq 0$ $\therefore a\leq -2$ 또는 $a\geq 5$

(ii) $\alpha+\beta=-2(a-2)<0$ $\therefore a>2$

(iii) $\alpha\beta=-a+14>0$ $\therefore a<14$

(i), (ii), (iii)에서 실수 a의 값의 범위는 $5\leq a<14$

13 답 ①

상자의 개수를 x라 하자.

사과를 한 상자에 4개씩 담으면 사과가 15개 남으므로 사과의 개수는 $4x+15$이다.

사과를 한 상자에 5개씩 담으면 상자가 4개 남으므로 비어 있지 않은 $(x-4)$개의 상자 중에서 $(x-5)$개의 상자에는 사과가 5개씩 들어 있고, 1개의 상자에는 사과가 최소 1개에서 최대 5개까지 들어 있다.

즉, $5(x-5)+1\leq 4x+15\leq 5(x-5)+5$이므로

$5x-24\leq 4x+15\leq 5x-20$

부등식 $5x-24\leq 4x+15$에서 $x\leq 39$ ····· ㉠

부등식 $4x+15\leq 5x-20$에서 $x\geq 35$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $35\leq x\leq 39$

따라서 보기 중 상자의 개수가 될 수 없는 것은 34이다.

개념 NOTE

한 상자에 물건을 a개씩 넣으면 n개의 상자가 남는다.

➡ 상자의 개수를 x라 하면

(1) 빈 상자의 개수: n

(2) a개씩 넣은 상자의 개수: $x-(n+1)$

(3) 마지막 1개의 상자에는 최소 1개부터 최대 a개의 물건을 넣을 수 있다.

➡ 물건의 $\begin{cases} \text{최소 개수: } a\{x-(n+1)\}+1 \\ \text{최대 개수: } a\{x-(n+1)\}+a \end{cases}$

14 답 ⑤

세 점 P, Q, R의 좌표는 각각 $\mathrm{P}(a,\ a^2-3a+3)$, $\mathrm{Q}(a,\ 2a^2-4a)$, $\mathrm{R}(a,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{PR}}=|a^2-3a+3|$, $\overline{\mathrm{QR}}=|2a^2-4a|$

이차방정식 $x^2-3x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9-12=-3<0$

즉, 모든 실수 x에 대하여 $x^2-3x+3>0$이므로

$\overline{\mathrm{PR}}=|a^2-3a+3|=a^2-3a+3$

(i) $2a^2-4a<0$, 즉 $0<a<2$일 때, $\overline{\mathrm{QR}}=-2a^2+4a$이므로

$\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{QR}}=(a^2-3a+3)+(-2a^2+4a)\leq 3$

$a(a-1)\geq 0$ $\therefore a\leq 0$ 또는 $a\geq 1$

그런데 $0<a<2$이므로 $1\leq a<2$

(ii) $2a^2-4a>0$, 즉 $a>2$일 때, $\overline{\mathrm{QR}}=2a^2-4a$이므로

$\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{QR}}=(a^2-3a+3)+(2a^2-4a)\leq 3$

$a(3a-7)\leq 0$ $\therefore 0\leq a\leq \frac{7}{3}$

그런데 $a>2$이므로 $2<a\leq \frac{7}{3}$

(i), (ii)에서 $1\leq a<2$ 또는 $2<a\leq \frac{7}{3}$

따라서 a의 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{7}{3}+1=\frac{10}{3}$

01 $-\frac{7}{3}<k\leq-\frac{11}{5}$ 02 28 03 ② 04 -3

05 49 06 ⑤ 07 ④ 08 $\frac{7}{2}$ 09 ② 10 27

11 $a<-1$ 12 11 13 ③ 14 $1\leq a\leq 2$

15 ② 16 $a=1$, $2\leq a<3$ 17 -1 18 43 19 ②

20 ② 21 2 22 $0<a\leq 4$

01 답 $-\frac{7}{3}<k\leq-\frac{11}{5}$

부등식 $kx+9>-x+3$에서

$(k+1)x>-6$ …… ㉠

부등식 $2(x+1)+1<4(x-1)-2$에서

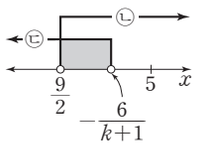
$2x+3<4x-6$, $-2x<-9$

$\therefore x>\frac{9}{2}$ …… ㉡

주어진 연립부등식의 해는 존재하지만 정수인 해는 존재하지 않아야 하므로 ㉠에서 $k+1<0$, 즉 $k<-1$이어야 한다.

$\therefore x<-\frac{6}{k+1}$ …… ㉢

㉡, ㉢의 공통부분이 조건을 만족시키도록 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 정수인 해가 존재하지 않으려면

$\frac{9}{2}<-\frac{6}{k+1}\leq 5$

부등식 $\frac{9}{2}<-\frac{6}{k+1}$에서 $9k+9>-12$ ($\because k+1<0$)

$\therefore k>-\frac{7}{3}$ …… ㉣

부등식 $-\frac{6}{k+1}\leq 5$에서 $-6\geq 5k+5$ ($\because k+1<0$)

$\therefore k\leq-\frac{11}{5}$ …… ㉤

㉣, ㉤의 공통부분을 구하면 $-\frac{7}{3}<k\leq-\frac{11}{5}$

이때 $k<-1$이므로 $-\frac{7}{3}<k\leq-\frac{11}{5}$

02 답 28

어떤 양수를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 정수가 6보다 크거나 같으려면 그 양수는 5.5 이상이어야 한다.

즉, 부등식 $f\left(\frac{5}{2}x+2\right)\geq 6$에서 $\frac{5}{2}x+2\geq 5.5$

$\frac{5}{2}x\geq\frac{7}{2}$ $\therefore x\geq\frac{7}{5}$ …… ㉠

또 어떤 양수를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 정수가 12보다 작으려면 그 양수는 11.5 미만이어야 한다.

즉, 부등식 $f\left(\frac{3}{4}x+1\right)<12$에서 $0<\frac{3}{4}x+1<11.5$

$-1<\frac{3}{4}x<\frac{21}{2}$ $\therefore -\frac{4}{3}<x<14$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{7}{5}\leq x<14$

따라서 $\alpha=\frac{7}{5}$, $\beta=14$이므로 $10\alpha+\beta=14+14=28$

idea

03 답 ②

세 부등식 $x-y+1<0$, $3x-y+6>0$, $3x+y-3<0$에서

$y>x+1$, $y<3x+6$, $y<-3x+3$

$\therefore \begin{cases} x+1<y<3x+6 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+1<y<-3x+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x+1<3x+6$이므로

$-2x<5$ $\therefore x>-\frac{5}{2}$ …… ㉢

㉡에서 $x+1<-3x+3$이므로

$4x<2$ $\therefore x<\frac{1}{2}$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $-\frac{5}{2}<x<\frac{1}{2}$

따라서 주어진 세 부등식을 만족시키는 정수 x의 값은 -2, -1, 0이다.

(i) $x=-2$일 때,

㉠에서 $-1<y<0$이고, ㉡에서 $-1<y<9$이므로

$-1<y<0$

이때 정수 y는 존재하지 않는다.

(ii) $x=-1$일 때,

㉠에서 $0<y<3$이고, ㉡에서 $0<y<6$이므로

$0<y<3$

즉, 정수 y의 값은 1, 2이므로 순서쌍 (x, y)는 $(-1, 1)$, $(-1, 2)$의 2개이다.

(iii) $x=0$일 때,

㉠에서 $1<y<6$이고, ㉡에서 $1<y<3$이므로

$1<y<3$

즉, 정수 y의 값은 2이므로 순서쌍 (x, y)는 $(0, 2)$의 1개이다.

(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 (x, y)의 개수는

$2+1=3$

04 답 -3

$|2x-9|\geq 0$이므로 $|2x-9|+\frac{1}{3}\geq\frac{1}{3}$

부등식 $\left||2x-9|+\frac{1}{3}\right|<\frac{4}{3}$에서

$\frac{1}{3}\leq|2x-9|+\frac{1}{3}<\frac{4}{3}$

$0\leq|2x-9|<1$, $-1<2x-9<1$

$8<2x<10$ $\therefore 4<x<5$ …… ㉠ ····· 배점 30%

부등식 $2a+5b-5<(a+2b)x<a+b-1$에서

(i) $a+2b>0$일 때,

$\frac{2a+5b-5}{a+2b}<x<\frac{a+b-1}{a+2b}$이고, 이는 ㉠과 같으므로

$\frac{2a+5b-5}{a+2b}=4$, $\frac{a+b-1}{a+2b}=5$

$\therefore 2a+3b=-5$, $4a+9b=-1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-7$, $b=3$

이때 $a+2b=-1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다. ···· 배점 30%

(ii) $a+2b<0$일 때,

$\frac{a+b-1}{a+2b}<x<\frac{2a+5b-5}{a+2b}$이고, 이는 ㉠과 같으므로

$\frac{a+b-1}{a+2b}=4$, $\frac{2a+5b-5}{a+2b}=5$

$\therefore 3a+7b=-1$, $3a+5b=-5$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-5$, $b=2$

이때 $a+2b=-1<0$이므로 조건을 만족시킨다. ····· 배점 30%

(i), (ii)에서 $a=-5$, $b=2$이므로

$a+b=-3$ ····· 배점 10%

05 답 49

(i) $x<0$일 때,

$|x-m|=-(x-m)$, $|x|=-x$이므로

$-(x-m)-x<n$, $-2x<n-m$

$\therefore x>\frac{m-n}{2}$

그런데 $x<0$이므로 $\frac{m-n}{2}<x<0$ ($\because m<n$)

(ii) $0\le x<m$일 때,

$|x-m|=-(x-m)$, $|x|=x$이므로

$-(x-m)+x<n$

$0\times x<n-m$이고, $n-m>0$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $0\le x<m$이므로 $0\le x<m$

(iii) $x\ge m$일 때,

$|x-m|=x-m$, $|x|=x$이므로

$(x-m)+x<n$, $2x<m+n$

$\therefore x<\frac{m+n}{2}$

그런데 $x\ge m$이고, $m=\frac{m+m}{2}<\frac{m+n}{2}$이므로

$m\le x<\frac{m+n}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{m-n}{2}<x<\frac{m+n}{2}$ ····· ㉠

$m=1$, $n=5$일 때, ㉠에서 $-2<x<3$이므로 $f(1, 5)=4$ → 정수 x는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.

$m=2$, $n=6$일 때, ㉠에서 $-2<x<4$이므로 $f(2, 6)=5$

$m=3$, $n=7$일 때, ㉠에서 $-2<x<5$이므로 $f(3, 7)=6$

⋮

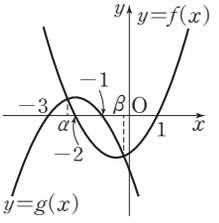
$m=7$, $n=11$일 때, ㉠에서 $-2<x<9$이므로 $f(7, 11)=10$

$\therefore f(1, 5)+f(2, 6)+f(3, 7)+\cdots+f(7, 11)$

$=4+5+6+\cdots+10=49$

06 답 ⑤

그림과 같이 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표를 α, β ($\alpha<\beta$)라 하면



$-3<\alpha<-2$, $-1<\beta<0$

부등식 $\{f(x)\}^2\ge f(x)g(x)$에서

$f(x)\{f(x)-g(x)\}\ge 0$

(i) $f(x)\ge 0$, $f(x)-g(x)\ge 0$일 때,

부등식 $f(x)\ge 0$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로

$x\le -2$ 또는 $x\ge 1$ ····· ㉠

부등식 $f(x)-g(x)\ge 0$, 즉 $f(x)\ge g(x)$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 이차함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로

$x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $x\le\alpha$ 또는 $x\ge 1$

그런데 $-5<x<5$이므로

$-5<x\le\alpha$ 또는 $1\le x<5$

즉, 정수 x는 -4, -3, 1, 2, 3, 4의 6개이다.

(ii) $f(x)\le 0$, $f(x)-g(x)\le 0$일 때,

부등식 $f(x)\le 0$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로

$-2\le x\le 1$ ····· ㉢

부등식 $f(x)-g(x)\le 0$, 즉 $f(x)\le g(x)$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 이차함수 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로

$\alpha\le x\le\beta$ ····· ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $-2\le x\le\beta$

그런데 $-5<x<5$이므로 $-2\le x\le\beta$

즉, 정수 x는 -2, -1의 2개이다.

(i), (ii)에서 정수 x의 개수는

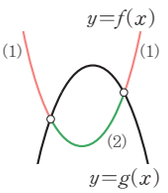
$6+2=8$

개념 NOTE

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(1) 부등식 $f(x)>g(x)$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같다.

(2) 부등식 $f(x)<g(x)$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같다.



07 답 ④

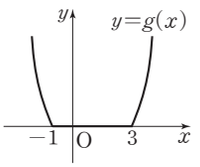
함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\le -1$ 또는 $x\ge 3$일 때 $f(x)\ge 0$이고, $-1<x<3$일 때 $f(x)<0$이므로

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 3) \\ -f(x) & (-1<x<3)\end{cases}$$

$$\therefore g(x)=\begin{cases} \frac{f(x)+f(x)}{2} & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 3) \\ \frac{f(x)-f(x)}{2} & (-1<x<3)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} f(x) & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 3) \\ 0 & (-1<x<3)\end{cases}$$

이때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.

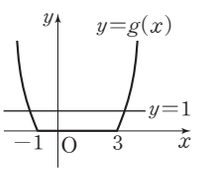


ㄱ. $f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프도 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 방정식 $g(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수와 같다.

그림과 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=1$과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $g(x)=1$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



ㄷ. 부등식 $g(x)\le 0$의 해는 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로

$-1\le x\le 3$ → 아래쪽에 있는 부분은 없고 만나는 부분만 존재한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

08 답 $\frac{7}{2}$

$2\le x<4$에서 $3\le x+1<5$

(i) $3\le x+1<4$일 때,

$[x+1]=3$이므로

$4x^2-4[x+1]x+7\le 0$에서 $4x^2-12x+7\le 0$

$4\left(x-\frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)\le 0$ $\therefore \frac{3-\sqrt{2}}{2}\le x\le\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

그런데 $2\le x<3$이므로 $2\le x\le\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

(ii) $4\le x+1<5$일 때,

$[x+1]=4$이므로

$4x^2-4[x+1]x+7\le 0$에서 $4x^2-16x+7\le 0$

$(2x-1)(2x-7)\le 0$ $\therefore \frac{1}{2}\le x\le\frac{7}{2}$

그런데 $3\le x<4$이므로 $3\le x\le\frac{7}{2}$

(i), (ii)에서 $2\le x\le\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ 또는 $3\le x\le\frac{7}{2}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 x의 최댓값은 $\frac{7}{2}$이다.

배쌤 NOTE

$[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수일 때, 정수 n에 대하여

(1) $n\le x<n+1$이면 $[x]=n$

(2) $[x]=n$이면 $n\le x<n+1$

09 답 ②

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(a, 0)$, $(a+3, 0)$에서 만나므로 최고차항의 계수를 $k\,(k>0)$라 하면

$f(x)=k(x-a)(x-a-3)$

부등식 $f\left(\frac{x+b}{2}\right)\le 0$에서

$k\left(\frac{x+b}{2}-a\right)\left(\frac{x+b}{2}-a-3\right)\le 0$

$\frac{k}{4}(x+b-2a)(x+b-2a-6)\le 0$

$(x+b-2a)(x+b-2a-6)\le 0$ ($\because k>0$)

$\therefore 2a-b\le x\le 2a-b+6$

이 부등식의 해가 $-3\le x\le 3$이므로

$2a-b=-3$ …… ㉠

부등식 $f\left(\frac{b-x}{4}\right)\le 0$에서

$k\left(\frac{b-x}{4}-a\right)\left(\frac{b-x}{4}-a-3\right)\le 0$

$\frac{k}{16}(x-b+4a)(x-b+4a+12)\le 0$

$(x-b+4a)(x-b+4a+12)\le 0$ ($\because k>0$)

$\therefore -4a+b-12\le x\le -4a+b$

이 부등식의 해가 $-8\le x\le 4$이므로

$-4a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{2}$, $b=2$

$\therefore 2ab=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2=-2$

다른 풀이

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(a, 0)$, $(a+3, 0)$에서 만나고, 최고차항의 계수가 양수이므로 부등식 $f(x)\le 0$의 해는

$a\le x\le a+3$

부등식 $f\left(\frac{x+b}{2}\right)\le 0$에서 $\frac{x+b}{2}=t$로 놓으면 부등식 $f(t)\le 0$의 해는

$a\le t\le a+3$이므로

$a\le\frac{x+b}{2}\le a+3$, $2a\le x+b\le 2a+6$

$\therefore 2a-b\le x\le 2a-b+6$

이 부등식의 해가 $-3\le x\le 3$이므로

$2a-b=-3$ …… ㉠

부등식 $f\left(\frac{b-x}{4}\right)\le 0$에서 $\frac{b-x}{4}=s$로 놓으면 부등식 $f(s)\le 0$의 해는

$a\le s\le a+3$이므로

$a\le\frac{b-x}{4}\le a+3$, $4a\le b-x\le 4a+12$

$4a-b\le -x\le 4a-b+12$

$\therefore -4a+b-12\le x\le -4a+b$

이 부등식의 해가 $-8\le x\le 4$이므로

$-4a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}$, $b=2$

$\therefore 2ab=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2=-2$

10 답 27

(가)에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=p$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}(x-p)^2+a$, $g(x)=2(x-p)^2+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)-g(x)=-\frac{3}{2}(x-p)^2+a-b$ …… ㉠

(나)에서 부등식 $f(x)\ge g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)\ge 0$의 해가 $-1\le x\le 5$이고, $f(x)-g(x)$의 최고차항의 계수는 $-\frac{3}{2}$이므로

$f(x)-g(x)=-\frac{3}{2}(x+1)(x-5)$

$=-\frac{3}{2}(x^2-4x-5)$

$=-\frac{3}{2}(x-2)^2+\frac{27}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $p=2$

㉡에서 $f(2)-g(2)=\frac{27}{2}$

$\therefore p\times\{f(2)-g(2)\}=2\times\frac{27}{2}=27$

11 답 $a<-1$

부등식 $x^2>a|x|+a+1$에서 $|x|^2-a|x|-a-1>0$

이때 $|x|=t\,(t\ge 0)$로 놓으면 주어진 부등식은 $t^2-at-a-1>0$

$f(t)=t^2-at-a-1$이라 하고, 이차방정식 $f(t)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4(-a-1)=a^2+4a+4=(a+2)^2\ge 0$

따라서 이차방정식 $f(t)=0$은 실근을 갖는다.

$t\ge 0$에서 이차부등식 $f(t)>0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $f(t)=0$의 두 실근이 모두 음수이어야 하므로 두 실근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

$\alpha+\beta<0$에서 $a<0$ …… ㉠

$\alpha\beta>0$에서 $-a-1>0$ $\therefore a<-1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $a<-1$

12 답 11

이차부등식 $x^2-11x+24<0$에서

$(x-3)(x-8)<0$ $\therefore 3<x<8$

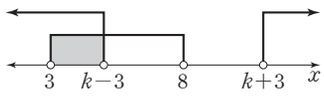
이차부등식 $x^2-2kx+k^2-9>0$에서 $x^2-2kx+(k+3)(k-3)>0$

$(x-k-3)(x-k+3)>0$ $\therefore x<k-3$ 또는 $x>k+3$

이때 $\beta-\alpha=2$이므로 $3<x<8$은 연립부등식의 해가 될 수 없다.

(i) $3<k-3<8$일 때,

$6<k<11$이므로 $k+3>9$

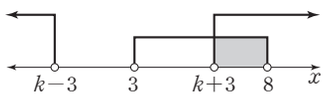


즉, 연립부등식의 해는 $3<x<k-3$이므로

$(k-3)-3=2$, $k-6=2$ $\therefore k=8$

(ii) $3<k+3<8$일 때,

$0<k<5$이므로 $k-3<2$



즉, 연립부등식의 해는 $k+3<x<8$이므로

$8-(k+3)=2$, $5-k=2$ $\therefore k=3$

(i), (ii)에서 모든 k의 값의 합은 $8+3=11$

13 답 ③

이차부등식 $x^2-5x+4<0$에서

$(x-1)(x-4)<0$ $\therefore 1<x<4$

이때 이차부등식 $x^2-2[x]x+3<0$의 해를 구하면

(i) $1<x<2$일 때,

$[x]=1$이므로 $x^2-2x+3<0$

그런데 $x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$이므로 해가 존재하지 않는다.

(ii) $2\le x<3$일 때,

$[x]=2$이므로 $x^2-4x+3<0$

$(x-1)(x-3)<0$ $\therefore 1<x<3$

그런데 $2\le x<3$이므로 $2\le x<3$

(iii) $3\le x<4$일 때,

$[x]=3$이므로 $x^2-6x+3<0$

$\therefore 3-\sqrt{6}<x<3+\sqrt{6}$

($3-\sqrt{6}$: 0.5…, $3+\sqrt{6}$: 5.4…)

그런데 $3\le x<4$이므로 $3\le x<4$

(i), (ii), (iii)에서 $2\le x<4$

따라서 연립부등식의 해는 $2\le x<4$이므로 $\alpha=2$, $\beta=4$

$\therefore \alpha+\beta=6$

14 답 $1\le a\le 2$

이차부등식 $x^2-(a^2-1)x-a^2\le 0$에서

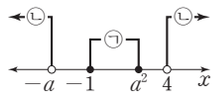
$(x+1)(x-a^2)\le 0$

$\therefore -1\le x\le a^2$ ($\because a^2\ge 0$) …… ㉠

이차부등식 $x^2+(a-4)x-4a>0$에서

$(x+a)(x-4)>0$ …… ㉡

이때 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않도록 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



즉, 주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면

$-a\le -1$, $a^2\le 4$

$-a\le -1$에서 $a\ge 1$ …… ㉢

$a^2\le 4$에서 $a^2-4\le 0$

$(a+2)(a-2)\le 0$ $\therefore -2\le a\le 2$ …… ㉣

따라서 ㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $1\le a\le 2$

15 답 ②

이차부등식 $-x^2+3x+2\le mx+n$에서

$x^2+(m-3)x+n-2\ge 0$

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이차방정식 $x^2+(m-3)x+n-2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(m-3)^2-4(n-2)\le 0$

$\therefore 4n\ge m^2-6m+17$ …… ㉠

또 이차부등식 $mx+n\le x^2-x+4$에서

$x^2-(m+1)x+4-n\ge 0$

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이차방정식 $x^2-(m+1)x+4-n=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(m+1)^2-4(4-n)\le 0$

$\therefore 4n\le -m^2-2m+15$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $m^2-6m+17\le 4n\le -m^2-2m+15$ …… ㉢

즉, $m^2-6m+17\le -m^2-2m+15$이므로

$2m^2-4m+2\le 0$, $2(m-1)^2\le 0$

이때 $(m-1)^2\ge 0$이므로 $m=1$

이를 ㉢에 대입하면 $12\le 4n\le 12$이므로

$4n=12$ $\therefore n=3$

$\therefore m^2+n^2=1+9=10$

16 답 $a=1$, $2\le a<3$

$[x]=n$ (n은 정수)이라 하면 $n\le x<n+1$ …… ㉠

$\therefore n+1\le x+1<n+2$

$[x+1]=n+1$이므로 이차부등식 $[x]^2-2[x+1]+2\le 0$에서

$n^2-2(n+1)+2\le 0$, $n(n-2)\le 0$ $\therefore 0\le n\le 2$

이때 정수 n의 값은 0, 1, 2이므로

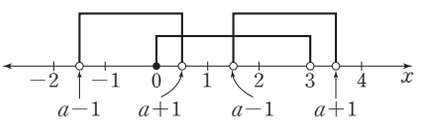
㉠에서 $0\le x<3$ …… ㉡

이차부등식 $x^2-2ax+a^2-1<0$에서

$x^2-2ax+(a+1)(a-1)<0$, $(x-a+1)(x-a-1)<0$

$\therefore a-1<x<a+1$ …… ㉢

㉡, ㉢을 모두 만족시키는 정수 x가 1개이므로 $a-1<x<a+1$의 범위는 그림과 같다.



(i) $0<a+1\le 1$일 때, $-1<a\le 0$

그런데 $a>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $1\le a-1<2$일 때, $2\le a<3$

그런데 $a>0$이므로 $2\le a<3$

(iii) $a=1$일 때, 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 양수 a의 값의 범위는 $a=1$, $2\le a<3$

17 답 −1

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$을 만족시키는 x의 값과 같다.

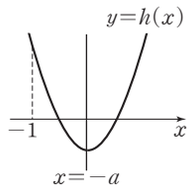
$f(x)-g(x)=(x^2+5ax+3a+6)-(-x^2+ax-5a-4)$

$=2x^2+4ax+8a+10$

$=2(x^2+2ax+4a+5)$

즉, 방정식 $x^2+2ax+4a+5=0$의 모든 실근이 -1보다 커야 한다.

$h(x)=x^2+2ax+4a+5$라 하고, 이차방정식 $h(x)=0$의 두 근이 모두 -1보다 크려면 이차함수 $y=h(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $h(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-4a-5\geq 0$에서

$(a+1)(a-5)\geq 0$

$\therefore a\leq -1$ 또는 $a\geq 5$

(ii) $h(-1)>0$이므로 $1-2a+4a+5>0$

$2a>-6$ $\therefore a>-3$

(iii) 이차함수 $y=h(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=-a$이므로

$-a>-1$ $\therefore a<1$

(i), (ii), (iii)에서 $-3<a\leq -1$

따라서 실수 a의 최댓값은 -1이다.

18 답 43

$f(x)=x^3-3ax^2+(2a^2+a+6)x-a^2-6a$라 하면 $f(a)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

a	1	$-3a$	$2a^2+a+6$	$-a^2-6a$
		a	$-2a^2$	a^2+6a
	1	$-2a$	$a+6$	0

$\therefore f(x)=(x-a)(x^2-2ax+a+6)$

삼차방정식 $(x-a)(x^2-2ax+a+6)=0$에서

$x=a$ 또는 $x^2-2ax+a+6=0$

이때 세 근이 모두 4보다 작아야 하므로

$a<4$ …… ㉠ ····· 배점 30%

또 이차방정식 $x^2-2ax+a+6=0$의 근이 모두 4보다 작아야 한다.

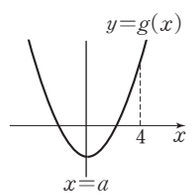
$g(x)=x^2-2ax+a+6$이라 하자.

(i) 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-a-6\geq 0$에서

$(a+2)(a-3)\geq 0$

$\therefore a\leq -2$ 또는 $a\geq 3$



(ii) $g(4)>0$이므로 $16-8a+a+6>0$

$-7a>-22$ $\therefore a<\frac{22}{7}$

(iii) 이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=a$이므로

$a<4$

(i), (ii), (iii)에서

$a\leq -2$ 또는 $3\leq a<\frac{22}{7}$ …… ㉡ ····· 배점 40%

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$a\leq -2$ 또는 $3\leq a<\frac{22}{7}$

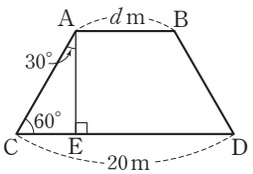
그런데 $a>0$이므로 $3\leq a<\frac{22}{7}$ ····· 배점 20%

따라서 $p=3$, $q=\frac{22}{7}$이므로

$7(p+q)=7\left(3+\frac{22}{7}\right)=43$ ····· 배점 10%

19 답 ②

그림과 같이 점 A에서 변 CD에 내린 수선의 발을 E라 하자.



사각형 ACDB는 등변사다리꼴이고,

$\angle BAC=120°$이므로

$\angle CAE=30°$, $\angle ACE=60°$

$\overline{AB}=d$(m)이므로

$\overline{CE}=\frac{1}{2}(20-d)=10-\frac{1}{2}d$(m)

$\therefore \overline{AE}=\overline{CE}\tan 60°=\sqrt{3}\left(10-\frac{1}{2}d\right)=10\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}d$(m),

$\overline{AC}=\frac{\overline{CE}}{\sin 30°}=2\left(10-\frac{1}{2}d\right)=20-d$(m)

이때 $\overline{AB}\leq 4\,\overline{AC}$이므로 $d\leq 4(20-d)$

$d\leq 80-4d$ $\therefore d\leq 16$ …… ㉠

또 사다리꼴 ACDB의 넓이는 $75\sqrt{3}\,\text{m}^2$ 이하이므로

$\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{AE}\leq 75\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}(d+20)\left(10\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}d\right)\leq 75\sqrt{3}$

$100-\frac{1}{4}d^2\leq 75$, $d^2-100\geq 0$

$(d+10)(d-10)\geq 0$

$\therefore d\leq -10$ 또는 $d\geq 10$

그런데 $d>0$이므로 $d\geq 10$ …… ㉡

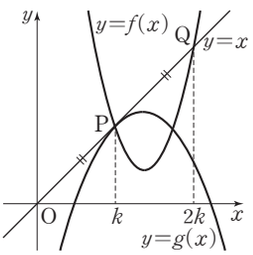
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $10\leq d\leq 16$

따라서 d의 최댓값은 16, 최솟값은 10이므로 그 합은 26이다.

20 답 ②

㈐에서 점 P의 x좌표를 k $(k>0)$라 하면 점 Q의 x좌표는 $2k$이므로

$y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=x$의 그래프는 그림과 같다.



㈎에서 이차방정식 $f(x)=x$의 두 근은 k, $2k$이므로

$f(x)-x=2(x-k)(x-2k)$

$\therefore f(x)=2(x-k)(x-2k)+x$

㈏에서 이차방정식 $g(x)=x$의 근은 k(중근)이므로

$g(x)-x=-(x-k)^2$

$\therefore g(x)=-(x-k)^2+x$

$\therefore f(x)+g(x)=2(x-k)(x-2k)+x-(x-k)^2+x$

$=x^2+2(1-2k)x+3k^2$

즉, 이차부등식 $x^2+2(1-2k)x+3k^2\geq 0$의 해가 모든 실수이므로 이차방정식 $x^2+2(1-2k)x+3k^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(1-2k)^2-3k^2\leq 0$에서 $k^2-4k+1\leq 0$

$(k-2+\sqrt{3})(k-2-\sqrt{3})\leq 0$

$\therefore 2-\sqrt{3}\leq k\leq 2+\sqrt{3}$

그런데 $k>0$이므로 $0<k\leq 2+\sqrt{3}$

따라서 점 P의 x좌표의 최댓값은 $2+\sqrt{3}$이다.

21 답 2

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\frac{1}{2}\overline{AC}$를 세 변의 길이로 하는 삼각형이 존재하려면 삼각형의 두 변의 길이의 합이 나머지 한 변의 길이보다 커야 한다.

(i) $x<1$일 때,

$\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AC}$이므로 삼각형이 존재하지 않는다.



(ii) $x=1$ 또는 $x=5$일 때,

$\frac{1}{2}\overline{AC}=0$ 또는 $\overline{BC}=0$이므로 삼각형이 존재하지 않는다.

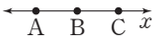
(iii) $1<x<5$일 때,

$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{BC}>\frac{1}{2}\overline{AC}+\overline{BC}$이므로 삼각형이 존재하지 않는다.



(iv) $x>5$일 때,

$\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=x-5$, $\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}(x-1)$



$\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{AC}>\overline{AB}$에서 $x-5+\frac{1}{2}(x-1)>4$

$\frac{3}{2}x>\frac{19}{2}$ $\therefore x>\frac{19}{3}$ ····· ㉠

$\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AC}>\overline{BC}$에서 $4+\frac{1}{2}(x-1)>x-5$

$-\frac{1}{2}x>-\frac{17}{2}$ $\therefore x<17$ ····· ㉡

$\overline{AB}+\overline{BC}>\frac{1}{2}\overline{AC}$에서 $4+x-5>\frac{1}{2}(x-1)$

$\frac{1}{2}x>\frac{1}{2}$ $\therefore x>1$ ····· ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $\frac{19}{3}<x<17$

그런데 $x>5$이므로 $\frac{19}{3}<x<17$

(i)~(iv)에서 $\frac{19}{3}<x<17$

따라서 $\alpha=\frac{19}{3}$, $\beta=17$이므로 $3\alpha-\beta=19-17=2$

22 답 $0<a\leq4$

처음 ag의 설탕물을 덜어 내어도 설탕물의 농도는 변하지 않으므로 남은 10 %의 설탕물 $(80-a)$g의 설탕의 양은

$\frac{10}{100}(80-a)=8-\frac{1}{10}a$(g)

또 물 ag을 부은 후의 설탕물의 농도는

$\frac{8-\frac{1}{10}a}{80}\times100=10-\frac{1}{8}a$(%)

다시 설탕물 $10a$g을 덜어 내고 남은 설탕물의 설탕의 양은

$\frac{10-\frac{1}{8}a}{100}\times(80-10a)=\frac{1}{80}a^2-\frac{11}{10}a+8$(g)

이때 남아 있는 설탕의 양이 $\frac{19}{5}$g 이상이 되어야 하므로

$\frac{1}{80}a^2-\frac{11}{10}a+8\geq\frac{19}{5}$, $a^2-88a+640\geq304$

$a^2-88a+336\geq0$, $(a-4)(a-84)\geq0$

$\therefore a\leq4$ 또는 $a\geq84$

그런데 $a>0$, $10a<80$에서 $0<a<8$이므로

$0<a\leq4$

개념 NOTE

(1) 농도가 a %인 설탕물 mg에 녹아 있는 설탕의 양은

$\frac{a}{100}m$g

(2) 설탕물 mg에 설탕이 xg 녹아 있을 때, 설탕물의 농도는

$\left(\frac{x}{m}\times100\right)$ %

STEP 3 최고난도 문제 | 86~87쪽

01 ② 02 ④ 03 6 04 120 05 ① 06 −15

07 $a\geq3+2\sqrt{2}$ 08 $\sqrt{5}-\sqrt{10}$

idea

01 답 ②

1단계 주어진 부등식의 좌변을 절댓값이 없는 식으로 나타내기

$b-a=8$에서 $b=a+8$이므로

주어진 부등식에서

$f(x)=|4x-3a-b|+|4x-5a+b|$라 하면

$f(x)=|4x-4a-8|+|4x-4a+8|$

$=4|x-(a+2)|+4|x-(a-2)|$

(i) $x<a-2$일 때,

$f(x)=-4(x-a-2)-4(x-a+2)$

$=-8x+8a$

(ii) $a-2\leq x<a+2$일 때,

$f(x)=-4(x-a-2)+4(x-a+2)$

$=16$

(iii) $x\geq a+2$일 때,

$f(x)=4(x-a-2)+4(x-a+2)$

$=8x-8a$

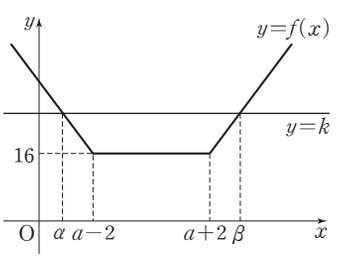
(i), (ii), (iii)에서 $f(x)=\begin{cases}-8x+8a & (x<a-2)\\ 16 & (a-2\leq x<a+2)\\ 8x-8a & (x\geq a+2)\end{cases}$

2단계 주어진 부등식의 해를 함수의 그래프와 직선의 위치 관계로 파악하기

이때 a가 정수이므로 $a-2\leq x\leq a+2$를 만족시키는 정수 x는 $a-2$, $a-1$, a, $a+1$, $a+2$의 5개이다.

부등식 $f(x)\leq k$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위와 같다.

즉, 부등식 $f(x)\leq k$를 만족시키는 정수 x가 9개이려면 그림과 같이 직선 $y=k$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 $k>16$



y축의 위치는 임의로 정한 것이고 반드시 $a-2>0$인 것은 아니다.

3단계 **정수 k의 개수 구하기**

$x<a-2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 α라 하면

$-8\alpha+8a=k$ $\therefore \alpha=\frac{8a-k}{8}$

또 $x\geq a+2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 β라 하면

$8\beta-8a=k$ $\therefore \beta=\frac{8a+k}{8}$

즉, 부등식 $f(x)\leq k$의 해는

$\frac{8a-k}{8}\leq x\leq\frac{8a+k}{8}$

이때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 9개이려면

$8\leq\frac{8a+k}{8}-\frac{8a-k}{8}<10$, $8\leq\frac{k}{4}<10$

$\therefore 32\leq k<40$

따라서 정수 k는 32, 33, 34, …, 39의 8개이다.

02 답 ④

1단계 **b의 값 구하기**

부등식 $\{x+a(1-[a])\}^2-b^2\leq0$에서

$(x+a-a[a]+b)(x+a-a[a]-b)\leq0$

$\therefore -a+a[a]-b\leq x\leq -a+a[a]+b$ ($\because a>0$, $b>0$)

이때 주어진 부등식의 해가 $9\leq x\leq19$이므로

$-a+a[a]-b=9$ …… ㉠

$-a+a[a]+b=19$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2(-a+a[a])=28$ $\therefore -a+a[a]=14$

㉡−㉠을 하면

$-2b=-10$ $\therefore b=5$

2단계 **a의 값 구하기**

이때 $-a+a[a]=14$에서

$a([a]-1)=14$ …… ㉢

$[a]-1>0$이어야 하므로 $[a]=n$($n\geq2$인 정수)이라 하면

$n\leq a<n+1$

즉, $n(n-1)\leq a([a]-1)<(n+1)(n-1)$이므로

$n(n-1)\leq14<(n+1)(n-1)$ ($\because$ ㉢)

이차부등식 $n(n-1)\leq14$에서 n의 값은 2, 3, 4이고,

이차부등식 $(n+1)(n-1)>14$에서 n의 값은 4, 5, 6, …이므로

$n=4$

따라서 $[a]=4$이므로 이를 ㉢에 대입하면

$3a=14$ $\therefore a=\frac{14}{3}$

3단계 **$a+b$의 값 구하기**

$\therefore a+b=\frac{14}{3}+5=\frac{29}{3}$

03 답 6

1단계 **$\beta-\alpha$가 될 수 있는 값 구하기**

㈎에서 $\beta-\alpha$는 자연수이므로 α, β는 모두 정수이거나 α, β는 모두 정수가 아닌 실수이다.

㈏에서 $\alpha\leq x\leq\beta$를 만족시키는 정수 x가 3개이므로 α, β가 모두 정수이면 $\beta-\alpha=2$이고, α, β가 모두 정수가 아닌 실수이면 $\beta-\alpha=3$이다.

2단계 **a의 값 구하기**

이차부등식 $(2x-a^2+2a)(2x-3a)\leq0$에서

$4\left(x-\frac{a^2-2a}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}a\right)\leq0$ …… ㉠

(i) $\frac{a^2-2a}{2}>\frac{3}{2}a$일 때,

$a^2-5a>0$, $a(a-5)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>5$ …… ㉡

이때 이차부등식 ㉠의 해는

$\frac{3}{2}a\leq x\leq\frac{a^2-2a}{2}$

$\therefore \alpha=\frac{3}{2}a$, $\beta=\frac{a^2-2a}{2}$

ⓘ α, β가 모두 정수이면 $\beta-\alpha=2$이므로

$\frac{a^2-2a}{2}-\frac{3}{2}a=2$

$a^2-5a-4=0$ $\therefore a=\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}$ ($\because$ ㉡)

그런데 $a=\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}$이면 α, β가 모두 정수가 아닌 실수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

ⓘⓘ α, β가 모두 정수가 아닌 실수이면 $\beta-\alpha=3$이므로

$\frac{a^2-2a}{2}-\frac{3}{2}a=3$

$a^2-5a-6=0$, $(a+1)(a-6)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=6$ ($\because$ ㉡)

$a=-1$이면 $\alpha=-\frac{3}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}$이므로 α, β는 모두 정수가 아닌 실수이다.

$a=6$이면 $\alpha=9$, $\beta=12$이므로 α, β는 모두 정수이다.

즉, $a=-1$일 때 주어진 조건을 만족시킨다.

ⓘ, ⓘⓘ에서 조건을 만족시키는 a의 값은

$a=-1$

(ii) $\frac{a^2-2a}{2}<\frac{3}{2}a$일 때,

$a^2-5a<0$, $a(a-5)<0$

$\therefore 0<a<5$ …… ㉢

이때 이차부등식 ㉠의 해는

$\frac{a^2-2a}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}a$

$\therefore \alpha=\frac{a^2-2a}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}a$

ⓘ α, β가 모두 정수이면 $\beta-\alpha=2$이므로

$\frac{3}{2}a-\frac{a^2-2a}{2}=2$

$a^2-5a+4=0$, $(a-1)(a-4)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=4$ ($\because$ ㉢)

$a=1$이면 $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}$이므로 α, β는 모두 정수가 아닌 실수이다.

$a=4$이면 $\alpha=4$, $\beta=6$이므로 α, β는 모두 정수이다.

즉, $a=4$일 때 주어진 조건을 만족시킨다.

ⓘⓘ α, β가 모두 정수가 아닌 실수이면 $\beta-\alpha=3$이므로

$\frac{3}{2}a-\frac{a^2-2a}{2}=3$

$a^2-5a+6=0$, $(a-2)(a-3)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=3$ ($\because$ ㉢)

$a=2$이면 $\alpha=0$, $\beta=3$이므로 α, β는 모두 정수이다.

$a=3$이면 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=\frac{9}{2}$이므로 α, β는 모두 정수가 아닌 실수이다.

즉, $a=3$일 때 주어진 조건을 만족시킨다.

ⅰ, ⅱ에서 조건을 만족시키는 a의 값은

$a=3$ 또는 $a=4$

3단계 모든 a의 값의 합 구하기

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+3+4=6$

04 답 120

1단계 $f(x)+g(x)$를 일차식으로 나타내기

㈎에서 $f(x)=ax^2$ $(a\neq0)$

㈏에서 $f(x)+g(x)$는 일차식이어야 하므로

$g(x)=-ax^2+bx+c$ $(b\neq0)$로 나타낼 수 있다.

$f(x)+g(x)=bx+c$이고, 부등식 $bx+c\geq0$의 해가 $x\geq2$이므로

$b>0$, $-\frac{c}{b}=2$에서 $c=-2b$

㈐에서 함수 $f(x)-g(x)=2ax^2-bx+2b$는 $x=1$에서 최솟값을 가지므로

$a>0$, $\frac{b}{4a}=1$에서 $b=4a$

이때 $c=-2b=-8a$이므로

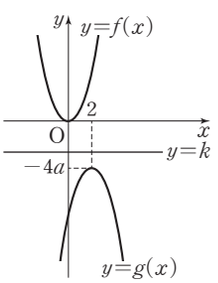
$g(x)=-ax^2+4ax-8a=-a(x-2)^2-4a$

$\therefore f(x)+g(x)=4ax-8a=4a(x-2)$

2단계 두 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기

방정식 $\{f(x)-k\}\times\{g(x)-k\}=0$이 실근을 갖지 않기 위해서는 방정식 $f(x)-k=0$은 실근을 갖지 않고, 방정식 $g(x)-k=0$도 실근을 갖지 않아야 한다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나지 않고, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$도 만나지 않아야 하므로 직선 $y=k$는 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 사이에 있어야 한다.



3단계 $f(22)+g(22)$의 최댓값 구하기

따라서 $-4a<k<0$이고, 이를 만족시키는 정수 k의 개수가 5이므로

$-6\leq-4a<-5$ $\therefore \frac{5}{4}<a\leq\frac{3}{2}$

그러므로 $f(22)+g(22)=4a(22-2)=80a$에서

$f(22)+g(22)$의 최댓값은 $80\times\frac{3}{2}=120$

05 답 ①

1단계 주어진 연립부등식 풀기

이차부등식 $x^2-a^2x\geq0$에서 $x(x-a^2)\geq0$

$\therefore x\leq0$ 또는 $x\geq a^2$ ($\because a^2>0$) …… ㉠

이차부등식 $x^2-4ax+4a^2-1<0$에서

$x^2-4ax+(2a+1)(2a-1)<0$

$(x-2a-1)(x-2a+1)<0$

$\therefore 2a-1<x<2a+1$ …… ㉡

2단계 a의 값의 범위에 따라 정수 x의 개수 구하기

$0<a<\sqrt{2}$에서 a^2, $2a-1$, $2a+1$ 중 적어도 하나는 정수가 되도록 하는 a의 값은 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$

또 $a^2-(2a-1)=(a-1)^2\geq0$이므로 $a^2\geq2a-1$

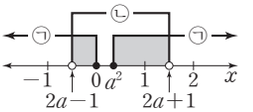
따라서 다음과 같이 a의 값의 범위를 나누어 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수를 구한다.

(i) $0<a<\frac{1}{2}$일 때,

$0<a^2<\frac{1}{4}$, $-1<2a-1<0$, $1<2a+1<2$

이때 ㉠, ㉡의 공통부분은 그림과 같다.

즉, 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 0, 1의 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $a=\frac{1}{2}$일 때,

㉠에서 $x\leq0$ 또는 $x\geq\frac{1}{4}$

㉡에서 $0<x<2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $\frac{1}{4}\leq x<2$

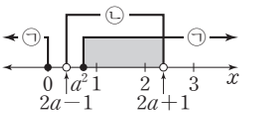
즉, 정수 x는 1의 1개이므로 조건을 만족시킨다.

(iii) $\frac{1}{2}<a<1$일 때,

$\frac{1}{4}<a^2<1$, $0<2a-1<1$, $2<2a+1<3$

이때 ㉠, ㉡의 공통부분은 그림과 같다.

즉, 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 1, 2의 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



(iv) $a=1$일 때,

㉠에서 $x\leq0$ 또는 $x\geq1$

㉡에서 $1<x<3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $1<x<3$

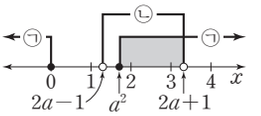
즉, 정수 x는 2의 1개이므로 조건을 만족시킨다.

(v) $1<a<\sqrt{2}$일 때,

$1<a^2<2$, $1<2a-1<2\sqrt{2}-1$, $3<2a+1<2\sqrt{2}+1$

이때 ㉠, ㉡의 공통부분은 그림과 같다.

즉, 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 2, 3의 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



3단계 모든 a의 값의 합 구하기

(i)~(v)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은 $\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

idea

06 답 −15

1단계 조건을 만족시키는 m, p에 대한 부등식 세우기

이차부등식 $-x^2+px+p\leq(m-1)x+n$에서

$x^2+(m-p-1)x+n-p\geq0$

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이차방정식

$x^2+(m-p-1)x+n-p=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(m-p-1)^2-4(n-p)\leq0$

$\therefore \frac{(m-p-1)^2}{4}+p\leq n$ …… ㉠

또 이차부등식 $x^2 \geq (m-1)x+n$에서

$x^2-(m-1)x-n \geq 0$

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이차방정식

$x^2-(m-1)x-n=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(m-1)^2+4n \leq 0$

$\therefore n \leq -\dfrac{(m-1)^2}{4}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{(m-p-1)^2}{4}+p \leq -\dfrac{(m-1)^2}{4}$

2단계 p**의 값 구하기**

$m-1=t$로 놓으면

$\dfrac{(t-p)^2}{4}+p \leq -\dfrac{t^2}{4}$

$2t^2-2pt+p^2+4p \leq 0$ ····· ㉢

이때 t의 값이 유일하게 존재하므로 t에 대한 이차방정식

$2t^2-2pt+p^2+4p=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D_3이라 하면

$\dfrac{D_3}{4}=p^2-2(p^2+4p)=0$에서

$-p^2-8p=0$, $p(p+8)=0$

$\therefore p=-8$ ($\because p \neq 0$)

3단계 m, n**의 값 구하기**

$p=-8$을 ㉢에 대입하면 $2t^2+16t+32 \leq 0$

$\therefore 2(t+4)^2 \leq 0$

즉, $t=-4$이므로 $m-1=-4$

$\therefore m=-3$

$p=-8$, $m=-3$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$n \geq -4$, $n \leq -4$이므로

$n=-4$

4단계 $p+m+n$**의 값 구하기**

$\therefore p+m+n=-8+(-3)+(-4)=-15$

07 답 $a \geq 3+2\sqrt{2}$

1단계 **주어진 방정식을 $x+\dfrac{1}{x}$에 대한 식으로 나타내기**

$x \neq 0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-2ax+6a+1-\dfrac{2a}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-2a\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6a+1=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2a\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6a-1=0$

$x+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면

$t^2-2at+6a-1=0$ ····· ㉠

2단계 $x+\dfrac{1}{x}$**의 값의 범위 구하기**

이때 $x+\dfrac{1}{x}=t$에서 $x^2-tx+1=0$

즉, 이차방정식 $x^2-tx+1=0$의 근이 모두 양수이어야 하므로 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=t^2-4 \geq 0$에서 $(t+2)(t-2) \geq 0$

$\therefore t \leq -2$ 또는 $t \geq 2$

또 (두 근의 합)$=t>0$, (두 근의 곱)$=1>0$이므로 조건을 만족시키는 t의 값의 범위는 $t \geq 2$

3단계 a**의 값의 범위 구하기**

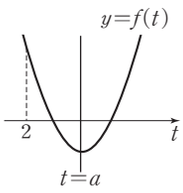
따라서 이차방정식 ㉠이 $t \geq 2$에서 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=t^2-2at+6a-1$이라 하자.

(i) 이차방정식 $f(t)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=a^2-6a+1 \geq 0$

$\therefore a \leq 3-2\sqrt{2}$ 또는 $a \geq 3+2\sqrt{2}$



(ii) $f(2) \geq 0$이므로

$4-4a+6a-1 \geq 0$, $2a+3 \geq 0$

$\therefore a \geq -\dfrac{3}{2}$

(iii) 이차함수 $y=f(t)$의 그래프의 축이 직선 $t=a$이므로 $a \geq 2$

(i), (ii), (iii)에서 실수 a의 값의 범위는

$a \geq 3+2\sqrt{2}$

08 답 $\sqrt{5}-\sqrt{10}$

1단계 k**에 대한 부등식 세우기**

을의 속력을 v라 하면 갑의 속력은 kv $(k>1)$이다.

트랙 한 바퀴의 길이를 a라 하고, 두 사람이 처음 만날 때까지 걸린 시간을 t_1이라 하자.

두 사람이 같은 방향으로 달려서 만나면 갑이 을보다 한 바퀴만큼 더 달렸으므로

$kvt_1-vt_1=a$ $\therefore t_1=\dfrac{a}{(k-1)v}$

또 두 사람이 처음 만날 때부터 두 번째 만날 때까지 걸린 시간을 t_2라 하자.

두 사람이 반대 방향으로 달려서 만나면 움직인 거리의 합이 트랙의 한 바퀴만큼이므로

$kvt_2+vt_2=a$ $\therefore t_2=\dfrac{a}{(k+1)v}$

두 사람이 두 번째 만날 때, 을은 두 바퀴를 지나 세 바퀴째를 돌고 있으므로

$2a<(t_1+t_2)v<3a$

$2a<\left\{\dfrac{a}{(k-1)v}+\dfrac{a}{(k+1)v}\right\}v<3a$

$2<\dfrac{1}{k-1}+\dfrac{1}{k+1}<3$, $2<\dfrac{2k}{k^2-1}<3$

각 변에 k^2-1을 곱하면

$2k^2-2<2k<3k^2-3$ ($\because k^2-1>0$)

2단계 k**의 값의 범위 구하기**

(i) 이차부등식 $2k^2-2<2k$에서 $2k^2-2k-2<0$

$k^2-k-1<0$ $\therefore \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<k<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

그런데 $k>1$이므로 $1<k<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ → $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6\cdots$

(ii) 이차부등식 $2k<3k^2-3$에서 $3k^2-2k-3>0$

$\therefore k<\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}$ 또는 $k>\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$

그런데 $k>1$이므로 $k>\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$ → $\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}=1.3\cdots$

(i), (ii)에서 $\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}<k<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

3단계 $2\beta-3\alpha$**의 값 구하기**

따라서 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$, $\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이므로

$2\beta-3\alpha=(1+\sqrt{5})-(1+\sqrt{10})=\sqrt{5}-\sqrt{10}$

기출 변형 문제로 단원 마스터 | 88~91쪽

01 165	02 195	03 12	04 18	05 15	06 ③
07 7	08 ④	09 6	10 42	11 328	12 24
13 40	14 ④				

01 답 165

$\left\{i^n-\left(-\frac{1}{i}\right)^{2n}\right\}^m=(i^n-i^{2n})^m=\{i^n-(-1)^n\}^m$

$f(n)=i^n-(-1)^n$이라 하면 음이 아닌 정수 k에 대하여

(i) $n=4k+1$일 때,

$f(n)=f(4k+1)=i^{4k+1}-(-1)^{4k+1}=i-(-1)=i+1$이므로

$\{f(n)\}^2=(i+1)^2=2i$

$\{f(n)\}^4=(2i)^2=-4$

$\{f(n)\}^8=4^2$

$\{f(n)\}^{16}=4^4$

$\{f(n)\}^{24}=4^6$

⋮

즉, $n=4k+1$일 때 $\{f(n)\}^m$의 값이 양의 실수가 되도록 하는 30 이하의 자연수 m은 8, 16, 24의 3개이다.

또 $n=4k+1$ 꼴인 30 이하의 자연수 n은 1, 5, 9, …, 29의 8개이다.

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는 $3\times8=24$

(ii) $n=4k+2$일 때,

$f(n)=f(4k+2)=i^{4k+2}-(-1)^{4k+2}=i^2-1=-1-1=-2$이므로

$\{f(n)\}^2=(-2)^2=4$

$\{f(n)\}^4=4^2$

$\{f(n)\}^6=4^3$

⋮

즉, $n=4k+2$일 때 $\{f(n)\}^m$의 값이 양의 실수가 되도록 하는 30 이하의 자연수 m은 2, 4, 6, …, 30의 15개이다.

또 $n=4k+2$ 꼴인 30 이하의 자연수 n은 2, 6, 10, …, 30의 8개이다.

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는 $15\times8=120$

(iii) $n=4k+3$일 때,

$f(n)=f(4k+3)=i^{4k+3}-(-1)^{4k+3}=i^3-(-1)=-i+1$이므로

$\{f(n)\}^2=(-i+1)^2=-2i$

$\{f(n)\}^4=(-2i)^2=-4$

$\{f(n)\}^8=4^2$

$\{f(n)\}^{16}=4^4$

$\{f(n)\}^{24}=4^6$

⋮

즉, $n=4k+3$일 때 $\{f(n)\}^m$의 값이 양의 실수가 되도록 하는 30 이하의 자연수 m은 8, 16, 24의 3개이다.

또 $n=4k+3$ 꼴인 30 이하의 자연수 n은 3, 7, 11, …, 27의 7개이다.

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는 $3\times7=21$

(iv) $n=4k+4$일 때,

$f(n)=f(4k+4)=i^{4k+4}-(-1)^{4k+4}=1-1=0$이므로 $\{f(n)\}^m$의 값은 양의 실수가 될 수 없다.

(i)~(iv)에서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$24+120+21=165$

02 답 195

99 이하의 자연수 m에 대하여 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m$의 값은 다음과 같다.

$m=1, 9, 17, \ldots, 89, 97$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$m=2, 10, 18, \ldots, 90, 98$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=i$

$m=3, 11, 19, \ldots, 91, 99$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$m=4, 12, 20, \ldots, 92$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=-1$

$m=5, 13, 21, \ldots, 93$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$

$m=6, 14, 22, \ldots, 94$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=-i$

$m=7, 15, 23, \ldots, 95$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$m=8, 16, 24, \ldots, 96$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=1$

또 99 이하의 자연수 n에 대하여 i^n의 값은 다음과 같다.

$n=1, 5, 9, \ldots, 93, 97$일 때, $i^n=i$

$n=2, 6, 10, \ldots, 94, 98$일 때, $i^n=-1$

$n=3, 7, 11, \ldots, 95, 99$일 때, $i^n=-i$

$n=4, 8, 12, \ldots, 96$일 때, $i^n=1$

$\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m+i^n\right\}^2=-4$이므로

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m+i^n=2i$ 또는 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m+i^n=-2i$

(i) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m+i^n=2i$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=i$, $i^n=i$이므로

$m=98$, $n=97$인 경우에 $m+n$은 최댓값 195를 갖는다.

(ii) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m+i^n=-2i$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=-i$, $i^n=-i$이므로

$m=94$, $n=99$인 경우에 $m+n$은 최댓값 193을 갖는다.

(i), (ii)에서 $m+n$의 최댓값은 195이다.

03 답 12

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-\alpha+1=0$, $\beta^2-\beta+1=0$ …… ㉠

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=1$ …… ㉡

$\therefore -\alpha+1=\beta$, $-\beta+1=\alpha$

이를 ㉠에 대입하면

$\alpha^2+\beta=0$, $\beta^2+\alpha=0$ $\therefore -\alpha^2=\beta$, $-\beta^2=\alpha$

㉡에서 $\alpha=1-\beta$이므로

$f(-\alpha^2)=5\alpha$에서 $f(\beta)=5(1-\beta)$

$\therefore f(\beta)+5\beta-5=0$

㉡에서 $\beta=1-\alpha$이므로

$f(-\beta^2)=5\beta$에서 $f(\alpha)=5(1-\alpha)$

$\therefore f(\alpha)+5\alpha-5=0$

즉, 이차방정식 $f(x)+5x-5=0$의 두 근이 α, β이고, 이차항의 계수가 1이므로

$f(x)+5x-5=(x-\alpha)(x-\beta)$에서

$f(x)+5x-5=x^2-x+1$ $\therefore f(x)=x^2-6x+6$

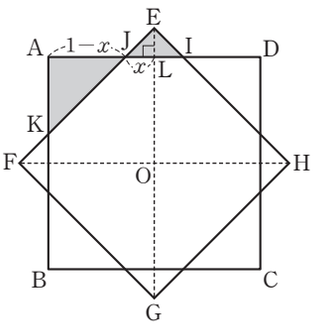
따라서 $p=-6$, $q=6$이므로 $q-p=12$

04 답 18

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 서로 다른 두 근이 α, β이므로
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-a$ …… ㉠
$\alpha\beta=b$ …… ㉡
이차방정식 $x^2+3ax+3b=0$의 서로 다른 두 근이 $\alpha-2$, $\beta-2$이므로
근과 계수의 관계에 의하여
$(\alpha-2)+(\beta-2)=-3a$ …… ㉢
$(\alpha-2)(\beta-2)=3b$ …… ㉣
㉠, ㉢에서 $-a-4=-3a$ $\therefore a=2$
㉠, ㉡을 ㉣의 정리한 식에 대입하면
$b+2\times2+4=3b$, $b+8=3b$ $\therefore b=4$
$\therefore \alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=4$
한편 $\alpha^2+2\alpha+4=0$에서 $\alpha^3=8$, $\beta^2+2\beta+4=0$에서 $\beta^3=8$이므로
양변에 $\alpha-2$를 곱하면 $(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)=0$ $\therefore \alpha^3-8=0$
$\alpha+\beta=-2<0$
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\times4=-4<0$
$\alpha^3+\beta^3=8+8=16>0$
$\alpha^4+\beta^4=\alpha^3\times\alpha+\beta^3\times\beta=8(\alpha+\beta)=8\times(-2)=-16<0$
$\alpha^5+\beta^5=\alpha^3\times\alpha^2+\beta^3\times\beta^2=8(\alpha^2+\beta^2)=8\times(-4)=-32<0$
$\alpha^6+\beta^6=(\alpha^3)^2+(\beta^3)^2=8^2+8^2=128>0$
$\alpha^7+\beta^7=(\alpha^3)^2\times\alpha+(\beta^3)^2\times\beta=64(\alpha+\beta)=64\times(-2)=-128<0$
$\alpha^8+\beta^8=(\alpha^3)^2\times\alpha^2+(\beta^3)^2\times\beta^2=64(\alpha^2+\beta^2)=64\times(-4)=-256<0$
$\alpha^9+\beta^9=(\alpha^3)^3+(\beta^3)^3=8^3+8^3=1024>0$
$\alpha^{10}+\beta^{10}=(\alpha^3)^3\times\alpha+(\beta^3)^3\times\beta=512(\alpha+\beta)$
$=512\times(-2)=-1024<0$
따라서 ㈎, ㈏를 모두 만족시키는 한 자리의 자연수 n의 값은 3, 6, 9이므로 그 합은 $3+6+9=18$

05 답 15

두 정사각형의 대각선이 모두 한 점 O에서 만나고 정사각형 EFGH의 대각선이 정사각형 ABCD의 한 변을 이등분하므로 주어진 도형은 각각의 대각선에 대하여 대칭이다.
꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선의 발을 L이라 하고, $\overline{JL}=x$라 하면 삼각형 EJL은 직각이등변삼각형이므로 $\overline{EL}=x$



따라서 삼각형 EJI의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{JI}\times\overline{EL}=\frac{1}{2}\times2x\times x=x^2$
삼각형 AKJ도 직각이등변삼각형이고, $\overline{AJ}=1-x$이므로
삼각형 AKJ의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AJ}\times\overline{AK}=\frac{1}{2}(1-x)^2$
삼각형 AKJ의 넓이가 삼각형 EJI의 넓이의 $\frac{4}{3}$배이어야 하므로
$\frac{1}{2}(1-x)^2=\frac{4}{3}x^2$, $3-6x+3x^2=8x^2$
$5x^2+6x-3=0$ $\therefore x=\frac{-3\pm2\sqrt{6}}{5}$
그런데 $x>0$이므로 $x=\frac{-3+2\sqrt{6}}{5}$
직각이등변삼각형 EJL에서 $\overline{EJ}=\sqrt{2}x$, 직각이등변삼각형 AKJ에서 $\overline{KJ}=\sqrt{2}(1-x)$
즉, $\overline{EF}=2\overline{EJ}+\overline{KJ}$이므로
$2k=2\sqrt{2}x+\sqrt{2}(1-x)$
$\therefore k=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-3+2\sqrt{6}}{5}+1\right)$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2+2\sqrt{6}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{2\sqrt{3}}{5}$
따라서 $p=\frac{1}{5}$, $q=\frac{2}{5}$이므로
$25(p+q)=25\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\right)=15$

06 답 ③

㈎에서 $f(x)g(x)=(x+1)(x-1)(x+4)(x-4)$
㈏에서 $f(x)=0$의 두 실근은 α, $\alpha+5$
즉, $f(x)=0$의 두 실근의 차는 5이다.
$\therefore \begin{cases}f(x)=a(x-1)(x+4)\\ g(x)=\frac{1}{a}(x+1)(x-4)\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}f(x)=a(x+1)(x-4)\\ g(x)=\frac{1}{a}(x-1)(x+4)\end{cases}$
(단, $a\neq0$인 상수)

ㄱ. $f(4)=0$이면 $\begin{cases}f(x)=a(x+1)(x-4)\\ g(x)=\frac{1}{a}(x-1)(x+4)\end{cases}$이므로
$g(-4)=0$

ㄴ. $g(1)>0$이므로 $\begin{cases}f(x)=a(x-1)(x+4)\\ g(x)=\frac{1}{a}(x+1)(x-4)\end{cases}$이고, $a<0$이다.
즉, $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{11}{4}a<0$, $g\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{25}{4a}>0$이므로
$f\left(\frac{3}{2}\right)<0<g\left(\frac{3}{2}\right)$

ㄷ. (i) $\begin{cases}f(x)=a(x-1)(x+4)\\ g(x)=\frac{1}{a}(x+1)(x-4)\end{cases}$ (단, $a\neq0$인 상수)일 때,
방정식 $f(x)+g(x)=0$, 즉
$\left(a+\frac{1}{a}\right)x^2+3\left(a-\frac{1}{a}\right)x-4\left(a+\frac{1}{a}\right)=0$은 서로 다른 두 정수근을 갖는다.
$f(x)+g(x)=0$의 양변에 a를 곱하면
$(a^2+1)x^2+3(a^2-1)x-4(a^2+1)=0$
근과 계수의 관계에 의하여 $mn=-4$이고, m, n은 정수이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (m, n)은
$(-4, 1)$, $(1, -4)$, $(-2, 2)$, $(2, -2)$, $(-1, 4)$, $(4, -1)$
ⓘ $(-4, 1)$, $(1, -4)$인 경우
$m+n=\frac{-3a^2+3}{a^2+1}=-3$에서 $-3a^2+3=-3a^2-3$을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.
즉, 방정식 $f(x)+g(x)=0$은 두 정수 -4, 1을 근으로 가질 수 없다.
ⓘⓘ $(-2, 2)$, $(2, -2)$인 경우
$m+n=\frac{-3a^2+3}{a^2+1}=0$에서 $-3a^2+3=0$
$3a^2=3$ $\therefore a=\pm1$
즉, 방정식 $f(x)+g(x)=0$은 두 정수 -2, 2를 근으로 갖는다.

ⅲ $(-1, 4)$, $(4, -1)$인 경우

$m+n=\dfrac{-3a^2+3}{a^2+1}=3$에서 $-3a^2+3=3a^2+3$

$6a^2=0$ $\therefore a=0$

그런데 $a\neq0$이므로 방정식 $f(x)+g(x)=0$은 두 정수 -1, 4를 근으로 가질 수 없다.

(ii) $\begin{cases} f(x)=a(x+1)(x-4) \\ g(x)=\dfrac{1}{a}(x-1)(x+4) \end{cases}$ (단, $a\neq0$인 상수)일 때,

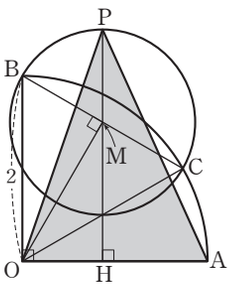
방정식 $f(x)+g(x)=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)x^2-3\left(a-\dfrac{1}{a}\right)x-4\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$에서 (i)과 같은 방법으로 하면 된다.

(i), (ii)에서 방정식 $f(x)+g(x)=0$이 서로 다른 두 정수 m, n을 근으로 가지면 $m+n=0$이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

07 답 7

선분 BC의 중점을 M이라 하고 점 M을 지나고 직선 OB에 평행한 직선이 선분 OA와 만나는 점을 H라 하자. $\overline{OB}=\overline{OC}$인 이등변삼각형 OBC에서 점 M이 선분 BC의 중점이므로 $\angle OMB=90^\circ$



삼각형 OAP의 넓이 $S(x)$는

$S(x)=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{PH}$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times(\overline{MH}+\overline{PM})$ …… ㉠

$\overline{PM}=\overline{BM}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{x}{2}$이므로 직각삼각형 OMB에서

$\overline{OM}^2=\overline{OB}^2-\overline{BM}^2=2^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=4-\dfrac{x^2}{4}$

두 삼각형 OHM, BMO에서

$\angle OHM=\angle BMO=90^\circ$, $\angle OMH=\angle BOM$ (엇각)이므로

$\triangle OHM\backsim\triangle BMO$ (AA 닮음)

즉, $\overline{MH}:\overline{OM}=\overline{OM}:\overline{BO}$이고, $\overline{OB}=2$이므로

$\overline{MH}=\dfrac{1}{2}\overline{OM}^2=2-\dfrac{x^2}{8}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $S(x)=\dfrac{1}{2}\times2\times\left(2-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}(x-2)^2+\dfrac{5}{2}$

이때 $0<x<2\sqrt{2}$이므로 $S(x)$는 $x=2$일 때 최댓값이 $\dfrac{5}{2}$이다.

따라서 $p=2$, $q=5$이므로 $p+q=7$

08 답 ④

방정식 $P(x)=0$의 한 실근을 α, 서로 다른 두 허근을 β, γ라 하면

방정식 $P(3x+2)=0$의 세 근은 $\dfrac{\alpha-2}{3}$, $\dfrac{\beta-2}{3}$, $\dfrac{\gamma-2}{3}$

㈎에서 $\beta\gamma=7$ …… ㉠

㈏에서 $\dfrac{\alpha-2}{3}=-1$이고, $\dfrac{\beta-2}{3}+\dfrac{\gamma-2}{3}=-3$이므로

$\alpha=-1$, $\beta+\gamma=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 α, β, γ를 세 근으로 하고, x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$(x+1)(x^2+5x+7)=0$

즉, $P(x)=(x+1)(x^2+5x+7)=x^3+6x^2+12x+7$이므로

$a=6$, $b=12$, $c=7$

$\therefore a+b-c=11$

09 답 6

㈎에서 이차함수 $f(x)$의 최댓값이 0이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고, x축에 접한다.

이때 ㈏에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(m, 0)$을 지나므로 $f(x)$의 최고차항의 계수를 k라 하면

$f(x)=k(x-m)^2$ (단, $k<0$)

㈏에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(m+4, 16n)$을 지나므로

$f(m+4)=16n$에서

$16k=16n$ $\therefore k=n$

$\therefore f(x)=n(x-m)^2$

㈏에서 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 두 점 $(m, 0)$, $(m+4, 16n)$을 지나므로 직선 $y=g(x)$의 기울기는

$\dfrac{16n}{4}=4n$

$\therefore g(x)=4n(x-m)$

㈐에서 정수 a에 대하여 $-3\le a\le0$이므로

(i) $a=-3$일 때,

$f(m+a)=f(m-3)=9n$, $g(m+a)=g(m-3)=-12n$이므로 정수 n에 대하여 $9n\le b\le-12n$을 만족시키는 정수 b의 개수는

$-12n-9n+1=-21n+1$

즉, 순서쌍 (a, b)의 개수는 $-21n+1$이다.

(ii) $a=-2$일 때,

$f(m+a)=f(m-2)=4n$, $g(m+a)=g(m-2)=-8n$이므로 정수 n에 대하여 $4n\le b\le-8n$을 만족시키는 정수 b의 개수는

$-8n-4n+1=-12n+1$

즉, 순서쌍 (a, b)의 개수는 $-12n+1$이다.

(iii) $a=-1$일 때,

$f(m+a)=f(m-1)=n$, $g(m+a)=g(m-1)=-4n$이므로 정수 n에 대하여 $n\le b\le-4n$을 만족시키는 정수 b의 개수는

$-4n-n+1=-5n+1$

즉, 순서쌍 (a, b)의 개수는 $-5n+1$이다.

(iv) $a=0$일 때,

$f(m+a)=f(m)=0$, $g(m+a)=g(m)=0$이므로 $0\le b\le0$을 만족시키는 정수 b의 개수는 1이다.

즉, 순서쌍 (a, b)의 개수는 1이다.

(i)~(iv)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$(-21n+1)+(-12n+1)+(-5n+1)+1=-38n+4$

이때 ㈐에서 순서쌍 (a, b)의 개수가 80이므로

$-38n+4=80$ $\therefore n=-2$

$\therefore f(x)=-2(x-m)^2$, $g(x)=-8(x-m)$

방정식 $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=0$에서

$4(x-m)^4-64(x-m)^2=0$

$4(x-m)^2\{(x-m)^2-16\}=0$

$4(x-m)^2(x-m+4)(x-m-4)=0$

$\therefore x=m$ 또는 $x=m-4$ 또는 $x=m+4$

이 실근 중 최댓값은 $m+4$, 최솟값은 $m-4$이고, 최댓값과 최솟값의 합이 6이므로

$(m+4)+(m-4)=6$

$2m=6$

$\therefore m=3$

따라서 $f(x)=-2(x-3)^2$, $g(x)=-8(x-3)$이므로

$f(4)+g(2)=-2+8=6$

10 답 42

$f(x)=ax^3+3bx^2+9bx+27a$라 하면 $f(-3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-3	a	$3b$	$9b$	$27a$
		$-3a$	$9a-9b$	$-27a$
	a	$-3a+3b$	$9a$	0

$\therefore f(x)=(x+3)\{ax^2-3(a-b)x+9a\}$

삼차방정식 $(x+3)\{ax^2-3(a-b)x+9a\}=0$에서

$x=-3$ 또는 $ax^2-3(a-b)x+9a=0$

주어진 삼차방정식이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지므로 이차방정식 $ax^2-3(a-b)x+9a=0$은 $x\neq-3$인 서로 다른 두 정수를 근으로 가져야 한다.

즉, $9a+9(a-b)+9a\neq0$이므로 $b\neq3a$

이차방정식 $ax^2-3(a-b)x+9a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $\frac{9a}{a}=9$이므로 서로 다른 두 정수인 근은

-1과 -9 또는 1과 9

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$\frac{3(a-b)}{a}=-10$ 또는 $\frac{3(a-b)}{a}=10$

$3a-3b=-10a$ 또는 $3a-3b=10a$

$\therefore a=\frac{3}{13}b$ 또는 $a=-\frac{3}{7}b$

(i) $a=\frac{3}{13}b$일 때,

→ $k=0$이면 $b\neq3a$를 만족시키지 않는다.

$b=13k$(k는 0이 아닌 정수) 꼴인 정수이고, $|b|\leq100$이면 $|a|\leq\frac{300}{13}$이므로 $|a|\leq100$, $|b|\leq100$을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(-21, -91)$, $(-18, -78)$, $(-15, -65)$, …, $(-3, -13)$, $(3, 13)$, …, $(15, 65)$, $(18, 78)$, $(21, 91)$의 14개이다.

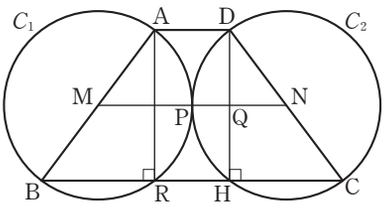
(ii) $a=-\frac{3}{7}b$일 때,

$b=7k$(k는 0이 아닌 정수) 꼴인 정수이고, $|b|\leq100$이면 $|a|\leq\frac{300}{7}$이므로 $|a|\leq100$, $|b|\leq100$을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(-42, 98)$, $(-39, 91)$, $(-36, 84)$, …, $(-3, 7)$, $(3, -7)$, …, $(36, -84)$, $(39, -91)$, $(42, -98)$의 28개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $14+28=42$

11 답 328

그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원을 C_1, 선분 CD를 지름으로 하는 원을 C_2라 하고, 두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하면 두 점 M, N은 각각 두 원 C_1, C_2의 중심이다.



$\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이가 서로 같고 원 C_1과 원 C_2는 오직 한 점에서 만나므로 원 C_1과 원 C_2가 만나는 점은 선분 MN의 중점이다.

선분 MN의 중점을 P, 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 DH와 선분 MN이 만나는 점을 Q라 하고, 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{QN}=\overline{PN}-\overline{PQ}=r-3$, $\overline{HC}=2\overline{QN}=2r-6$이므로

직각삼각형 DHC에서

$\overline{DH}^2=\overline{CD}^2-\overline{HC}^2=(2r)^2-(2r-6)^2=24r-36$ …… ㉠

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 R라 하면

$\overline{BR}=\overline{HC}=2r-6$, $\overline{RH}=\overline{AD}=6$이므로

$\overline{BC}=\overline{BR}+\overline{RH}+\overline{HC}=(2r-6)+6+(2r-6)=4r-6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$S^2=\left\{\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{DH}\right\}^2=\frac{1}{4}\times(\overline{AD}+\overline{BC})^2\times\overline{DH}^2$

$=\frac{1}{4}\times\{6+(4r-6)\}^2\times(24r-36)=48r^2(2r-3)$

$l=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$

$=2r+(4r-6)+2r+6=8r$

이때 $S^2+6l=2^5\times3^2\times91$이므로

$48r^2(2r-3)+48r=2^5\times3^2\times91$

$2r^3-3r^2+r-546=0$

$(r-7)(2r^2+11r+78)=0$

$\therefore r=7$ 또는 $2r^2+11r+78=0$

이차방정식 $2r^2+11r+78=0$의 판별식 D가

$D=121-624=-503<0$이므로 $2r^2+11r+78=0$을 만족시키는 실수 r의 값은 존재하지 않는다.

즉, $r=7$이므로

$\overline{BH}=\overline{BR}+\overline{RH}=8+6=14$, $\overline{DH}^2=168-36=132$

따라서 직각삼각형 DBH에서

$\overline{BD}^2=\overline{BH}^2+\overline{DH}^2=196+132=328$

12 답 24

㈎에서 $\beta-\alpha$는 자연수이므로 α, β는 모두 정수이거나 α, β는 모두 정수가 아닌 실수이다.

㈏에서 $\alpha\leq x\leq\beta$를 만족시키는 정수 x가 25개이므로 α, β가 모두 정수이면 $\beta-\alpha=24$이고, α, β가 모두 정수가 아닌 실수이면 $\beta-\alpha=25$이다.

이차부등식 $(x-8a-3)(x-a^2+6)\leq0$에서

(i) $a^2-6>8a+3$일 때,

$a^2-8a-9>0$, $(a+1)(a-9)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>9$ …… ㉢

이때 주어진 이차부등식의 해는 $8a+3\leq x\leq a^2-6$

$\therefore \alpha=8a+3$, $\beta=a^2-6$

ⓘ α, β가 모두 정수이면 $\beta-\alpha=24$이므로

$(a^2-6)-(8a+3)=24$

$a^2-8a-33=0$, $(a+3)(a-11)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=11$ ($\because$ ㉢)

$a=-3$이면 $\alpha=-21$, $\beta=3$이므로 α, β는 모두 정수이다.

$a=11$이면 $\alpha=91$, $\beta=115$이므로 α, β는 모두 정수이다.

즉, $a=-3$ 또는 $a=11$일 때 주어진 조건을 만족시킨다.

ⓘⓘ α, β가 모두 정수가 아닌 실수이면 $\beta-\alpha=25$이므로

$(a^2-6)-(8a+3)=25$

$a^2-8a-34=0$ $\therefore a=4\pm5\sqrt{2}$ ($\because$ ㉢)

$a=4\pm5\sqrt{2}$이면 α, β가 모두 정수가 아닌 실수이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

ⓘ, ⓘⓘ에서 조건을 만족시키는 a의 값은

$a=-3$ 또는 $a=11$ 또는 $a=4\pm5\sqrt{2}$

(ii) $a^2-6<8a+3$일 때,

$a^2-8a-9<0$, $(a+1)(a-9)<0$

$\therefore\ -1<a<9$ ····· ㉡

이때 주어진 이차부등식의 해는 $a^2-6\le x\le 8a+3$

$\therefore\ \alpha=a^2-6$, $\beta=8a+3$

ⓘ α, β가 모두 정수이면 $\beta-\alpha=24$이므로

$(8a+3)-(a^2-6)=24$

$a^2-8a+15=0$, $(a-3)(a-5)=0$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=5$ ($\because$ ㉡)

$a=3$이면 $\alpha=3$, $\beta=27$이므로 α, β는 모두 정수이다.

$a=5$이면 $\alpha=19$, $\beta=43$이므로 α, β는 모두 정수이다.

즉, $a=3$ 또는 $a=5$일 때 주어진 조건을 만족시킨다.

ⓘⓘ α, β가 모두 정수가 아닌 실수이면 $\beta-\alpha=25$이므로

$(8a+3)-(a^2-6)=25$

$a^2-8a+16=0$, $(a-4)^2=0$ $\therefore\ a=4$

그런데 $a=4$이면 α, β가 모두 정수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

ⓘ, ⓘⓘ에서 조건을 만족시키는 a의 값은

$a=3$ 또는 $a=5$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은

$-3+11+4+5\sqrt{2}+4-5\sqrt{2}+3+5=24$

13 답 40

㈎에서 $f(x)=ax^2$ $(a\neq0)$

㈏에서 $f(x)+g(x)$는 일차식이어야 하므로

$g(x)=-ax^2+bx+c$ $(b\neq0)$로 나타낼 수 있다.

$f(x)+g(x)=bx+c$이고, 부등식 $bx+c\ge0$의 해가 $x\ge3$이므로

$b>0$, $-\frac{c}{b}=3$에서 $c=-3b$

㈐에서 함수 $f(x)-g(x)=2ax^2-bx+3b$는 $x=2$에서 최솟값을 가지므로

$a>0$, $\frac{b}{4a}=2$에서 $b=8a$

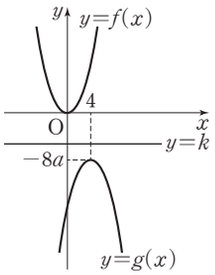
이때 $c=-3b=-24a$이므로

$g(x)=-ax^2+8ax-24a=-a(x-4)^2-8a$

$\therefore\ f(x)+g(x)=8ax-24a=8a(x-3)$

방정식 $\{f(x)-k\}\times\{g(x)-k\}=0$이 실근을 갖지 않기 위해서는 방정식 $f(x)-k=0$은 실근을 갖지 않고, 방정식 $g(x)-k=0$도 실근을 갖지 않아야 한다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나지 않고, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$도 만나지 않아야 하므로 직선 $y=k$는 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 사이에 있어야 한다.



따라서 $-8a<k<0$이고, 이를 만족시키는 정수 k의 개수가 3이므로

$-4\le-8a<-3$ $\therefore\ \frac{3}{8}<a\le\frac{1}{2}$

그러므로 $f(13)+g(13)=8a(13-3)=80a$에서

$f(13)+g(13)$의 최댓값은 $80\times\frac{1}{2}=40$

14 답 ④

이차부등식 $x^2-a^2x>0$에서 $x(x-a^2)>0$

$\therefore\ x<0$ 또는 $x>a^2$ ($\because\ a^2>0$) ····· ㉠

이차부등식 $x^2-6ax+9a^2-1\le0$에서

$x^2-6ax+(3a+1)(3a-1)\le0$

$(x-3a-1)(x-3a+1)\le0$

$\therefore\ 3a-1\le x\le3a+1$ ····· ㉡

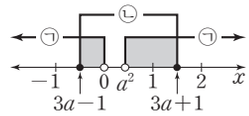
$0<a<1$에서 a^2, $3a-1$, $3a+1$ 중 적어도 하나는 정수가 되도록 하는 a의 값은 $a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

따라서 다음과 같이 a의 값의 범위를 나누어 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수를 구한다.

(i) $0<a<\frac{1}{3}$일 때,

$0<a^2<\frac{1}{9}$, $-1<3a-1<0$, $1<3a+1<2$

이때 ㉠, ㉡의 공통부분은 그림과 같다.



즉, 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 1의 1개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=\frac{1}{3}$일 때,

㉠에서 $x<0$ 또는 $x>\frac{1}{9}$

㉡에서 $0\le x\le2$

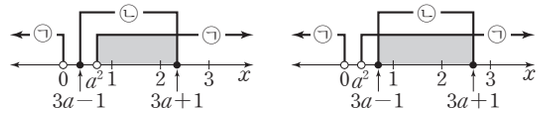
따라서 주어진 연립부등식의 해는 $\frac{1}{9}<x\le2$

즉, 정수 x는 1, 2의 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$일 때,

$\frac{1}{9}<a^2<\frac{4}{9}$, $0<3a-1<1$, $2<3a+1<3$

이때 ㉠, ㉡의 공통부분은 그림과 같다.



즉, 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 1, 2의 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $a=\frac{2}{3}$일 때,

㉠에서 $x<0$ 또는 $x>\frac{4}{9}$

㉡에서 $1\le x\le3$

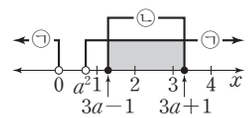
따라서 주어진 연립부등식의 해는 $1\le x\le3$

즉, 정수 x는 1, 2, 3의 3개이므로 조건을 만족시킨다.

(v) $\frac{2}{3}<a<1$일 때,

$\frac{4}{9}<a^2<1$, $1<3a-1<2$, $3<3a+1<4$

이때 ㉠, ㉡의 공통부분은 그림과 같다.



즉, 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 2, 3의 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(v)에서 조건을 만족시키는 a의 값은 $a=\frac{2}{3}$

08 경우의 수

STEP 1 핵심 문제 | 94~95쪽

01 ③	02 ④	03 44	04 138	05 20	06 ③
07 288	08 ②	09 ⑤	10 480	11 155	12 ④

01 답 ③

구하는 자연수의 개수는 1부터 100까지의 자연수의 개수에서 3 또는 5로 나누어떨어지는 자연수의 개수를 빼면 된다.

$100=3\times33+1$, $100=5\times20$, $100=15\times6+10$이므로 1부터 100까지의 자연수 중 3 또는 5로 나누어떨어지는 자연수의 개수는

$33+20-6=47$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$100-47=53$

개념 NOTE

사건 A에 대하여

$(A$인 경우의 수$)=($모든 경우의 수$)-(A$가 아닌 경우의 수$)$

02 답 ④

$432=2^2\times(2^2\times3^3)$이므로 432의 양의 약수 중 4의 배수의 개수는 $2^2\times3^3$의 양의 약수의 개수와 같다.

따라서 4의 배수의 개수는

$(2+1)\times(3+1)=12$

$432=3\times(2^4\times3^2)$이므로 432의 양의 약수 중 3의 배수의 개수는 $2^4\times3^2$의 양의 약수의 개수와 같다.

따라서 3의 배수의 개수는

$(4+1)\times(2+1)=15$

$\therefore a=12$, $b=15$

$\therefore a+b=27$

비법 NOTE

자연수 N이

$N=p^aq^br^c$ (p, q, r는 서로 다른 소수, a, b, c는 자연수)

의 꼴로 소인수분해되면 N의 양의 약수의 개수는

$(a+1)(b+1)(c+1)$

03 답 44

$(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)(a_4-4)(a_5-5)\neq0$을 만족시키려면 a_1은 2, 3, 4, 5 중에서 하나이다.

이때 $a_1=2$인 경우, 가능한 순서쌍 (a_2, a_3, a_4, a_5)는

(1, 4, 5, 3), (1, 5, 3, 4), (3, 1, 5, 4), (3, 4, 5, 1), (3, 5, 1, 4), (4, 1, 5, 3), (4, 5, 1, 3), (4, 5, 3, 1), (5, 1, 3, 4), (5, 4, 1, 3), (5, 4, 3, 1)

로 11가지이다.

같은 방법으로 a_1이 3, 4, 5인 경우에도 각각 11가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times11=44$

04 답 138

(i) 지불할 수 있는 방법의 수

100원짜리 동전을 지불하는 방법은 5가지

500원짜리 동전을 지불하는 방법은 6가지

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은 3가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는

$5\times6\times3-1=89$

$\therefore a=89$ ····· 배점 40%

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 금액은 0원, 100원, 200원, 300원, 400원의 5가지

500원짜리 동전 5개와 1000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액은 500원짜리 동전 9개로 지불할 수 있는 금액과 같다.

500원짜리 동전 9개로 지불할 수 있는 금액은 0원, 500원, 1000원, …, 4500원의 10가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$5\times10-1=49$

$\therefore b=49$ ····· 배점 50%

(i), (ii)에서 $a+b=138$ ····· 배점 10%

비법 NOTE

(1) 지불 방법의 수

각 종류의 돈을 지불하는 방법의 수를 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

(2) 지불 금액의 수

지불 방법 중 중복되는 금액이 있는 경우에는 큰 단위의 화폐를 작은 단위의 화폐로 바꾸어 생각한다.

05 답 20

세 자리의 자연수가 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 하므로 숫자 0, 2, 4, 6, 8 중에서 3개를 택할 때, 3의 배수가 되는 경우는

(0, 2, 4), (0, 4, 8), (2, 4, 6), (4, 6, 8)

(i) (0, 2, 4), (0, 4, 8)인 경우

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 가능한 세 자리의 자연수의 개수는

$2\times(2\times2!)=8$

(ii) (2, 4, 6), (4, 6, 8)인 경우

가능한 세 자리의 자연수의 개수는 $2\times3!=12$

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$8+12=20$

비법 NOTE

배수판정법

(1) 2의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 2의 배수

(2) 3의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수

(3) 4의 배수: 끝의 두 자리가 00이거나 4의 배수

(4) 5의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 5

(5) 6의 배수: 2의 배수와 3의 배수 조건을 모두 만족시키는 경우

(6) 8의 배수: 끝의 세 자리가 000이거나 8의 배수

(7) 9의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 9의 배수

06 답 ③

㈏에서 2학년 학생 4명 중에서 2명이 양 끝에 있는 의자에 앉는 경우의 수는 ${}_4P_2=4\times3=12$

이 각각에 대하여 1학년 학생이 앉을 수 있는 의자를 ①, 2학년 학생이 앉을 수 있는 의자를 ②라 할 때, 1학년 학생끼리 이웃하지 않게 나머지 4명의 학생이 의자에 앉는 경우는 다음 3가지 중에서 하나이다.

①②①②, ①②②①, ②①②①

1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명이 의자에 앉는 경우의 수는 모두 $2!\times2!=4$로 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times3\times4=144$

다른 풀이

먼저 2학년 학생 4명이 일렬로 앉은 후 1학년 학생 2명이 조건을 만족시키도록 앉는 경우를 생각하자.

2학년 학생 4명이 일렬로 앉는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

이때 2학년 학생을 ②라 하자.

②∨②∨②∨②

이 각각에 대하여 주어진 조건을 만족시키려면 1학년 학생 2명은 ∨표시된 3곳 중에서 2곳을 택하여 앉아야 하므로 1학년 학생이 앉는 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times6=144$

07 답 288

구하는 방법의 수는 6개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 방법의 수에서 두 문자 T, V 사이에 1개 이하의 문자가 있도록 나열하는 방법의 수를 뺀 것과 같다.

TRAVEL에 있는 6개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 방법의 수는

$6!=720$

(i) 두 문자 T, V 사이에 다른 문자가 없도록 나열하는 경우

두 문자 T, V를 하나의 문자로 생각하고 나머지 4개의 문자와 함께 나열하는 방법의 수는 5개를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로 $5!=120$

이때 두 문자 T, V가 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$120\times2=240$

(ii) 두 문자 T, V 사이에 1개의 문자가 있도록 나열하는 경우

두 문자 T, V 사이에 들어갈 문자를 택하는 방법의 수는 4

T, V와 그 사이에 있는 문자를 포함하여 3개의 문자를 하나의 문자로 생각하고 나머지 3개의 문자와 함께 나열하는 방법의 수는 4개를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로 $4!=24$

이때 두 문자 T, V가 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$4\times24\times2=192$

(i), (ii)에서 두 문자 T, V 사이에 1개 이하의 문자가 있도록 나열하는 방법의 수는

$240+192=432$

따라서 구하는 방법의 수는

$720-432=288$

비법 NOTE

(1) 이웃하는 것이 있는 순열의 수

① 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.

② ①의 결과와 이웃하는 것끼리 서로 자리를 바꾸는 방법의 수를 곱한다.

(2) '적어도' 조건을 포함한 순열의 수

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)

=(모든 경우의 수)−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

08 답 ②

2로 시작하는 여섯 자리의 자연수의 개수는 $5!=120$

3으로 시작하는 여섯 자리의 자연수의 개수는 $5!=120$

42로 시작하는 여섯 자리의 자연수의 개수는 $4!=24$

43으로 시작하는 여섯 자리의 자연수의 개수는 $4!=24$

452로 시작하는 여섯 자리의 자연수의 개수는 $3!=6$

453으로 시작하는 여섯 자리의 자연수의 개수는 $3!=6$

456으로 시작하는 여섯 자리의 자연수의 개수는 $3!=6$

4572로 시작하는 여섯 자리의 자연수의 개수는 $2!=2$

4573으로 시작하는 여섯 자리의 자연수의 개수는 $2!=2$

45762로 시작하는 여섯 자리의 자연수의 개수는 1

그 다음에 오는 여섯 자리의 자연수가 457632이다.

따라서 $120\times2+24\times2+6\times3+2\times2+1+1=312$이므로 457632는 312번째 수이다.

09 답 ⑤

1□1□1□1□1□1□의 빈자리 중 3곳에 0을 넣으면 0끼리는 어느 것도 이웃하지 않는 아홉 자리의 자연수를 만들 수 있다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 6개의 빈자리 중 0이 들어가는 3개의 자리를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

비법 NOTE

이웃하지 않는 경우의 순열의 수

(1) 이웃해도 상관없는 것을 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.

(2) (1)에서 나열한 것 사이사이와 양 끝의 자리에 이웃하지 않는 것을 나열하는 방법의 수를 구하여 곱한다.

10 답 480

같은 알파벳의 대문자와 소문자가 적혀 있는 카드를 택하는 경우의 수는 6

같은 알파벳이 적혀 있는 2장의 카드를 제외하고 서로 다른 알파벳 4종류를 택하는 경우의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$

이때 각 카드에 적혀 있는 알파벳은 각각 대문자, 소문자의 2가지가 있으므로 그 경우의 수는

$2\times2\times2\times2=16$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times5\times16=480$

11 답 155

전체에서 4개를 택하는 경우의 수에서 사각형을 만들 수 없는 경우의 수를 구하여 빼면 만들 수 있는 사각형의 개수를 구할 수 있다.

…… 배점 30%

(i) 전체 10개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$ …… 배점 20%

(ii) 지름 위의 5개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$ …… 배점 20%

(iii) 지름 위의 5개의 점 중에서 3개를 포함하여 점 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3\times{}_5C_1=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times5=50$$ …… 배점 20%

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$210-5-50=155$ …… 배점 10%

다른 풀이

(i) 사각형의 4개의 꼭짓점 중 2개가 지름 위의 점인 경우

지름 위의 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

지름의 양 끝점을 제외한 호 위의 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$10\times10=100$ …… 배점 30%

(ii) 사각형의 4개의 꼭짓점 중 1개가 지름 위의 점인 경우

지름 위의 5개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$

지름의 양 끝점을 제외한 호 위의 5개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$5\times10=50$ …… 배점 30%

(iii) 사각형의 4개의 꼭짓점 중 지름 위의 점이 하나도 없는 경우

사각형의 개수는 지름의 양 끝점을 제외한 호 위의 5개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$ …… 배점 30%

(i), (ii), (iii)에서 구하는 사각형의 개수는

$100+50+5=155$ …… 배점 10%

12 답 ④

어느 동아리의 부원 7명을 2명, 2명, 3명의 3개 조로 나누는 방법의 수는

$${}_7C_2\times{}_5C_2\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=\frac{7\times6}{2\times1}\times\frac{5\times4}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2}$$

$$=21\times10\times1\times\frac{1}{2}$$

$$=105$$

3개의 조를 서로 다른 3곳의 체험 학습 장소에 배정하는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$105\times6=630$

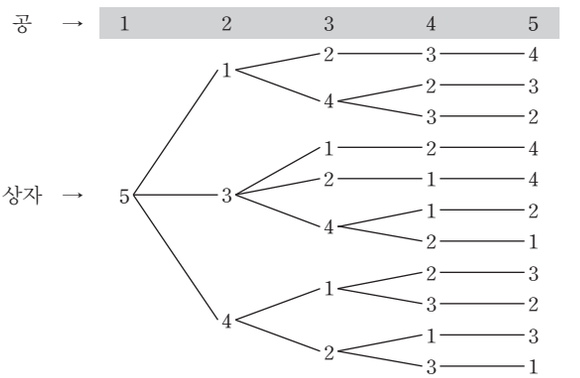
STEP 2 고난도 문제 | 96~100쪽

01 11	02 ③	03 24	04 ⑤	05 6	06 ③
07 ④	08 ①	09 ①	10 240	11 264	12 ④
13 336	14 200	15 450	16 9	17 16	18 246
19 210	20 ④	21 2016	22 194	23 1080	24 312
25 762					

01 답 11

각 상자에 공이 1개씩 들어가고 1이 적혀 있는 공은 5가 적혀 있는 상자에 넣으므로 (나)에서 2가 적혀 있는 공은 1 또는 3 또는 4가 적혀 있는 상자에 넣어야 한다.

따라서 조건을 만족시키도록 공을 상자에 넣는 방법을 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 11이다.

02 답 ③

넓이가 6인 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 a, b라 하자.

가능한 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$

(i) $(1, 6)$인 경우는 존재하지 않는다.

(ii) $(2, 3)$인 경우의 수는 $6\times3=18$

(iii) $(3, 2)$인 경우의 수는 $5\times4=20$

(iv) $(6, 1)$인 경우의 수는 $2\times5=10$

(i)~(iv)에서 구하는 직사각형의 개수는

$18+20+10=48$

03 답 24

a, b는 주사위를 던져서 나오는 눈의 수이므로 6 이하의 자연수이다.

이차방정식 $x^2+4\sqrt{ab+1}x+(a+b)^2=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2\sqrt{ab+1})^2-(a+b)^2\geq0$$

$$4(ab+1)-a^2-2ab-b^2\geq0$$

$$(a-b)^2\leq4,\ -2\leq a-b\leq2$$

$$\therefore\ |a-b|\leq2$$

(i) $|a-b|=0$, 즉 $a=b$인 경우

순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, …, $(6, 6)$

의 6가지

(ii) $|a-b|=1$인 경우

순서쌍 (a, b)는

$(1, 2), (2, 3), \cdots, (5, 6), (6, 5), \cdots, (3, 2), (2, 1)$

의 10가지

(iii) $|a-b|=2$인 경우

순서쌍 (a, b)는

$(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (6, 4), (5, 3), (4, 2), (3, 1)$

의 8가지

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$6+10+8=24$

04 답 ⑤

(i) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우

A와 C에 칠하는 방법의 수는 5

B에 칠하는 방법의 수는 A에 칠한 색을 제외한 4

D에 칠하는 방법의 수는 A에 칠한 색을 제외한 4

E에 칠하는 방법의 수는 A, D에 칠한 색을 제외한 3

따라서 칠하는 방법의 수는

$5\times4\times4\times3=240$

(ii) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠하는 방법의 수는 5

C에 칠하는 방법의 수는 A에 칠한 색을 제외한 4

B에 칠하는 방법의 수는 A, C에 칠한 색을 제외한 3

D에 칠하는 방법의 수는 A, C에 칠한 색을 제외한 3

E에 칠하는 방법의 수는 A, C, D에 칠한 색을 제외한 2

따라서 칠하는 방법의 수는

$5\times4\times3\times3\times2=360$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$240+360=600$

비법 NOTE

나누어진 영역에 색을 칠할 때 인접한 영역에 같은 색을 칠하지 않는 경우

(1) 문제의 조건에 따라 같은 색을 중복하여 사용할 수 있는 경우와 사용할 수 없는 경우를 구분하여 경우의 수를 구한다.

(2) 가운데 또는 가장 많은 영역과 인접한 영역에 색을 칠하는 경우의 수를 먼저 구한 후 나머지 영역에 색을 칠하는 경우의 수를 구한다.

05 답 6

B 지점과 C 지점 사이에 추가해야 하는 도로의 개수를 a라 하자.

(i) A → B → D로 가는 방법의 수는 $4\times3=12$

(ii) A → C → D로 가는 방법의 수는 $3\times2=6$

(iii) A → B → C → D로 가는 방법의 수는 $4\times a\times2=8a$

(iv) A → C → B → D로 가는 방법의 수는 $3\times a\times3=9a$

(i)~(iv)에서 A 지점에서 출발하여 D 지점으로 가는 방법의 수는

$12+6+8a+9a=17a+18$

따라서 $17a+18=120$이므로

$17a=102 \quad \therefore a=6$

비법 NOTE

도로망을 따라 이동하는 방법의 수를 구하는 경우

(1) 같은 경로에 여러 가지 길이 있는 경우는 곱의 법칙을 이용한다.

(2) 경로가 다른 경우는 합의 법칙을 이용한다.

06 답 ③

(i) A → C → A로 이동한 경우

모든 방법의 수는 $2\times2=4$

이동한 거리의 합이 200 km보다 큰 경우를 거리의 합으로 나타내면

$110+110=220$

의 1가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는 $4-1=3$

(ii) A → B → C → B → A로 이동한 경우

모든 방법의 수는 $3\times2\times2\times3=36$

이동한 거리의 합이 200 km보다 큰 경우를 거리의 합으로 나타내면

$25+70+70+40=205$,

$35+70+70+35=210$,

$35+70+70+40=215$,

$40+70+70+25=205$,

$40+70+70+35=215$,

$40+70+70+40=220$

의 6가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는 $36-6=30$

(iii) A → B → C → A 또는 A → C → B → A로 이동한 경우

모든 방법의 수는 $3\times2\times2+2\times2\times3=24$

이동한 거리의 합이 200 km보다 큰 경우를 거리의 합으로 나타내면

$25+70+110=205$, $35+70+110=215$, $40+70+110=220$,

$110+70+25=205$, $110+70+35=215$, $110+70+40=220$

의 6가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는 $24-6=18$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$3+30+18=51$

idea

07 답 ④

$k=1, 2, 3, \cdots, 9$일 때, k번째의 수를 a_k라 하자.

$a_9=k\,(1\le k\le9)$일 때의 경우의 수를 각각 생각하자.

(i) $a_9=9$일 때,

$a_k=k\,(1\le k\le8)$이므로 경우의 수는 1

(ii) $a_9=8$일 때,

$a_8=9$, $a_k=k\,(1\le k\le7)$이므로 경우의 수는 1

(iii) $a_9=7$일 때,

가능한 a_8, a_7의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

a_8	a_7
9	8
8	9

이때 $a_k=k\,(1\le k\le6)$이므로 경우의 수는 2

(iv) $a_9=6$일 때,

가능한 a_8, a_7, a_6의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

a_8	a_7	a_6
9	8	7
	7	8
8	9	7
	7	9

이때 $a_k=k\,(1\le k\le5)$이므로 경우의 수는 $2^2=4$

$a_8\ge8$이어야 하는데 $a_9=9$이므로 $a_8=8$이다.
$k=1, 2, \cdots, 7$일 때도 마찬가지로 생각할 수 있다.

(v) $a_9=5$일 때,

가능한 a_8, a_7, a_6, a_5의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

a_8	a_7	a_6	a_5
9	8	7	6
		6	7
	7	8	6
		6	8
8	9	7	6
		6	7
	7	9	6
		6	9

이때 $a_k=k\,(1\le k\le 4)$이므로 경우의 수는 $2^3=8$

(i)~(v)와 같은 방법으로 $a_9=k\,(1\le k\le 4)$일 때의 경우의 수를 구하면 2^{8-k}

따라서 구하는 경우의 수는 $1+1+2+2^2+\cdots+2^7=256$

다른 풀이

k번째에 올 수 있는 수의 가짓수를 구하면

8번째 ➡ 8, 9이므로 2가지

7번째 ➡ 7, 8, 9 중에서 8번째 수를 제외한 2가지

6번째 ➡ 6, 7, 8, 9 중에서 8번째, 7번째 수를 제외한 2가지

⋮

1번째 ➡ 1, 2, 3, …, 9 중에서 8번째, 7번째, …, 2번째 수를 제외한 2가지

9번째 ➡ 마지막 남은 수 1가지

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times2\times2\times\cdots\times2\times1=2^8=256$

08 답 ①

㈎에서 네 자리의 자연수에 0을 사용한 횟수는 한 번 또는 두 번 또는 세 번이다.

(i) 0을 한 번만 사용한 경우

□0□□, □□0□, □□□0에서 □에 들어갈 숫자를 정하는 경우의 수는 각각 ${}_5P_3=5\times4\times3=60$이므로 구하는 경우의 수는

$60\times3=180$

(ii) 0을 두 번 사용한 경우

□00□, □0□0, □□00에서 □에 들어갈 숫자를 정하는 경우의 수는 각각 ${}_5P_2=5\times4=20$이므로 구하는 경우의 수는

$20\times3=60$

(iii) 0을 세 번 사용한 경우

□000에서 □에 들어갈 숫자를 정하는 경우의 수는 5

(i), (ii), (iii)에서 구하는 네 자리의 자연수의 개수는

$180+60+5=245$

09 답 ①

둥근 의자를 ○, 사각 의자를 □라 하자.

(i) 2학년 학생이 ○②○②○□와 같이 앉는 경우

2학년 학생이 2개의 사각 의자에 앉는 경우의 수는 ${}_2P_2=2$

ⓘ 2학년 학생이 앉지 않은 사각 의자에 1학년 학생이 앉는다면 그 의자와 이웃한 1개의 둥근 의자에는 3학년 학생만 앉아야 하므로 경우의 수는 $2\times2\times2!=8$

ⓘⓘ 2학년 학생이 앉지 않은 사각 의자에 3학년 학생이 앉는다면 그 의자와 이웃한 1개의 둥근 의자에는 1학년 학생만 앉아야 하므로 경우의 수는 $2\times2\times2!=8$

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times(8+8)=32$

(ii) 2학년 학생이 ○②○□○②와 같이 앉는 경우

2학년 학생이 2개의 사각 의자에 앉는 경우의 수는 ${}_2P_2=2$

ⓘ 2학년 학생이 앉지 않은 사각 의자에 1학년 학생이 앉는다면 그 의자와 이웃한 2개의 둥근 의자에는 3학년 학생만 앉아야 하므로 경우의 수는 $2!\times2!=4$

ⓘⓘ 2학년 학생이 앉지 않은 사각 의자에 3학년 학생이 앉는다면 그 의자와 이웃한 2개의 둥근 의자에는 1학년 학생만 앉아야 하므로 경우의 수는 $2!\times2!=4$

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times(4+4)=16$

(iii) 2학년 학생이 ○□○②○②와 같이 앉는 경우

(ii)의 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는 16이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $32+16+16=64$

다른 풀이

사각 의자 3개 중 2개의 의자에 2학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_3P_2=3\times2=6$

나머지 의자 4개에 1학년 학생 2명과 3학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_4P_4=4!=24$

㈎를 만족시키는 경우의 수는 $6\times24=144$

이 중 1학년 학생 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우는 아래와 같이 다섯 가지이다.

○②①①○②, ○②○①①②, ①①○②○②, ○①①②○②, ○②○②①①

이 각각에 대하여 1, 2, 3학년 학생들이 앉는 경우의 수는

${}_2P_2\times{}_2P_2\times{}_2P_2=2\times2\times2=8$

이때 1학년 학생 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우의 수는 $5\times8=40$

마찬가지로 3학년 학생 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우의 수는 40

따라서 ㈎, ㈏를 만족시키는 경우의 수는

$144-40\times2=144-80=64$

10 답 240

(i) 한 사람에게 사탕 2개를 모두 주는 경우

사탕 2개를 받을 한 사람을 정하는 방법의 수는 4

이 각각에 대하여 서로 다른 과자 4개 중 3개를 사탕을 받지 못한 세 사람에게 각각 1개씩 나누어 주는 방법의 수는

${}_4P_3=4\times3\times2=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$4\times24=96$ ····· 배점 40%

(ii) 두 사람에게 사탕을 1개씩 나누어 주는 경우

서로 다른 사탕 2개를 네 사람 중 두 사람에게 각각 1개씩 나누어 주는 방법의 수는

${}_4P_2=4\times3=12$

이 각각에 대하여 서로 다른 과자 4개 중 2개를 사탕을 받지 못한 두 사람에게 각각 1개씩 나누어 주는 방법의 수는

${}_4P_2=4\times3=12$

따라서 구하는 방법의 수는

$12\times12=144$ ····· 배점 40%

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $96+144=240$ ····· 배점 20%

11 답 264

세 명의 학생이 1교시에 서로 다른 진로특강을 택하여 듣는 방법의 수는
${}_4P_3=4\times3\times2=24$
세 명의 학생을 A, B, C라 하고, 서로 다른 4가지 종류의 진로특강을 a, b, c, d라 하자.
이때 세 명의 학생 A, B, C가 1교시에 택한 진로특강을 각각 a, b, c라 하면 2교시에 각자 1교시에 택한 것과 다른 진로특강을 택하여 듣는 방법은 표와 같이 11가지이다.

학생	A	B	C
1교시	a	b	c
2교시	b	a	d
		c	a
			d
		d	a
	c	a	b
			d
		d	a
			b
	d	a	b
		c	a
			b

→ 2교시에도 세 학생 모두 서로 다른 진로특강을 택해야 한다.

따라서 구하는 방법의 수는
$24\times11=264$

12 답 ④

$M=20$이려면 4와 5가 이웃해야 하고, 이때 6은 4, 5와 모두 이웃하지 않아야 한다.
(i) 4와 5가 이웃하는 경우
4와 5를 한 숫자로 생각하여 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!=120$
이 각각에 대하여 4와 5의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$120\times2=240$
(ii) 4와 5가 이웃하고 6이 4 또는 5에 이웃하는 경우
6, 4, 5 또는 6, 5, 4 또는 4, 5, 6 또는 5, 4, 6의 순서대로 나열하는 경우이므로 그 경우의 수는 4
이 각각에 대하여 3개의 숫자 4와 5와 6을 한 숫자로 생각하여 4개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$4\times24=96$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$240-96=144$

13 답 336

9개의 숫자 중에서 3개를 택하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
${}_9P_3=9\times8\times7=504$
1부터 9까지의 자연수 중에서 두 수의 합이 9가 되는 경우는 (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5)이므로 이 중 한 경우를 택하고 나머지 7개의 숫자 중 하나를 택하여 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$4\times7\times3!=4\times7\times6=168$
따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는 $504-168=336$

다른 풀이

조건을 만족시키는 세 자리 자연수에 대하여
(i) 9가 포함된 경우
백의 자리의 숫자가 9이면 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1부터 8까지의 8가지
이때 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리의 숫자인 9, 십의 자리의 숫자, 9−(십의 자리의 숫자)를 제외한 6가지이다.
십의 자리의 숫자 또는 일의 자리의 숫자가 9인 경우의 수도 같으므로 구하는 세 자리 자연수의 개수는 $8\times6\times3=144$
(ii) 9가 포함되지 않는 경우
백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1부터 8까지의 8가지
이때 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 9, 백의 자리의 숫자, 9−(백의 자리의 숫자)를 제외한 6가지이다.
또 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 9, 백의 자리의 숫자, 9−(백의 자리의 숫자), 십의 자리의 숫자, 9−(십의 자리의 숫자)를 제외한 4가지이다.
따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는 $8\times6\times4=192$
(i), (ii)에서 구하는 세 자리 자연수의 개수는
$144+192=336$

14 답 200

12개의 점 중에서 서로 다른 3개의 점을 택하는 경우의 수는
${}_{12}C_3=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$
이때 3개의 점이 한 직선 위에 있으면 삼각형이 될 수 없으므로 모든 경우에서 다음의 경우는 제외한다.
(i) 가로로 놓인 4개의 점 중에서 서로 다른 3개의 점을 택하는 경우
${}_4C_3\times3={}_4C_1\times3=4\times3=12$
(ii) 세로로 놓인 3개의 점 중에서 서로 다른 3개의 점을 택하는 경우
${}_3C_3\times4=1\times4=4$
(iii) 대각선 방향으로 놓인 3개의 점 중에서 서로 다른 3개의 점을 택하는 경우
${}_3C_3\times4=1\times4=4$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $12+4+4=20$
따라서 구하는 삼각형의 개수는 $220-20=200$

삐쁩 NOTE

직선 또는 삼각형의 개수
(1) 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 n개의 점 중에서 두 점을 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는
${}_nC_2$
(2) 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 n개의 점 중에서 세 점을 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는
${}_nC_3$

15 답 450

(i) 빨간색 공을 바구니에 넣는 경우의 수
㈏에서 빨간색 공을 한 바구니에 2개 이상 넣을 수 없으므로 서로 다른 3개의 바구니에 빨간색 공이 하나씩 들어가야 한다.
따라서 빨간색 공을 바구니에 넣는 경우의 수는
${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$ → 5개의 바구니에서 빨간색 공을 넣을 3개의 바구니를 택하는 경우의 수와 같다.

(ii) 파란색 공을 바구니에 넣는 경우의 수

(가)에서 모든 바구니에 공이 1개 이상 들어가야 하므로 빨간색 공을 넣지 않은 2개의 빈 바구니에 파란색 공을 각각 1개씩 넣고, 남은 4개의 파란색 공을 전체 5개의 바구니에 각각 2개 이하로 넣으면 된다.

ⓘ 2개의 바구니에 파란색 공을 2개씩 넣는 경우

5개의 바구니에서 파란색 공을 넣을 2개의 바구니를 택하는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

ⓘⓘ 3개의 바구니에 파란색 공을 2개, 1개, 1개 넣는 경우

5개의 바구니에서 파란색 공 2개를 넣을 바구니 1개를 택하고, 남은 4개의 바구니에서 파란색 공 1개씩을 넣을 바구니 2개를 택하는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_5C_1\times{}_4C_2=5\times\frac{4\times3}{2\times1}=30$$

ⓘⓘⓘ 4개의 바구니에 파란색 공을 1개씩 넣는 경우의 수는

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$

ⓘ, ⓘⓘ, ⓘⓘⓘ에서 파란색 공을 바구니에 넣는 경우의 수는

$10+30+5=45$

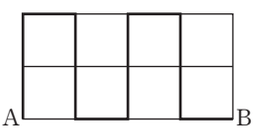
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10\times45=450$

16 답 9

A 지점에서 출발하여 B 지점에 도착할 때, 가로 방향으로 이동한 길이의 합이 4이고 전체 이동한 길이가 12가 되려면 세로 방향으로 이동한 길이의 합이 8이어야 한다.

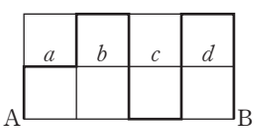
(i) 길이가 2인 세로 방향의 도로 4개를 지나가는 경우



길이가 2인 세로 방향의 도로 4개를 지나가는 경우의 수는 그림과 같이 길이가 2인 세로 방향의 도로 5개 중 4개를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$

(ii) 길이가 2인 세로 방향의 도로 3개를 지나가는 경우



길이가 2인 세로 방향의 도로 3개를 지나가는 경우의 수는 그림과 같이 가로 방향의 도로 a, b, c, d 중 1개를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_1=4$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$5+4=9$

17 답 16

서로 다른 네 종류의 인형이 각각 2개씩 있으므로 5개의 인형을 선택하려면 세 종류 이상의 인형을 선택해야 한다.

(i) 서로 다른 세 종류의 인형을 각각 1개, 2개, 2개 선택하는 경우

서로 다른 네 종류의 인형 중에서 세 종류의 인형을 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_3={}_4C_1=4$

이 각각에 대하여 세 종류의 인형 중에서 1개를 선택하는 인형의 종류를 정하면 남은 두 종류의 인형은 각각 2개씩 선택하면 되므로 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는 $4\times3=12$

(ii) 서로 다른 네 종류의 인형을 각각 1개, 1개, 1개, 2개 선택하는 경우

서로 다른 네 종류의 인형 중에서 2개를 선택하는 인형의 종류를 정하면 남은 세 종류의 인형은 각각 1개씩 선택하면 되므로 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $12+4=16$

18 답 246

(i) $a<b<c=d$를 만족시키는 경우

$a\neq0$이므로 네 자리의 자연수는 9 이하의 자연수에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 a, b, $c=d$의 값에 대응시키면 된다.

따라서 그 경우의 수는

$${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84 \qquad \therefore\ m=84$$ ····· 배점 40%

(ii) $a\geq b>c>d$를 만족시키는 경우

ⓘ $a>b>c>d$일 때,

네 자리의 자연수는 9 이하의 음이 아닌 정수에서 서로 다른 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 d, c, b, a의 값에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

$${}_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

ⓘⓘ $a=b>c>d$일 때,

네 자리의 자연수는 9 이하의 음이 아닌 정수에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 d, c, $b=a$의 값에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

$${}_{10}C_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$$

ⓘ, ⓘⓘ에서 $n=210+120=330$ ····· 배점 50%

(i), (ii)에서 $n-m=246$ ····· 배점 10%

19 답 210

(i) 인원이 2명인 조에 A가 속하고, 인원이 3명인 조에 B가 속하는 경우

A와 같은 조가 될 한 명을 정하는 경우의 수는 6

나머지 5명을 B와 같은 조가 될 2명과 나머지 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_2\times{}_3C_3=\frac{5\times4}{2\times1}\times1=10$$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times10=60$

(ii) 인원이 3명인 조에 A가 속하고, 인원이 2명인 조에 B가 속하는 경우

(i)의 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는 60이다.

(iii) A와 B가 각각 인원이 3명인 서로 다른 조에 속하는 경우

A, B를 제외한 나머지 6명을 A와 같은 조가 될 2명, B와 같은 조가 될 2명, 나머지 2명으로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2=\frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1=15\times6\times1=90$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$60+60+90=210$

다른 풀이

8명의 학생을 2명, 3명, 3명의 3개 조로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_2\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=\frac{8\times7}{2\times1}\times\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2}$$

$$=280$$

A와 B가 같은 조에 속하는 경우는 A와 B가 인원이 2명인 조 또는 3명인 조에 속하는 경우이다.

(i) A와 B가 인원이 2명인 조에 속하는 경우

A, B를 제외한 6명을 3명, 3명의 2개 조로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2}$$

$$=10$$

(ii) A와 B가 인원이 3명인 조에 속하는 경우

A와 B가 속한 조의 나머지 한 명을 정하고, 나머지 5명을 2명, 3명의 2개 조로 나누는 경우의 수는

$$6\times{}_5C_2\times{}_3C_3=6\times\frac{5\times4}{2\times1}\times1$$

$$=60$$

(i), (ii)에서 A와 B가 같은 조에 속하는 경우의 수는

$10+60=70$

따라서 구하는 경우의 수는

$280-70=210$

20 답 ④

구하는 방법의 수는 6개의 팀을 3개, 3개의 두 조로 나눈 후 각각을 2개, 1개의 두 조로 다시 나누는 방법의 수와 같다.

(i) 6개의 팀을 3개, 3개의 두 조로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2}$$

$$=10$$

(ii) 3개의 팀을 2개, 1개의 두 조로 나누는 방법의 수는

$${}_3C_2\times{}_1C_1={}_3C_1\times1$$

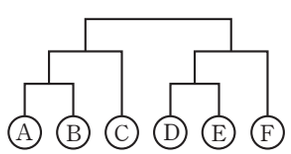
$$=3\times1=3$$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$10\times3\times3=90$

다른 풀이

그림과 같이 주어진 대진표에서 배정받을 수 있는 6개의 자리를 왼쪽에서부터 각각 A, B, C, D, E, F라 하자.



6개의 팀을 대진표의 6개의 자리에 배정하는 방법의 수는 6!

이때 두 순서쌍 (A, B), (D, E)에서 순서쌍 내에 속한 두 팀의 자리를 바꾸거나 두 순서쌍 (A, B, C), (D, E, F)에서 순서쌍 전체를 서로 바꾸어도 대진표는 같다.

↳ 중복되는 경우의 수는 $2\times2\times2=8$

따라서 각각의 경우에 대하여 중복되는 경우가 8가지 있으므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{8}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{8}$$

$$=90$$

21 답 2016

같은 숫자끼리 같은 모양으로 나타내면

□, □, ○, ○, ○ 또는 □, □, ○, ○, ◇라 할 수 있다.

(i) □, □, ○, ○, ○인 경우

같은 숫자인 공 2개를 꺼내는 경우의 수는 4개의 숫자에서 1개를 택하고 4개의 색깔 중 2개의 색깔을 택하는 방법의 수와 같으므로

$${}_4C_1\times{}_4C_2=4\times\frac{4\times3}{2\times1}=24$$

같은 숫자인 공 3개를 꺼내는 경우의 수는 나머지 3개의 숫자에서 1개를 택하고 4개의 색깔 중 3개의 색깔을 택하는 방법의 수와 같으므로

$${}_3C_1\times{}_4C_3={}_3C_1\times{}_4C_1=3\times4=12$$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times12=288$

(ii) □, □, ○, ○, ◇인 경우

4개의 숫자 중 2개씩 꺼낼 숫자 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

이 각각에 대하여 같은 숫자의 공(□, □)을 꺼내는 경우의 수는 4개의 색깔 중 2개의 색깔을 택하는 방법의 수와 같으므로

$${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

또 다른 같은 숫자의 공(○, ○)을 꺼내는 경우의 수는 4개의 색깔 중 2개의 색깔을 택하는 방법의 수와 같으므로

$${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

그리고 나머지 하나의 공(◇)을 꺼내는 경우의 수는 앞에 뽑은 공과 숫자가 다른 나머지 8개 중 1개를 택하는 방법의 수와 같으므로

$${}_8C_1=8$$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times6\times6\times8=1728$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$288+1728=2016$

22 답 194

(i) 모두 서로 다른 숫자 카드를 택하는 경우

5개의 숫자 중에서 4개의 숫자를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는 ${}_5P_4=5\times4\times3\times2=120$

(ii) 4가 적힌 카드가 2장, 나머지는 서로 다른 숫자 카드인 경우

우선 1, 2, 3, 5가 적힌 카드 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는

${}_4P_2=4\times3=12$

이 각각에 대하여 나열한 숫자 카드를 □라 하면 ∨표시된 곳 중 2곳을 골라 4가 적힌 카드를 나열할 수 있다.

∨□∨□∨

즉, 4가 적힌 카드를 나열하는 방법의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

따라서 구하는 방법의 수는 $12\times3=36$

(iii) 5가 적힌 카드가 2장, 나머지는 서로 다른 숫자 카드인 경우

(ii)의 방법의 수와 같으므로 구하는 방법의 수는 36이다.

(iv) 4가 적힌 카드 2장, 5가 적힌 카드 2장을 택하는 경우

4545, 5454로 2가지이다.

(i)~(iv)에서 구하는 방법의 수는

$120+36+36+2=194$

idea

23 답 1080

7개의 숫자 중에서 서로 다른 3개를 택한 후 이를 이용하여 네 자리의 자연수를 만들어 보자.

이때 0은 천의 자리에 올 수 없으므로 0을 택한 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 구한다.

(i) 0을 택하여 2번 사용한 경우

1부터 6까지의 6개의 숫자 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

택한 2개의 숫자 중에서 하나를 택하여 천의 자리에 배열하는 경우의 수는 ${}_2P_1=2$

남은 1개의 숫자와 0을 배열하는 경우의 수는 3

따라서 구하는 네 자리의 자연수의 개수는 $15\times2\times3=90$

(ii) 0을 택하여 1번 사용한 경우

1부터 6까지의 6개의 숫자 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

택한 2개의 숫자를 a, b라 하면 a를 2번 또는 b를 2번 사용하면 된다.

ⓘ a를 2번 사용한 경우

천의 자리에 a를 배치하고 남은 숫자를 배열하는 경우의 수는 $3!=6$

천의 자리에 b를 배치하고 남은 숫자를 배열하는 경우의 수는 3

따라서 구하는 경우의 수는 $6+3=9$

ⓘⓘ b를 2번 사용한 경우

ⓘ의 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는 9이다.

따라서 구하는 네 자리의 자연수의 개수는

$15\times9\times2=270$

(iii) 0을 택하지 않은 경우

1부터 6까지의 6개의 숫자 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

택한 3개의 숫자를 a, b, c라 하면 a를 2번 또는 b를 2번 또는 c를 2번 사용하면 된다.

ⓘ a를 2번 사용한 경우

천의 자리에 a를 배치하고 남은 숫자를 배열하는 경우의 수는 $3!=6$

천의 자리에 b를 배치하고 남은 숫자를 배열하는 경우의 수는 3

천의 자리에 c를 배치하고 남은 숫자를 배열하는 경우의 수는 3

따라서 구하는 경우의 수는 $6+3+3=12$

ⓘⓘ b를 2번 또는 c를 2번 사용한 경우

ⓘ의 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는 각각 12이다.

따라서 구하는 네 자리의 자연수의 개수는

$20\times12\times3=720$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 네 자리의 자연수의 개수는

$90+270+720=1080$

24 답 312

여행할 7개의 도시를 서울, 대전, 대구, A, B, C, D라 하자.

(i) 서울, 대전을 포함하여 여행하는 경우

대구를 여행할 수 없으므로 A, B, C, D 중에서 여행할 도시 2개를 택한 후 4개 도시의 여행 순서를 정하는 경우의 수는

$${}_4C_2\times4!=\frac{4\times3}{2\times1}\times24=144$$

(ii) 대전, 대구를 포함하여 여행하는 경우

서울을 여행할 수 없으므로 A, B, C, D 중에서 여행할 도시 2개를 택한 후 4개 도시의 여행 순서를 정하면 된다.

이때 (나)에 의해 대구보다 대전을 먼저 여행해야 한다.

만약 A, B를 택한 경우 가능한 여행 순서는 다음과 같이 12가지이다.

(대전, 대구, A, B), (대전, 대구, B, A), (대전, A, 대구, B), (대전, B, 대구, A), (대전, A, B, 대구), (대전, B, A, 대구), (A, 대전, 대구, B), (B, 대전, 대구, A), (A, 대전, B, 대구), (B, 대전, A, 대구), (A, B, 대전, 대구), (B, A, 대전, 대구)

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_4C_2\times12=\frac{4\times3}{2\times1}\times12$$

$$=72$$

(iii) 서울, 대구를 여행하지 않는 경우

A, B, C, D 중에서 여행할 도시 3개를 택한 후 4개 도시의 여행 순서를 정하는 경우의 수는

$${}_4C_3\times4!={}_4C_1\times24$$

$$=4\times24=96$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$144+72+96=312$

25 답 762

서로 다른 4종류의 컵라면을 ①, ②, ③, ④라 하자.

(i) A와 B가 구매한 같은 종류의 컵라면이 1개인 경우

A와 B가 같은 1개의 컵라면을 택하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

서로 다른 컵라면을 각각 1개씩 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

예를 들어 A가 택한 컵라면이 ①, ②이고, B가 택한 컵라면이 ①, ③이라면 C가 택하는 컵라면 종류에 따라 D가 택하는 경우의 수는 다음과 같다.

C	①, ②	①, ③	①, ④	②, ③	②, ④	③, ④
D	3가지	3가지	3가지	6가지	6가지	6가지

A와 B가 컵라면을 택할 수 있는 각각의 경우에 대하여 C와 D가 컵라면을 택하는 경우의 수는 항상 27가지이므로 구하는 경우의 수는

$4\times6\times27=648$

(ii) A와 B가 구매한 같은 종류의 컵라면이 2개인 경우

A와 B가 같은 2개의 컵라면을 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

예를 들어 A와 B가 택한 컵라면이 ①, ②라면 C가 택하는 컵라면 종류에 따라 D가 택하는 경우의 수는 다음과 같다.

C	①, ②	①, ③	①, ④	②, ③	②, ④	③, ④
D	1가지	3가지	3가지	3가지	3가지	6가지

A와 B가 컵라면을 택할 수 있는 각각의 경우에 대하여 C와 D가 컵라면을 택하는 경우의 수는 항상 19가지이므로 구하는 경우의 수는

$6\times19=114$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$648+114=762$

STEP 3 최고난도 문제 | 101~103쪽

01 285 02 130 03 2016 04 729 05 ② 06 56
07 45 08 2760 09 960 10 528

01 답 285

1단계 2끼리 서로 이웃하지 않는 경우 파악하기

2가 적혀 있는 카드가 없거나 1장이면 2끼리 서로 이웃하는 경우가 없으므로 2가 적혀 있는 카드가 1장 이하인 경우와 2장, 3장인 경우로 나누어 생각한다.

2단계 포함된 2의 개수에 따라 자연수의 개수 구하기

(i) 2가 적혀 있는 카드가 1장 이하인 경우

0, 1, 2, 3, 4, 5 중에서 5장의 카드를 택하여 5의 배수인 다섯 자리의 자연수를 만들 때,

ⓘ □□□□0인 경우의 수는

${}_5P_4=5\times4\times3\times2=120$

ⓘⓘ □□□□5인 경우의 수는

$4\times{}_4P_3=4\times(4\times3\times2)=96$

ⓘ, ⓘⓘ에서 구하는 다섯 자리의 자연수의 개수는 $120+96=216$

(ii) 2가 적혀 있는 카드가 2장인 경우

2가 적혀 있는 카드 2장과 0, 1, 3, 4, 5 중에서 3장의 카드를 택하여 5의 배수인 다섯 자리의 자연수를 만들 때,

ⓘ 2□2□0, 2□□20, □2□20인 경우의 수는

$3\times{}_4P_2=3\times(4\times3)=36$

ⓘⓘ 2□2□5, 2□□25, □2□25인 경우의 수는

$2\times{}_4P_2+3\times3=2\times(4\times3)+9=33$

ⓘ, ⓘⓘ에서 구하는 다섯 자리의 자연수의 개수는 $36+33=69$

(iii) 2가 적혀 있는 카드가 3장인 경우

5의 배수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이므로 다섯 자리의 자연수 중에서 2가 3개 있으면 2끼리 서로 이웃하게 되어 조건을 만족시키지 않는다.

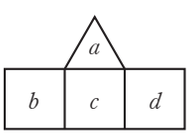
3단계 조건을 만족시키는 다섯 자리의 자연수의 개수 구하기

(i), (ii), (iii)에서 구하는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$216+69=285$

02 답 130

1단계 조건을 만족시키는 경우 파악하기



그림과 같이 정삼각형에 적힌 수를 a, 정사각형에 적힌 수를 왼쪽부터 차례대로 b, c, d라 하자.

㈎에서 $a>b$, $a>c$, $a>d$

㈏에서 $b\neq c$, $c\neq d$

2단계 양 끝에 있는 정사각형 내부의 숫자가 동일한지에 따른 경우의 수 구하기

(i) $b\neq d$인 경우

a, b, c, d가 서로 다르므로 6 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 택하는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

이 각각에 대하여 택한 4개의 수 중에서 가장 큰 수를 a라 하고, 나머지 3개의 수를 b, c, d로 정하면 되므로 이 경우의 수는

$1\times3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $15\times6=90$

(ii) $b=d$인 경우

$a>b=d$, $a>c$이므로 a, b, c, d 중에서 서로 다른 수의 개수는 3이고,

6 이하의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 수를 택하는 경우의 수는

${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

이 각각에 대하여 택한 3개의 수 중에서 가장 큰 수를 a라 하고, 나머지 2개의 수를 $b(=d)$, c로 정하면 되므로 이 경우의 수는

$1\times2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $20\times2=40$

3단계 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$90+40=130$

03 답 2016

1단계 두 쌍의 부부가 좌석에 앉는 방법의 수 구하기

(i) 두 쌍의 부부가 좌석에 앉는 방법의 수

두 쌍의 부부가 앉는 열을 택하는 방법의 수는 2

택한 열에 대하여 두 쌍의 부부가 앉을 수 있는 두 쌍의 좌석을 순서쌍으로 나타내면 (1, 2), (3, 4) 또는 (1, 2), (4, 5) 또는 (2, 3), (4, 5)의 3가지

부부끼리 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2\times2=4$

두 부부가 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 2

따라서 두 쌍의 부부가 좌석에 앉는 방법의 수는

$2\times3\times4\times2=48$

2단계 두 쌍의 부부를 제외한 여자 3명이 좌석에 앉는 방법의 수 구하기

(ii) 두 쌍의 부부를 제외한 여자 3명이 좌석에 앉는 방법의 수

ⓘ 부부가 앉은 열의 남은 한 좌석과 다른 열의 2개의 좌석에 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우

부부가 앉지 않은 열에 여자 2명이 서로 이웃하지 않게 앉을 수 있는 좌석을 순서쌍으로 나타내면

(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 5)의 6가지

부부가 앉은 열의 한 좌석과 다른 열의 택한 2개의 좌석에 3명이 앉는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\times6=36$

ⓘⓘ 3명 모두 부부가 앉지 않은 열에 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우

서로 이웃하지 않도록 3명이 앉으려면 1, 3, 5 좌석에 각각 1명씩 앉아야 하므로 구하는 방법의 수는

$3!=6$

ⓘ, ⓘⓘ에서 두 쌍의 부부를 제외한 여자 3명이 좌석에 앉는 방법의 수는

$36+6=42$

3단계 조건을 만족시키는 방법의 수 구하기

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$48\times42=2016$

04 답 729

1단계 조건을 만족시키는 경우 파악하기

직사각형에서 윗줄에 흰색 정사각형이 있으면 그 아래는 흰색 또는 검은색 정사각형이 올 수 있지만 윗줄에 검은색 정사각형이 있으면 그 아래는 반드시 흰색 정사각형이 와야 한다.

2단계 윗줄의 흰색 정사각형의 개수에 따라 아랫줄에 올 수 있는 정사각형의 경우의 수 구하기

(i) 윗줄에 흰색 정사각형이 0개 있는 경우

아랫 줄은 모두 흰색 정사각형이 와야 하므로 1가지

(ii) 윗줄에 흰색 정사각형이 1개 있는 경우

흰색 정사각형이 올 자리를 택하는 경우의 수는

${}_6C_1=6$

윗줄의 1개의 흰색 정사각형 아래에 오는 정사각형의 경우의 수는 2

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times2=12$

(iii) 윗줄에 흰색 정사각형이 2개 있는 경우

흰색 정사각형이 올 자리를 택하는 경우의 수는

${}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

윗줄의 2개의 흰색 정사각형 아래에 오는 정사각형의 경우의 수는

$2\times2=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times4=60$

(iv) 윗줄에 흰색 정사각형이 k(k=3, 4, 5, 6)개 있는 경우

위와 같은 방법으로 경우의 수를 구하면

$({}_6C_3\times2^3)+({}_6C_4\times2^4)+({}_6C_5\times2^5)+({}_6C_6\times2^6)$

$=(20\times8)+(15\times16)+(6\times32)+(1\times64)$

$=160+240+192+64$

$=656$

3단계 조건을 만족시키는 직사각형의 개수 구하기

(i)~(iv)에서 구하는 직사각형의 개수는

$1+12+60+656=729$

다른 풀이

하나의 세로줄에서 위아래 정사각형이 모두 검은색이면 안 되므로 가능한 경우를 순서쌍으로 나타내면 다음과 같이 3가지이다.

(흰색, 흰색), (흰색, 검은색), (검은색, 흰색)

6개의 세로줄이 모두 같은 경우이므로 구하는 직사각형의 개수는

$3\times3\times3\times3\times3\times3=3^6=729$

05 답 ②

1단계 조건을 만족시키는 경우 파악하기

㈎에서 A는 24번 또는 25번 의자에 앉을 수 있고, B는 11번 또는 12번 또는 13번 또는 14번 의자에 앉을 수 있으며 ㈏, ㈐에서 어느 두 학생도 양옆 또는 앞뒤로 이웃하여 앉을 수 없다.

2단계 A의 좌석 번호에 따른 경우의 수 구하기

(i) A가 24번 의자에 앉는 경우

11	12	13	14	15	16	17
		23	A	25		

A를 제외한 4명의 학생은 11번, 13번, 15번, 17번 의자에 각각 한 명씩 앉아야 한다.

이때 B는 11번 또는 13번 의자 중 1개의 의자에 앉아야 하므로 B가 의자를 택하여 앉는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

이 각각에 대하여 A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 의자에 앉는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times6=12$

(ii) A가 25번 의자에 앉는 경우

11	12	13	14	15	16	17
		23	24	A		

A를 제외한 4명의 학생은 11번 또는 12번 의자 중 1개, 14번 의자, 16번 또는 17번 의자 중 1개, 23번 의자에 각각 한 명씩 앉아야 한다.

11번 또는 12번 의자 중 1개를 택하고, 16번 또는 17번 의자 중 1개를 택하는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_2C_1=2\times2=4$

이때 B는 11번 또는 12번 의자 중 택한 의자 또는 14번 의자 중 1개의 의자에 앉아야 하므로 B가 의자를 택하여 앉는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

이 각각에 대하여 A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 의자에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times2\times6=48$

3단계 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$12+48=60$

06 답 56

1단계 조건을 만족시키는 경우 파악하기

㈏에서 민수는 첫 번째 게임이 끝난 후 사탕을 가지고 있어야 하므로 민수는 첫 번째 게임에서 이겨야 한다.

2단계 민수가 가지고 있는 사탕의 개수에 따른 경우의 수 구하기

(i) 민수가 사탕만 8개를 가지는 경우

매 경기 이기면 되므로 경우의 수는 1

이때 ㈏를 항상 만족시키므로 구하는 경우의 수는 1

(ii) 민수가 사탕을 7개, 껌을 1개 가지는 경우

2번째 경기부터 8번째 경기 중 1번만 지면 되므로 경우의 수는

${}_7C_1=7$

이때 ㈏를 항상 만족시키므로 구하는 경우의 수는 7

(iii) 민수가 사탕을 6개, 껌을 2개 가지는 경우

2번째 경기부터 8번째 경기 중 2번을 지는 경우의 수는

${}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

그런데 2번째 경기와 3번째 경기를 모두 지는 경우에는 ㈏를 만족시키지 못하므로 이 경우는 제외해야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$21-1=20$

(iv) 민수가 사탕을 5개, 껌을 3개 가지는 경우

2번째 경기부터 8번째 경기 중 3번을 지는 경우의 수는

${}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

이기는 경우를 ○, 지는 경우를 ×라 하면 다음과 같이 2번째 경기와 3번째 경기를 모두 지는 경우는 (나)를 만족시키지 못한다.

○ × × 4 5 6 7 8

이 경우의 수는 4번째 경기부터 8번째 경기 중 1번만 지는 경우의 수와 같으므로 ${}_5C_1=5$

이때 다음 2가지 경우에도 (나)를 만족시키지 못한다.

○×○××○○○, ○○×××○○○

따라서 구하는 경우의 수는

$35-5-2=28$

3단계 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$1+7+20+28=56$

idea

07 답 45

1단계 6개의 숫자를 세 조로 나누는 경우의 수 구하기

1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 숫자를 2개, 2개, 2개의 세 조로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=\frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{6}$$

$$=15\times6\times1\times\frac{1}{6}=15$$

2단계 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수 구하기

이때 나눈 세 조를 각각

(c_1, d_1), (c_2, d_2), (c_3, d_3) (단, $c_1<c_2<c_3$, $c_i<d_i$, $i=1, 2, 3$)

이라 하면 (가)를 만족시키는 경우는 (a_1, a_3)이 (c_1, c_2) 또는 (c_1, c_3) 또는 (c_2, c_3)일 때이므로 3가지이다.

$c_1=a_1$, $c_2=a_3$이면 $d_1=a_2$, $d_2=a_4$, $c_3=a_5$, $d_3=a_6$

$c_1=a_1$, $c_3=a_3$이면 $d_1=a_2$, $d_3=a_4$, $c_2=a_5$, $d_2=a_6$

$c_2=a_1$, $c_3=a_3$이면 $d_2=a_2$, $d_3=a_4$, $c_1=a_5$, $d_1=a_6$

3단계 조건을 만족시키는 자연수 N의 개수 구하기

따라서 구하는 자연수 N의 개수는

$15\times3=45$

08 답 2760

1단계 학생 8명을 자습실 3개에 배정하는 경우 파악하기

각 자습실에는 최소한 한 명 이상의 2학년 학생이 있어야 하므로 2학년 학생을 각 자습실에 1명, 1명, 2명으로 배정할 수 있다. 2학년 학생이 자습실에 배정되는 방법은 다음 3가지 경우와 같다.

2단계 2학년 학생이 배정되는 경우에 따라 학생 8명을 배정하는 방법의 수 구하기

(i) 2학년 학생 4명을 자습실 A에 2명, 자습실 B에 1명, 자습실 C에 1명 배정하는 경우

2학년 학생을 배정하는 방법의 수는

$${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1=\frac{4\times3}{2\times1}\times2\times1=12$$

그리고 1학년 학생 4명을 배정하는 방법은 다음과 같다.

4명을 모두 자습실 B에 배정하는 방법의 수는 1

4명을 1명, 3명으로 나누어 각각 자습실 A, B, C에 배정하는 방법의 수는

$${}_4C_1\times{}_3P_2=4\times(3\times2)=24$$

4명을 2명, 2명으로 나누어 각각 자습실 A, B, C에 배정하는 방법의 수는

$$\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)\times{}_3P_2=\left(\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2}\right)\times(3\times2)=18$$

4명을 2명, 1명, 1명으로 나누어 각각 자습실 A, B, C에 배정하는 방법의 수는

$$\left({}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}\right)\times3!=\left(\frac{4\times3}{2\times1}\times2\times1\times\frac{1}{2}\right)\times6$$

$$=36$$

따라서 구하는 방법의 수는

$12\times(1+24+18+36)=948$

(ii) 2학년 학생 4명을 자습실 A에 1명, 자습실 B에 2명, 자습실 C에 1명 배정하는 경우

자습실 A와 B의 정원이 같다.

따라서 (i)의 방법의 수와 같으므로 구하는 방법의 수는 948이다.

(iii) 2학년 학생 4명을 자습실 A에 1명, 자습실 B에 1명, 자습실 C에 2명 배정하는 경우

2학년 학생을 배정하는 방법의 수는

$${}_4C_1\times{}_3C_1\times{}_2C_2=4\times3\times1=12$$

그리고 1학년 학생 4명을 배정하는 방법은 다음과 같다.

4명을 모두 자습실 A 또는 B에 배정하는 방법의 수는 2

4명 중 3명을 자습실 A 또는 B에 배정하고 나머지 1명은 다른 자습실에 넣는 방법의 수는

$${}_4C_3\times2\times2={}_4C_1\times2\times2=16$$

4명을 2명, 2명으로 나누어 각각 자습실 A, B, C에 배정하는 방법의 수는

$$\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)\times{}_3P_2=\left(\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2}\right)\times(3\times2)$$

$$=18$$

4명을 2명, 1명, 1명으로 나누어 각각 자습실 A, B, C에 배정하는 방법의 수는

$$\left({}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}\right)\times3!=\left(\frac{4\times3}{2\times1}\times2\times1\times\frac{1}{2}\right)\times6$$

$$=36$$

따라서 구하는 방법의 수는

$12\times(2+16+18+36)=864$

3단계 조건을 만족시키는 방법의 수 구하기

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$948+948+864=2760$

09 답 960

1단계 5명에게 꽃 4송이와 초콜릿 2개를 나누어 주는 경우 파악하기

꽃 4송이와 초콜릿 2개를 5명의 학생에게 남김없이 나누어 주면 5명의 학생 중 1명은 초콜릿과 꽃을 합쳐서 2개를 받고, 나머지 4명은 초콜릿과 꽃 중 1개만 받는다.

2단계 초콜릿과 꽃을 합쳐서 2개를 받는 각각에 대하여 경우의 수 구하기

(i) 1명의 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우

초콜릿 2개를 받는 학생을 정하는 경우의 수는 5

나머지 4명의 학생에게 꽃을 각각 1송이씩 나누어 주는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times24=120$

(ii) 1명의 학생이 꽃 2송이를 받는 경우

4송이의 꽃 중에서 2송이를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

고른 2송이의 꽃을 받는 학생을 정하는 경우의 수는 5

남은 2송이의 꽃을 줄 학생을 정하는 경우의 수는
${}_4P_2=4\times3=12$
꽃을 받지 못한 2명의 학생에게 초콜릿을 각각 1개씩 주는 경우의 수는 1
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times5\times12\times1=360$

(iii) 1명의 학생이 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받는 경우
4송이의 꽃을 5명 중 4명의 학생에게 각각 1송이씩 나누어 주는 경우의 수는
${}_5P_4=5\times4\times3\times2=120$
꽃을 받지 못한 학생에게 초콜릿 1개를 주고 꽃을 받은 학생 중 1명을 택하여 남은 초콜릿 1개를 주는 경우의 수는
${}_4C_1=4$
따라서 구하는 경우의 수는
$120\times4=480$

3단계 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$120+360+480=960$

10 답 528

1단계 여학생 2명이 같은 층의 사물함을 사용하는 경우의 수 구하기
(i) 2층 또는 3층 중에서 같은 층의 사물함을 여학생에게 배정하는 경우
ⓘ 2층의 두 사물함을 두 여학생에게 배정하는 경우의 수는
$2!=2$
나머지 사물함을 남학생 3명에게 배정하는 경우의 수는
${}_5P_3=5\times4\times3=60$
ⓘⓘ 3층의 두 사물함을 두 여학생에게 배정하는 경우의 수는
$2!=2$
나머지 사물함을 남학생 3명에게 배정하는 경우의 수는
${}_5P_3=5\times4\times3=60$
ⓘ, ⓘⓘ에서 구하는 경우의 수는
$2\times2\times60=240$

(ii) 1층의 사물함만을 여학생에게 배정하는 경우
1층의 사물함만을 여학생에게 배정하는 경우의 수는
${}_3P_2=3\times2=6$
1층의 사물함을 남학생에게 배정할 수는 없으므로 나머지 사물함을 남학생 3명에게 배정하는 경우의 수는
${}_4P_3=4\times3\times2=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times24=144$

2단계 여학생 2명이 다른 층의 사물함을 사용하는 경우의 수 구하기
(iii) 2층, 3층의 사물함을 각각 1개씩 여학생에게 배정하는 경우
2층, 3층의 사물함을 각각 1개씩 선택하여 여학생에게 배정하는 경우의 수는
${}_2C_1\times{}_2C_1\times2!=2\times2\times2=8$
2층과 3층의 사물함을 남학생에게 배정할 수는 없으므로 1층의 사물함만을 남학생 3명에게 배정하는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$8\times6=48$

(iv) 1층의 사물함을 한 여학생에게 배정하고 2층 또는 3층의 사물함을 다른 여학생에게 배정하는 경우
1층의 가운데에 있는 사물함을 여학생에게 배정하면 3명의 남학생에게 사물함을 배정할 수 없다.
그러므로 1층의 사물함 중 가운데 사물함을 제외한 2개의 사물함 중 한 사물함을 여학생에게 배정해야 한다.
1층의 사물함을 한 여학생에게 배정하고 2층 또는 3층의 사물함을 다른 여학생에게 배정하는 경우의 수는
${}_2C_1\times{}_4C_1\times2!=2\times4\times2=16$
남학생에게 3개의 사물함을 배정하는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$16\times6=96$

3단계 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기
(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는
$240+144+48+96=528$

기출 변형 문제로 단원 마스터 104~105쪽

01 ② **02** 1080 **03** 13 **04** 30 **05** 280 **06** 36
07 2880 **08** 312

01 답 ②

각진 방석을 □, 둥근 방석을 ○라 하자.
(i) 2학년 학생이 ②○②○□○와 같이 앉는 경우
2학년 학생이 2개의 각진 방석에 앉는 경우의 수는
${}_2P_2=2$
ⓘ 2학년 학생이 앉지 않은 각진 방석에 1학년 학생이 앉는다면 남은 방석에는 나머지 3명의 학생이 앉아야 하므로 경우의 수는
$2\times3!=12$
ⓘⓘ 2학년 학생이 앉지 않은 각진 방석에 3학년 학생이 앉는다면 그 방석과 이웃한 2개의 둥근 방석에는 1학년 학생만 앉아야 하므로 경우의 수는
$2!\times2!=4$
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times(12+4)=32$

(ii) 2학년 학생이 □○②○②○와 같이 앉는 경우
2학년 학생이 2개의 각진 방석에 앉는 경우의 수는
${}_2P_2=2$
ⓘ 2학년 학생이 앉지 않은 각진 방석에 1학년 학생이 앉는다면 남은 방석에는 나머지 3명의 학생이 앉아야 하므로 경우의 수는
$2\times3!=12$
ⓘⓘ 2학년 학생이 앉지 않은 각진 방석에 3학년 학생이 앉는다면 그 의자와 이웃한 1개의 둥근 방석에는 1학년 학생만 앉아야 하므로 경우의 수는
$2\times2\times2!=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times(12+8)=40$

(iii) 2학년 학생이 ②○□○②○와 같이 앉는 경우

(i)의 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는 32이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$32+40+32=104$

02 답 1080

1부터 9까지의 자연수 중 합이 12의 양의 약수가 되는 서로 다른 세 수는

→ 12의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12

(1, 2, 3), (1, 2, 9), (1, 3, 8), (1, 4, 7), (1, 5, 6), (2, 3, 7), (2, 4, 6), (3, 4, 5)의 8가지이다.

이 각각에 대하여 나머지 6개의 숫자 중 하나를 택하는 경우의 수는 6

이때 (1, 2, 3)과 7 또는 8 또는 9를 택한 경우는 각각 (2, 3, 7)과 1, (1, 3, 8)과 2, (1, 2, 9)와 3을 택한 경우와 중복되므로 4개의 숫자를 택하는 경우의 수는

$8\times6-3=45$

이 각각에 대하여 4개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

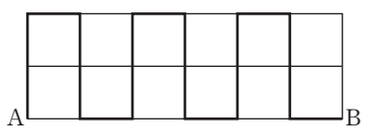
따라서 구하는 네 자리의 자연수의 개수는

$45\times24=1080$

03 답 13

A 지점에서 출발하여 B 지점에 도착할 때, 가로 방향으로 이동한 길이의 합이 6이고 전체 이동한 길이가 18이 되려면 세로 방향으로 이동한 길이의 합이 12이어야 한다.

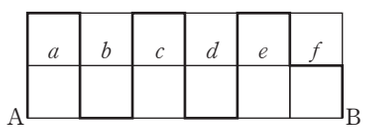
(i) 길이가 2인 세로 방향의 도로 6개를 지나가는 경우



길이가 2인 세로 방향의 도로 6개를 지나가는 경우의 수는 그림과 같이 길이가 2인 세로 방향의 도로 7개 중 6개를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$_7C_6=_7C_1=7$

(ii) 길이가 2인 세로 방향의 도로 5개를 지나가는 경우



길이가 2인 세로 방향의 도로 5개를 지나가는 경우의 수는 그림과 같이 가로 방향의 도로 a, b, c, d, e, f 중 1개를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$_6C_1=6$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$7+6=13$

04 답 30

서로 다른 다섯 종류의 리본이 각각 2개씩 있으므로 7개의 리본을 선택하려면 네 종류 이상의 리본을 선택해야 한다.

(i) 서로 다른 네 종류의 리본을 각각 1개, 2개, 2개, 2개 선택하는 경우

서로 다른 다섯 종류의 리본 중에서 네 종류의 리본을 선택하는 경우의 수는

$_5C_4=_5C_1=5$

이 각각에 대하여 네 종류의 리본 중에서 1개를 선택하는 리본의 종류를 정하면 남은 세 종류의 리본은 각각 2개씩 선택하면 되므로 경우의 수는

$_4C_1=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times4=20$

(ii) 서로 다른 다섯 종류의 리본을 각각 1개, 1개, 1개, 2개, 2개 선택하는 경우

서로 다른 다섯 종류의 리본 중에서 2개를 선택하는 리본의 종류를 정하면 남은 세 종류의 리본은 각각 1개씩 선택하면 되므로 경우의 수는

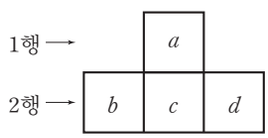
$_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$20+10=30$

05 답 280

그림과 같이 1행에 적힌 수를 a, 2행에 적힌 수를 왼쪽부터 차례대로 b, c, d라 하자.



(가)에서 $a<b$, $a<c$, $a<d$

(나)에서 $b\neq c$, $c\neq d$

(i) $b\neq d$인 경우

a, b, c, d가 서로 다르므로 7 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 택하는 경우의 수는

$_7C_4=_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

이 각각에 대하여 택한 4개의 수 중에서 가장 작은 수를 a라 하고, 나머지 3개의 수를 b, c, d로 정하면 되므로 이 경우의 수는

$1\times3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$35\times6=210$

(ii) $b=d$인 경우

$a<b=d$, $a<c$이므로 a, b, c, d 중에서 서로 다른 수의 개수는 3이고,

7 이하의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 수를 택하는 경우의 수는

$_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

이 각각에 대하여 택한 3개의 수 중에서 가장 작은 수를 a라 하고, 나머지 2개의 수를 $b(=d)$, c로 정하면 되므로 이 경우의 수는

$1\times2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$35\times2=70$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$210+70=280$

06 답 36

㈎에서 A는 13번 또는 14번 신발장을 택할 수 있고, B는 1번 또는 2번 또는 3번 또는 4번 신발장을 택할 수 있으며 ㈏, ㈐에서 어느 두 학생도 양옆 또는 위아래로 이웃한 신발장을 택할 수 없다.

(i) A가 13번 신발장을 택한 경우



A를 제외한 4명의 학생은 2번, 4번, 6번, 11번 신발장을 각각 한 명씩 택해야 한다.

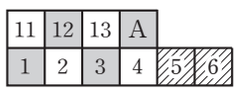
이때 B는 2번 또는 4번 신발장 중 1개를 택할 수 있으므로 B가 신발장을 택하는 방법의 수는 ${}_2C_1=2$

이 각각에 대하여 A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 신발장을 택하는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$2\times6=12$

(ii) A가 14번 신발장을 택한 경우



A를 제외한 4명의 학생은 5번 또는 6번 신발장 중 1개와 1번, 3번, 12번 신발장을 각각 한 명씩 택해야 한다.

5번 또는 6번 신발장 중 1개를 택하는 방법의 수는 ${}_2C_1=2$

이때 B는 1번 또는 3번 신발장 중 1개를 택해야 하므로 B가 신발장을 택하는 방법의 수는 ${}_2C_1=2$

이 각각에 대하여 A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 신발장을 택하는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$2\times2\times6=24$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$12+24=36$

07 답 2880

볼펜 4자루와 연필 3자루를 6명의 학생에게 남김없이 나누어 주면 6명의 학생 중 1명은 볼펜과 연필을 합쳐서 2자루를 받고, 나머지 5명은 볼펜과 연필 중 1자루만 받는다.

(i) 1명의 학생이 연필 2자루를 받는 경우

연필 2자루를 받는 학생을 정하는 경우의 수는 6

나머지 5명의 학생에게 볼펜 4자루와 연필 1자루를 각각 하나씩 나누어 주는 경우의 수는 $5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times120=720$

(ii) 1명의 학생이 볼펜 2자루를 받는 경우

4자루의 볼펜 중에서 2자루를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

고른 2자루의 볼펜을 받는 학생을 정하는 경우의 수는 6

남은 2자루의 볼펜을 줄 학생을 정하는 경우의 수는

${}_5P_2=5\times4=20$

볼펜을 받지 못한 3명의 학생에게 연필을 각각 1자루씩 주는 경우의 수는 1

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times6\times20\times1=720$

(iii) 1명의 학생이 볼펜 1자루와 연필 1자루를 받는 경우

4자루의 볼펜을 6명 중 4명의 학생에게 각각 1자루씩 주는 경우의 수는 ${}_6P_4=6\times5\times4\times3=360$

볼펜을 받지 못한 2명의 학생에게 각각 연필 1자루씩 주고 볼펜을 받은 학생 중 1명을 택해 남은 연필 1자루를 주는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$360\times4=1440$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$720+720+1440=2880$

08 답 312

(i) 2행 또는 3행 중에서 같은 행의 공간에 그림 액자를 거는 경우

ⓘ 2행의 두 공간에 2개의 그림 액자를 거는 경우의 수는 $2!=2$

나머지 공간에 2개의 사진 액자를 거는 경우의 수는

${}_5P_2=5\times4=20$

ⓘⓘ 3행의 두 공간에 2개의 그림 액자를 거는 경우의 수는 $2!=2$

나머지 공간에 2개의 사진 액자를 거는 경우의 수는

${}_5P_2=5\times4=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times2\times20=80$

(ii) 1행의 공간에 그림 액자만 거는 경우

1행의 공간에 그림 액자만 거는 경우의 수는 ${}_3P_2=3\times2=6$

1행의 공간에 사진 액자를 걸 수 없으므로 나머지 공간에 2개의 사진 액자를 거는 경우의 수는 ${}_4P_2=4\times3=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times12=72$

(iii) 2행, 3행의 공간에 각각 1개씩 그림 액자를 거는 경우

2행, 3행의 공간을 각각 1개씩 선택하여 그림 액자를 거는 경우의 수는 ${}_2C_1\times{}_2C_1\times2!=2\times2\times2=8$

2행과 3행의 공간에 사진 액자를 걸 수 없으므로 1행의 공간에 2개의 사진 액자를 거는 경우의 수는 ${}_3P_2=3\times2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$8\times6=48$

(iv) 1행의 양 끝의 공간에 한 그림 액자를 걸고, 2행 또는 3행의 공간에 다른 그림 액자를 거는 경우

1행의 양 끝의 공간에 한 그림 액자를 걸고, 2행 또는 3행의 공간에 다른 그림 액자를 거는 경우의 수는 ${}_2C_1\times{}_4C_1\times2!=2\times4\times2=16$

2개의 사진 액자를 공간에 거는 경우의 수는 ${}_3P_2=3\times2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$16\times6=96$

(v) 1행의 가운데에 있는 공간에 한 그림 액자를 걸고, 2행 또는 3행의 공간에 다른 그림 액자를 거는 경우

1행의 가운데에 있는 공간에 한 그림 액자를 걸고, 2행 또는 3행의 공간에 다른 그림 액자를 거는 경우의 수는 ${}_4C_1\times2!=4\times2=8$

2개의 사진 액자를 공간에 거는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$8\times2=16$

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$80+72+48+96+16=312$

09 행렬

STEP 1 핵심 문제 | 108~109쪽

01 778	02 ③	03 48	04 ①	05 1	06 ④
07 ②	08 4	09 -8	10 ④	11 13	12 a, $\frac{d}{q}$

01 답 778

a_{11}은 x를 일차식 $x-1$로 나눈 나머지와 같으므로 $a_{11}=1$

a_{12}는 x^2을 일차식 $x-1$로 나눈 나머지와 같으므로 $a_{12}=1^2=1$

a_{21}은 x^2을 일차식 $x-2$로 나눈 나머지와 같으므로 $a_{21}=2^2=4$

a_{22}는 x^4을 일차식 $x-2$로 나눈 나머지와 같으므로 $a_{22}=2^4=16$

a_{31}은 x^3을 일차식 $x-3$으로 나눈 나머지와 같으므로 $a_{31}=3^3=27$

a_{32}는 x^6을 일차식 $x-3$으로 나눈 나머지와 같으므로 $a_{32}=3^6=729$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$1+1+4+16+27+729=778$

개념 NOTE

나머지 정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 $R=f(a)$이다.

02 답 ③

$a_{11}=0$, $a_{12}=1$, $a_{13}=0$, $a_{14}=1$, $a_{21}=1$, $a_{22}=1$, $a_{23}=1$, $a_{24}=2$,

$a_{31}=2$, $a_{32}=1$, $a_{33}=1$, $a_{34}=1$, $a_{41}=2$, $a_{42}=1$, $a_{43}=2$, $a_{44}=0$

이므로 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&1&1&2\\2&1&1&1\\2&1&2&0\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 2행의 모든 성분의 합은 $1+1+1+2=5$,

3열의 모든 성분의 합은 $0+1+1+2=4$

$\therefore 5+4=9$

03 답 48

$A=B$이므로

$xy+yz+zx=x^2+y^2+z^2$ …… ㉠

$xyz=8$ …… ㉡

㉠에서 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$이므로

$\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

이때 x, y, z는 실수이므로 $(x-y)^2=(y-z)^2=(z-x)^2=0$

$\therefore x=y=z$

㉡에 $x=y=z$를 대입하면 $x^3=y^3=z^3=8$이므로 $x=y=z=2$

$\therefore x^4+y^4+z^4=2^4+2^4+2^4=48$

04 답 ①

$3(A-X)+B=A+2(B-X)$에서

$3A-3X+B=A+2B-2X$이므로

$X=2A-B=2\begin{pmatrix}2&1\\-3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&0\\-4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\-2&-1\end{pmatrix}$

05 답 1

$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$이므로

$(A+B)^2=A^2+B^2$에서 $A^2+AB+BA+B^2=A^2+B^2$

$\therefore AB=-BA$

이때 $\begin{pmatrix}x&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&-1\\1&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&1\\1&-1\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}1&-x+y\\-1&-1-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-x-y&-1+y\end{pmatrix}$에서

$-x+y=-1$, $-1=-x-y$, $-1-y=-1+y$

이를 연립하여 풀면 $x=1$, $y=0$

$\therefore x+y=1$

참고 일반적으로 행렬의 곱셈에서 교환법칙이 성립하지 않으므로

$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$

06 답 ④

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b&c\\c&a\end{pmatrix}$에서

$AB=\begin{pmatrix}a&b\\c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&c\\c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab+bc&ac+ba\\cb+ac&c^2+a^2\end{pmatrix}$

이므로 $\begin{pmatrix}ab+bc&ac+ba\\cb+ac&c^2+a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-4\\2&2\end{pmatrix}$

$b(a+c)=0$ …… ㉠, $a(b+c)=-4$ …… ㉡

$c(a+b)=2$ …… ㉢, $a^2+c^2=2$ …… ㉣

㉠에서 $b=0$ 또는 $a=-c$

(i) $b=0$인 경우

㉡에서 $ac=-4$이고, ㉢에서 $ac=2$이므로 모순이다.

(ii) $a=-c$인 경우

㉡에서 $-c(b+c)=-4$, ㉢에서 $c(b-c)=2$이므로

두 식을 연립하면 $c^2=1$이 되어 $c=-1$ 또는 $c=1$

$c=-1$일 때, $b=-3$이고 $a=1$이므로 ㉣을 만족시킨다.

$c=1$일 때, $b=3$이고 $a=-1$이므로 ㉣을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 실수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)는

$(1, -3, -1)$, $(-1, 3, 1)$이므로 $a^2+b^2+c^2=1+9+1=11$

07 답 ②

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$라 하자.

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$에 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$를 대입하면

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$이므로 $a=2$, $c=3$

같은 방법으로 $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$에 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$를 대입하면

$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$이므로 $b=-1$, $d=2$

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$에서 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$

$\therefore p+q=0+7=7$

다른 풀이1

두 등식 $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$를 행렬의 곱셈과 연관지어 보면

등식 $A\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\3&2\end{pmatrix}$가 성립함을 알 수 있다.

$\therefore A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$에서 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$

$\therefore p+q=0+7=7$

다른 풀이2

행렬의 성질에 의해

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$

$\therefore p+q=0+7=7$

08 답 4

$AB+A=O$에서 $\begin{pmatrix}a & -1\\ 1 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & -1\\ 1 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-a & -a+2\\ -1 & -1-2b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & -1\\ 1 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0 & -a+1\\ 0 & -1-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$이므로 $a=1$, $b=-1$

$\therefore A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

이때 $A^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$=O$

이므로 $A^3=A^4=A^5=\cdots=A^{100}=O$

따라서 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}=A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

이므로 $p=1$, $q=-1$, $r=1$, $s=-1$

$\therefore p^2+q^2+r^2+s^2=1+1+1+1=4$

09 답 −8

$x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

z는 이 방정식의 한 허근이므로 방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다.

…… 배점 25%

즉, 방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근은 z, $\overline{z}$이므로 근과 계수의 관계에 의해 $z+\overline{z}=1$, $z\overline{z}=1$이다. …… 배점 25%

따라서 $z^2+\overline{z}^2=(z+\overline{z})^2-2z\overline{z}=1-2=-1$, $\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=\frac{z+\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{1}{1}=1$

이므로 $X=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$X^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

$X^3=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

$X^4=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

⋮

$X^{10}=\begin{pmatrix}1 & -10\\ 0 & 1\end{pmatrix}$임을 알 수 있다. …… 배점 30%

따라서 X^{10}의 모든 성분의 합은

$1+(-10)+0+1=-8$ …… 배점 20%

10 답 ④

ㄱ. [반례] $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이면

$A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O$이므로 $A^2B=O$

그런데 $AB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq O$

따라서 $A^2B=O$이지만 $AB\neq O$

ㄴ. $E=A^7=A^5A^2=EA^2=A^2$이므로 $A^2=E$

따라서 $E=A^5=(A^2)^2A=E^2A=EA=A$이므로 $A=E$

ㄷ. $(A+E)(A-E)=E$에서 $A^2-E=E$이므로 $A^2=2E$

따라서 $A^2B=(2E)B=2B$, $BA^2=B(2E)=2B$이므로

$A^2B=BA^2$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

11 답 13

(i) $A=kE$ (단, k는 실수)일 때,

$A^2-4A+3E=O$에서 $(kE)^2-4(kE)+3E=O$

즉, $(k^2-4k+3)E=O$이므로

$k^2-4k+3=0$, $(k-1)(k-3)=0$

따라서 $k=1$ 또는 $k=3$이므로

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

$\therefore D(A)=1$ 또는 $D(A)=9$

(ii) $A\neq kE$ (단, k는 실수)일 때,

케일리-해밀턴 정리에 의해

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

이때 $A^2-4A+3E=O$이므로 $D(A)=ad-bc=3$

(i), (ii)에서 모든 $D(A)$의 값의 합은

$1+9+3=13$

12 답 a, $\frac{d}{q}$

A 과수원에서는 a_{11}그루의 사과나무에서 평균 b_{11}개의 사과가 열리고,

B 과수원에서는 a_{12}그루의 사과나무에서 평균 b_{21}개의 사과가 열리므로

두 과수원에서 생산된 사과의 총개수는 $a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=a$

같은 방법으로 두 과수원에서 생산된 배의 총개수는 $a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=d$

배나무의 총 그루 수는 $a_{21}+a_{22}=q$이므로

두 과수원의 배 한 그루당 열매의 평균 개수는 $\frac{d}{q}$

따라서 (가), (나)에 알맞은 것은 a, $\frac{d}{q}$

STEP 2 고난도 문제 | 110~115쪽

01 ①	02 13	03 $\frac{2}{3}$	04 24	05 24	06 263
07 ⑤	08 3	09 ①	10 2	11 8	12 ③
13 −1	14 ①	15 5	16 7	17 ㄴ, ㄷ	
18 ㄴ, ㄷ		19 ③	20 ⑤	21 ①	22 6
23 −1, 2		24 ⑤	25 6일	26 ③	

01 답 ①

1번 책은 1번 키워드 '기초'와 4번 키워드 '이론'을 포함하고, 2번 키워드 '수학'과 3번 키워드 '심화'는 포함하지 않으므로

$a_{11}=1$, $a_{12}=0$, $a_{13}=0$, $a_{14}=1$

2번 책은 1번 키워드 '기초', 2번 키워드 '수학'과 4번 키워드 '이론'을 포함하고, 3번 키워드 '심화'는 포함하지 않으므로

$a_{21}=1$, $a_{22}=1$, $a_{23}=0$, $a_{24}=1$

3번 책은 3번 키워드 '심화'만 포함하고, 1번 키워드 '기초', 2번 키워드 '수학'과 4번 키워드 '이론'을 포함하지 않으므로

$a_{31}=0$, $a_{32}=0$, $a_{33}=1$, $a_{34}=0$

4번 책은 2번 키워드 '수학'과 3번 키워드 '심화'를 포함하고, 1번 키워드 '기초'와 4번 키워드 '이론'은 포함하지 않으므로

$a_{41}=0$, $a_{42}=1$, $a_{43}=1$, $a_{44}=0$

따라서 행렬 A를 구하면

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$$

02 답 13

$x^2-(i+2j)x+2ij\le0$에서 $(x-i)(x-2j)\le0$

$|x-i|\le1$에서 $-1+i\le x\le1+i$

(i) $i=1$, $j=1$일 때,

연립부등식 $\begin{cases}(x-1)(x-2)\le0\\0\le x\le2\end{cases}$의 해는 $1\le x\le2$이므로

행렬 A의 (1, 1) 성분은 $1+2=3$

(ii) $i=1$, $j=2$일 때,

연립부등식 $\begin{cases}(x-1)(x-4)\le0\\0\le x\le2\end{cases}$의 해는 $1\le x\le2$이므로

행렬 A의 (1, 2) 성분은 $1+2=3$

(iii) $i=2$, $j=1$일 때,

연립부등식 $\begin{cases}(x-2)(x-2)\le0\\1\le x\le3\end{cases}$의 해는 $x=2$이므로

행렬 A의 (2, 1) 성분은 2

(iv) $i=2$, $j=2$일 때,

연립부등식 $\begin{cases}(x-2)(x-4)\le0\\1\le x\le3\end{cases}$의 해는 $2\le x\le3$이므로

행렬 A의 (2, 2) 성분은 $2+3=5$

(i)~(iv)에서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$3+3+2+5=13$

03 답 $\frac{2}{3}$

$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{ka}&0\\0&\frac{1}{ka}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&a^2+1\\a^2+1&0\end{pmatrix}$이므로

$$AB=\begin{pmatrix}\frac{1}{ka}&0\\0&\frac{1}{ka}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a^2+1\\a^2+1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{a^2+1}{ka}\\\frac{a^2+1}{ka}&0\end{pmatrix}$$

따라서 AB의 모든 성분의 합은 $\frac{2(a^2+1)}{ka}$

한편 $a>0$, $k>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$\frac{2(a^2+1)}{ka}=\frac{2}{k}\left(a+\frac{1}{a}\right)\ge\frac{2}{k}\times2\sqrt{a\times\frac{1}{a}}=\frac{4}{k}$$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{1}{a}\text{, 즉 } a=1\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $\frac{2(a^2+1)}{ka}$의 최솟값은 $\frac{4}{k}$이므로 $\frac{4}{k}=6$

$\therefore k=\frac{2}{3}$

개념 NOTE

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때, $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

산술평균 기하평균

[증명]

$a>0$, $b>0$일 때,

$a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge0$

$a+b\ge2\sqrt{ab}$

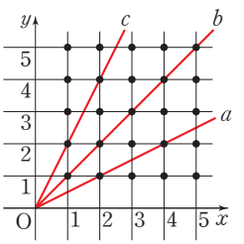
$\therefore \frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

idea

04 답 24

$x_1y_2-x_2y_1=0$이고 x_1, x_2, y_1, y_2는 모두 0이 아니므로 $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$

따라서 그림과 같이 세 점 O, (x_1, y_1), (x_2, y_2)가 한 직선 위에 있어야 한다.



두 점을 택하는 순서에 따라 서로 다른 행렬이 만들어지므로

(i) 직선 a 위의 두 점을 택한 경우 ➡ ${}_2P_2=2\times1=2$

(ii) 직선 b 위의 두 점을 택한 경우 ➡ ${}_5P_2=5\times4=20$

(iii) 직선 c 위의 두 점을 택한 경우 ➡ ${}_2P_2=2\times1=2$

따라서 구하는 행렬의 개수는

$2+20+2=24$

05 답 24

$A=\begin{pmatrix}x^2+y^2&xy+yx\\x+y&x^3+y^3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}27-z^2&a\\b&3xyz-z^3\end{pmatrix}$에 대하여

$A=B$이므로

$x^2+y^2=27-z^2$ …… ㉠

$xy+yx=a$ …… ㉡

$x+y=b$ …… ㉢

$x^3+y^3=3xyz-z^3$ …… ㉣

㉣에서 $x^3+y^3=3xyz-z^3$, 즉 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ …… 배점 25%

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$=0$

이고, $x>0$, $y>0$, $z>0$이므로

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$ …… 배점 30%

즉, $x-y=0$, $y-z=0$, $z-x=0$에서 $x=y=z$

㉠에서 $3x^2=27$, 즉 $x^2=9$이므로 $x=3$ ($\because$ $x>0$) ····· 배점 25%

따라서 $x=y=z=3$이므로 ㉡, ㉢에서

$a=9+9=18$, $b=3+3=6$

$\therefore$ $a+b=24$ ····· 배점 20%

06 답 263

A의 (i, j) 성분 a_{ij}가 $a_{ij}=\begin{cases}p^j+q^j & (i=1)\\ p^{i+j}+q^{i+j} & (i\neq 1)\end{cases}$이므로

$a_{11}=p+q$, $a_{12}=p^2+q^2$, $a_{21}=p^3+q^3$, $a_{22}=p^4+q^4$

$A=\begin{pmatrix}p+q & p^2+q^2\\ p^3+q^3 & p^4+q^4\end{pmatrix}$이고, $B=\begin{pmatrix}5 & 19\\ x & y\end{pmatrix}$에 대하여 $A=B$이므로

$p+q=5$ ····· ㉠

$p^2+q^2=19$ ····· ㉡

$p^3+q^3=x$ ····· ㉢

$p^4+q^4=y$ ····· ㉣

㉠, ㉡에서 $p^2+q^2=(p+q)^2-2pq$, $19=25-2pq$이므로 $pq=3$

㉢에서 $x=p^3+q^3=(p+q)^3-3pq(p+q)=5^3-3\times 3\times 5=80$

㉣에서 $y=p^4+q^4=(p^2+q^2)^2-2p^2q^2=19^2-2\times 3^2=343$

$\therefore$ $y-x=263$

07 답 ⑤

$(x^2+y^2)A-(x-y)C=B$에서

$(x^2+y^2)\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-(x-y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}4(x^2+y^2)-(x-y) & x^2+y^2\\ x^2+y^2 & -(x-y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}$이므로

$4(x^2+y^2)-(x-y)=17$, $x^2+y^2=4$, $-(x-y)=1$

$\therefore$ $\begin{cases}x^2+y^2=4\\ x-y=-1\end{cases}$

(i) $y=x+1$을 $x^2+y^2=4$에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=4$

즉, $2x^2+2x-3=0$의 두 실근이 α_1, α_2이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha_1+\alpha_2=-1$, $\alpha_1\alpha_2=-\frac{3}{2}$

따라서 $(\alpha_2-\alpha_1)^2=(\alpha_1+\alpha_2)^2-4\alpha_1\alpha_2=1+6=7$

(ii) $x=y-1$을 $x^2+y^2=4$에 대입하면

$(y-1)^2+y^2=4$

즉, $2y^2-2y-3=0$의 두 실근이 β_1, β_2이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\beta_1+\beta_2=1$, $\beta_1\beta_2=-\frac{3}{2}$

따라서 $(\beta_2-\beta_1)^2=(\beta_1+\beta_2)^2-4\beta_1\beta_2=1+6=7$

(i), (ii)에서 $(\alpha_2-\alpha_1)^2+(\beta_2-\beta_1)^2=14$

08 답 3

$a_{ij}+a_{ji}=0$에서 $a_{ij}=-a_{ji}$이므로 $a_{11}=0$, $a_{12}=-a_{21}$, $a_{22}=0$

$\therefore$ $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a_{12}\\ -a_{12} & 0\end{pmatrix}$

$b_{ij}-b_{ji}=0$에서 $b_{ij}=b_{ji}$이므로 $b_{12}=b_{21}$

$\therefore$ $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{12} & b_{22}\end{pmatrix}$

$2A-B=2\begin{pmatrix}0 & a_{12}\\ -a_{12} & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{12} & b_{22}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-b_{11} & 2a_{12}-b_{12}\\ -2a_{12}-b_{12} & -b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$

이므로 $-b_{11}=1$에서 $b_{11}=-1$,

$-b_{22}=4$에서 $b_{22}=-4$이고,

$2a_{12}-b_{12}=2$, $-2a_{12}-b_{12}=-2$에서 $a_{12}=1$, $b_{12}=0$

즉, $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$이므로

$A^2-B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^2-B의 $(2, 2)$ 성분은 3이다.

09 답 ①

A가 $A^2=E$를 만족시키므로

$A^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & 2b\times(a+3)\\ 2c\times(a+3) & (a+6)^2+bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

따라서 $b\times(a+3)=c\times(a+3)=0$

(i) $a\neq$ $\boxed{-3}$인 경우

$b=0$이고 $c=0$이므로 $A^2=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & (a+6)^2\end{pmatrix}$ ····· ㉠

이다. ㉠에서 $A^2\neq E$이므로 주어진 조건에 모순이다.

(ii) $a=$ $\boxed{-3}$인 경우

주어진 조건 $A^2=E$에서 $bc=$ $\boxed{-8}$이다.

b, c가 정수이므로 $bc=$ $\boxed{-8}$을 만족시키는 순서쌍 (b, c)는

$(-1, 8)$, $(-2, 4)$, $(-4, 2)$, $(-8, 1)$, $(1, -8)$, $(2, -4)$, $(4, -2)$, $(8, -1)$로 그 개수는 $\boxed{8}$이다.

따라서 $A^2=E$를 만족시키는 행렬 A의 개수는 $\boxed{8}$이다.

그러므로 $p=-3$, $q=-8$, $r=8$에서

$p+q+r=-3$

10 답 2

$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by & bx+ay\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$=(ax+by)x+(bx+ay)y$

$=ax^2+2bxy+ay^2$

행렬 $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$의 성분은 $ax^2+2bxy+ay^2$ 하나뿐이고,

음이 아니므로 $ax^2+2bxy+ay^2\geq 0$ ····· ㉠

이때 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하므로 x에 대한 이차방정식

$ax^2+2byx+ay^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(by)^2-a(ay^2)=(b^2-a^2)y^2\leq 0$이 성립한다.

한편 $y^2\geq 0$이므로 $b^2-a^2\leq 0$ $\therefore$ $b^2\leq a^2$ ····· ㉡

㉡의 양변에 $(b-2)^2$을 더하면 $a^2+(b-2)^2\geq b^2+(b-2)^2$

$b^2+(b-2)^2=2b^2-4b+4=2(b-1)^2+2\geq 2$

이므로 $a^2+(b-2)^2$의 최솟값은 2이다.

11 답 8

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$,

$B^2=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$이고

$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -1 & -3\end{pmatrix}$이므로

$AB+BA=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}=-5E$

$(\alpha A+\beta B)^2=\alpha^2A^2+\alpha\beta AB+\alpha\beta BA+\beta^2B^2$

$=(\alpha^2+\beta^2)E+\alpha\beta(AB+BA)$

$=(\alpha^2+\beta^2-5\alpha\beta)E$

이때 $x^2-x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$이고, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\times(-1)=3$

따라서 $(\alpha A+\beta B)^2=(3+5)E=8E$이므로 $k=8$

idea

12 답 ③

$A+2B=E$에서 $A=E-2B$이므로

$AB=(E-2B)B=B-2B^2$, $BA=B(E-2B)=B-2B^2$

$\therefore AB=BA$

$A^2-4B^2=(A-2B)(A+2B)=(A-2B)E=A-2B$이므로

$A+2B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ····· ㉠

$A-2B=\begin{pmatrix}5 & 8\\ -4 & 1\end{pmatrix}$ ····· ㉡

㉠과 ㉡을 더하면 $2A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 8\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ -4 & 2\end{pmatrix}$이므로

$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

㉠에서 $2B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 2 & 0\end{pmatrix}$이므로

$B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

따라서 $AB=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 3 & 4\end{pmatrix}$이므로 행렬 AB의 모든 성분의 합은

$1+(-6)+3+4=2$

다른 풀이

$A+2B=E$에서 $A=E-2B$ ····· ㉠

$A^2-4B^2=(E-2B)^2-4B^2=E-4B=\begin{pmatrix}5 & 8\\ -4 & 1\end{pmatrix}$

$4B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 8\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -8\\ 4 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

㉠에서 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

따라서 $AB=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 3 & 4\end{pmatrix}$이므로 행렬 AB의 모든 성분의 합은

$1+(-6)+3+4=2$

13 답 −1

$A_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 6 & 5\end{pmatrix}$에서

$A_2=A_1\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & -6\end{pmatrix}$,

$A_3=A_2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -6 & -5\end{pmatrix}$,

$A_4=A_3\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -6 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -5 & 6\end{pmatrix}$,

$A_5=A_4\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 6 & 5\end{pmatrix}=A_1$

이므로 $A_n=A_{n+4}$ (단, n은 자연수)

$\therefore A_{30}=A_2$

$B_1=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$에서

$B_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}B_1=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$,

$B_3=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}B_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & -3\end{pmatrix}$,

$B_4=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}B_3=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\end{pmatrix}$,

$B_5=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}B_4=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}=B_1$

이므로 $B_n=B_{n+4}$ (단, n은 자연수)

$\therefore B_{60}=B_4$

따라서

$A_{30}+B_{60}=A_2+B_4=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & -6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 7 & -10\end{pmatrix}$

이므로 행렬 $A_{30}+B_{60}$의 모든 성분의 합은

$0+2+7+(-10)=-1$

14 답 ①

$A+B=E$에서 $A=E-B$

$(E-A)(E-B)=E$에 $E-B=A$를 대입하여 정리하면

$(E-A)(E-B)=(E-A)A=-A^2+A=E$

이때 $A^2-A+E=O$이고 양변의 왼쪽에 행렬 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=O$

따라서 $A^3+E=O$이므로 $A^3=-E$

같은 방법으로 $(E-A)(E-B)=E$에 $B=E-A$를 대입하여 정리하면 $B^3=-E$이므로

$A^6+B^6=(A^3)^2+(B^3)^2=(-E)^2+(-E)^2=E+E=2E$

따라서 A^6+B^6의 모든 성분의 합은 4이다.

다른 풀이

조건을 이용하여 행렬의 거듭제곱을 추론한다.

$(E-A)(E-B)=E-(A+B)+AB=E$이므로

$A+B=AB$이고, $A+B=E$에서 $AB=E$

$AB=E$이면 $BA=E$이므로 $AB=BA$

이때 $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB=E-2E=-E$,

$A^4+B^4=(A^2+B^2)^2-2A^2B^2=E-2E=-E$이므로

$A^6+B^6=(A^4+B^4)(A^2+B^2)-A^2B^2(A^2+B^2)$

$=(-E)^2-E(-E)=E+E=2E$

따라서 A^6+B^6의 모든 성분의 합은 4이다.

배쁍 NOTE

$AB=E$이면 $BA=E$이다.

[증명]

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$라 하면 케일리-해밀턴 정리에 의해

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$A^2B-(a+d)AB+(ad-bc)B=O$

$\therefore A-(a+d)E+(ad-bc)B=O\ (\because AB=E)$

(i) $ad-bc=0$일 때,

$A-(a+d)E=O \quad \therefore A=(a+d)E$

$AB=E$이므로 $AB=(a+d)B=E \quad \therefore BA=(a+d)B=E$

(ii) $ad-bc\neq0$일 때,

$B=\frac{1}{ad-bc}\{-A+(a+d)E\}$

$\therefore BA=\frac{1}{ad-bc}\{-A^2+(a+d)A\}=\frac{1}{ad-bc}\{(ad-bc)E\}=E$

15 답 5

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$라 하자.

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b\\ c+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

이므로 $a+2b=1,\ c+2d=1$ …… ㉠ …… 배점 20%

$A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$에서

$A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\ c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$

이므로 $a+b=-2,\ c+d=-3$ …… ㉡ …… 배점 20%

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5,\ b=3,\ c=-7,\ d=4$

이므로 $A=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -7 & 4\end{pmatrix}$ …… 배점 20%

이때 $A^2=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -7 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -7 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 7 & -5\end{pmatrix}$이고,

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 7 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -7 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

이므로 $A^5=A^3A^2=EA^2=A^2$ …… 배점 20%

$A^5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 7 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad \therefore p=1,\ q=2$

따라서 $p^2+q^2=1+4=5$ …… 배점 20%

16 답 7

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이고,

ω는 이 방정식의 한 허근이므로 $\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$A=\begin{pmatrix}1 & \omega\\ \omega & \omega^2\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}1 & \omega\\ \omega & \omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \omega\\ \omega & \omega^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\omega^2 & \omega+\omega^3\\ \omega+\omega^3 & \omega^2+\omega^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\omega & \omega+1\\ \omega+1 & -1\end{pmatrix}$,

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-\omega & \omega+1\\ \omega+1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \omega\\ \omega & \omega^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega^2 & \omega^3\\ 1 & \omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\omega-1 & 1\\ 1 & \omega\end{pmatrix}$,

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}-\omega-1 & 1\\ 1 & \omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \omega\\ \omega & \omega^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -\omega\\ 1+\omega^2 & \omega+\omega^3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & -\omega\\ -\omega & -\omega^2\end{pmatrix}=-A$

이므로 $A^7=A^4A^3=(-A)A^3=-A^4=-(-A)=A$

따라서 $A^k=A$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 7이다.

idea

17 답 ㄴ, ㄷ

$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -4\\ -16 & 8\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=4\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}=4^2\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$

⋮

$A^n=4^{n-1}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$ (단, n은 자연수)

이므로 $D(A^n)=|4^{n-1}(2-1-4+2)|=4^{n-1}$

ㄱ. $D(A^m)>2000$에서 $4^{m-1}>2000$ …… ㉠

이때 $4^5=(2^2)^5=2^{10}=1024,\ 4^6=(2^2)^6=2^{12}=4096$이므로

$m-1\geq6 \quad \therefore m\geq7$

따라서 ㉠을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은 7이다.

ㄴ. $D(A^m)\times D(A^n)=4^{m-1}\times4^{n-1}=4^{m+n-2}$

$=4^{(m+n-1)-1}=D(A^{m+n-1})$

ㄷ. $D(A^m)\div D(A^n)=4^{m-1}\div4^{n-1}$

$=4^{(m-1)-(n-1)}\ (\because m-1>n-1)$

$=4^{m-n}=4^{(m-n+1)-1}=D(A^{m-n+1})$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

18 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. [반례] $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$이면

$AB=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O$이다.

즉, $AB=O$이고 $A\neq O$이지만 $B\neq O$이다.

ㄴ. $(ABA)^2=(ABA)(ABA)=ABA^2BA$

$=ABEBA=AB^2A=ABA$

ㄷ. $A^2=AA=(AB)A=A(BA)=AB=A$

$B^2=BB=(BA)B=B(AB)=BA=B$

따라서 $A^2+B^2=A+B$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

19 답 ③

ㄱ. $AB-B^2=E$에서 $(AB-B^2)B=EB$

즉, $AB^2-B^3=B$이므로 $AB^2=B^3+B=E$

ㄴ. $AB-B^2=(A-B)B=E$이므로

$B(A-B)=BA-B^2=E$

즉, $AB-B^2=BA-B^2$에서 $AB=BA$

ㄷ. $AB-B^2=E,\ B^3+B=E$에서

$AB-B^2=B^3+B$

즉, $(A-B)B=(B^2+E)B$ …… ㉠

ㄴ에서 $B(A-B)=E$이므로

㉠의 양변의 오른쪽에 행렬 $A-B$를 곱하면

$(A-B)B(A-B)=(B^2+E)B(A-B)$에서

$(A-B)E=(B^2+E)E$

따라서 $A-B=B^2+E$이므로 $A-B^2=B+E$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

참고 $AB=E$이면 $BA=E$이다.

20 답 ⑤

$A^2=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}$

ㄱ. $A^2=O$에서 $\begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$a^2-b^2=0$, $2ab=0$에서 $a=b=0$이다. $\therefore A=O$

ㄴ. $A^2+E=O$에서 $A^2=-E$

$\begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$a^2-b^2=-1$, $2ab=0$에서

$a=0$, $b=-1$ 또는 $a=0$, $b=1$

따라서 조건을 만족시키는 행렬 A는

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$으로 2개이다.

ㄷ. $A^2-A=O$에서 $A^2=A$

즉, $\begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$이므로

$a^2-b^2=a$, $2ab=b$

$b=0$이면 $a^2=a$에서 $a=0$ 또는 $a=1$

$b\neq0$이면 $a=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{4}-b^2=\frac{1}{2}$에서 $b^2=-\frac{1}{4}$을 만족시키는 실수 b는 존재하지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 행렬 A는

$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$로 2개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21 답 ①

케일리-해밀턴 정리에 의해 $A^2-A+E=O$이고,

이 식의 양변에 A를 곱하면 $A^3-A^2+A=O$이므로

$$\begin{aligned} A^3-5A^2+4A+3E&=(A^3-A^2+A)-4A^2+3A+3E \\ &=O-4(A-E)+3A+3E \\ &=-A+7E \end{aligned}$$

따라서 $-A+7E=xA+yE$이므로 $x=-1$, $y=7$

$\therefore \frac{y}{x}=-7$

22 답 6

(i) $A=kE$ (단, k는 실수)일 때,

$A^2-5A+3E=O$에서

$(kE)^2-5(kE)+3E=(k^2-5k+3)E=O$

이므로 $k^2-5k+3=0$

즉, $k=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$이 되어 A의 성분은 정수가 아니다. ····· 배점 20%

(ii) $A\neq kE$ (단, k는 실수)일 때,

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 케일리-해밀턴 정리에 의해

$a+d=5$, $ad-bc=3$ ····· 배점 20%

$a+d=5$ (단, a, d는 음이 아닌 정수)를 만족시키는 순서쌍 (a, d)는 $(0, 5)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(5, 0)$이다.

ⓘ (a, d)가 $(0, 5)$, $(5, 0)$일 때,

$ad=0$이므로 $bc=-3$

이때 b, c는 모두 음이 아닌 정수이므로 $bc=-3$을 만족시키는 b, c는 없다. ····· 배점 20%

ⓘⓘ (a, d)가 $(1, 4)$, $(4, 1)$일 때,

$ad=4$가 되어 $bc=1$이므로 $b=1$, $c=1$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ····· 배점 20%

ⓘⓘⓘ (a, d)가 $(2, 3)$, $(3, 2)$일 때,

$ad=6$이 되어 $bc=3$이므로 $b=1$, $c=3$ 또는 $b=3$, $c=1$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 이차정사각행렬 A의 개수는 6이다.

····· 배점 20%

23 답 −1, 2

(i) $A=kE$ (단, k는 실수)일 때,

$A^3=(kE)^3=k^3E$이므로 $k^3E=E$에서 $k^3=1$

$(k-1)(k^2+k+1)=0$이고, k는 실수이므로 $k=1$

따라서 $A=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로 $a+d=1+1=2$

(ii) $A\neq kE$ (단, k는 실수)일 때,

케일리-해밀턴 정리에 의해

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

$A^2=(a+d)A-(ad-bc)E$이므로

$$\begin{aligned} A^3&=(a+d)A^2-(ad-bc)A \\ &=(a+d)\{(a+d)A-(ad-bc)E\}-(ad-bc)A \\ &=\{(a+d)^2-(ad-bc)\}A-(a+d)(ad-bc)E \end{aligned}$$

이때 $A^3=E$이므로

$\{(a+d)^2-(ad-bc)\}A-(a+d)(ad-bc)E=E$에서

$\{(a+d)^2-(ad-bc)\}A=\{(a+d)(ad-bc)+1\}E$ ····· ㉠

$(a+d)^2-(ad-bc)\neq0$이면

㉠에서 $A=\frac{(a+d)(ad-bc)+1}{(a+d)^2-(ad-bc)}E$가 되어 $A\neq kE$에 모순이다.

따라서 $(a+d)^2-(ad-bc)=0$이므로

㉠에서 $(a+d)(ad-bc)+1=0$

즉, $(a+d)^2=ad-bc$이고 $(a+d)(ad-bc)+1=0$이므로

$(a+d)^3+1=0$이 되어 $a+d=-1$

(i), (ii)에서 $a+d$의 값은 -1, 2이다.

24 답 ⑤

그릇 A에 들어 있는 물의 양의 $\frac{1}{2}$을 그릇 B에 부은 후, 두 그릇 A, B에 들어 있는 물의 양은 각각 $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a+b$이다.

그릇 B에 들어 있는 물의 양의 $\frac{1}{3}$을 그릇 A에 부은 후, 두 그릇 A, B에 들어 있는 물의 양은 각각 $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a+b\right)$, $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}a+b\right)$이다.

이 과정을 시행한 후 두 그릇 A, B에 들어 있는 물의 양이 각각 200(mL), 300(mL)이므로

$\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a+b\right)=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b=200$, $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}a+b\right)=\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b=300$

이고, 이를 행렬을 이용하여 나타내면

$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$ ····· ㉠

㉠의 양변의 왼쪽에 행렬 $\begin{pmatrix} s & t \\ t & s \end{pmatrix}$를 곱하면

$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}s & t\\ t & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s & t\\ t & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200\\ 300\end{pmatrix}$에서

$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}s & t\\ t & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2s+t & s+2t\\ s+2t & 2s+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

이어야 하므로 $2s+t=3$, $s+2t=0$

두 식을 연립하여 풀면 $s=2$, $t=-1$이므로

$10s+t=20+(-1)=19$

25 답 6일

11월 1일에 처음 설정한 출입문 번호가 1 1 4 7이므로

11월 2일 출입문 번호는 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 6 & 9\end{pmatrix}$에서

1 1 6 9

11월 3일 출입문 번호는 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 6 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 8 & 11\end{pmatrix}$에서

1 1 8 1

11월 4일 출입문 번호는 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 8 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 10 & 3\end{pmatrix}$에서

1 1 0 3

11월 5일 출입문 번호는 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}$에서

1 1 2 5

11월 6일 출입문 번호는 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 7\end{pmatrix}$에서

1 1 4 7

이때 이 회사의 출입문 번호는 5일 간격으로 반복된다.

따라서 출입문 번호가 1 1 2 5인 날은 11월 5일부터 5일마다 반복되므로 구하는 날은 5일, 10일, 15일, 20일, 25일, 30일로 총 6일이다.

26 답 ③

A 학과 일반 전형의 지원자 수는 40×6.3

B 학과 일반 전형의 지원자 수는 50×12.1

A 학과 특별 전형의 지원자 수는 20×10.2

B 학과 특별 전형의 지원자 수는 30×11.3

A, B 두 학과의 특별 전형 지원자 수의 합은

$m=20\times10.2+30\times11.3$

A 학과의 일반 전형과 특별 전형 지원자 수의 합은

$n=40\times6.3+20\times10.2$

한편 두 행렬 $P=\begin{pmatrix}40 & 50\\ 20 & 30\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}6.3 & 10.2\\ 12.1 & 11.3\end{pmatrix}$에 대하여

$$PQ=\begin{pmatrix}40 & 50\\ 20 & 30\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6.3 & 10.2\\ 12.1 & 11.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\times6.3+50\times12.1 & 40\times10.2+50\times11.3\\ 20\times6.3+30\times12.1 & 20\times10.2+30\times11.3\end{pmatrix}$$

$$QP=\begin{pmatrix}6.3 & 10.2\\ 12.1 & 11.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}40 & 50\\ 20 & 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\times6.3+20\times10.2 & 50\times6.3+30\times10.2\\ 40\times12.1+20\times11.3 & 50\times12.1+30\times11.3\end{pmatrix}$$

이므로 m은 행렬 PQ의 (2, 2) 성분과 같고, n은 행렬 QP의 (1, 1) 성분과 같다.

따라서 $m+n$의 값은 행렬 PQ의 (2, 2) 성분과 행렬 QP의 (1, 1) 성분의 합과 같다.

STEP 3 최고난도 문제 | 116~117쪽

01 257 02 4, 4 03 2 04 ③ 05 897 06 127

07 26 08 ㄱ, ㄴ, ㄷ

01 답 257

1단계 k의 조건에 따른 행렬 B의 성분 구하기

(i) $k=1$인 경우

$i-j=-1$인 (i, j)는 $(1, 2)$이므로 $b_{12}=a_{12}$이고,

다른 (i, j)에 대하여 $b_{ij}=0$ $\therefore B_1=\begin{pmatrix}0 & a_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(ii) $k=2$인 경우

$i=j$일 때, $b_{ij}=a_{ij}$이고 $i\neq j$일 때, $b_{ij}=0$이므로 $B_2=\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}$

(iii) $k=3$인 경우

$i-j=1$인 (i, j)는 $(2, 1)$이므로 $b_{21}=a_{21}$이고,

다른 (i, j)에 대하여 $b_{ij}=0$ $\therefore B_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ a_{21} & 0\end{pmatrix}$

(iv) $k=4$인 경우

$i=1, 2$, $j=1, 2$인 모든 i, j에 대하여 $i-j\neq2$이므로 $b_{ij}=0$

$\therefore B_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

2단계 조건을 만족시키는 행렬 A, B 구하기

$$B_1+B_2+B_3+B_4=\begin{pmatrix}0 & a_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ a_{21} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=A$$

이므로 $A-2(B_1+B_2+B_3+B_4)=A-2A=-A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B_1=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

$B_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

3단계 행렬 $B_1^8+B_2^8+B_3^8+B_4^8$의 모든 성분의 합 구하기

이때 $B_1=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$에서 $B_1^2=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

이므로 $B_1^8=B_1^6B_1^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$B_2=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에서 $B_2^2=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2)^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

$B_2^3=B_2^2B_2=\begin{pmatrix}(-2)^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2)^3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, ...,

$B_2^8=\begin{pmatrix}(-2)^8 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}256 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$B_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$에서 $B_3^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$이므로

$B_3^8=B_3^6B_3^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$B_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$에서 $B_4^8=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

따라서 $B_1^8+B_2^8+B_3^8+B_4^8=\begin{pmatrix}256 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은

$256+0+0+1=257$

02 답 4, 4

1단계 조건을 만족시키는 행렬 A, B의 관계 찾기

㈎에서 $A+B=2E$이므로

$A(A+B)=A(2E)$, 즉 $A^2+AB=2A$

$(A+B)A=(2E)A$, 즉 $A^2+BA=2A$

따라서 $A^2+AB=A^2+BA$이므로 $AB=BA$ …… ㉠

㈏에서 $(A-B)^2=A^2+B^2$이고,

$(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2$이므로

$A^2-AB-BA+B^2=A^2+B^2$에서 $AB+BA=O$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2AB=2BA=O$이므로 $AB=BA=O$

㈎에서 $B=2E-A$이고, $AB=O$이므로 $A(2E-A)=O$

즉, $2A-A^2=O$이므로 $A^2=2A$ …… ㉢

㈐에서 $kA+2B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 7\end{pmatrix}$이고, $B=2E-A$를 대입하여 정리하면

$kA+2(2E-A)=(k-2)A+4E=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 7\end{pmatrix}$에서

$(k-2)A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ …… ㉣

㉣이 성립하기 위해서는 $k\neq2$이고, ㉣의 양변을 제곱하면

$(k-2)^2A^2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 12\\ 4 & 12\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}=4(k-2)A$

이므로 ㉢에서 $(k-2)^2(2A)=4(k-2)A$

$\therefore\ (k-2)^2A=2(k-2)A$

2단계 실수 k의 값과 행렬 A의 모든 성분의 합 구하기

$k-2=2$이므로 $k=4$이고,

㉣에서 $2A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$이므로

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=4$

03 답 2

1단계 조건을 만족시키는 행렬 구하기

㈏에서 $A=kE-\sqrt{3}B$이고, 이를 $A^2+B^2=E$에 대입하면

$(kE-\sqrt{3}B)^2+B^2=E$, $4B^2-2\sqrt{3}kB+k^2E=E$이므로

$\left(2B-\frac{\sqrt{3}}{2}kE\right)^2=\left(1-\frac{1}{4}k^2\right)E$ …… ㉠

이때 ㈎에서 B는 $\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ 형태의 행렬이고, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이므로

$2B-\frac{\sqrt{3}}{2}kE$ 또한 $\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ 형태의 행렬이다.

즉, $2B-\frac{\sqrt{3}}{2}kE=\begin{pmatrix}x & y\\ y & z\end{pmatrix}$ (단, x, y, z는 실수)라 할 수 있다.

한편 $1-\frac{1}{4}k^2=m$이라 하면

㉠에서 $\begin{pmatrix}x & y\\ y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ y & z\end{pmatrix}=mE$

즉, $\begin{pmatrix}x^2+y^2 & y(x+z)\\ y(x+z) & z^2+y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}$이므로

$\begin{cases}x^2+y^2=z^2+y^2=m & \cdots\cdots ㉡\\ y(x+z)=0 & \cdots\cdots ㉢\end{cases}$

2단계 조건을 만족시키는 양수 k의 값 구하기

이때 ㉡에서 $m\geq0$

$m>0$일 때, ㉢에서 $y=0$ 또는 $x+z=0$이므로

(i) $y=0$이면 ㉡에서 $x^2=m$, $z^2=m$이고 $x=\pm\sqrt{m}$, $z=\pm\sqrt{m}$이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는 1이 아니다.

(ii) $x+z=0$이면 ㉡에서 $x^2+y^2=m$을 만족시키는 x, y는 무수히 많으므로 순서쌍 (A, B)의 개수는 1이 아니다.

따라서 $m=0$이므로 $x=y=z=0$이고,

$1-\frac{1}{4}k^2=0$이므로 $k=2$ ($\because\ k>0$)

참고

$k=2$일 때, $2B-\sqrt{3}E=O$에서 $B=\frac{\sqrt{3}}{2}E$이고,

$A=2E-\sqrt{3}B$에서 $A=\frac{1}{2}E$

04 답 ③

1단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. $ABA-A^2=E$에서 $(AB-A)A=E$ …… ㉠

또 $A(BA-A)=E$이고, 양변의 왼쪽에 행렬 $AB-A$를 곱하면

$(AB-A)A(BA-A)=(AB-A)E$에서

$(AB-A)A(BA-A)=AB-A$

㉠에서 $(AB-A)A=E$이므로 $E(BA-A)=AB-A$

즉, $BA-A=AB-A$이므로 $AB=BA$

2단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. $AB+B=A$에서 $AB-A=-B$이고, ㉠에서 $-BA=E$

즉, $BA=-E$이므로 ㄱ에 의해 $AB=BA=-E$

이때 $ABA-A^2=E$에서 $-EA-A^2=E$이므로

$A^2+A+E=O$이고, 양변의 왼쪽에 행렬 $A-E$를 곱하면

$(A-E)(A^2+A+E)=O$에서 $A^3=E$

$B^3=EB^3=A^3B^3=(AB)^3=(-E)^3=-E$이므로

$A^3+B^3=E+(-E)=O$

3단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. $AB+B=A$이고 $AB=-E$이므로 $B=A+E$

$(B+E)^2=(A+2E)^2=A^2+4A+4E$

$=(-A-E)+4A+4E=3A+3E$

$=3(A+E)=-3A^2$

이므로

$(B+E)^{30}=\{(B+E)^2\}^{15}=(-3A^2)^{15}=-3^{15}A^{30}$

$=-3^{15}(A^3)^{10}=-3^{15}E^{10}=-3^{15}E$

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

05 답 897

1단계 행렬 A의 거듭제곱 구하기

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이고,

ω는 이 방정식의 한 허근이므로 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$A=\begin{pmatrix}-1 & \omega^2\\ \omega^2 & -\omega\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}-1 & \omega^2\\ \omega^2 & -\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & \omega^2\\ \omega^2 & -\omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\omega^4 & -\omega^2-\omega^3\\ -\omega^2-\omega^3 & \omega^4+\omega^2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1+\omega & -\omega^2-1\\ -\omega^2-1 & \omega+\omega^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\omega^2 & \omega\\ \omega & -1\end{pmatrix}$,

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-\omega^2 & \omega\\ \omega & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & \omega^2\\ \omega^2 & -\omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega^2+\omega^3 & -\omega^4-\omega^2\\ -\omega-\omega^2 & \omega^3+\omega\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\omega^2+1 & -\omega-\omega^2\\ -\omega-\omega^2 & 1+\omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\omega & 1\\ 1 & -\omega^2\end{pmatrix}$,

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}-\omega & 1\\ 1 & -\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & \omega^2\\ \omega^2 & -\omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega+\omega^2 & -\omega^3-\omega\\ -1-\omega^4 & \omega^2+\omega^3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\omega+\omega^2 & -1-\omega\\ -1-\omega & \omega^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & \omega^2\\ \omega^2 & -\omega\end{pmatrix}=A$

$\therefore A^{n+3}=A^n$ (단, n은 자연수)

2단계 행렬 A의 거듭제곱과 영행렬의 관계 구하기

$A+A^2+A^3=\begin{pmatrix}-1 & \omega^2\\ \omega^2 & -\omega\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\omega^2 & \omega\\ \omega & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\omega & 1\\ 1 & -\omega^2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1-\omega^2-\omega & \omega^2+\omega+1\\ \omega^2+\omega+1 & -\omega-1-\omega^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O$

3단계 $M-m$의 값 구하기

따라서 $n=3k$ (단, k는 자연수)일 때,

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{3k}$

$=(A+A^2+A^3)+(A^4+A^5+A^6)+\cdots+(A^{3k-2}+A^{3k-1}+A^{3k})$

$=(A+A^2+A^3)+(A+A^2+A^3)+\cdots+(A+A^2+A^3)$

$=O+O+\cdots+O=O$

이므로 세 자리의 자연수 n의 최댓값은 999, 최솟값은 102이다.

$\therefore M-m=999-102=897$

06 답 127

1단계 케일리-해밀턴 정리를 이용하여 관계 구하기

케일리-해밀턴 정리에 의해 $A^2-3A+2E=O$

2단계 $A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$(단, $n=1, 2, 3, \ldots, 6$)의 값 구하기

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

이때 $A^2=3A-2E$이므로

$A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=3A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-2E\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$,

$A^3=3A^2-2A=3(3A-2E)-2A=7A-6E$이므로

$A^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=7A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-6E\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\14\end{pmatrix}$,

$A^4=7A^2-6A=7(3A-2E)-6A=15A-14E$이므로

$A^4\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=15A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-14E\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=15\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}-14\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14\\30\end{pmatrix}$,

$A^5=15A^2-14A=15(3A-2E)-14A=31A-30E$이므로

$A^5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=31A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-30E\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=31\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}-30\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-30\\62\end{pmatrix}$,

$A^6=31A^2-30A=31(3A-2E)-30A=63A-62E$이므로

$A^6\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=63A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-62E\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=63\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}-62\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-62\\126\end{pmatrix}$

3단계 모든 성분의 합 구하기

따라서

$A^6\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+A^5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\cdots+A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+E\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-62\\126\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-30\\62\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-14\\30\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\14\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-113\\240\end{pmatrix}$

이므로 모든 성분의 합은 $-113+240=127$

다른 풀이

케일리-해밀턴 정리에 의해 $A^2-3A+2E=O$

한편 다항식 $x^6+x^5+\cdots+x+1$을 이차식 x^2-3x+2로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (단, a, b는 상수)라 하면

$x^6+x^5+\cdots+x+1=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$

$=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=1$을 대입하면

$7=a+b$ ····· ㉠

$x=2$를 대입하면

$2^6+2^5+\cdots+2+1=2a+b$

$\therefore 127=2a+b$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=120$, $b=-113$이므로

$x^6+x^5+\cdots+x+1$을 x^2-3x+2로 나눈 나머지는 $120x-113$

이를 이용하면

$A^6+A^5+\cdots+A+E=(A^2-3A+2E)Q(A)+120A-113E$

이므로

$A^6+A^5+\cdots+A+E=120A-113E$

$=120\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-113\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-113 & -120\\ 240 & 247\end{pmatrix}$

따라서

$A^6\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+A^5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\cdots+A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+E\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-113 & -120\\ 240 & 247\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-113\\240\end{pmatrix}$

이므로 모든 성분의 합은 $-113+240=127$

07 답 26

1단계 행렬 A, B와 단위행렬 사이의 관계 구하기

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$,

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

이므로 자연수 k에 대하여 $A^{3k}=E$

$B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -7 & 2\end{pmatrix}$에서

$B^2=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -7 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -7 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 7 & -3\end{pmatrix}$,

$B^3=B^2B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -7 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

이므로 자연수 k에 대하여 $B^{3k}=E$

2단계 조건을 만족시키는 행렬 C_n 구하기

따라서 자연수 k에 대하여

$C_{3k-2}=B(A^{3k-2}+B^{3k-2})A=(BA^{3k-2}+B^{3k-1})A$

$=BA^{3k-1}+B^{3k-1}A=BA^2+B^2A$

$=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -7 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1\\ 7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 8 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 6 & -6\end{pmatrix}$

$C_{3k-1}=B(A^{3k-1}+B^{3k-1})A$

$=(BA^{3k-1}+B^{3k})A$

$=BA^{3k}+B^{3k}A$

$=BE+EA$

$=A+B$

$=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -7 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -4 & 0\end{pmatrix}$

$C_{3k}=B(A^{3k}+B^{3k})A$

$=B(E+E)A$

$=2BA$

$=2\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -7 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

$=2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 6\end{pmatrix}$

이고,

$C_{3k-2}+C_{3k-1}+C_{3k}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 6 & -6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -4 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

이므로

(i) $C_1+C_2+C_3+\cdots+C_{3k-2}$

$=(C_1+C_2+C_3)+(C_4+C_5+C_6)+\cdots+C_{3k-2}$

$=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 6 & -6\end{pmatrix}$

(ii) $C_1+C_2+C_3+\cdots+C_{3k-1}$

$=(C_1+C_2+C_3)+(C_4+C_5+C_6)+\cdots+C_{3k-2}+C_{3k-1}$

$=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 6 & -6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -4 & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & -6\end{pmatrix}$

(iii) $C_1+C_2+C_3+\cdots+C_{3k}$

$=(C_1+C_2+C_3)+(C_4+C_5+C_6)+\cdots+(C_{3k-2}+C_{3k-1}+C_{3k})$

$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

3단계 $M+m$의 값 구하기

(i)에서 $|x+y+z+w|=|2-2+6-6|=0$,

(ii)에서 $|x+y+z+w|=|0-2+2-6|=6$,

(iii)에서 $|x+y+z+w|=0$이므로

$|x+y+z+w|$의 최댓값은 6

(ii)에서 $n=3k-1$ (즉, $n=2, 5, 8, \ldots, 29$)인 경우와

(iii)에서 $n=3k$ (즉, $n=3, 6, 9, \ldots, 30$)인 경우, $x=0$이므로 n의 개수는 20이다.

따라서 $M=6$, $m=20$이므로 $M+m=26$

08 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

1단계 행렬 P, Q와 단위행렬 사이의 관계 구하기

$P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$에서

$PQ=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$이므로

$(PQ)^2=(PQ)(PQ)=(-E)(-E)=E^2=E$

즉, 자연수 n에 대하여

$(PQ)=(PQ)^3=(PQ)^5=\cdots=(PQ)^{2n-1}=-E$,

$(PQ)^2=(PQ)^4=(PQ)^6=\cdots=(PQ)^{2n}=E$

따라서 서로 다른 자연수 m, n에 대하여

2단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. $I_{(2m,\ 2m)}=APQPQ\cdots PQ$ (단, P, Q는 각각 $2m$개)

$=A(PQ)^{2m}$

$=AE$

$=A$

$I_{(2n,\ 2n)}=APQPQ\cdots PQ$ (단, P, Q는 각각 $2n$개)

$=A(PQ)^{2n}$

$=AE$

$=A$

$\therefore I_{(2m,\ 2m)}=I_{(2n,\ 2n)}$

3단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. $I_{(2m,\ 2m)}=A$이고,

$I_{(2n+1,\ 2n+1)}=APQPQ\cdots PQ$ (단, P, Q는 각각 $(2n+1)$개)

$=A(PQ)^{2n+1}$

$=A(-E)$

$=-A$

이므로 $I_{(2m,\ 2m)}+I_{(2n+1,\ 2n+1)}=A+(-A)=O$

4단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. $I_{(2m+1,\ 2m)}=I_{(2m,\ 2m)}\times P=AP$,

$I_{(2n+2,\ 2n+1)}=I_{(2n+1,\ 2n+1)}\times P=(-A)P=-AP$

이므로 $I_{(2m+1,\ 2m)}+I_{(2n+2,\ 2n+1)}=AP+(-AP)=O$

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

기출 변형 문제로 단원 마스터 | 118~119쪽

01 4 02 ① 03 ③ 04 ④

01 답 4

$a_{ij}+a_{ji}=\frac{2}{3}$에서 $a_{ij}=-a_{ji}+\frac{2}{3}$이므로

$a_{11}=\frac{1}{3}$, $a_{12}=-a_{21}+\frac{2}{3}$, $a_{22}=\frac{1}{3}$

$\therefore A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & a_{12}\\ -a_{12}+\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$b_{ij}-b_{ji}=0$에서 $b_{ij}=b_{ji}$이므로 $b_{21}=b_{12}$

$\therefore B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{12} & b_{22}\end{pmatrix}$

이때 $3A-2B=3\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & a_{12}\\ -a_{12}+\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{12} & b_{22}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1-2b_{11} & 3a_{12}-2b_{12}\\ -3a_{12}-2b_{12}+2 & 1-2b_{22}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 8\\ -2 & 5\end{pmatrix}$

이므로 $1-2b_{11}=1$에서 $b_{11}=0$, $1-2b_{22}=5$에서 $b_{22}=-2$

$3a_{12}-2b_{12}=8$, $-3a_{12}-2b_{12}+2=-2$이고,

두 식을 연립하여 풀면

$a_{12}=2$, $b_{12}=-1$

$\therefore A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$3A=3\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$이고,

$B^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$이므로

$3A-B^2=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $3A-B^2$의 $(1, 2)$ 성분은 4이다.

02 답 ①

A가 $A^2=4E$를 만족시키므로

$A^2=\begin{pmatrix} (a+8)^2+bc & 3b\times(a+4) \\ 3c\times(a+4) & (2a+4)^2+bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

따라서 $b\times(a+4)=c\times(a+4)=0$

(i) $a\neq\boxed{-4}$인 경우

$b=0$이고 $c=0$이므로

$A^2=\begin{pmatrix} (a+8)^2 & 0 \\ 0 & (2a+4)^2 \end{pmatrix}$ …… ㉠

이다.

㉠에서 $A^2\neq4E$이므로 주어진 조건에 모순이다.

(ii) $a=\boxed{-4}$인 경우

주어진 조건 $A^2=4E$에서 $bc=\boxed{-12}$이다.

b, c가 정수이므로 $bc=\boxed{-12}$를 만족시키는 순서쌍 (b, c)는

$(-1, 12)$, $(-2, 6)$, $(-3, 4)$, $(-4, 3)$, $(-6, 2)$, $(-12, 1)$,

$(1, -12)$, $(2, -6)$, $(3, -4)$, $(4, -3)$, $(6, -2)$, $(12, -1)$로

그 개수는 $\boxed{12}$이다.

따라서 $A^2=4E$를 만족시키는 행렬 A의 개수는 $\boxed{12}$이다.

그러므로 $p=-4$, $q=-12$, $r=12$에서

$p+q+r=-4$

03 답 ③

그릇 A에 들어 있는 물의 양의 $\frac{2}{3}$를 그릇 B에 부은 후, 두 그릇 A, B에 들어 있는 물의 양은 각각 $\frac{1}{3}a$, $\frac{2}{3}a+b$이다.

그릇 B에 들어 있는 물의 양의 $\frac{3}{4}$을 그릇 A에 부은 후, 두 그릇 A, B에 들어 있는 물의 양은 각각 $\frac{1}{3}a+\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}a+b\right)$, $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}a+b\right)$이다.

이 과정을 시행한 후 두 그릇 A, B에 들어 있는 물의 양이 각각 400(mL), 100(mL)이므로

$\frac{1}{3}a+\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}a+b\right)=\frac{5}{6}a+\frac{3}{4}b=400$,

$\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}a+b\right)=\frac{1}{6}a+\frac{1}{4}b=100$

이고, 이를 행렬을 이용하여 나타내면

$\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 400 \\ 100 \end{pmatrix}$ …… ㉠

㉠의 양변의 왼쪽에 행렬 $\begin{pmatrix} s & t-19 \\ s-5 & t \end{pmatrix}$를 곱하면

$\frac{1}{12}\begin{pmatrix} s & t-19 \\ s-5 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s & t-19 \\ s-5 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 400 \\ 100 \end{pmatrix}$에서

$\frac{1}{12}\begin{pmatrix} s & t-19 \\ s-5 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 10s+2t-38 & 9s+3t-57 \\ 10s+2t-50 & 9s+3t-45 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

이어야 하므로 $10s+2t=50$, $9s+3t=57$

즉, $5s+t=25$, $3s+t=19$

두 식을 연립하여 풀면 $s=3$, $t=10$이므로

$10s+t=30+10=40$

04 답 ④

ㄱ. $ABA-A^2=E$에서 $(AB-A)A=E$ …… ㉠

또 $A(BA-A)=E$이고,

양변의 왼쪽에 행렬 $AB-A$를 곱하면

$(AB-A)A(BA-A)=(AB-A)E$에서

$(AB-A)A(BA-A)=AB-A$이고,

㉠에서 $(AB-A)A=E$이므로

$E(BA-A)=AB-A$

즉, $BA-A=AB-A$이므로 $AB=BA$

$AB+B=A$에서 $AB-A=-B$이고,

㉠에서 $-BA=E$ $\therefore BA=-E$

따라서 $B^3A^3=(BA)^3=(-E)^3=-E$

ㄴ. $ABA-A^2=E$에서 $-EA-A^2=E$이므로

$A^2+A+E=O$이고,

양변의 왼쪽에 행렬 $A-E$를 곱하면

$(A-E)(A^2+A+E)=O$에서 $A^3=E$

$B^3=EB^3=A^3B^3=(AB)^3=(-E)^3=-E$이므로

$A^9+B^9=(A^3)^3+(B^3)^3=E^3+(-E)^3=E-E=O$

ㄷ. $AB+B=A$이고 $AB=-E$이므로 $B=A+E$

$(B-2E)^2=(A-E)^2=A^2-2A+E$

$=(-A-E)-2A+E=-3A$

이므로

$(B-2E)^{30}=\{(B-2E)^2\}^{15}=(-3A)^{15}=-3^{15}A^{15}$

$=-3^{15}(A^3)^5=-3^{15}E^5=-3^{15}E$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

MEMO